UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À
l'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À CHICOUTIMI
COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN ÉDUCATION

par
Jacynthe Bond

Étude de la relation entre la construction des opérateurs de la fraction et la construction opératoire de la notion de rapport auprès d'élèves de la première à la cinquième secondaire.

22 janvier 98

RÉSUMÉ

Cette recherche avait pour but premier de vérifier l'existence d'une relation entre la construction de l'opérateur de la fraction, telle que décrite par Kieren, et la construction de la notion de rapports, telle que décrite par Noelting. Elle voulait également vérifier l'existence d'une relation entre le niveau de réussite à un test d'opérations sur les fractions et le niveau de construction des opérateurs de Kieren ou le niveau de construction opératoire de la notion de rapport.

L'administration de trois tests à 152 élèves, de la première à la cinquième secondaire, âgés de 12 à 19 ans, a permis de recueillir des informations relatives à la construction de l'opérateur, au développement opératoire de la notion de rapport de ces sujets et à leur performance concernant les opérations arithmétiques impliquant la fraction.

L'application d'un test du X^2 sur les données a permis de mettre en évidence une relation statistiquement significative entre le développement de l'opérateur, tel que décrit par Kieren et le niveau de développement de la notion de rapport, tel qu'établi par Noelting. Elle a également permis de montrer que la construction de l'opérateur, de même que celle de la notion de rapport sont étroitement liées à la classe fréquentée par l'élève. Toutefois, statistiquement parlant, ces deux variables n'ont montré qu'une faible relation avec les résultats au test d'opérations arithmétiques impliquant la fraction.

Cette recherche contribue à enrichir la connaissance de la construction des niveaux d'opérateurs décrits par Kieren et du développement de la notion de rapport chez les élèves du secondaire tout en montrant qu'il ne semble pas exister de lien entre ces constructions et le niveau de réussite aux opérations arithmétiques appliquées à la fraction.

REMERCIEMENTS

Les résultats de cette recherche n'auraient pu voir le jour sans l'appui de nombreuses personnes. Aussi, je tiens à remercier sincèrement messieurs Guy Ouellet et Jean-Robert Poulin, professeurs à l'université du Québec à Chicoutimi, qui ont su m'aider à canaliser toutes les énergies nécessaires à la réalisation de ce projet, me prodiguer leurs judicieux conseils et me consacrer généreusement de leur temps.

Merci également à Mario, mon époux, et Sarah-Emilie, notre fille, pour la compréhension, la patience et l'affection qu'ils m'ont témoignées lors de ces années où le temps semblait une denrée rare. Merci à mes parents qui ont su me donner le goût de me dépasser, qui m'ont soutenue et encouragée, par la confiance et la fierté qu'ils ont su m'inculquer.

Enfin, j'aimerais également remercier tous les chercheurs qui contribuent à faire avancer la Science et qui sont méconnus. Leurs travaux se révèlent être pour les étudiants des sources d'inspiration et de défis à relever.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES TABLEAUX ET FIGURE

INTRODUCTION

INTRODUCTION

L'acquisition de la notion de fraction a suscité de nombreuses recherches. Ces études ont permis de révéler la complexité de cette notion, faisant intervenir de nombreux éléments qui s'imbriquent les uns dans les autres afin de construire le tissu solide de la connaissance de la fraction.

Kieren (1980), Behr, Harel, Lesh, Post (1992), puis Carpenter, Fennema et Romberg (1993) ont désigné par le terme «sous-constructions» chacune des composantes de l'édification du concept de la fraction. Essentiellement, ces sous-constructions révèlent que les fractions peuvent être considérées comme des classes équivalentes et comme une partie d'un tout, un rapport, une mesure, un élément du champ de la division, un opérateur.

Plusieurs de ces sous-constructions ont fait l'objet d'études particulières. Notamment, celles de Noelting (1980 a et b) qui ont étudié la construction opératoire de la notion de rapport, et celles de Kieren (1976 a et b; 1978; 1979) qui ont mis en évidence l'existence d'une construction hiérarchique de l'opérateur en niveaux et ce, en fonction de l'âge d'un sujet.

Kieren et Southwell (1979) suggèrent que puisque le développement de l'opérateur s'établit par niveau, en fonction de l'âge des sujets, il doit être possible d'établir un lien entre ces niveaux d'opérateur et les stades de développement de la notion de rapports décrits par Noelting.

L'objectif premier de cette étude est donc de vérifier s'il existe une relation entre l'opérateur tel que décrit par Kieren et le stade opératoire atteint par le sujet dans le développement de sa notion de rapport. De plus, elle tente d'éclairer davantage la construction de l'opérateur.

Par ailleurs, d'un point de vue pratique, cette étude veut vérifier l'existence d'une relation entre le niveau de réussite d'opérations arithmétiques sur la fraction et, d'une part, la construction des opérateurs de Kieren et, d'autre part, la construction opératoire de la notion de rapport.

La cueillette d'informations auprès d'élèves de la première à la cinquième secondaire permettra de recueillir des données utiles pour l'enseignement de la fraction au secondaire. Cela devrait permettre de favoriser un apprentissage mieux intégré de la fraction et une meilleure généralisation de la fraction aux concepts qui lui sont liés.

Le premier chapitre de ce rapport introduit la problématique et présente les objectifs qui y sont rattachés. Le deuxième chapitre fait la recension des écrits pertinents. Le troisième chapitre décrit la méthodologie de la recherche alors que le quatrième présente les résultats, leur analyse et leur interprétation.

CHAPITRE I

PROBLÉMATIQUE DE LA RECHERCHE

CHAPITRE I

PROBLÉMATIQUE DE LA RECHERCHE

1 Situation problématique de la fraction en mathématique

1.1 L'apprentissage des opérations sur les fractions

Selon Chokouhi ((1963), voir Hétu et Desjardins (1974)) les difficultés que comporte l'enseignement des fractions à l'élémentaire et les nombreux échecs constatés au secondaire ne datent pas d'hier. Bien que la notion de fraction en mathématique en soit une qui devrait être maîtrisée depuis quelques années par les élèves de l'ordre secondaire (Adi et Pulos, 1980; Lawson, 1990; Niaz, 1989; Thornton et Fuller, 1981), la pratique professionnelle, tant au secondaire qu'à l'éducation des adultes, permet de constater que ce n'est pas le cas (Behr, 1987; Hart, 1978; Karplus, Karplus, Formisano, Paulson, 1975; Kieren et Southwell, 1979; Vergnaud, 1983). Dans une revue de la littérature, Marilyn N. Suydam (1979) rapporte que la performance des élèves américains est inférieure lorsqu'il s'agit de travailler avec des fractions plutôt qu'avec des nombres entiers. Hiebert et Tonnessen (1978) soutiennent que les élèves réussissent mieux lorsqu'ils travaillent avec des quantités discrètes (ensembles - sous-ensembles d'entiers) plutôt qu'avec des quantités continues (fractions). D'ailleurs, les résultats des études réalisées par le National Assessment of Education Progress confirment également les grandes difficultés d'apprentissage et d'application du nombre rationnel éprouvées par les élèves (Carpenter, Corbitt, Kepner, Lindquist Reys, 1981).

1.2 Attitude des élèves

La plupart des élèves semblent vivre un état de panique à la seule vue des fractions (Hembree, 1990). Ils manifestent verbalement leur frustration et leur incapacité à les manipuler, même dans les opérations arithmétiques les plus simples comme l'addition et la soustraction. Ils éprouvent un état d'insécurité réel lors des évaluations (syndrome de l'évaluation) parce que potentiellement, ils peuvent avoir à manipuler des fractions lors d'examens, et sentent qu'ils partent défavorisés: inévitablement, leurs performances en souffrent (Hembree, 1990).

L'attitude même des élèves face à la fraction est problématique. Dans une recherche de Kerslake (1979), des enfants interrogés quant à leurs stratégies d'apprentissage déclarent qu'ils détestent les fractions et affirment se servir d'une variété de tactiques dans le but d'éviter l'utilisation des fractions, même dans les cas les plus simples. Ainsi, ils convertissent la fraction en un nombre décimal, ce qui la transforme en un concept plus facilement manoeuvrable à l'aide de la calculatrice (Kerslake, 1979).

Certains élèves plus âgés, à l'éducation des adultes notamment, disent clairement qu'ils ont renoncé à comprendre les opérations sur les fractions et déclarent que leur but principal est de mettre un terme à une situation dans laquelle ils se sentent mal à l'aise et sur laquelle ils semblent n'avoir aucun contrôle: «D'abord que je passe mon examen!», déclarent-ils avec dépit.

1.3 <u>Généralisation des concepts reliés à la fraction</u>

Force est de constater que l'utilisation de notions semblant pourtant bien intégrées devient impossible lorsque ces notions sont liées à des fractions (Heller, Post, Behr, Lesh, 1990). Par exemple, en algèbre, en 3ème secondaire, il est relativement facile, après quelques leçons, d'isoler une variable dans une équation. Lorsque l'on ajoute une ou des fractions dans l'équation, les élèves semblent «paralyser» et «oublier» tout ce qu'ils savaient auparavant de ces opérations, ou encore, ils trouvent fort encombrant ce nouvel élément et ne savent pas trop comment faire pour s'en débarrasser. Bien que les enseignants reviennent constamment sur les opérations de base concernant les fractions, c'est à croire qu'elles sont oubliées au fur et à mesure.

Les problèmes reliés à l'apprentissage et à l'utilisation de la fraction semblent suffisamment importants chez les élèves pour que plusieurs chercheurs (Behr, Wachsmuth, Post et Silver, 1983) décident d'y consacrer un projet d'envergure. Il s'agit du Rational-Number Project où plusieurs équipes étudient les différents aspects reliés à la fraction, notamment ceux de l'ordre et de l'équivalence.

2 Des pistes pour comprendre

2.1 A la recherche d'un cadre théorique

Au cours des dernières années plusieurs théories de l'apprentissage ont tenté d'expliquer comment s'acquièrent les connaissances. Bien que chacune ait su apporter sa contribution, aucune de ces théories n'a permis de dégager avec précision les conditions nécessaires à l'acquisition fonctionnelle et opérationnelle de la fraction et comment elles s'articulent afin de permettre la généralisation des concepts (Carpenter, Fennema, Romberg, 1993).

Intuitivement, les enfants ont une certaine compréhension de la notion de la fraction. Ils l'utilisent chaque fois qu'ils désirent ou doivent partager quelque chose. Toutefois, cette notion très superficielle devient rapidement insuffisante lorsqu'ils s'agit de la soumettre à des opérations mathématiques, même de base, comme les opérations arithmétiques (Kieren, 1980; Mack, 1990).

Plusieurs auteurs (Mack, 1990;Kamii, 1983; Noelting, 1980; Kieren, 1978; Hétu 1974), se référant à la théorie constructiviste de Piaget, affirment que le savoir logico-mathématique est construit par l'enfant, par le biais de l'abstraction réfléchissante. Cette conception fut la source de nombreuses tentatives d'explications, relatives aux échecs en mathématique. Pour Kamii (1983), l'arithmétique est quelque chose que les enfants peuvent réinventer, et non quelque chose que l'on peut leur transmettre. Si l'enfant peut penser, alors il peut construire aussi bien des nombres que des opérations arithmétiques. Si les mathématiques apparaissent si difficiles à de nombreux enfants, c'est généralement parce qu'elles sont imposées trop rapidement et sans indications adéquates pour la pensée et l'apprentissage de l'enfant. Effectivement, bien souvent, ce sont les idées des adultes que l'on tente d'enseigner aux enfants (Hétu, 1974) sans suffisamment tenir compte de leur niveau de connaissances.

2.2 Une question d'âge?

Dans le système scolaire québécois, les fractions commencent à être enseignées au deuxième cycle du primaire, surtout en sixième année. L'enseignement systématique des opérations arithmétiques liées à la fraction est complété au cours de la première année du secondaire.

D'un point de vue constructiviste, les préalables nécessaires à l'acquisition fonctionnelle de la fraction, que sont l'équivalence et la proportionnalité, se développent au cours du stade opératoire formel. Or, les recherches montrent que ce niveau opératoire, dont l'apparition est prévue pour la fin du primaire ou le début du secondaire, n'est pas l'apanage de tous les sujets de cet âge (11-12 ans). Cette capacité d'opérer sur des opérations ne semble pas se rencontrer communément chez les sujets observés. Harrison, Brindley et Bye (1989), dans une recherche faite auprès de jeunes de 12 ans, ont pu évaluer que plus de la moitié (58%) des élèves de son étude répondaient aux critères du stade concret, environ le tiers (38%), à un stade transitoire vers le stade formel et seulement 6% avaient un profil correspondant au stade formel. Les résultats de leur recherche montrent qu'il existe un lien significatif entre le développement des habiletés sur la fraction et celles sur le rapport, lorsqu'elles sont enseignées façon concrète aux élèves du niveau transitoire. Pour les autres stades, aucune corrélation n'a pu être établie.

Lamon (1993) a montré que des élèves de 6ème année affichent une meilleure performance concernant les fractions, si elles leurs sont présentées sous forme concrète. Herman (1983) note que de nombreux élèves du secondaire ne sont pas capables de travailler avec des propositions verbales et nécessitent une approche plus concrète que celle qui prévaut généralement à ce niveau.

D'autres études démontrent que plusieurs enfants n'utilisent pas leur pensée formelle pour les mathématiques mais se servent plutôt de leurs propres méthodes informelles (Herman, 1983; Lamon,1993; Lawton, 1993; Mack,1990). Dans le cas des fractions, les enfants semblent relier ces dernières à des méthodes de «par coeur» provenant d'apprentissages antérieurs. Les enseignants le constatent lorsqu'ils sont confrontés aux problèmes qui s'en suivent quand des élèves appliquent, de façon inadéquate, des règles à demi-mémorisées (Kerslake, 1979). Ces informations pourraient expliquer sommairement pourquoi de nombreux problèmes relatifs aux mathématiques du secondaire se rapportent aux nombres rationnels (Roseman, 1985).

Behr, Lesh, Post et Silver (1983) émettent plusieurs hypothèses relativement à ce phénomène: d'une part, la plus grande partie du développement apparaît lors d'une période significative de réorganisation cognitive qui marque une transition entre le stade opératoire concret et le stade opératoire formel; d'autre part, le concept de nombre rationnel implique un riche ensemble de sous-constructions et processus, reliés à un large éventail de concepts élémentaires (mesure, probabilité, systèmes de coordination, etc.).

Ainsi, Hétu (1974) constate qu'en voulant précipiter l'apprentissage de la fraction, il faut faire l'économie de l'un des aspects essentiels de la fraction, à savoir la relation d'équivalence. La pédagogie peut ainsi introduire tôt dans le programme, le symbolisme propre à traiter les égalités de fractions et développer ainsi le système total des techniques de calcul qui en découle.

2.3 Une question de stratégie d'enseignement?

Les modèles utilisés en enseignement pour représenter la fraction pourrait peuvent être des sources d'échec à la généralisation du concept de la fraction. Coxford et Ellerbruch (1975), tout comme Kerslake (1979) ont noté que le modèle initial de la fraction des élèves qui fréquentent l'école est celui d'une partie d'un tout. La recherche de Kerslake (1979), réalisée avec des élèves du secondaire, démontre clairement que les modèles qui représentent des relations parties versus groupes et les modèles présentant des rapports sont rejetés par ces élèves parce qu'il n'y a pas de formes entières à diviser.

Aussi tous ces auteurs hésitent à utiliser le modèle «partie d'un tout» pour l'enseignement car, en plus de conduire à de mauvaises interprétations lors des opérations sur les fractions, il peut inhiber le développement d'autres interprétations essentielles à une acquisition complète de la fraction. Lesh et Landau (1983) de même que Wearne-Hiebert et Hiebert (1983) affirment qu'il existe une grande confusion chez les sujets de leurs études qui confondent les concepts exprimant la fraction comme une partie d'un tout avec les concepts qui désignent les parties qui existent dans un rapport.

A quelques exceptions près (par exemples, ½, ¼), les fractions ne font pas partie de l'environnement de l'enfant (Kieren, 1980). Les opérations sur les fractions sont abstraitement définies, et non basées sur l'activité naturelle de l'enfant Kerslake, 1979). Ce fait entraîne un manque de signification de la notion de fraction (Mack, 1990; Wearne-Hiebert et Hiebert, 1983) ce qui constitue un problème majeur pour la réussite des opérations sur la fraction.

2.4 Un modèle plus complexe qu'il n'y paraît de la fraction

Dès 1976, Wagner a développé une conception de la fraction qu'il décrit comme un «mégaconcept» que l'on peut subdiviser en sous-concepts. Cependant, ces sous-concepts ne s'acquièrent pas de façon séquentielle dans la vie de tous les jours. Aussi, le développement du concept de la fraction peut-il être comparé à un ensemble de fibres de sous-concepts qui deviennent progressivement de plus en plus entrelacées. Les sous-concepts s'influencent mutuellement pour permettre une meilleure compréhension globale de la fraction. De plus, les fibres provenant d'autres concepts (mathématique ou autres) pourraient s'y entremêler, contribuant à la compréhension ou à la déduction de nouvelles compréhensions. Ce développement est compris comme un processus graduel de construction interne. Le point culminant, qui implique la compréhension du caractère isomorphe de tous les modèles de la fraction, est le concept du système des nombres rationnels.

D'autres auteurs (Kieren, 1976; Novillis, 1976) s'engagent dans cette voie et y trouvent l'explication de l'immense tâche d'apprentissage que représente la compréhension des fractions. Ces interprétations multiples font référence à des sous-constructions multiples: une partie comparée à son tout, une représentation décimale, une mesure, un rapport, une division, un opérateur et une mesure de quantités continues ou discontinues. Chacune de ces sous-constructions sous-tend elle-même des sous-concepts nécessaires à la compréhension du nombre rationnel. Toutefois, Behr, Harel, Post, Lesh (1992) considèrent qu'il n'est pas suffisant d'avoir ces connaissances, encore faut-il comprendre la manière dont elles sont liées entre elles.

Kieren (1976) suggère que différentes structures cognitives peuvent être nécessaires pour maîtriser les différentes sous-constructions de la fraction. Bien qu'il note qu'un enfant puisse acquérir, à travers l'expérience quotidienne, certaines notions fractionnaires, comme les parties d'un tout, il souligne qu'acquérir une conceptualisation du nombre rationnel requiert une application sophistiquée des schémas de proportionnalité, de la notion générale d'inversion, de la capacité de faire de l'arithmétique avec deux opérations distinctes abstraitement définies. Il a également identifié trois processus (récursif, abstraction et acquisition du langage) impliqués dans la compréhension des relations multiplicatives qui sous-tendent le domaine entier des nombres rationnels (Kieren, 1991; 1989).

Beaucoup d'auteurs se sont attardés à étudier l'une ou l'autre des sous-constructions de la fraction. Behr et ses collaborateurs depuis plusieurs années (1983, 1985, 1988, 1989, 1990, 1992), ont concentré leurs efforts sur la sous-construction de mesure reliée à la fraction et plus récemment sur la notion de l'opérateur.

Les études, réalisées par Kieren et ses collaborateurs (Kieren et Nelson, 1978; Kieren et Southwell, 1979), ont porté sur la sous-construction d'opérateur. Elles ont permis de déterminer trois niveaux successifs de développement à l'intérieur de cette sous-construction. Chacun de ces niveaux se révèle être associé à une tranche d'âge. La maîtrise de l'opérateur correspondrait aux sujets âgés de 13 ans et plus.

Noelting et ses collaborateurs (Bellermarre, 1966; Lessard, 1966; Cloutier, 1970; Bégin, 1973; Cardinal, 1973; Martel, 1976; Juneau, Morin et Renaud, 1989; Rousseau, 1992) ont, quant à eux, étudié la notion de proportionnalité, en relation avec la notion de rapport. Ils ont constaté que la notion de proportion se construit par étapes, au cours de stades successifs de développement correspondant à ceux décrits dans la théorie de Piaget. La maîtrise de cette construction s'effectuerait au stade opératoire formel.

3 Introduction au problème de recherche

3.1 Aspect rationnel de la recherche

Il est trop restrictif de réduire la maîtrise du concept de la fraction à un seul stade de développement d'un sujet (Steedman, 1991). Cependant, la revue de la littérature met en évidence le fait que la performance des sujets tend quelque peu à s'améliorer selon le stade opératoire atteint par un sujet (Harrisson, Brindley, Bye, 1989). Par ailleurs, la recension des écrits nous révèle que les seules relations de proportionnalité et d'équivalence ne suffisent pas à déterminer le concept de la fraction (Carpenter, Fennema, Romberg, 1993; Behr, Harel, Post, Lesh 1992). La recherche a démontré que le concept de la fraction se construit par l'acquisition de sous-constructions étroitement reliées entre elles. Chacune de ces sous-constructions semble elle-même faire l'objet d'une construction par niveaux successifs, si l'on se réfère aux travaux de ces auteurs.

Ainsi, les investigations de Noelting, s'étalant sur plus de vingt ans, ont permis de mettre en évidence les étapes de construction de la notion de rapport à l'aide d'une épreuve opératoire qu'il nomme les Concentrations. La validité et la fidélité de cet instrument ont largement été démontrées.

Les travaux de Kieren, quant à eux, ont permis d'établir, à l'aide du Rational Number Thinking Test, que la notion d'opérateur se développe selon trois niveaux particuliers, chacun étant associé à un intervalle d'âge spécifique. Sommairement, au premier niveau, le sujet est capable de traiter la demi (avant 10 ans), puis le tiers (après 10 ans). Au deuxième niveau (avant 11 ans), il peut opérer sur toutes les fractions 1/m, impliquant l'addition et la composition. Finalement, dans un dernier temps (après 13 ans), il est capable de généraliser l'opérateur à n'importe quel type de fraction (n/m), par addition et par composition.

Aussi, Kieren n'hésite pas à supposer l'existence d'une relation entre les périodes d'âge observées dans ses recherches et les stades opératoires décrits par Noelting dans ses travaux sur la notion de rapport. Toutefois, Kieren n'a pas exploré davantage cette hypothèse, d'où la nécessité de la contrôler. Aussi, devant cette avenue, la présente recherche sera une

Étude de la relation entre la construction des opérateurs de la fraction et la construction opératoire de la notion de rapport auprès d'élèves de la première à la cinquième secondaire.

3.2 But et objectifs de la recherche

Le but général de cette recherche est de vérifier s'il existe une relation entre la construction de l'opérateur de la fraction tel que décrit par Kieren et le stade opératoire atteint par un sujet dans sa construction de la notion de rapport. Pour ce faire, les objectifs suivants sont proposés:

1er objectif:

Vérifier s'il existe un parallélisme entre le niveau d'opérateur acquis par un individu et le stade opératoire qu'il a atteint dans sa construction de la notion de rapport.

Par conséquent, les deux objectifs suivants s'avèrent être des corollaires de ce premier objectif.

2ème objectif:

Vérifier s'il existe un parallélisme entre le niveau d'opérateur et les résultats obtenus au test des opérations arithmétiques impliquant la fraction.

3ème objectif:

Vérifier s'il existe un parallélisme entre le stade opératoire atteint par un individu dans sa construction de la notion de rapport et les résultats obtenus au test arithmétique impliquant les opérations sur les fractions.

CHAPITRE II

RECENSION DES ÉCRITS

CHAPITRE II

RECENSION DES ÉCRITS

Ce chapitre est consacré au cadre théorique de cette étude. Il fait d'abord état de la contribution de la théorie opératoire de Jean Piaget à l'étude de la construction de la notion de la fraction. Par la suite, il aborde la question des sous-constructions relatives à la fraction, notamment celles qui font l'objet plus particulier de cette recherche: l'opérateur et le rapport.

1 L'apport de la théorie opératoire de Jean Piaget

La théorie de Jean Piaget a servi de cadre à de nombreuses recherches concernant la fraction. Il convient donc de présenter dans un premier temps les fondements de cette théorie du développement de l'intelligence.

Pour Piaget, le sujet est responsable de son développement. Il en est le moteur. Il construit des structures (schèmes), grâce à un processus dialectique qui fait intervenir deux invariants fonctionnels, l'assimilation et l'accommodation. Les connaissances sont construites grâce à l'action (schèmes) que le sujet exerce sur l'objet.

Quatre facteurs influencent le développement de l'individu. Ce sont la maturation biologique, l'interaction du sujet avec le milieu physique, l'interaction avec le milieu social et l'équilibration. Les trois premiers facteurs sont, selon Piaget, subordonnées à l'équilibration. Plus précisément, l'équilibration est un mécanisme régulateur qui assure la cohérence interne des structures (schèmes), et qui permet d'organiser les expériences en un tout cohérent. Ces structures se constituent en paliers d'équilibre (stades). Ces stades sont de grandes structures globales et inclusives qui se constituent selon un mouvement évolutif en spirale. L'ordre d'apparition des stades est constant.

Piaget fait ressortir trois grandes périodes de développement. Chacune englobe plusieurs stades. La première de ces périodes est celle de la construction de l'intelligence sensori-motrice. Elle s'étend de la naissance à 2 ans. Elle comprend six stades: l'exercice des réflexes; les premières adaptations acquises et la réaction circulaire primaire; les réactions circulaires secondaires et les «procédés destinés à faire durer les spectacles intéressants»; la coordination des schèmes secondaires et leur application aux situations nouvelles; la «réaction circulaire tertiaire» et la «découverte des moyens nouveaux par expérimentation active»; l'invention des moyens nouveaux par combinaison mentale (Piaget, 1977).

La seconde période est d'abord marquée par l'émergence de la représentation, c'est-à-dire par la différenciation des signifiants et des signifiés. Il s'agit de la période de la construction des opérations concrètes que Piaget sépare en deux sous-périodes. La première de ces sous-périodes est dite préopératoire. Elle s'étend de 2 à 7 ans. Elle est caractérisée par l'égocentrisme de la pensée. Grâce à la décentration progressive de cette pensée, l'individu va graduellement coordonner ses schèmes en un système réversible lui permettant d'opérer dans un système d'ensemble. Ce qui marque l'accession à la seconde sous-période des opérations concrètes qui va de 7 à 11 ans. Malgré l'acquisition de schèmes opératoires, la pensée reste liée au concret. Ce n'est qu'avec l'accession à la période des opérations formelles que le sujet est en mesure d'opérer, dans l'abstrait à partir de formes propositionnelles de formuler des hypothèses et de les vérifier. C'est au cours de cette période qui va de 11 à 15 ans que se développent les schèmes de proportionnalité et d'équivalence essentiels à la compréhension du concept de la fraction.

1.1 Les opérations selon Piaget

Piaget définit l'opération comme une action intériorisée, c'est-à-dire effectuée symboliquement ou en pensée, et réversible. Les opérations prennent leur source dans l'action et sont liées au processus d'abstraction réfléchissante d'où le sujet tire ses connaissances logico-mathématiques.

Piaget distingue deux niveaux dans la constitution des opérations concrètes et formelles. Le premier niveau de construction est celui de l'élaboration de groupements opératoires concrets de classification et de sériation, puis l'élaboration du groupe arithmétique des nombres. Ensuite, le second niveau correspond à la construction des opérations formelles constitué par des opérations combinatoires qui présentent une structure de groupe INRC (double réversibilité).

Le groupe INRC représente la structure d'ensemble des opérations formelles. Piaget en parle comme d'un groupement à la seconde puissance. Il provient de la généralisation de la période opératoire concrète qui permet maintenant d'opérer sur des propositions. La combinatoire (concernant les 16 opérations propositionnelles binaires) et le groupe INRC (ou groupe des 4 transformations) sont des structures complémentaires qui soutiennent l'articulation des opérations formelles.

Bien que Piaget ait mis en évidence le développement des constituantes du groupe INRC et de la combinatoire, il n'a pas précisé s'il existe un ordre hiérarchique selon lequel ces opérations se mettent en place. Aussi, Jansson (1986) a étudié cet aspect dans une étude auprès d'élèves de 7ème, 8ème et 9ème année, afin de vérifier si une telle hiérarchie existe et, le cas échéant, d'établir une préséance du développement pour les tâches logiques dans un contexte mathématique. Cet auteur en arrive à la conclusion qu'une telle hiérarchie du développement de la logique combinatoire existe. Son étude permet aussi d'établir une construction hiérarchique des tâches logiques. L'apparition des opérations logiques correspond à l'ordre suivant: premièrement, affirmations et négations des énoncés, conjonction et disjonction, et équivalence de forme disjonctive (forme ou); deuxièmement, équivalence, non-implication, incompatibilité, non-implication inverse, disjonction (forme ou) et implication; troisièmement disjonction, implication, et son inverse, et incompatibilité (toutes de forme si → alors).

Piaget différencie également deux genres d'opérations: les logico-arithmétiques portant sur les objets discrets réunis en classes, indépendamment de la dimension spatio-temporelle, et les opérations infralogiques ou spatio-temporelles portant sur des objets continus. Pour lui, la distinction faite entre ces deux types d'opérations ne persiste pas au niveau formel puisque les opérations portent sur des propositions concernant aussi bien des objets discrets que continus. Piaget insiste sur le fait que les relations causales établies entre les objets dépendent des opérations dont dispose le sujet, ce qui signifie que la connaissance expérimentale est toujours subordonnée aux connaissances logico-mathématiques du sujet.

1.2 Le développement des connaissances logico-mathématiques

Dans leur étude, Inhelder, Sinclair et Bovet (1974) concluent que les enfants n'ont pas besoin d'enseignement direct pour faire des progrès dans le domaine logico-cognitif. Étant confrontés à une idée conflictuelle, il en résulte souvent un plus haut niveau de pensée. Le progrès que fait un enfant est fonction du niveau déjà atteint.

Kamii (1985) partage tout à fait cette opinion et affirme que si l'enfant ne peut construire une relation, alors toutes les explications du monde ne suffiront pas à lui faire comprendre les explications de l'enseignant. L'environnement social doit encourager l'abstraction réfléchissante au moyen du conflit cognitif. Il revient donc au maître de mettre en place l'atmosphère favorisant ce genre d'échange positif.

Selon Hétu (1974) les opérations se développent spontanément sans le secours de l'intervention didactique. Cependant, il est évident que les opérations sont insuffisantes pour assurer elles-mêmes la construction des connaissances acquises jusqu'à ce jour dans les différentes disciplines. Il rappelle que les structures mathématiques, caractérisées selon ce qui précède par les lois érigées en systèmes d'ensemble et indépendantes de tout contenu, ne sont pas conscientes mais peuvent le devenir, à l'état adulte, grâce à la réflexion du mathématicien, ou du logicien, qui les dégage alors de son propre fonctionnement. Ces structures se laissent réduire à trois grandes structures qui sont les structures correspondant chez l'enfant aux opérations de classes (structures algébriques), de relations (structures d'ordre) et aux transformations continues (structures topologiques) Piaget (1964).

Ainsi donc, la connaissance est l'objet d'une suite de transformations successives et elle se construit surtout au moment où l'enfant, dans ses multiples échanges avec le milieu, rencontre et trouve la solution des problèmes nouveaux. Hétu (1974) en tire la notion «d'états primitifs de la connaissance» qui place au centre des questions les rapports entre la connaissance adulte (que spécifie la mathématique et que l'enseignant véhicule) et la connaissance de l'enfant engagée dans un processus de transformation qui l'amène graduellement vers un état terminal comparable à celui d'un adulte. Il rappelle les enjeux des rapports didactiques d'enseignant à enseigné: l'activité de l'adulte qui doit s'adapter au niveau de connaissances de son interlocuteur et celle de l'enfant qui se transforme dans le sens d'une connaissance mieux articulée.

D'un point de vue pédagogique, ces données s'avèrent essentielles lorsqu'il s'agit d'établir des stratégies d'enseignement qui permettent à l'élève de construire adéquatement ses connaissances mathématiques. Ces stratégies doivent s'appuyer sur ce dont disposent les élèves, sinon l'objectif visé pourrait n'être jamais atteint.

2 Aspects fondamentaux de la fraction

2.1 Définition mathématique de la fraction

Dans la littérature, les termes «fraction» et «nombre rationnel» sont souvent utilisés indifféremment pour désigner une entité mathématique constituée d'un numérateur et d'un dénominateur. Afin de clarifier un peu plus ces termes, nous empruntons à Stella Baruk (1992) les définitions qu'elle en donne dans son Dictionnaire de mathématiques élémentaires. Avant 1980, le mot fraction faisait référence à un nombre qui a été «rompu» en parts égales, par exemple 3/4. Le terme amène également la notion d'opérateur parce qu'il permet de désigner une partie d'une quantité. Après cette date, les programmes scolaires français, entre autres, ont limité le terme «fraction» à une simple question scripturaire, retirant ainsi la notion numérique rattachée à la fraction. Ainsi, la fraction n'est qu'une manière d'écrire la relation existant entre un numérateur et un dénominateur. Cette forme d'écriture laisse plus de latitude pour faire émerger le concept de nombre rationnel.

La règle d'écriture la plus souvent adoptée est a/b. Si a et b désignent deux entiers, et que b soit non-nul, le nombre obtenu à partir du quotient de a et de b s'appelle un nombre rationnel ou fraction.

Dans le présent travail, l'utilisation du terme «fraction» sera privilégiée, bien que l'expression «nombre rationnel» soit utilisée pour permettre d'accéder à une ouverture plus grande sur les concepts qui régissent la construction de la fraction.

Les deux sections qui suivent tentent d'expliquer brièvement comment se construit la notion de la fraction des points de vue mathématique et psychologique.

2.2 Composantes mathématiques de la fraction

Du point de vue purement mathématique, la construction de la notion de fraction s'explique à partir de la théorie des ensembles. Dans les ensembles des nombres entiers naturels ($\mathbb{N}$) et des nombres entiers relatifs ($\mathbb{Z}$), l'addition précède la multiplication, puisqu'il est toujours possible de réduire une multiplication à une addition répétée, et surtout parce que la multiplication présuppose toujours l'addition.

L'ensemble des nombres rationnels (Q) quant à lui, est étroitement lié aux opérations multiplicatives. Le mathématicien l'obtient par extension, à l'aide d'une opération multiplicative. Il généralise ainsi la multiplication, précédemment définie dans l'ensemble ℕ, pour ensuite montrer comment on peut aussi additionner les éléments du nouvel ensemble. Étant donné ces transformations, l'ordre des éléments de l'ensemble Q est différent de celui défini dans les ensembles ℕ et Z, car dans l'ensemble Q, l'ordre possède en plus un caractère de densité qui rend toujours possible l'insertion d'un nouveau nombre entre deux nombres quelconques.

2.3 Le développement de la fraction d'un point de vue psychologique

D'un point de vue psychologique, la construction de la fraction passe par de nombreuses étapes que Piaget et Inhelder (1959) ont mis en évidence. Le développement des schèmes additifs et multiplicatifs se constituent, à peu près synchroniquement, vers l'âge de sept ans. Ces données théoriques, psychologiques et mathématiques nous assurent de la spécificité des nombres rationnels (ensemble Q) par rapport aux nombres naturels (ensemble N) et aux nombres entiers relatifs (ensemble Z), mais ne nous indiquent pas clairement le statut psychologique des opérations qui leur correspondent.

Dans son étude, Hétu (1974) tente d'expliquer le développement psychologique de la fraction. Il observe trois stades de développement de la fraction chez l'enfant fréquentant une classe primaire. Tout d'abord, la stratégie traditionnelle d'enseignement induit le développement d'une pseudo-fraction, sur laquelle on impose un symbolisme qui n'a rien à voir avec la réalité mathématique. Bien que l'on retrouve deux types de pré-fractions issues des opérations de partage et de réunion, celles-ci sont incomplètes, puisqu'elles ne supportent pas la coordination de ces deux opérations. Lorsque les opérations de partage et de réunion peuvent être articulées, apparaissent des fractions-quantités, correctement structurées d'un point de vue symbolique et logico-mathématique, mais applicables seulement à des objets concrets. Viennent ensuite les fractions-relations, où l'individu érige un système mathématique, constitué de relations d'équivalence réversibles, en l'absence de support concret.

Dans l'enseignement traditionnel, le système des fractions subit une double réduction (Hétu, 1974): la fraction y est représentée d'une part, par un objet réel sur lequel on pratique divers fractionnements et, d'autre part, l'équivalence des fractions y est représentée par la comparaison de quantités d'objets, ce qui oblige la pédagogie à recourir d'emblée à des objets ou des collections d'objets d'égale grandeur. Or, si la première réduction est conforme à l'un des aspects de la fraction mathématique (puisque le fractionnement suppose la coordination des opérations de partage et de réunion), la seconde ne donne aucune prise à la comparaison qu'elle est supposée représenter, puisque l'enfant peut se contenter de comparer les quantités en présence.

Pour sa part, Kieren (1976) affirme qu'on ne connaît pas actuellement de séquence de développement naturel de la fraction. Ainsi, en travaillant avec des nombres rationnels, les enfants ont à travailler avec des structures mathématiques qui n'ont rien de commun avec leur propre expérience. L'enseignement formel fait peu pour enrichir l'expérience de l'enfant, puisqu'il est centré sur les opérations sur la fraction et le système décimal, ignorant le reste. Kieren croit que parce que chacune des interprétations du nombre rationnel est reliée à des structures cognitives, ignorer l'image d'ensemble, ou échouer à identifier certaines structures particulières nécessaires dans le développement de l'enseignement, peut conduire à un manque de compréhension chez l'enfant. Du reste, comme le faisait remarquer Hétu (1974), la science mathématique, telle que l'a construite la pensée adulte, n'est que de peu d'utilité pour comprendre la mathématique de l'enfant.

2.4 Les «sous-constructions» de la fraction

Comme il l'a été souligné abondamment, il existe un certain consensus à l'effet que la fraction n'est pas une simple construction, et peut être caractérisée par un ensemble de «sous-constructions» distinctes (Carpenter et al., 1993). Les sous-constructions les plus communément identifiées sont celles de mesure, de quotient, de rapport et d'opérateur (Kieren, 1980), auxquelles Behr et al. (1993) ajoutent la notion de partie d'un tout. Chacune de ces «sous-constructions» pourrait faire l'objet d'un long travail. Elles sont néanmoins présentées brièvement dans les paragraphes qui suivent car elles permettent de présenter un portrait d'ensemble des éléments nécessaires à la construction de la notion de la fraction.

2.4.1 *Les fractions sont des parties d'un tout*

L'examen des sous-constructions que l'on attribue à la fraction, révèle en tout premier lieu le modèle partie d'un tout. Piaget, Inhelder et Szeminska (1969) ont démontré que la notion de fraction chez l'enfant est déterminée par sept caractéristiques que les enfants du primaire ne possèdent pas: un tout est composé d'éléments séparables; la séparation peut apparaître à l'intérieur d'un nombre déterminé de parties; la subdivision épuise le tout; il existe une relation fixe entre les coupures et les subdivisions; les subdivisions sont égales; ces parties sont des touts selon leur propre règle; il y a conservation du tout.

Selon Kieren (1981) ainsi que Ellerbruch et Payne (1978) le modèle partie d'un tout s'avère le plus naturel. Ils le trouvent préalable à toutes les autres interprétations de la fraction. Pour Kieren (1981), l'interprétation de ce modèle est directement reliée à la capacité de répartir une quantité continue, ou un ensemble d'objets discrets, en un tout également divisé en sous-ensembles égaux. De plus, Ellerbruch et Payne (1978), affirment que la recherche, tout comme la pratique en classe, suggèrent l'introduction des concepts de la fraction utilisant un seul modèle, et recommandent eux aussi, le modèle partie d'un tout. Ils y voient le modèle le plus utile pour l'addition des fractions.

2.4.2 *Les fractions sont des mesures*

Les observation de Payne (1976) viennent appuyer les écrits de Piaget et al. (1969) concernant les caractéristiques du modèle partie d'un tout. Toutefois, il ajoute d'autres composantes qu'il juge essentielles à l'apprentissage précoce de la fraction. Selon cet auteur, il doit y avoir une capacité d'établir des relations entre une représentation figurée et une représentation symbolique. L'élève doit être capable de travailler sur des quantités continues et discrètes, de même que sur les parties versus le tout. Enfin, l'élève doit être capable d'établir des subdivisions équivalentes du modèle parties versus un tout.

Novillis (1976), ayant travaillé sur les droites numériques ajoute à ces caractéristiques la capacité à identifier l'unité. Il constate que les enfants, jusqu'à l'âge de 12-13 ans, ont de la difficulté à dissocier la notion d'unité de toute autre chose. Par exemple, si on leur présente une image de quatre gâteaux et qu'on leur demande de couper la moitié de l'ensemble, beaucoup d'entre eux couperont la moitié d'un gâteau, au lieu de séparer l'ensemble en deux gâteaux. Le même phénomène est observé avec la droite linéaire contenant plus d'une unité. Kieren (1976) parvient à une conclusion semblable. Le modèle de la droite numérique ajoute un attribut qui n'est pas présent dans le modèle des ensembles ou celui des surfaces, particulièrement lorsque la droite numérique est supérieure à une unité. Novillis et Larson (1980) ont remarqué la difficulté éprouvée par les élèves de septième année pour cette tâche, et expliquent les résultats par le fait que ces élèves ont une notion imprécise et rigide de la fraction.

Pour Lesh et al. (1983), les systèmes d'intervalles associés au nombre rationnel sont faiblement organisés et inégalement formalisés chez les jeunes. La sous-construction coordination linéaire du nombre rationnel est similaire à la notion d'interprétation de Kieren (1976). Elle amplifie les propriétés associées à la topologie métrique de la droite numérique rationnelle comme l'intervalle, la densité, la distance et l'(in)fini. Les nombres rationnels sont interprétés comme des points sur une droite linéaire, démontrant que les nombres rationnels sont des sous-ensembles des nombres réels.

Le fait qu'une structure entière et ses parties dérivent chacune les unes des autres a de profondes implications dans l'apprentissage humain, le développement et la résolution de problèmes. Le dilemme concernant la partie entière versus les parties du tout dicte que la croissance cognitive doit impliquer plus que des additions quantitatives aux connaissances ou aux habilités de processus: des réorganisations qualitatives doivent également avoir lieu. Les relations et les opérations évoluent vers un système ayant ses propres propriétés, mais des éléments à l'intérieur du système complètent le nouveau statut en étant traités comme des parties du tout. La sous-construction de mesure fractionnaire du nombre rationnel représente un reconstruction de la notion partie d'un tout de la fraction. Elle pose la question «combien existe-t-il d'une quantité relative dans une unité spécifique de cette quantité?» puisque chaque fractionnement à l'intérieur du tout, peut lui-même donner lieu à un autre sous-fractionnement. Par exemple, «combien y a-t-il de ¼ dans ½?».

2.4.3 *Les fractions sont des éléments du champ de la division*

Considérer les fractions comme un quotient conduit à deux modèles de compréhension. D'une part, la représentation de 8/4 ou 2/4 en tant que division résulte en une réduction qui permet d'obtenir l'équivalence 8/4 = 2 ou 2/4 = 0,5. D'autre part, les fractions peuvent également être considérées comme des éléments d'une division (diviseur) et, comme telles, elles peuvent être utilisées pour définir l'équivalence, l'addition, la multiplication ou d'autres propriétés dans une perspective purement déductive. Tous les algorithmes sont dérivables des équations via les propriétés de ce champ (Kieren, 1976).

Ce niveau de compréhension requiert des structures intellectuelles qui ne sont pas disponibles chez les élèves du premier cycle du secondaire parce que, selon (Kerslake, 1979) elles relient les nombres rationnels aux systèmes algébriques abstraits, ce qui démontre une fois de plus la complexité de la construction de la notion de la fraction.

2.4.4 *Les fractions sont des nombres de la forme p/q qui expriment un rapport*

Les fractions sont des nombres de la forme p/q, où p et q représentent des entiers qui sont sous la forme d'un rapport de nombres. Le rapport est une relation qui exprime la notion de grandeur relative. Dès lors, il est plus correctement considéré comme un index comparatif plutôt que comme un nombre. Lorsque deux rapports sont égaux, on dit qu'ils sont proportionnels l'un et l'autre. Une proportion est simplement l'état de deux rapports équivalents. (Lesh et al., 1983), l'utilisation des proportions constitue un outil de résolution de problèmes très puissant dans une grande variété de situations de la vie courante. Ainsi, il est possible de trouver un élément manquant à partir de toutes les relations directes. Par exemple, si 1 litre d'essence coûte 0,60$, combien en coûtera-t-il pour 25 litres? On établit la proportion 1/0,60 = 25/x et l'on obtient 15$.

Noelting (1993, 1980 a et b)[1] a établi trois stades de développement pour le rapport, selon les réponses fournies par des sujets travaillant sur des modèles concrets. Il s'agit de l'épreuve des Concentrations qui comprend 23 items, d'ordre de difficulté croissant (voir annexe 1). Ces items montrent deux ensembles de verres contenant du jus d'orange et de l'eau. Ces ensembles représentent deux rapports (a, b) et (c, d). Pour chaque item, le sujet doit identifier quel ensemble de verres (jus d'orange et eau) parmi les deux ensembles présentés,

[1]. Étant donné l'importance de cette Épreuve dans la présente étude, nous rapportons ici les conclusions de M. Noelting.

goûtera davantage le jus d'orange, ou encore dire si les deux groupes donneront un breuvage qui goûtera la même chose.

Les stades trouvés par Noelting sont interprétés selon l'échelle chronologique de Piaget. Le premier stade de la construction de la notion de rapport correspond au stade intuitif. Le sujet se base uniquement sur les comparaisons de termes des rapports en cause. Ainsi l'enfant qui atteint le sous-stade IA s'attarde à comparer uniquement les premiers termes du rapport (4,1) vs (1,4) donc 4 > 1, par conséquent (4, 1) > (1, 4). L'enfant qui atteint le sous-stade IB, s'apercevant de l'égalité des premiers termes (1,2) vs (1,5), compare les seconds termes (2 < 5), et constate que le mélange goûte plus le jus d'orange là où il y a moins d'eau (1,2) > (1,5). L'enfant qui atteint le sous-stade IC compare chacun des ensembles présentés (3,4) vs (2,1) en établissant une relation entre les termes d'un rapport (3 < 4) et (2 > 1) Il les ordonne ensuite pour les comparer (3,4) < (2,1).

Le second stade de la construction de la notion de rapport correspond au stade opératoire concret. Il passe par la comparaison de termes ordonnés en utilisant des règles multiplicatives (covariation). Ainsi, le sujet qui a atteint le sous-stade IIA est capable d'établir une relation d'équivalence entre les deux rapports (1,1) = (2,2), soit en utilisant un des deux rapports comme invariant et en pratiquant une co-multiplication (ou une co-division) 1(2)/1(2) = 2/2; soit en traitant chacun des rapports comme un quotient pour obtenir 1 = 1. Les quotients ainsi obtenus deviennent des invariants. Le sujet ayant atteint le sous-stade IIB est capable d'utiliser ces deux stratégies sur n'importe quel type de rapports équivalents (4,2) vs (6,3).

Le troisième stade de la construction de la notion de rapport correspond au stade opératoire formel. Il nécessite des opérations plus complexes. Le sujet qui atteint le sous-stade IIIA fait appel à l'une ou l'autre des stratégies suivantes. Il peut utiliser une co-multiplication suivie d'une comparaison additive. Par exemple, pour comparer (2,3) à (1,2), il peut établir que 2 = 2(1) donc 2(1,2) = (2,4), ce qui signifie que (2,3) > (2,4). Il peut également diviser chaque terme du rapport (3/2) vs (2/1) et les ordonner pour les comparer (2/3) < (1/2). Enfin, les sujets qui ont atteint le sous-stade IIIB utilisent les stratégies utilisant les algorithmes du dénominateur commun ou du pourcentage pour comparer les rapports entre eux.

2.4.4 *Les fractions sont des opérateurs*

La sous-construction d'opérateur de la fraction impose une interprétation algébrique de la forme p/q. L'opérateur p/q peut être pensé comme une fonction transformant des figures géométriques en figures géométriques similaires p/q fois plus grandes ou plus petites. De la même façon, p/q peut également être conçu par rapport à une droite L qui est étirée de p fois sa longueur puis réduite de q fois. Une interprétation «multiplication suivie d'une division» est donnée à p/q lorsqu'elle opère sur un ensemble discret. La fraction p/q transforme un ensemble de n éléments en un ensemble de np/q éléments.

Kieren et Nelson (1978), puis Kieren et Southwell (1979) ont exploré cette sous-construction de la fraction. S'appuyant sur la théorie selon laquelle un individu construit le nombre rationnel à partir d'un certain nombre de sous-constructions, Kieren et Nelson (1978) ont, dans une étude exploratoire, observé l'aspect de la fraction qui le présente comme un opérateur. A l'aide d'une épreuve crayon-papier, le Rational Number Thinking Test, auquel ils ont soumis des élèves dont l'âge variait de 8 à 14 ans, ils ont pu observer des changements significatifs de performance chez les âges de 11 et

12 ans, de même qu'entre ceux de 13 et 14 ans. Ils ont donc émis l'hypothèse qu'il existe trois niveaux d'opérateur et que les sujets utilisent des mécanismes constructifs afin de contrôler la situation de l'opérateur. L'opérateur est une fonction d'un nombre agissant sur un autre. Il conduit également à l'interprétation de la multiplication en tant que fonction de composition (par exemple, 3/8 = 3/4 X 1/2).

Leur recherche visait à explorer plusieurs questions concernant la variation de l'opérateur selon l'âge, l'apparition de stades dans le développement de l'opérateur, la difficulté de travailler avec des fractions contenant un entier égal à 1 au numérateur (par exemple, 1/2) par rapport à celles contenant un entier supérieur à 1 au numérateur (par exemple, 2/3).

L'instrument de mesure contient des «machines» transformant des groupes de quantités discrètes selon un «patron» donné par la fraction qui agit en tant qu'opérateur. Le sujet peut visualiser la situation puisqu'il a devant lui une grosse boîte de couleur vive. On lui explique à l'aide de 5 exemples la démarche qu'il doit effectuer pour tenter de découvrir quel opérateur a agi sur la quantité entrant dans la machine pour la transformer. Ainsi, une certaine quantité d'objets discrets entre dans la machine et une autre quantité en ressort. L'élève doit tenter de trouver comment la machine a été programmée afin de donner lui-même le résultat après qu'une certaine quantité soit introduite dans la machine ou inversement, indiquer quelle quantité a été initialement introduite à partir d'un résultat donné.

La première des variables est l'utilisation d'un numérateur égal à 1 (1/2, 1/3, 1/2 X 1/3 ou 1/6) ou d'un numérateur supérieur à 1 (3/4, 2/3, 1/2 X 3/4 ou 3/8). La seconde met en opposition des opérateurs simples (1/2, 1/3, 3/4, 2/3) et des opérateurs composés (1/2 X 1/3, 1/2 X 3/4). Enfin, dans le dernier cas, les élèves font face à deux machines. Le résultat sortant de la première machine sert d'entrant à la seconde machine.

Se référant aux travaux de Piaget, Inhelder et Szeminska (1966) pour ce qui est de l'âge de la reconnaissance des fractions et aux travaux de Lovell (1971) suggérant que l'âge d'apparition du schéma de proportionnalité soit atteint entre 12 et 14 ans, Kieren et Nelson (1978) ont choisi 45 sujets dont l'âge varie entre 9 et 14 ans. L'étude a révélé une différence significative entre les sujets de moins de 11 ans et ceux du groupe des 11-12 ans, de même qu'entre ce groupe et celui des

12-13 ans. Ils notent que trois niveaux d'opérateur apparaissent selon le niveau d'âge et supposent que ce phénomène doit être relié à la pensée logique décrite par Piaget et Inhelder en 1966 dans leur ouvrage The Growth of Logical Thinking from Childwood to Adolescence.

L'étude des transcriptions des entrevues que Kieren et Southwell (1978) ont réalisées, a démontré que la notion de rapport n'est pas nécessaire pour la réalisation du niveau le plus élevé de l'opérateur puisqu'un seul, parmi les sujets l'ayant atteint, a utilisé cette notion.

En 1979, Kieren et Southwell, ont repris cette étude afin d'approfondir les niveaux d'opérateur observés dans la recherche précédente. Avec un échantillon de 72 sujets dont les âges vont de 11 à 14 ans, ils ont mis en évidence trois phases successives de développement. La première phase concerne la demi, la deuxième l'opérateur dont le numérateur est égal à un et la troisième, l'opérateur général. Selon eux, les travaux de Noelting (1978b) ont montré plusieurs phases dans la pensée proportionnelle, qui peuvent trouver une correspondance avec les niveaux d'opérateur qu'ils ont mis en évidence. Ainsi, le stade IIA de Noelting (1978b), impliquant la notion de rapport 1/1, s'avère suffisant pour expliquer le premier niveau d'opérateur, soit la demi. Dans le second niveau de l'opérateur, le mécanisme de partage (division) joue un rôle central. Le troisième niveau qui permet de passer du niveau unitaire (1/n) à la phase de l'opérateur général (n/m), implique une utilisation plus complexe du mécanisme de partage. Il s'agirait d'une pensée covariationnelle, comme celle trouvée chez Noelting (1978b). Toutefois, les auteurs associent davantage l'apparition de ces niveaux d'opérateur à un âge chronologique qu'ils supposent être compatibles avec les stades opératoires décrits par Piaget et Noelting.

En résumé, les études actuelles montrent que la notion de fraction est un concept complexe. Le concept de fraction est constitué de nombreuses «sous-constructions» qui permettent de construire un concept opérationnel et fonctionnel, c'est-à-dire qui peut être utilisé par le sujet dans tous les cas de résolution de problèmes qui se posent à lui. Il semble que toutes les «sous-constructions» répertoriées dans ce chapitre doivent être présentes pour atteindre ce niveau de réalisation (Carpenter et al., 1993). En effet, ces «sous-constructions sont liées entre elles (Wagner, 1976) et permettent d'accéder à des niveaux de résolution de problèmes de plus en plus avancés. De plus, chacune de ces «sous-constructions» est construite par le sujet à partir de ses propres expériences qu'il organise et structure selon ses connaissances. Par ailleurs, certains auteurs ont montré que pour chacune de ces «sous-constructions», il existe une hiérarchisation des niveaux de leur acquisition (Behr et al. 1985; Kieren et al., 1976a,1978,1979; Lawson, 1976; Noelting, 1980a,b, 1982).

Bien que ces recherches se soient grandement inspirées des travaux de Jean Piaget, seuls quelques auteurs (Lawson, 1976; Noelting, 1980a,b, 1982) ont vérifié systématiquement la relation existant entre les niveaux de développement d'une sous-construction donnée en fonction du développement opératoire d'un sujet. Ainsi Kieren et al. (1976a,1978,1979), ont démontré la hiérarchisation de la «sous-construction» de l'opérateur, mais ils n'ont pas mis en évidence de lien entre ces niveaux de construction et le développement opératoire atteint par un sujet.

De la revue de la littérature, et du dernier point qui vient d'être traité, se dégage une piste conduisant à l'exploration des liens pouvant exister entre le niveau de développement cognitif d'un sujet (stade opératoire), lié à la notion de rapport, et l'acquisition de l'opérateur tel que décrit par Kieren; ces deux sous-constructions contribuant certainement à la construction de la notion de fraction.

3 Énoncé des hypothèses

3.1 Première hypothèse de recherche

H_1: Il existe un parallélisme entre le niveau d'opérateur atteint par un individu et le stade opératoire atteint par cet individu dans sa construction de la notion de rapport.

3.2 Deuxième hypothèse de recherche

H_1: Il existe un parallélisme entre le niveau d'opérateur et les résultats obtenus au test des opérations arithmétiques impliquant la fraction.

3.3 Troisième hypothèse de recherche

H_1: Il existe un parallélisme entre le stade opératoire atteint par un individu dans sa construction de la notion de rapport et les résultats obtenus au test arithmétique impliquant les opérations sur les fractions.

CHAPITRE III

MÉTHODOLOGIE DE LA RECHERCHE

CHAPITRE III

MÉTHODOLOGIE DE LA RECHERCHE

Ce chapitre porte sur la méthodologie utilisée dans le cadre de cette recherche. Il présente les moyens mis de l'avant pour favoriser l'atteinte des objectifs poursuivis.

Le but général de cette recherche est de vérifier l'existence d'une relation entre la construction de l'opérateur de la fraction tel que décrit par Kieren et la construction opératoire de la notion de rapport telle que décrite par Noelting. Plus spécifiquement, cette étude vise à vérifier les hypothèses émises au chapitre précédent.

1 Les sujets

Comme le classement scolaire permet, en principe, de constituer des groupes relativement homogènes, un groupe de chacune des classes du secondaire a été aléatoirement sélectionné. Les sujets sont issus de groupe dits «réguliers», c'est-à-dire qu'ils ne sont pas inscrits à des programmes d'enrichissement en mathématique ou autre. Les sujets proviennent de deux écoles secondaires de la Commission Scolaire de la Jonquière. Les élèves de la première et de la deuxième secondaire sont inscrits à l'école Ste-Thérèse, tandis que ceux de la troisième, de la quatrième et de la cinquième secondaire fréquentent l'école Polyvalente Jonquière.

L'épreuve des concentrations de Noelting, en passation collective, de même que le test sur les opérations arithmétiques sur les fractions, ont été administrés au cours de la même journée. La durée de passation fut d'environ une heure. Le Rational Number Thinking Test de Kieren a été présenté le surlendemain. La durée de passation de cette épreuve fut également d'une heure environ.

L'échantillon comprend 78 filles et 74 garçons, âgés de 12 à 19 ans. Parmi cet échantillon de 152 sujets, on retrouve 25 élèves (13 filles et 12 garçons) de première secondaire, 21 élèves (8 filles et 13 garçons) de deuxième secondaire, 30 élèves (17 filles et 13 garçons) de troisième secondaire, 50 élèves (24 filles et 26 garçons) de quatrième secondaire ainsi que 26 élèves (16 filles et 10 garçons) de cinquième secondaire. Tous ces sujets participent à l'expérience et passent l'ensemble des épreuves. Le tableau 1 illustre cette répartition.

Tableau 1

Répartition des sujets selon le sexe et la classe fréquentée

SEXE	Sec.1	Sec.2	Sec.3	Sec.4	Sec.5	TOTAL
Filles	13	8	17	24	16	78
Garçons	12	13	13	26	10	74
TOTAL	25	21	30	50	26	**152**

Les âges varient de 12 ans et 6 mois à 19 ans et trois mois. La moyenne d'âge des sujets de la première secondaire est de 13,25 ans, celle des sujets de deuxième secondaire est de 14,8 ans, celle des sujets de troisième secondaire est de 15,39 ans, celle des sujets de quatrième secondaire est de 16,10 ans alors que celle des sujets de cinquième secondaire est de 17,32 ans. Le tableau 2 présente les moyennes d'âge selon le sexe et la classe fréquentée.

Tableau 2

Age moyen des sujets selon le sexe et la classe fréquentée

SEXE	Sec. 1	Sec. 2	Sec.3	Sec.4	Sec.5
Filles	13,10	14,27	15,22	15,90	17,37
Garçons	13,40	14,09	15,55	16,29	17,28
TOTAL	13,25	14,8	15,39	16,10	17,32

2 Description des instruments de mesure

Puisque Kieren suppose qu'il existe un lien entre les niveaux d'opérateur qu'il retrouve lors de ses expérimentations et les stades opératoires décrits par Noelting, il a été décidé d'utiliser ces instruments.

2.1 Évaluation du développement cognitif selon l'épreuve des concentrations 1993 de Noelting (Épreuve générale)

2.1.1 *Description de l'instrument*

Ce test collectif de type papier-crayon permet de situer le niveau de développement opératoire d'un sujet sur une échelle de dix stades opératoires allant du stade symbolique au stade métaformel. L'historique de l'épreuve présenté par Rousseau et Noelting (1993) montre les raffinements que l'instrument a subi au fil des ans. Toutefois, le type de problème présenté au sujet demeure le même.

On montre au sujet des rapports numériques représentés par des ensembles de verres, séparés en deux sous-ensembles A et B. Chacun des sous-ensembles A et B est constitué de verres de jus d'orange (verres noirs) et de verres d'eau (verres blancs). On demande au sujet de déterminer lequel des deux sous-ensembles goûtera davantage le jus d'orange, une fois que l'on aura mélangé les différents verres des deux sous-ensembles. Ces concentrations sont exprimées sous forme de couples représentant le rapport entre les différents éléments. Par exemple, (3,2) vs (2,1) signifie que le sujet compare 3 verres de jus pour 2 verres d'eau par rapport à deux verres de jus pour 1 verre d'eau.

2.1.2 *Administration de l'épreuve*

Les directives de passation collective sont les mêmes que celles décrites dans le document produit par Noelting et

Rousseau (1993). Chaque élève, assis à sa place, reçoit un exemplaire de l'épreuve des Concentrations 93 (forme générale). Après s'être assuré que chacun ait rempli correctement l'en-tête, l'examinateur discute avec les élèves de chacun des éléments de la démonstration, notés I, II et III sur l'épreuve, afin de s'assurer que tous aient bien compris la tâche à effectuer. Ensuite, l'élève répond à chacun des items de l'épreuve en justifiant son choix de réponse. L'utilisation de la calculatrice est prohibée. La durée de passation est d'environ 30 à 45 minutes.

2.1.3 *Correction de l'épreuve*

Les items sont corrigés selon la clé de correction indiquée dans le document de Noelting et Rousseau (1993). Le correcteur tient compte du choix de réponses objectives et de la justification écrite par le sujet. Les calculs visant à montrer les rapports entre les fractions ne sont pas écartés comme explication au choix de réponses puisque les auteurs en ont tenu compte dans leur propre recherche.

2.2 Évaluation de l'acquisition de l'opérateur de la fraction par le Rational Number Thinking Test (RNTT)

2.2.1 *Description de l'instrument*

Le Fractional Number Thinking Test a pour but d'évaluer certaines sous-constructions de la fraction dont la notion d'opérateur et celle de partage. Ce test collectif de type papier-crayon a été construit par Kieren pour le Calgary Junior High School Mathematics Project (Harrison, Bye and Brindley, 1981). Révisé à de nombreuses reprises, ce test prend le nom de Rational Number Thinking Test (RNTT) en 1984. Cette version du test contient des items relatifs au rapport, à la division et à l'opérateur. Les parties du test concernant le rapport et la division contiennent des fractions équivalentes et non-équivalentes. La version 1988, dont la présentation a été améliorée, mais dont le contenu demeure inchangé, est utilisé pour les fins de la présente étude.

La section du test qui concerne l'opérateur est davantage expliquée ici. Le sujet se voit présenter une «machine» où sont illustrées une entrée et une sortie. On lui propose un modèle représentant une quantité de billes qui est introduite à une «entrée» et une autre quantité qui ressort à la «sortie», transformée sous forme de paquets. Cette démonstration est faite avec 6 couples différents. Le sujet doit déterminer ce qui s'est passé entre les deux extrémités dans «la machine»: c'est donc dire qu'il doit trouver quel opérateur est impliqué dans la transformation. Par exemple on peut observer:

ENTRÉE	→	SORTIE
6		3
8		4
24		12

Le sujet doit de plus, prédire le résultat de l'opération à partir d'une quantité entrant dans la machine, ou encore déduire le nombre d'items à l'entrée, à partir d'une quantité de paquets indiqués à la sortie. D'autre part, pour chacun des niveaux présentés, le sujet doit démontrer son habileté à faire l'opération inverse et à trouver l'opérateur correspondant.

Dans la section impliquant l'opérateur, il a été possible de distinguer quatre niveaux de difficulté. Celui où le sujet n'est capable de résoudre que la demi (niveau 1). Celui où le sujet ne réussit que la demi et le tiers (niveau 2). Celui où le sujet résout correctement la demi, le tiers et les deux tiers (niveau 3). Finalement, le niveau où le sujet peut résoudre tous les cas présentés, soit la demi, le tiers, les deux tiers et les quatre tiers (niveau 4).

2.2.2 *Administration de l'épreuve*

Le Rational Number Thinking Test termine la série des trois épreuves. La durée de passation est d'environ 55 minutes. Après avoir rempli correctement l'en-tête, les sujets reçoivent les directives concernant la passation de l'épreuve et la «machine». Certains des items du test sont empruntés à l'épreuve des Concentrations de Noelting ou encore à l'épreuve des Partages du même auteur. Dans ce dernier cas, il s'agit de partager des pizzas ou des tablettes de chocolat et d'en quantifier les portions sous forme de fractions a/b. Ces items ne requièrent pas d'explications supplémentaires puisqu'ils ont été expliqués l'avant-veille dans l'épreuve des Concentrations.

2.2.3 *Correction du test*

La correction du test tient compte de la réponse et de la démarche utilisée. Le sujet doit être capable de résoudre l'opération mathématique demandée, mais il doit également être en mesure d'indiquer à quel opérateur ou à quel type d'opération il fait appel pour obtenir son résultat. Ainsi, certains sujets préfèrent diviser par 3 plutôt que de multiplier par 1/3, par exemple. Les problèmes étant de complexité croissante, le dernier item réussi correspond au niveau d'opérateur atteint par le sujet.

2.3 Évaluation de la performance sur les opérations arithmétiques sur les fractions

2.3.1 *Description de l'instrument*

Un test de type papier-crayon a été construit aux fins de l'étude pour évaluer la maîtrise des opérations d'addition, de soustraction, de multiplication, de division des fractions simples et complexes, de même que la résolution de problèmes impliquant le raisonnement proportionnel. L'épreuve comprend 9 additions, 9 soustractions, 8 multiplications, 8 divisions et 4 problèmes portant sur le rapport proportionnel. Les questions sont tirées des tests Probe 7 et 8 (Sciences Research Associates, 1980) et de la banque d'instruments et de mesure du ministère de l'Éducation du Québec (Banque BIM).

2.3.2 *Administration de l'épreuve*

Le test fut administré après l'épreuve des Concentrations de Noelting. Sa durée fut d'environ 15 minutes. L'usage de la calculatrice est interdite. L'élève inscrit simplement sa réponse sur le questionnaire et laisse, s'il le désire, des traces de sa démarche de calculs.

2.3.3 *Correction de l'épreuve*

Chaque problème fait l'objet d'une évaluation. Le correcteur fait le total pour chacune des opérations. L'opération est considérée maîtrisée si l'élève obtient un minimum de 6 points lorsqu'il s'agit d'addition ou de soustraction et de 5 points lorsqu'ils s'agit de multiplication et de division.

Le degré de difficulté des opérations arithmétiques croît dans l'ordre suivant: addition, soustraction, multiplication et division. Ainsi, un sujet est classé dans la section multiplication s'il a obtenu la note de passage dans les deux sections précédentes, c'est-à-dire l'addition et la soustraction.

3 Description des procédés et traitement des données

Le test de signification statistique X^2 a été utilisé pour la vérification de chacune des hypothèses de recherche. Il s'agit d'un test non paramétrique développé par Karl Pearson. Il permet d'analyser au moyen de distributions de fréquences les situations sur une ou plusieurs populations. Il a l'avantage d'être exécuté sans que l'on pose d'hypothèses sur la loi de probabilité qui régit les caractères considérés. D'autre part, les caractères peuvent être qualitatifs.

Pour être en mesure de le réaliser, on établit des tableaux de contingence qui servent à leur tour, à construire des tableaux de contribution. Ces contributions permettent de calculer la valeur de X^2_{exp}, en vue d'utiliser le test du X^2 comme test d'indépendance ou d'association. En effet, ce test autorise à vérifier s'il existe un lien, ou non, entre deux variables, qu'elles soient de nature qualitative ou quantitative.

Lorsque l'on veut savoir si les fréquences théoriques ($f_t i$) diffèrent significativement des fréquences observées ($f_o i$), on établit une comparaison en utilisant l'indicateur d'écart noté X^2. Cet indicateur est une variable aléatoire qui associe à chaque échantillon, prélevé au hasard de la population, la valeur expérimentale de l'écart notée X^2_{exp}. Il est distribué selon une loi de X^2, pourvu que la taille de l'échantillon soit suffisamment importante.

Il détermine une distance entre la distribution expérimentale et la distribution théorique présumée. Pour une classe donnée, le facteur

$$X^2=\sum \frac{(f_0-f_t)^2}{f_t}$$

est la contribution de cette classe à la valeur expérimentale de X^2. Les contributions les plus importantes indiquent les classes où l'ajustement est le moins bon. La valeur minimale de X^2 est 0. C'est le cas où les fréquences théoriques sont rigoureusement égales aux fréquences observées. Dans la réalité, la valeur expérimentale de X^2 sera pour ainsi dire toujours positive et jamais nulle, car on observera toujours une certaine divergence entre les fréquences théoriques et les fréquences observées. Une valeur faible de X^2 indiquera que les fréquences théoriques se rapprochent assez bien des fréquences observées, tandis qu'une valeur trop élevée indiquera un ajustement qui n'est pas considéré de qualité suffisante.

Pour juger de l'importance des écarts entre les fréquences observées et les fréquences théoriques, on détermine le seuil de probabilité $X^2_{\alpha;\nu}$ auquel on compare la valeur expérimentale de X^2. L'hypothèse nulle (H_o) est celle d'indépendance ou d'absence de lien entre les deux caractères. Les conditions d'application doivent respecter la règle de Cochran sur les fréquences théoriques à savoir qu'aucune fréquence théorique n'est inférieure à 1 et que pas plus de 20% des fréquences théoriques ne sont inférieures à 5. Si le tableau des contingences ne respecte pas ces conditions, on doit alors prendre soin de regrouper deux ou plusieurs modalités, afin de rencontrer les paramètres indiqués par Cochran.

La règle de décision est telle que l'on doit rejeter H_o si $X^2 > X^2_{\alpha;\nu}$. On décide alors de retenir H_1 au seuil de signification α. Lorsque l'on rejette l'hypothèse nulle, il est intéressant de noter l'intensité de l'association des caractères étudiés. Toutefois, le test du X^2 ne fournit pas cette indication. On doit alors recourir à un coefficient de corrélation adéquat.

Le coefficient de contingence, noté C, est défini par

$$C=\sqrt{\frac{X^2_{\exp}}{N+X^2_{\exp}}}$$

Ce coefficient prend la valeur de 0 si les variables sont indépendantes et sa valeur augmente à mesure que l'intensité de l'association s'accroît. La valeur maximale que peut atteindre le coefficient de contingence est calculée par

$$\sqrt{\frac{r'-1}{r'}}$$

où r' représente le nombre minimum de rangées (ou de colonnes). On devra donc interpréter le coefficient de contingence en relation avec la valeur maximale que peut prendre le coefficient de contingence.

Toutefois le coefficient de contingence présente certaines limites reliées au nombre de classes et à la taille de l'échantillon. Dans ce cas, le coefficient de Cramer, noté φ', peut suppléer à ces inconvénients. Ce coefficient dont la valeur peut varier entre 0 et 1, est établi par la relation

$$\varphi'=\sqrt{\frac{X^2_{\text{exp}}}{N(A-1)}}$$

où N est la taille minimale de l'échantillon,

A est le minimum de r (rangées) ou k (colonnes)

Il prend la valeur 0 s'il y a complète indépendance entre les variables, et 1 si l'association entre les variables est parfaite. Il s'avère donc plus facile à manipuler que le coefficient de contingence. Le coefficient de Cramer s'apparente au coefficient de Pearson.

Plus précisément, pour chacune des hypothèses, les informations ont été regroupées sous forme de tableau de contingence répondant aux critères de la règle de Cochran. Cette règle spécifie qu'aucune fréquence observée ne peut être inférieure à 5; qu'aucune des fréquences théoriques ne doit être inférieure à 1 et que pas plus de 20% des fréquences théoriques ne doivent être inférieures à 5. A partir de ce tableau de contingence, le tableau de contributions est établi, ce qui permet de calculer la valeur du X^2. Cette valeur du X^2 est ensuite comparée au seuil statistique de rejet. Ce dernier est préalablement déterminé, à l'aide d'une table, selon le nombre de degrés de liberté du tableau de contingence et un seuil de signification statistique de 5%. Si la valeur du X^2 obtenue est inférieure à la valeur du seuil statistique de rejet, alors on ne rejette pas l'hypothèse nulle, ce qui signifie qu'il n'y a pas de lien entre les deux variables étudiées. Si au contraire, la valeur du X^2 obtenue est supérieure à la valeur du seuil statistique de rejet, on rejette l'hypothèse nulle et on peut établir qu'il existe un lien entre les deux variables étudiées. La recherche se poursuit en calculant la valeur du coefficient de contingence et du coefficient de Cramer pour déterminer la force du lien existant entre les deux variables. Il est à noter que ces coefficients n'ont de signification que dans la mesure où l'hypothèse nulle a été rejetée.

CHAPITRE IV

ANALYSE ET INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS

CHAPITRE IV

ANALYSE ET INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS

Ce chapitre vise à présenter et à discuter l'ensemble des résultats de cette étude. La première partie de ce chapitre présente les résultats recueillis grâce aux trois tests administrés aux sujets de l'étude. Les études statistiques réalisées à l'aide du X^2 montrent qu'il existe un lien entre le stade opératoire atteint par le sujet et la classe qu'il fréquente, ainsi qu'entre le niveau d'opérateur atteint par le sujet et la classe qu'il fréquente. Les calculs statistiques permettent également de constater qu'il existe une relation entre le stade opératoire et le niveau d'opérateur atteint par le sujet. Toutefois, de telles relations n'ont pu être observées lorsqu'on tente d'établir un parallélisme entre opérateur et réussite des opérations arithmétiques impliquant la fraction, ainsi qu'entre niveau opératoire et réussite des mêmes opérations arithmétiques. La seconde partie a pour but d'interpréter les résultats obtenus.

1 Présentation des résultats

Cette section vise à présenter les résultats obtenus lors de la passation des tests et des épreuves opératoires. Elle vise à offrir une vue d'ensemble des informations recueillies qui permet d'éclairer les hypothèses qui sont présentées et interprétées dans la section suivante.

1.1 Présentation des résultats à l'épreuve des Concentrations de Noelting en relation avec la classe de l'élève

L'examen des résultats permet de constater que les effectifs sont regroupés en trois blocs distincts. La deuxième année du secondaire semble être une année charnière, où le sujet passe des sous-stades opératoires concrets aux sous-stades opératoires formels. A partir de la troisième année du secondaire, le changement de stade s'est opéré. Les élèves de la troisième (50%), de la quatrième (70%) et de la cinquième (50%) secondaire occupent fortement le sous-stade opératoire formel supérieur.

Le tableau 3 présente la distribution des élèves selon la classe qu'ils fréquentent et en fonction des résultats obtenus à l'épreuve des Concentrations - Forme Générale - de Noelting.

Globalement, l'examen des résultats permet d'observer une certaine gradation et de voir émerger trois blocs. Des 152 sujets de l'étude, 110 (72%) font partie des sous-stades IIIA, IIIB et IV. Alors que la plupart des élèves de première secondaire (64%) se trouvent au sous-stade opératoire concret, la majeure partie de ceux des autres années, se situe aux sous-stades opératoires formels. Les élèves de la troisième (53%), de la quatrième (82%) et de la cinquième (54%) secondaire, se situent majoritairement aux sous-stades opératoires formel supérieur et méta-formel, ce qui n'est pas le cas des élèves de la deuxième secondaire (43%). Ces derniers atteignent les sous-stades opératoires concret supérieur (24%), formel inférieur (14%) et formel supérieur (38%). La plus forte proportion d'élèves (82%) du sous-stade opératoire formel supérieur se retrouve en quatrième secondaire. Ceci est d'autant plus notable, que les élèves qui les précèdent, soit ceux de la troisième secondaire (53%) et ceux qui leur succèdent, soit ceux de la cinquième secondaire (54%), se situent dans des proportions identiques, à ce sous-stade. Pour sa part, le sous-stade opératoire métaformel n'a été atteint que par quelques élèves.

Tableau 3

Nombre de sujets, selon la classe qu'ils fréquentent, en fonction de leur stade de développement

SEC	STADES OPÉRATOIRES								TOTAL
	CONCRET					FORMEL			
	IB	IC	IIA	IIB	IIC	IIIA	IIIB	IV	
1ère	0 0%	2 8%	6 24%	1 4%	7 28%	3 12%	5 20%	1 4%	25
2ème	1 4,8%	1 4,8%	2 9,5%	0 0%	5 23,8%	3 14,3%	8 38%	1 4,8%	21
3ème	0 0%	1 3,3%	2 6,7%	0 0%	5 16,7%	6 20%	15 50%	1 3,3%	30
4ème	0 0%	0 0%	0 0%	1 2%	2 4%	6 12%	35 70%	6 12%	50
5ème	0 0%	0 0%	1 3,8%	0 0%	5 19,2%	6 23,1%	13 50%	1 3,8%	26
	1	4	11	2	24	24	76	10	152
TOTAL REGROUPÉ: 42						**110**			

Les fréquences relatives sont exprimées en pourcentages.

Par ailleurs, on note que les proportions d'élèves ayant atteint le formel sont plus grandes chez les élèves de la troisième, de la quatrième et de la cinquième secondaire que chez ceux de la première et de la deuxième secondaire. La majorité des élèves de la première secondaire se situent aux sous-stades IIA (24%) et IIC (28%). Les élèves de la première secondaire atteignent majoritairement le stade opératoire concret supérieur (56%) tandis que ceux de la deuxième secondaire se situent entre les sous-stades IIC (24%) et IIIB (38%). Pour cette classe, le sous-stade IIIA semble faire le pont entre le stade opératoire concret (43%) et le stade opératoire formel supérieur (43%).

Un test du X^2 a été utilisé comme test d'indépendance ou d'association entre les paramètres afin de vérifier s'il existe un lien significatif entre le stade opératoire atteint par un sujet et la classe qu'il fréquente.

Afin de fournir suffisamment d'effectifs, et pour respecter la règle de Cochran quant à l'application de ce test, certains sous-stades ont été regroupés. Cette règle spécifie qu'aucune fréquence observée ne peut être inférieure à 5, qu'aucune des fréquences théoriques ne doit être inférieure à 1 et que pas plus de 20% des fréquences théoriques ne doivent être inférieures à 5. Les données ont été compilées à l'intérieur du tableau 4 où les sous-stades pré-opératoires et opératoires concrets ont dû être regroupés de même que les sous-stades opératoires formels. Les sujets des sous-stades pré-opératoires étant peu nombreux (3% des effectifs totaux), il est apparu acceptable de les rassembler avec les sujets des stades opératoires concrets. Les données ont été ensuite converties en contributions, permettant de déterminer le X^2 expérimental qui se calcule selon la formule suivante:

$$X^2=\sum \frac{(f_0-f_t)}{f_t}$$

Tableau 4

Nombre de sujets, avec fréquences relatives et contributions, par stade opératoire, et ce, en fonction de la classe fréquentée

STADES OPÉRATOIRES	SECONDAIRE					
	1ère	2ème	3ème	4ème	5ème	TOTAL
CONCRET	16 38,1% **11,9669**	9 19,1% **1,1073**	8 21,4% **0,0220**	3 7,1% **8,4672**	6 14,3% **0,1952**	42
FORMEL	9 8,2% **4,5692**	12 11,8% **0,1501**	22 19,1% **0,0917**	47 42,7% **3,2329**	20 18,2% **0,0745**	110
TOTAL	25	21	30	50	26	152

Les fréquences relatives sont exprimées en pourcentage et les contributions sont inscrites en caractères gras.

Pour ce test, le seuil de signification statistique est de 5% ($p \leq 0,05$) et le nombre de degrés de liberté est de 4. La détermination du seuil de rejet est de $X^2_{0,05;\ 4} = 14,8602$. La valeur du X^2 est de 29,8770 et elle est supérieure à 14,8602 ($p \leq 0,001$). Cette comparaison révèle qu'il existe une relation entre le stade opératoire (concret ou formel), atteint par un sujet, et la classe qu'il fréquente.

Le coefficient de contingence (C) est un indice permettant de mesurer le degré d'association entre deux variables. Sa valeur tient compte du nombre de colonnes et de rangées qui constituent le tableau de contingence. Il est de 0,1285 alors que le coefficient de contingence maximal est de 0,7071. Quant au coefficient de Cramer (φ'), il est de 0,444. Il peut prendre une valeur comprise entre 0 et 1. Plus le coefficient est près de 1, plus le lien entre les variables en jeu est fort. Ce coefficient tient compte du nombre de sujets de l'étude. L'association entre les deux paramètres est très forte.

La figure 1 permet de comparer l'évolution des sujets, selon la classe qu'ils fréquentent, en fonction des sous-stades opératoires atteints. En première secondaire, 64% des sujets appartiennent au stade opératoire concret, alors que 36% d'entre eux, se situent au stade opératoire formel. Cette

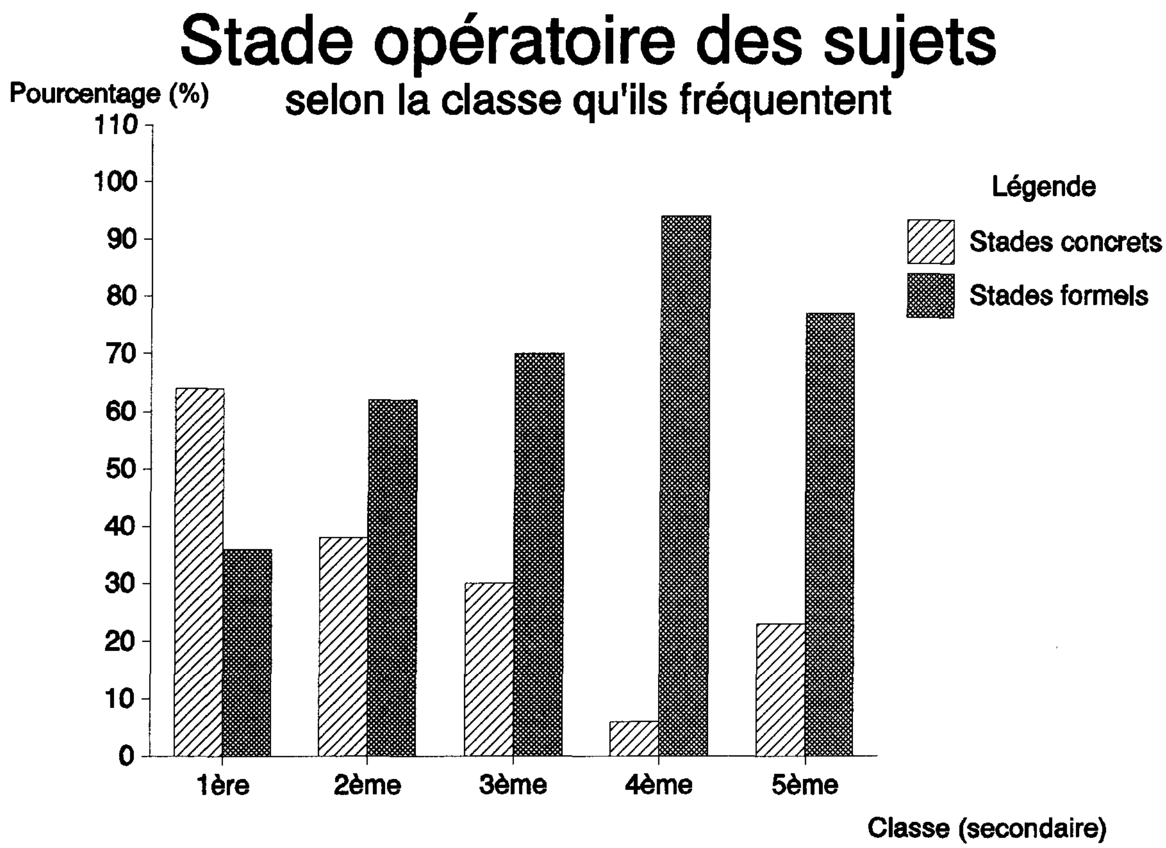


Figure 1

proportion s'inverse complètement à partir de la deuxième secondaire où 43% des sujets sont au stade opératoire concret et 57% au stade opératoire formel. En troisième secondaire, 27% des sujets sont au stade opératoire concret et 70% au stade opératoire formel. En quatrième secondaire, pratiquement tous les sujets appartiennent au stade opératoire formel (94%). En cinquième secondaire, les proportions s'apparentent à celles de la troisième secondaire. En effet, 23% des sujets de cette classe appartiennent au stade opératoire concret et 77%, au stade opératoire formel.

1 Énoncé des hypothèses

1.1 Première hypothèse de recherche

H_1: Il existe un parallélisme entre le niveau d'opérateur atteint par un individu et le stade opératoire atteint par cet individu dans sa construction de la notion de rapport.

1.2 Deuxième hypothèse de recherche

H_1: Il existe un parallélisme entre le niveau d'opérateur et les résultats obtenus au test des opérations arithmétiques impliquant la fraction.

1.3 Troisième hypothèse de recherche

H_1: Il existe un parallélisme entre le stade opératoire atteint par un individu dans sa construction de la notion de rapport et les résultats obtenus au test arithmétique impliquant les opérations sur les fractions.

Ce fait est notable, si l'on considère que les élèves de la cinquième secondaire, âgés de 16 et 17 ans, devraient atteindre, en proportion plus grande, un stade opératoire plus avancé comparativement à ceux de la troisième secondaire qui, sont âgés de 14 et 15 ans. Il est possible que les élèves de la cinquième secondaire accusent un recul en ce domaine. Cependant, si l'on trace une droite partant des classes extrêmes (de la première et de la cinquième secondaire), d'un stade opératoire donné (concret ou formel), on trouve une relation linéaire dont l'aspect colinéaire n'est entravé que par la valeur correspondant à la quatrième secondaire. Il est difficile d'expliquer ce qui se passe pour cette année du secondaire.

1.2 Présentation des résultats des sujets au test de Kieren (niveaux de l'opérateur) selon la classe qu'ils fréquentent

Les données recueillies permettent de constater l'existence de quatre niveaux d'opérateur. Le tableau 5 présente les fréquences relatives de sujets, selon la classe fréquentée par niveau d'opérateur. Ce tableau montre que les sujets, sans égard à la classe à laquelle ils appartiennent, se regroupent plus fortement autour des niveaux d'opérateur 2 (41%) et 4 (38%). Le niveau 1 est pratiquement inexistant (3%) alors que le niveau 3 recueille 18% des effectifs. Globalement, la majorité des sujets du premier cycle du secondaire (de la première à la troisième secondaire) forment 75% des effectifs du niveau 2. Les élèves du deuxième cycle du secondaire constituent quant à eux, 78% des effectifs du niveau 4.

Tableau 5

Fréquences relatives (%) des sujets selon la classe fréquentée, par niveau d'opérateur

	NIVEAU D'OPÉRATEUR			
SECONDAIRE	**1**	**2**	**3**	**4**
1ère	12	68	16	4
2ème	4,8	57,1	14,3	23,8
3ème	0	60	16,7	23,3
4ème	2	18	18	62
5ème	0	26,9	23,1	50

Les élèves de la première secondaire se situent majoritairement au niveau 2 (68%). Cette tendance se maintient pour la deuxième année du secondaire où peu d'élèves sont encore au niveau 1 (5%). La majorité de ces élèves sont au niveau 2 (57%) bien qu'une partie importante d'entre eux occupe les niveaux 3 (14%) et 4 (24%). Peu d'élèves des classes de la troisième, de la quatrième et de la cinquième secondaire sont au niveau 1. En troisième secondaire, 60% des élèves se situent au niveau 2, 17% au niveau 3, et 23% au niveau 4. Parmi les élèves de quatrième secondaire, 18% sont au niveau 2, 18% sont au niveau 3 et 62% au niveau 4. La moitié des élèves de la cinquième secondaire se situe au niveau 2 (27%) et 3 (23%) alors que l'autre moitié est au niveau 4. Le passage du niveau 2 au niveau 4 se fait entre la troisième et la quatrième secondaire.

Le tableau 6 permet d'observer la répartition des sujets en fonction des niveaux d'opérateur et ce, selon la classe fréquentée. Cette représentation apporte un éclairage différent de celui du tableau 5. Environ 80% des sujets qui se situent au niveau d'opérateur 1 sont des élèves de la première et de la deuxième secondaire. Le niveau 2 quant à lui, recueille près de 75% de ses effectifs chez les sujets du premier cycle du secondaire, c'est-à-dire de la première à la troisième secondaire. Le niveau 3 recrute 75% de ses effectifs en troisième, quatrième et cinquième année du secondaire. Les sujets de la troisième secondaire se situent principalement aux niveaux 2 et 3. Soixante et dix-huit pour cent (78%) des effectifs du niveau 4 sont issus du deuxième cycle du secondaire. La majorité des sujets a tendance à se déplacer vers un niveau d'opérateur supérieur, au fur et à mesure qu'ils fréquentent une classe plus avancée .

Tableau 6

La répartition des sujets en fonction du niveau d'opérateur selon la classe fréquentée

NIVEAU D'OPÉRATEUR	SECONDAIRE 1ère	2ème	3ème	4ème	5ème	TOTAL
1 (1/2)	3 60%	1 20%	0 0%	1 20%	0 0%	5
2 (1/3)	17 27%	12 19%	18 28,6%	9 14,3%	7 11%	63
3 (2/3)	4 14,8%	3 11,1%	5 18,5%	9 33,3%	6 22,2%	27
4 (4/3)	1 1,8%	5 8,8%	7 12,3%	31 55,4%	13 22,8%	57
TOTAL	25	21	30	50	26	152

Les fréquences relatives sont exprimées en pourcentages.

Le test statistique du X^2 a aussi été utilisé pour vérifier s'il existe un lien significatif entre le niveau d'opérateur, décrit par Kieren, et la classe fréquentée.

Pour respecter la règle de Cochran, les effectifs de la première et de la deuxième secondaire ont été rassemblés (voir tableau 7). Ce groupement semble acceptable, compte tenu du fait qu'à ce niveau, les contenus notionnels enseignés en mathématique sont similaires. De plus, les niveaux d'opérateurs 1 et 2 ont dû être regroupés. Il est à noter que Southwell et Kieren (1979) n'ont trouvé aucune différence significative entre ces deux niveaux d'opérateur. L'application du test du X^2 sur les données présentées au tableau 7 révèle l'existence d'un lien significatif. En effet, le X^2 obtenu est de 36,3749 (degrés de liberté: 6; $p \leq 0,001$).

Cette comparaison permet de révéler qu'il existe une relation entre le niveau d'opérateur, décrit par Kieren, et la classe que fréquente un sujet. Le coefficient de contingence est de 0,4394 et son coefficient de contingence maximal est de 0,8165. Quant au coefficient de Cramer, il est de 0,3459. Ceci indique une association forte.

Les élèves du premier cycle atteignent majoritairement les niveaux d'opérateur 1 et 2, tandis que ceux du deuxième cycle occupent majoritairement le niveau d'opérateur 4. Ainsi, 72% des élèves de la première et de la deuxième secondaire, de même que 60% de ceux de la troisième secondaire se situent aux niveaux 1 et 2. Par ailleurs, 62% des élèves de quatrième secondaire, et 50% des élèves de cinquième secondaire sont au niveau d'opérateur 4.

Tableau 7

Nombre de sujets avec fréquences relatives et contributions selon la classe fréquentée et ce, en fonction du niveau d'opérateur atteint

SECONDAIRE	NIVEAU D'OPÉRATEUR 1-2	3	4	Total
1ère - 2ème	33 (71,7%) **7,4972**	7 (15,2%) **0,1678**	6 (13%) **7,3370**	46
3ème	18 (60%) **1,5622**	5 (16,7%) **0,0203**	7 (23,3%) **1,6056**	30
4ème	10 (20%) **6,8390**	9 (18%) **0,0016**	31 (62%) **8,0033**	50
5ème	7 (26,9%) **1,8443**	6 (23,1%) **0,4133**	13 (50%) **1,0833**	26
Total	68	27	57	152

Les fréquences relatives sont indiquées entre parenthèses et les contributions sont inscrites en caractères gras.

Ces résultats confirment l'affirmation de Kieren selon laquelle, le niveau d'opérateur est hiérarchique et varie selon l'âge. Toutefois, les âges décrits par Kieren, en relation avec ces niveaux d'opérateur, ne correspondent pas aux âges des sujets de cette expérimentation.

1.3 <u>La réussite des opérations arithmétiques impliquant la fraction selon la classe que fréquente un sujet</u>

Ce point de questionnement a une portée davantage pratique puisqu'il est lié au quotidien de l'enseignement de la mathématique en classe secondaire. Tous les sujets ont reçu l'enseignement relatif aux opérations arithmétiques de la fraction depuis la première année du secondaire. Il est possible de supposer que plus le sujet avance en âge, donc plus il fréquente une classe supérieure, plus sa maîtrise sur ces algorithmes de calcul est grande.

Un tableau de contingence (voir tableau 8) contenant les résultats obtenus par les sujets, selon la classe qu'ils fréquentent, au test des opérations arithmétiques impliquant la fraction, a été construit pour tenter de répondre à la question. Les résultats des élèves de la première et de la deuxième secondaire ont été rassemblés. Ce regroupement peut se justifier par le fait que les élèves de première secondaire complètent l'acquisition des algorithmes de calcul impliquant la fraction et que ceux de deuxième secondaire consacrent une bonne partie de leur programme de mathématique à maîtriser les concepts de rapports et de proportions. De plus, il a semblé approprié de réunir les opérations d'addition et de soustraction puisqu'elles nécessitent l'utilisation du dénominateur commun.

Aucune relation n'existe entre la classe que fréquente un sujet et la réussite pour une opération arithmétique donnée. Près de la moitié des élèves de la première et la deuxième secondaire (48%), réussissent les opérations d'addition et de soustraction. Plus du tiers de ces élèves (35%) réussissent les opérations de multiplication et 17% maîtrisent les opérations de division. En troisième secondaire, plus de la moitié des élèves (53%) réussissent les opérations d'addition et de soustraction et 43% réussissent les opérations de multiplication, mais peu réussissent les opérations de division (3%). La performance des élèves de la quatrième secondaire se rapproche de celle des élèves de la première secondaire. Plus de la moitié de ces élèves (58%) réussissent les opérations d'addition et de soustraction, 30% réussissent celles de multiplication, alors que 12% réussissent les opérations de division. Les élèves de la cinquième secondaire sont ceux qui réussissent le mieux les opérations de division (35%). Ils réussissent également les opérations d'addition et de soustraction dans une proportion de 39% et celles de multiplication dans une proportion de 27%.

Tableau 8

Nombre de sujets, fréquences relatives et contributions selon la classe fréquentée, en fonction de la réussite des opérations arithmétiques impliquant la fraction

SECONDAIRE	OPÉRATIONS ARITHMÉTIQUES			TOTAL
	+ et -	X	÷	
1ère et 2ème	22 (47,8%) **0,0728**	16 (34,7%) **0,0207**	8 (17,4%) **0,0747**	46
3ème	16 (53,3%) **0,0424**	13 (43,3%) **0,8553**	1 (3,3%) **2,9479**	30
4ème	29 (58%) **0,5321**	15 (30%) **0,1881**	6 (12%) **0,4547**	50
5ème	10 (38,5%) **0,7635**	7 (26,9%) **0,3406**	9 (34,6%) **5,8359**	26
TOTAL	77	51	24	152

Les fréquences relatives sont exprimées entre parenthèses et les contributions sont inscrites en caractères gras.

La baisse de fréquences relatives, pour les opérations d'addition et de soustraction, peut s'expliquer par un glissement des sujets vers les opérations de multiplication et de division.

Somme toute, les élèves de la première à la quatrième secondaire ne semblent bien maîtriser que les opérations d'addition et de soustraction (plus de la moitié des sujets). Environ le tiers des élèves seulement maîtrisent à la fois l'addition, la soustraction et la multiplication. Les élèves de la cinquième secondaire, quant à eux, semblent amorcer une réussite des quatre opérations arithmétiques. C'est peut-être là que se situe le passage vers la réussite de toutes les opérations arithmétiques impliquant la fraction.

Par ailleurs, le test du X^2 a été utilisé pour vérifier s'il y a existence d'un lien significatif entre les variables en cause. Le seuil de signification est de 5% ($p \leq 0,05$) et le nombre de degrés de liberté est de 6. La détermination du seuil de rejet est de $X^2_{0,05;\ 6} = 12,5916$, le seuil de signification n'est pas atteint. En effet, la probabilité est de 10%. Une telle probabilité indique toutefois une tendance vers la signification statistique.

1.4 Vérification des hypothèses de recherche

1.4.1 *Première hypothèse*

La première hypothèse de recherche est à l'effet qu'***il existe un parallélisme entre le niveau d'opérateur acquis par un individu et le stade opératoire atteint par cet individu dans sa construction de la notion de rapport.*** Les hypothèses statistiques posées sont les suivantes:

H_o: Il n'y a pas de lien entre le stade opératoire, atteint par un sujet, et le niveau d'opérateur.

H_1: Il existe un lien entre le stade opératoire, atteint par un sujet, et le niveau d'opérateur.

Après avoir dressé un premier tableau de contingence, il a été décidé de regrouper certains caractères (voir tableau 9) afin de respecter la règle de Cochran. Les niveaux d'opérateur 1 et 2 ont donc été rassemblés, compte tenu du fait qu'ils contiennent peu d'effectifs et qu'ils sont très près par leur contenu d'opérateur 1/m → 1/2 et 1/3, (Kieren et Southwell; 1979). Les sous-stades pré-opératoires et opératoires concrets (IB, IC, IIA, IIB et IIC) ainsi que les sous-stades opératoires formels (IIIA, IIIB et IV) ont aussi été réunis. Cette réorganisation enlève certes, une part de raffinement à l'étude, mais n'en affecte pas le sens.

La plupart des sujets des sous-stades opératoires concrets, plus des deux tiers (69%), se retrouvent dans les niveaux d'opérateur 1 et 2. Les autres sujets de ces sous-stades se répartissent de façon décroissante dans les niveaux 3 (19%) et 4 (12%). Les sujets des sous-stades opératoires formels ne montrent pas, quant à eux, de tendance vraiment marquée. Ils se regroupent aux deux extrémités des niveaux décrits par Kieren. Ainsi, on retrouve un peu plus du tiers (35%) de ces sujets aux niveaux d'opérateur 1 et 2, alors que près de la moitié se situe au niveau 4 (47%). Le niveau 3 ne recueille que 17% des effectifs des sujets de ces stades.

Le seuil de signification statistique est de 5% ($p \leq 0,05$) et le nombre de degrés de liberté est de 2. La détermination du seuil de rejet est de $X^2_{0,05;\ 2} = 5,9914$. Puisque le X_2 est de 17,8597 comparativement à 5,9914, qui est le seuil de rejet, on peut rejeter H_o au seuil de signification de 5%. On peut même rejeter H_o au seuil de signification 0,1%, car X^2 est supérieur à $X^2_{0,001;\ 2} = 13,817$.

Tableau 9

Nombre de sujets, fréquences relatives et contributions par stade opératoire en fonction du niveau d'opérateur

STADES OPÉRATOIRES	**NIVEAU D'OPÉRATEUR**			**TOTAL**
	1 et 2	**3**	**4**	
CONCRET	29 (69,1%) **5,5485**	8 (19,1%) **0,0390**	5 (11,90%) **7,3373**	42
FORMEL	39 (35,5%) **2,1186**	19 (17,3%) **0,0149**	52 (47,3%) **2,8015**	110
TOTAL	68	27	57	152

Les fréquences relatives sont indiquées entre parenthèses et les contributions sont inscrites en gras.

Le coefficient de contingence est de 0,3243 alors que le coefficient maximal pour ce type de tableau est de 0,7071. Le coefficient de Cramer est, quant à lui, de 0,3428. Bien que ces coefficients nous permettent d'affirmer qu'il existe un lien solide entre les variables identifiées, la plus grande des prudences s'impose en ce qui a trait au parallélisme ou au lien entre le niveau de construction (sous-stades) de la notion de rapport d'un individu et le niveau de l'opérateur par ce même individu. En effet, plusieurs regroupements ont été effectués.

1.4.2 *Deuxième hypothèse*

La deuxième hypothèse de recherche est à l'effet qu'***il existe un parallélisme entre le niveau d'opérateur et les résultats obtenus au test des opérations arithmétiques impliquant la fraction.*** Les hypothèses statistiques sont les suivantes:

H_o: Il n'y a pas de lien entre le niveau d'opérateur, atteint par un sujet et la réussite des opérations arithmétiques impliquant la fraction.

H_1: Il existe un lien entre le niveau d'opérateur, atteint par un sujet et la réussite des opérations arithmétiques impliquant la fraction.

Afin de traiter les résultats de cette section, il a fallu grouper les effectifs (voir tableau 10) pour être en mesure de répondre aux critères prescrits par Cochran. Les niveaux d'opérateur 1 et 2 ont dû être réunis. Les niveaux d'opérateur 3 et 4 présentaient des fréquences suffisantes pour être traités séparément. Pour ce qui est des opérations arithmétiques, les fréquences de l'addition et de la soustraction ont été rassemblées, de même que celles de la multiplication et de la division. Cette organisation semble valable si l'on accepte que les opérations arithmétiques s'acquièrent selon cet ordre; à tout le moins elles sont enseignées ainsi. Toutefois, la division aurait gagné à être classée à part, compte tenu de son niveau de difficulté. On se souvient d'autre part, que chaque sujet est classé dans la dernière opération réussie. Ainsi, un sujet ayant réussi l'addition et la soustraction, mais ayant échoué la multiplication et la division, se voit inscrit dans la classe «soustraction».

L'examen du tableau 10 montre que, 45% des sujets qui réussissent les opérations d'addition et de soustraction, appartiennent aux niveaux 1 et 2, comparativement à 18,6% pour les sujets du niveau 3, et 36% pour les sujets du niveau 4. Ces proportions demeurent les mêmes pour les opérations de multiplication et de division, puisque 44% des sujets qui les réussissent appartiennent aux niveaux 1 et 2, 17% proviennent du niveau 3, et 39% sont du niveau 4. En regroupant les niveaux 3 et 4, on trouve qu'ils représentent 55% des sujets qui réussissent l'addition et la soustraction, et 56% de ceux qui réussissent la multiplication et la division.

Le regroupement des niveaux 3 et 4 ne permet pas d'apporter de nuances supplémentaires, quant à la réussite des opérations arithmétiques, en fonction de l'opérateur.

Tableau 10

Nombre de sujets, fréquences et contributions par groupe d'opérations arithmétiques en fonction des niveaux d'opérateur

OPÉRATIONS ARITHMÉTIQUES	NIVEAU D'OPÉRATEUR			TOTAL
	1 et 2	3	4	
Addition Soustraction	39 (45,4%) **0,0072**	16 (18,6%) **0,0343**	31 (36,1%) **0,0484**	86
Multiplication Division	29 (43,9%) **0,0094**	11 (16,7%) **0,0447**	26 (39,4%) **0,0631**	66
TOTAL	68	27	57	152

Les fréquences relatives sont exprimées entre parenthèses et les contributions sont inscrites en caractères gras.

Le seuil de signification est de 5% ($p \leq 0,05$) et le nombre de degrés de liberté est de 2. La détermination du seuil de rejet est de $X^2_{0,05;\ 2} = 5,9914$. Puisque le X^2 est de 0,2071 comparativement à 5,9914, on ne peut rejeter l'hypothèse nulle H_o, au seuil de signification de 5%. Il est donc possible de conclure qu'il n'y a pas de lien significatif entre les variables en jeu.

Une présentation différente de ces données, comme celles inscrites au tableau 11 et montrant les fréquences relatives des niveaux d'opérateur, décrits par Kieren, en fonction des opérations arithmétiques relatives à la fraction, indique la difficulté d'établir une démarcation exprimant la réussite d'une opération donnée, pour un même niveau d'opérateur.

Tableau 11

Fréquences relatives (%) des niveaux d'opérateur, en fonction des opérations arithmétiques relatives à la fraction

NIVEAU D'OPÉRATEUR	ADDITION SOUSTRACTION	MULTIPLICATION DIVISION
1 et 2	57,4	42,6
3	59,3	40,7
4	54,4	45,6
Moyenne:	57,03	42,97

Si l'on calcule la moyenne de l'ensemble des niveaux d'opérateur, en ce qui concerne la réussite des opérations d'addition et de soustraction, on obtient une moyenne de 57%, comparativement à une moyenne d'environ 43%, pour les opérations de multiplication et de division.

1.4.3 *Troisième hypothèse*

La troisième hypothèse de recherche est à l'effet qu'***il existe un parallélisme entre le stade opératoire atteint par un individu dans sa construction de la notion de rapport et les résultats obtenus au test arithmétique impliquant les opérations sur les fractions.***

Les hypothèses statistiques qui en découlent sont les suivantes:

H_o: Il n'y a pas de lien entre le stade opératoire, atteint par un sujet, et la réussite des opérations arithmétiques impliquant la fraction.

H_1: Il existe un lien entre le stade opératoire, atteint par un sujet, et la réussite des opérations arithmétiques impliquant la fraction.

Afin de respecter les critères établis par Cochran, les sous-stades pré-opératoires et opératoires concrets ont été regroupés, de même que les sous-stades opératoires formels. Les opérations arithmétiques ont pu, quant à elles, conserver leur caractère distinct.

Tableau 12

Nombre de sujets, fréquences relatives et contributions par stade opératoire en fonction de la réussite des opérations arithmétiques impliquant la fraction

STADES OPÉRATOIRES	OPÉRATIONS ARITHMÉTIQUES				TOTAL
	+	-	X	÷	
CONCRET	8 (19,1%) **0,0718**	11 (26,2%) **0,1850**	15 (35,7%) **0,0042**	8 (19,1%) **0,6071**	42
FORMEL	9 (8,2%) **0,8866**	48 (43,6%) **0,6585**	39 (35,5%) **0,002**	14 (12,7%) **0,2318**	110
TOTAL	17	59	54	22	152

Les fréquences relatives sont données entre parenthèses et les contributions sont inscrites en caractères gras.

Parmi les sujets des sous-stades opératoires concrets, 19% réussissent les opérations d'addition, 26% celles de soustraction, 36% celles de multiplication et 12%, celles de division. Chez les sujets des stades sous-opératoires formels, 8% réussissent les opérations d'addition, 44% celles de soustraction, 35% celles de multiplication et 12%, celles de division.

La proportion de sujets des sous-stades opératoires concrets qui réussit les opérations d'addition est de 19%, comparativement à celle des sujets des sous-stades opératoires formels supérieurs, qui est de 8%. Par ailleurs, le phénomène inverse se produit, pour ce qui est de la réussite des opérations de soustraction. Chez les sujets des sous-stades opératoires formels, 44% les réussissent, par rapport 26% des sujets des sous-stades opératoires concrets. La proportion de réussite pour les opérations de multiplication est pratiquement la même chez les sujets des sous-stades opératoires concrets (35,71%) et chez ceux des sous-stades opératoires formels (35,45%). Un plus grand pourcentage des sujets des sous-stades opératoires concrets (19%) réussissent les opérations de division comparativement aux sujets des sous-stades opératoires formels (13%).

Le seuil de signification statistique est de 5% ($p \leq 0,05$) et le nombre de degrés de liberté est de 3. La détermination du seuil de rejet est de $X^2_{0,05;\,3} = 7,8147$. Puisque le X^2 obtenu est de 2,6452 comparativement à 7,8147, qui est le seuil de rejet, on ne peut rejeter l'hypothèse nulle (H_0), au seuil de signification de 5%. On conclut qu'il n'existe aucun lien entre le stade opératoire, atteint par un sujet, et les opérations arithmétiques relatives à la fraction. Le tableau 11 renferme les informations obtenues à partir de ces paramètres.

2 Analyse des résultats

2.1 Résultats à l'épreuve des Concentrations de Noelting en relation avec la classe de l'élève

La relation significative trouvée entre les résultats obtenus à l'épreuve des Concentrations et la classe que fréquente un élève, confirme les résultats déjà obtenus par Noelting et al., au cours de leurs nombreux travaux (1966, 1973, 1973, 1980 a et b, 1982, 1986, 1992). La présente recherche, faite auprès de 152 élèves fréquentant l'ordre secondaire, permet de contribuer à tracer un profil de cette clientèle qui n'a pas fait suffisamment l'objet d'études spécifiques jusqu'à maintenant.

Le fait que cinq sujets de niveau secondaire n'aient pas atteint le stade opératoire concret, s'avère marginal. Dans l'ensemble, en comparant la proportion la plus importante d'une classe en fonction du sous-stade le plus avancé, on trouve une étroite relation entre le groupe d'âge impliqué et l'âge moyen établi par Noelting (1993).

L'analyse des données permet de noter que l'échantillon des élèves fréquentant le secondaire se scindait en trois groupes déterminant chronologiquement le passage des sous-stades opératoires concrets aux sous-stades opératoires formels. Ainsi, les élèves de la première secondaire atteignent majoritairement les sous-stades opératoires concrets, alors que les élèves de la deuxième secondaire constituent une année intermédiaire où la population des élèves oscille entre les sous-stades opératoire concret supérieur et opératoire formel supérieur. Enfin, le passage vers les sous-stades opératoires formels supérieurs se réalise à partir de la troisième secondaire. De tels constats corroborent d'ailleurs les travaux de Humbree (1990) et s'avèrent importants pour la présentation et l'organisation des stratégies d'enseignement et d'apprentissage.

2.2 Résultats au test de Kieren (niveaux de l'opérateur) en relation avec la classe que fréquente un sujet

En se basant sur les travaux de Kieren et al. (1978;1979) concernant les opérateurs, on pouvait s'attendre à ce que tous les sujets de l'étude, à partir de la deuxième année du secondaire, soient capables d'opérer au quatrième niveau, puisqu'ils sont âgés de plus de 13 ans. Or, on ne trouve cet état de fait qu'à partir du deuxième cycle du secondaire, c'est-à-dire la quatrième et la cinquième secondaire lorsque les élèves sont âgés de 15-16 à 16-17 ans. Dans les faits, les élèves demeurent longuement au deuxième niveau (de la première à la troisième secondaire) avant de passer, selon des rythmes pouvant différer d'un sujet à l'autre, aux troisième et quatrième niveaux.

La précision de l'instrument (Rational Number Thinking Test) ne permet pas de mettre en évidence la différence de construction entre les niveaux décrits par Kieren. Un seul type d'opérateur est présenté par niveau. Ainsi, pour le premier niveau associé à la fraction de type 1/m, seule la fraction 1/3 a été présentée, alors que l'on aurait pu faire appel à d'autres fractions du genre 1/5, 1/6, pour essayer de discriminer davantage la construction de ce niveau.

Par ailleurs, au deuxième niveau, ce qui semble être une faiblesse du test aura permis de découvrir ce qui semble être un niveau intermédiaire important pour la construction de l'opérateur. Dans ce niveau, seul l'opérateur 2/3 a été soumis. Or, lorsqu'on suppose le développement de l'élève dans la notion d'opérateur, on s'aperçoit qu'il permet l'utilisation de deux stratégies efficaces de résolution de problèmes. La première consiste à effectuer une division, suivie d'une soustraction (suite d'opérations).

Par exemple,

Entrant	→	***Sortant***	
6	(X 1/3)	4	(UTILISATION DE L'OPÉRATEUR)
	(OPÉRATEUR)		
6 ÷ 3 = **2**			(UTILISATION DE LA DIVISION
	6 - **2** = 4	4	ET DE LA SOUSTRACTION)

La seconde consiste à utiliser la multiplication, suivie de la division pour obtenir la bonne réponse (opération/ opération). Toutes les fractions de type n/m où n = m - 1 (où n est le numérateur et m est le dénominateur), provoquent ce type de réponses. L'utilisation d'opérateurs fractionnaires équivalents, comme 4/6 ou 6/9, aurait été beaucoup plus discriminante et éviterait l'ambiguïté reliée à ce type d'opérateur. Seule la seconde stratégie peut être utilisée dans ce cas. Par ailleurs, ces fractions équivalentes s'avèrent un peu plus complexes à résoudre. Noelting avait déjà compris ce phénomène et y avait pallié en ajoutant à l'épreuve des Concentrations, le sous-stade opératoire IIC où les rapports (2,4) vs (3,6) sont à comparer. Le test de Kieren (Rational Number Thinking Test) aurait tout avantage à s'enrichir de tels opérateurs qui permettent davantage de discriminer les différents niveaux. Par ailleurs, tout comme les niveaux précédents, le quatrième niveau d'opérateur n'utilise que la fraction 4/3.

L'intérêt de ces résultats est qu'ils amènent à identifier, tout comme Kieren, trois niveaux hiérarchisés de construction de l'opérateur. D'abord, au premier niveau, 1/m (soit les deux premiers niveaux de cette étude), le sujet utilise la stratégie qui consiste à diviser le nombre entrant par le dénominateur, pour obtenir le nombre sortant exact. Cette approche donne toujours des résultats positifs si la fraction est de la forme 1/m. Ensuite, au deuxième niveau qui correspond aux items du troisième niveau de cette recherche, le sujet procède par une suite d'opérations: division du nombre entrant par le dénominateur, suivie de la soustraction du quotient ainsi obtenu au nombre entrant, pour obtenir le nombre sortant correct. Cependant, cette stratégie n'est pas généralisable avec des fractions du type n/m, où $1 < n < (m - 1)$. Le troisième niveau chez Kieren qui correspond en fait au quatrième niveau de la présente étude demande réellement la capacité d'opérer dans le sens d'étirer (multiplication), puis de réduire une certaine quantité (division) (Behr et al., 1992).

Les entrants et sortants sont surtout des nombres entiers. Il aurait été intéressant de pouvoir travailler davantage avec des opérateurs de type fractionnaire tout comme le suggère Gimenez (1989).

2.3 La réussite des opérations arithmétiques relatives à la fraction selon la classe fréquentée

Un test du X^2, appliqué aux données recueillies, au seuil de signification statistique de 0,05 ($p \leq 0,05$), n'a pu démontrer l'existence d'une relation entre la classe fréquentée par le sujet et la réussite d'opérations arithmétiques impliquant la fraction. Toutefois, la probabilité statistique étant de 10% ($p = 0,1$), il est possible de parler de tendance vers le seuil de signification statistique. Il est donc difficile d'exclure, sans examen plus approfondi de la question, la possibilité de toute relation significative entre ces deux variables.

Un taux plus élevé de réussite pour les opérations plus complexes (multiplication et division), était attendu chez les sujets les plus avancés. C'est bien le cas pour les élèves de la cinquième secondaire. Cependant, ils sont immédiatement suivis par les élèves de la première et de la deuxième secondaire. Les élèves de la troisième secondaire et de la quatrième secondaire arrivant bons derniers. Il est possible que cette situation trouve son explication dans la pérennité des règles a demi-mémorisées (Kerslake, 1979; Suydam, 1979) et non à la compréhension et aux constructions réalisées par les élèves comme le souhaiterait Kamii (1983), car enfin si le sujet est en mesure de comprendre comment s'effectue une opération, il doit être capable de "reconstruire" l'algorithme permettant de généraliser cette opération.

2.4 Résultats des hypothèses de recherche

2.4.1 *Première hypothèse*

Il existe un parallélisme entre le niveau d'opérateur atteint par un individu et le stade opératoire par cet individu dans sa construction de la notion de rapport.

Les résultats des analyses effectuées ont mis en évidence un lien significatif entre le stade opératoire atteint par un sujet dans sa construction de rapport et le stade opératoire atteint par un individu. Toutefois, il est impossible d'affirmer avec précision, compte tenu des regroupements effectués, qu'à tel niveau d'opérateur correspond tel stade opératoire, ou inversement. De façon générale, le coefficient de Cramer permet, tout au plus, de conclure qu'il existe une forte relation, entre le sous-stade opératoire d'un sujet et son niveau d'opérateur. Bien que l'étude compte 152 sujets, la contrainte de la règle de Cochran, a forcé le regroupement de plusieurs classes (sous-stades opératoires et niveaux d'opérateur), ce qui a enlevé la possibilité d'étudier de façon plus raffinée le lien qui unit les paramètres initiaux.

D'autre part, la nature même de la fraction en est une de complexification, qui s'ordonne et s'organise autour d'une première représentation de la fraction, c'est-à dire la demi (Wagner, 1976). En effet, tous les sujets de l'étude réussissent à opérer la demi. Toutefois, même la demi peut prendre des significations différentes, tout dépendant de la perspective selon laquelle on l'étudie. Ainsi, pour Kieren, la demi consiste à partager une quantité en deux parties égales; alors que pour Noelting, elle représente le rapport 1:1. La nature même de ces deux sous-constructions, l'opérateur et le rapport, qui ont été comparées, explique peut-être pourquoi l'intensité du lien dénoté entre ces deux variables, n'est pas aussi forte que celle attendue.

D'après Kieren, la notion d'opérateur semble se créer par un processus de partage qui consiste à séparer une quantité discrète (nombre entier) en deux parties égales. Ce processus de partage peut se généraliser à toutes les autres fractions de type 1/m. Le sujet procède en divisant la quantité en m parties égales. Selon Kieren, ceci correspondrait au sous-stade opératoire concret moyen (IIB). Cette allégation cadre bien avec les informations recueillies dans cette étude, puisque 69% des sujets des sous-stades opératoires concrets se situent aux niveaux 1 et 2.

L'étape suivante semble plus compliquée à expliquer, d'où l'intérêt de cette étude. Devant le conflit cognitif créé par la difficulté à trouver l'opérateur, le sujet se verrait dans l'obligation de développer une stratégie cognitive lui permettant de résoudre ce problème. Le sujet pourrait alors utiliser deux stratégies afin de parvenir à prélever n/m partie d'une quantité, où $n < m$. Dans le cas présent, c'est-à-dire le test Rational Number Thinking Test, l'opérateur choisi est 2/3. On doit souligner qu'à ce niveau, le numérateur utilisé semble influencer la stratégie à utiliser tel que démontré précédemment. Le sujet peu habile à opérer choisirait de partager ou de diviser le nombre entrant par le dénominateur de la fraction (par exemple, $12 \div 3 = 4$) et de soustraire le quotient à l'entrant initial (12 - 4 = 8) pour obtenir le résultat sortant correct puisque mathématiquement parlant:

$$3/3_{\text{d'un nombre}} - 1/3_{\text{d'un nombre}} = 2/3_{\text{d'un nombre}}.$$

Cette stratégie est donc une suite d'opérations relativement simples (partage/soustraction) mais elle se révèle plus complexe que celle utilisée au premier niveau. Ce niveau semble s'apparenter au sous-stade opératoire formel inférieur (IIIA) chez Noelting, où le sujet doit procéder par combinaison de deux opérations successives pour être en mesure de comparer les deux rapports proposés. Enfin, le sujet véritablement capable d'opérer une multiplication de fraction, procéderait selon l'algorithme qui consiste à multiplier le nombre par le numérateur de la fraction, puis à le diviser par le dénominateur, ce qui correspond à une opération sur une opération (multiplication/division). Cette stratégie, utilisée par le sujet ayant atteint le quatrième niveau, nécessiterait un stade de développement cognitif plus avancé mais que l'étude n'a pas clairement réussi à mettre en évidence.

En raison des regroupements des sous-stades opératoires, pour des fins statistiques, il n'a pas été possible de spécifier à quel niveau d'opérateur correspond un sous-stade précis. Cependant, il est clair que 76% des sujets des sous-stades opératoires formels atteignent les troisième et quatrième niveaux d'opérateur. Par ailleurs, cette dernière relation semble d'autant plus importante que Kieren avait noté en 1976 que la notion de rapport n'était pas nécessaire pour atteindre le quatrième niveau, car un seul de ses sujets avait utilisé cette stratégie. Ceci pourrait être imputable à la clientèle plus jeune soumise au Rational Number Thinking Test.

Ainsi, ceci pourrait suggérer que ces structures s'acquièrent à la même époque. Le sujet est en mesure de structurer sa pensée de façon à être capable d'opérer véritablement sur la fraction (n/m) en multipliant le numérateur et le dénominateur par une même quantité, et en même temps, de maîtriser l'utilisation du dénominateur commun pour comparer des rapports. L'intensité du lien exprimé par le coefficient de Cramer pourrait signifier que cette structuration n'en est qu'à son ébauche.

Il est toutefois difficile de parler de parallélisme entre les deux variables en cause. On ne peut prédire avec précision qu'à un sous-stade opératoire donné correspondra un niveau d'opérateur donné. Mais il n'en demeure pas moins qu'une forte proportion des sujets des stades opératoires concrets (69%) se retrouvent aux niveaux 1 et 2, de même que plus des deux tiers

(76%) de ceux des stades opératoires formels occupent les niveaux 3 et 4. Cela suggère que plus un sujet atteint un sous-stade opératoire avancé, plus la probabilité qu'il ait atteint un niveau d'opérateur avancé augmente.

2.4.2 *Deuxième hypothèse*

Il existe un parallélisme entre le niveau d'opérateur et les résultats obtenus au test des opérations arithmétiques impliquant la fraction.

Le test du X^2, appliqué aux données recueillies, a permis de démontrer qu'il n'existe pas de lien significatif entre le niveau d'opérateur, atteint par un sujet, et la réussite des opérations arithmétiques impliquant la fraction. Les sujets des deux premiers niveaux d'opérateur de notre étude fréquentent surtout la première et la deuxième secondaire (80%). Or, c'est en première secondaire que sont enseignés les derniers éléments des opérations impliquant la fraction, notamment ceux concernant la multiplication et la division. Depuis la mise en place en septembre 94, du nouveau programme de mathématique en deuxième secondaire, la notion de la fraction est touchée par le biais de l'utilisation importante du raisonnement proportionnel qui constitue, à lui seul, 25% du programme de mathématique. En troisième secondaire, la notion de fonction et de taux de variation font appel au raisonnement proportionnel. Au cours des années suivantes, la fraction n'est plus abordée que par des rappels occasionnels, selon les besoins de l'enseignement. C'est donc dire que certains sujets ont bien intégré les algorithmes de calculs, notamment les élèves du premier cycle, qui sont issus de l'implantation des nouveaux programmes, alors que pour d'autres, même s'ils fréquentent la cinquième secondaire, cela demeure une lacune importante.

Bien que la notion d'opérateur, telle qu'étudiée dans le test Rational Number Thinking Test de Kieren, fasse appel à la capacité d'opérer une multiplication impliquant une fraction, il n'a pas été possible d'établir de démarcation, entre les différents niveaux d'opérateur, quant à la réussite des opérations arithmétiques impliquant la fraction, puisque les opérations de la multiplication et de la division ont dû être regroupées pour fins de calculs statistiques.

La faiblesse du lien démontré par l'application du test du X^2 entre ces deux variables, suggère que la réussite des opérations arithmétiques, impliquant la fraction pourrait être davantage liée à la proximité temporelle de l'enseignement reçu, qu'au niveau d'opérateur atteint par un sujet. Ainsi, les sujets de la première et de la deuxième secondaire auraient plus en mémoire les algorithmes de calcul impliquant la fraction et pourraient les appliquer plus facilement aux opérations. Quant aux sujets des autres niveaux, ils devraient se fier à des souvenirs ainsi qu'à des rappels ponctuels effectués pour permettre au sujet d'avancer dans le programme mathématique. Ceci va dans le sens l'étude de Kerslake (1979) réalisée auprès d'une clientèle du secondaire.

Par ailleurs il est possible qu'on ne puisse parler de véritable opérateur qu'à partir du quatrième niveau. Avant ce stade, la réussite de l'opérateur peut s'obtenir par d'autres stratégies, comme en divisant une quantité par le dénominateur de la fraction 1/m, ou en composant avec la division et/ou la soustraction (2/3). Puisque le troisième niveau est proportionnellement moins fréquenté, il pourrait s'agir d'un niveau intermédiaire entre la capacité d'opérer à l'aide d'une fraction 1/m et la capacité de généraliser cette opération à tout type de fraction n/m. Ce n'est qu'au quatrième niveau d'opérateur qu'il faudrait vraiment utiliser la stratégie qui consiste à multiplier par le numérateur et à diviser par le dénominateur de la fraction. Cette description des niveaux d'opérateur suggère une approche constructiviste de l'opérateur.

2.4.3 *Troisième hypothèse*

Il existe un parallélisme entre le niveau d'opérateur et les résultats obtenus au test des opérations arithmétiques impliquant la fraction.

Les analyses effectuées n'ont pas permis de démontrer de lien significatif entre le sous-stade opératoire, atteint par un sujet à la notion de rapport et le niveau des opérations arithmétiques relatives à la fraction atteint par le sujet.

La performance des sujets des sous-stades opératoires concrets au test des fractions se compare favorablement à celles des sujets des sous-stades opératoires formels. Il est remarquable de noter que 81% des sujets des sous-stades opératoires concrets réussissent l'addition et la soustraction, alors que 92% des sujets des sous-stades opératoires formels réussissent aussi ces opérations, ce qui correspond chez Noelting à l'utilisation du dénominateur commun (IIIB). De plus, environ le tiers (35%) de ses sujets de chacun de ces sous-groupes réussissent les opérations de multiplication. Toutefois, au chapitre des opérations de division, les sujets des sous-stades opératoires concrets (19%) réussissent mieux que ceux des sous-stades opératoires formels (13%). Ceci pourrait signifier que la réussite des opérations arithmétiques est fortement liée à la proximité temporelle des apprentissages d'algorithmes relatifs aux opérations impliquant la fraction.

L'épreuve des Concentrations fait appel à la notion de rapports et de proportions. A mesure que les sujets avancent en âge, ils développent des habiletés qui permettent d'utiliser différentes stratégies pour comparer des rapports. L'utilisation du dénominateur commun s'avère une stratégie puissante pour l'addition et la soustraction, mais n'est d'aucune aide réelle pour l'algorithme de la multiplication et de la division des fractions. Cela explique peut-être pourquoi la performance concernant les multiplications et les divisions ne s'améliore pas significativement avec le temps, même si le sujet atteint un sous-stade opératoire avancé, alors que les opérations d'addition et de soustraction sont relativement bien réussies pour l'ensemble des élèves du secondaire.

CONCLUSION

CONCLUSION

Cette étude comparative avait pour but d'étudier la relation possible existant entre l'opérateur, tel que décrit par Kieren, et le développement cognitif d'un sujet à la notion de rapport, établi par Noelting, chez des élèves fréquentant le secondaire. Elle voulait également vérifier s'il existe une relation entre la réussite des opérations arithmétiques et les deux variables identifiées précédemment.

Les résultats de cette recherche ont démontré un lien important entre l'opérateur et la notion de rapport. Cependant les regroupements de certaines classes n'ont pas permis de mesurer avec précision le parallélisme entre les différents niveaux de sous-constructions des deux notions en cause. Par ailleurs, cette étude contribue à la compréhension des étapes de construction de l'opérateur et de la notion de rapport chez les élèves du secondaire. Elle démontre l'existence d'une relation entre la classe et le développement cognitif d'un sujet.

Ce constat s'avère important puisqu'il confirme pour une part, la politique du ministère de l'Éducation du Québec dans l'orientation des programmes de mathématique, en ce qui concerne la pédagogie de la fraction, dans les classes primaires et secondaires. Toutefois, la problématique associée à la réussite des opérations arithmétiques demeure imposante car le temps accordé à la construction opérationnelle de la fraction demeure insuffisant. Faute de temps, l'apprentissage adéquat de la fraction s'avère précaire pour bon nombre d'élèves. Il faudrait peut-être élaborer un calendrier de la fraction s'harmonisant davantage au développement cognitif des élèves. Ainsi, les opérations d'addition et de soustraction impliquant la fraction pourraient être enseignées en première secondaire; les principes du raisonnement proportionnel seraient enseignés en deuxième secondaire; alors que les opérations de multiplication et de division seraient enseignées en troisième secondaire, ces dernières pouvant offrir le substrat nécessaire à la simplification d'expressions algébriques enseignées en quatrième secondaire (math 436).

Même si à peu près n'importe quelle calculatrice bon marché peut résoudre les opérations arithmétiques impliquant la fraction, il n'en demeure pas moins qu'elle est un outil dont le but est de faciliter les calculs et qu'elle ne devrait avoir aucun autre attribut. Elle ne saurait en aucun cas se substituer à la compréhension des opérations arithmétiques impliquant la fraction qui sous-tend un ensemble de concepts nécessaires à la pensée logique et mathématique. Cette compréhension s'avère essentielle à la poursuite d'études supérieures.

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

ADI, Helen, PULOS, Stephen (1980). *Individual Differences and Formal Operational Performance of College Students.* in Journal for Research in Mathematics in Education. Vol. 11, No 2, p. 150-156.

ADI, Helen et al. (1976). *Conditional Logic Abilitus on four-cards Problems: Assessment of Behavioral and Reasoning Performances.* In Educational Studies in Mathematics. Vol. 11, No 4, p. 479-496.

ADI, Helen (1978). *Intellectual Development and Reversibility of Tought in Equation Solving.* In Journal for Research in Mathematics in Education. Vol.9, No 3, p. 204-213.

BAROODY, Arthur J., HUME, Janice (1991). *Meaningful Mathematics Instruction: The Case of Fractions.* In Remedial and Special Education. Vol. 12, No. 3, p. 54-68.

BARRETT, Everad (1991). *Teaching Mathematics through Context: Unleashing the Power of the Contextual Learner.* New-York, 22 pages. (ED 345 932)

BARUCH, Stella (1992). Dictionnaire de mathématiques élémentaires. Éditions du Seuil, Paris, 1324 pages.

BEHR, Merlyn J., WACHSMUTH, Ipke, POST, Thomas R. (1985). *Construct a sum: A measure of children's understanding of fraction size.* In Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 16, No.2, p. 120-130.

BEHR, Merlyn, HAREL, G., POST, T., LESH, R (1992). Handbook of research on mathematics teaching and learning, Macmillan, New-York.

BEHR, Merlyn J., WACHSMUTH, Ipke, POST, Thomas R., LESH, Richard (1985). *Order and Equivalence of Rational Numbers: A Clinical Teaching Experiment*. In Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 15, No.5, p. 323-341.

BEHR, Merlyn J. et al. (1984). *Order and Equivalence of Rational Numbers: A Clinical Teaching Experiment*. In Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 15, No.5, p. 323-341

BEHR, Merlyn, LESH, Richard, POST, Thomas, SILVER, E.A. (1983). *Rational number concepts* In Lesh et Landau (Ed.) Acquisition of mathematical concepts and processes, Academic Press, New-York p. 91-126.

BENANDER, Lynn, CLEMENT, John (1985). *Catalogue of Error Patterns Observed in Courses on Basic Mathematics. Working Draft*. EXXON Education Foundation, New-York, 39 pages. (ED 287 672).

BENNET, Albert B. (1989). *Fraction Patterns - Visual and Numerical*.In Mathematics teacher, vol. 82, no.4, p. 254-259, 298.

BERGERON, J.C., HERSCOVICS, N., SINCLAIR, H. (1992). *Contribution à la genèse du nombre*. In Archives de Psychologie. Volume 60, p. 147-170.

BORKO, Hilda, EISENHART, Margaret, BROWN, Catherine A., UNDERHILL, Robert G., JONES, Doug, AGARD, Patricia C. (1992). *Learning to teach hard mathematics: do novice teachers and their instructors give up too easily?* In Journal for Research in Mathematics Education. Vol. 23, no. 3, p. 194-222.

BRIGHT, George W., BEHR, Merlyn J., POST, Thomas R., WACHSMUTH, Ipke (1988). *Identifying fractions on number lines*. In Journal for Research in Mathematics Education. Vol. 19, no. 3, p. 215-232.

BYRNES, James P., WASIK, Barbara A. (1991). *Role of Conceptual Knowledge in Mathematical Procedural Learning*. In Developmental Psychology. Vol. 27, No.5, p. 777-786.

CARPENTER, Thomas P., CORBITT, Mary Kay, KEPNER, Henry S., LINDQUIST, Mary Montgomery, KEYS, Robert E. (1981). Results from the Second Mathematics Assessment of Educational Progress, Reston, Va. National Council of Teachers of Mathematics. 164 pages.

CARPENTER, Thomas P., FENNEMA, Elizabeth, ROMBERG, Thomas A. (1993). Rational Numbers. An Integration of Research. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, New-Jersey. 372 pages.

Collectif d'alphabétisation (1973). Initiation à l'approche logique et au calcul. François Maspéro, Paris. p. 27-29.

COSTERMANS, Jean (1990). *Les associations entre des nombres de 0 à 1 000 000 en fonction de l'âge.* In Archives de Psychologie. Volume 58, p. 3-27.

COXFORD, Arthur, ELLERBRUCH, Lawrence (1975). *Fractional Numbers.* In Mathematics Learning in Early Childhood. (JosephN. Payne, Editor). Thirty-seventh Yearbook. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

CRAMER, Kathleen, A., POST, Thomas R., BEHR, Merlyn J. (1989). *Cognitive Restructuring Ability, Teacher Guidance, and Perceptual Distracter Tasks: An Aptitude-Treatment Interaction Study* In Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 20, No.1, p.103-110.

CUNEO, Diane (1987). *Understanding Fractions as Quantities: It is Related to Fraction Computational Skill?* In Fraction conceptual knowledge and its role in Computation. Symposium présenté à Annual Meeting of the American Educational Research Association, Washington. 10 pages. (ED 287 725).

DAHLBERG, Cecilia (1989). *Children's Conceptions of Division and of Equal Parts. The BUD Project.* National Swedish Board of Education, Stockolm. 16 pages. (ED 309 077)

DAVIDSON, P. et al. (1985). "Pies are hard to find out about. .." An Inquiry into children's understanding of nature of fractions. Educational technology Center, Cambridge. 109 pages. (ED 287 725).

DAVIS, Gary Ernest, PITKETHLY, Anne (1990). *Cognitive aspects of sharing*. In Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 21, No.2, p.145-153.

DAVIS, Robert B. (1983). The Development of the Concept of "Fraction" from Grade Two through Grade Twelve. Final Report. National Institute of Education, New-York. 179 pages.

DIENES, Z. P. (1970). Les six étapes du processus d'apprentissage en mathématiques. O.C.D.L., Paris. 70 pages.

DRISCOLL, Mark (1982). *Understanding Fractions: A Prerequisite for Success in Secondary School Mathematics*. In Research within Reach: Secondary School Mathematics. St-Louis, Mo.

DRISCOLL, Mark (1984). *What Research Says*. In Arithmetic Teacher, Vol. 31, No.6, p.34-35, 46.

DRISCOLL, Mark (1982). *Research Within Research: Secondary School Mathematics*. A *Research-Guided Response to the Concerns of Educators*. National Institute of Education, Washington, 170 pages. (ED 225 842).

FORTIN, C., ROUSSEAU, R. (1989). Psychologie cognitive. Une approche du traitement de l'information. Presses de l'université du Québec, Sillery. 434 pages.

GATTENO, Caleb et al. (1965). L'enseignement des mathématiques. Tome I. Nouvelles perspectives. Delachaux et Niestlé, Neuchatel, Suisse, p.5-33.

GENDRON, Louise (1993). *Etes-vous achiffriste,incalculiste...?* In L'ACTUALITÉ, 15 septembre 1993. p. 46-49.

GIMENEZ, J. (1989). *About continuous operator subconstruct in rational numbers*. In Actes de la 13ème Conférence International, Psychology of Mathematics Education, p. 10-14, G. Vergnaud, J. Rogalski, M. Artique (Ed.)

GINSBURG, Herbert P. (1983). <u>The development of mathematical thinking</u>. Academic Press. 388 pages.

GRECO, Pierre (1991). <u>Structures et significations. Approches du développement cognitif</u>. Éditions de l'école des hautes études en sciences sociales, Paris. 328 pages.

HARDIMAN, Pamela T. (1988). *Recognizing Similarities between Fraction word Problems*. National Science Foundation, Washington. 38 pages. (ED 299 146).

HARRISON, Bruce, BRINDLEY, Selwyn, BYE, Marshall P. (1989). *Allowing for student cognitive levels in the teaching of fractions and ratios*. In <u>Journal for Research in Mathematics Education</u>, Vol. 20, No.3, p.288-300.

HART, Kathleen (1978). *The understanding of Ratio in the Secondary School*. In <u>Mathematics in School</u>. Vol. 7, p. 4-7.

HELLER, Patricia M., POST, Thomas R., BEHR, Merlyn, LESH, Richard (1990). *Qualitative and Numerical Reasoning about Fractions and Rates by Seventh- and Eight-Grade Students.* In <u>Journal for Research in Mathematics Education</u>, Vol. 2 1, No.5, p.388-402.

HEMBREE, Ray (1990). *The Nature, Effects and Relief of Mathematic Anxiety*. In <u>Journal for Research in Mathematics Education</u>, Vol. 21, No.1 p.33-46.

HERMAN, Maureen L. (1983). *Hopeless in Math? It's Too Soon to Say*. In <u>Mathematics Teacher</u>, Vol. 76, No. 7, p.515-524.

HÉTU, Jean-Claude (1978). <u>Stratégies d'enseignement des nombres entiers naturels</u>. Presses de l'université de Montréal, Montréal, 150 pages.

HÉTU, Jean-Claude, DESJARDINS, Michel (1974). <u>L'activité mathématique dans l'enseignement des fractions</u>. Presses de l'université du Québec, Montréal. 147 pages.

HIEBERT, J., TONNESSEN, L.H. (1978). *Development of the fraction concept in two physical contexts: An exploratory investigation*. In <u>Journal for Research in Mathematics Education</u>, Vol. 9, No. 5, p. 374-378.

HOUDÉ, Olivier (1992). <u>Catégorisation et développement cognitif</u>. Presses universitaires de France, Paris. 204 pages.

INHELDER, Barbel, PIAGET, Jean (1970). The Growth of Logical Thinking from Childhood to Adolescence. An Essay on the Construction of Formal Operational Structures. Basic Book, New-York. Cité par Kieren et Nelson (1978).

JANSSON, Lars C. (1986). *Logical reasoning hierarchies in mathematics.* In Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 17, No.1, p. 3-20.

JAULIN-MANNONI, Francine (1965). La rééducation du raisonnement mathématique. Les Éditions sociales françaises, Paris. 194 pages.

JAULIN-MANNONI, Francine (1965). Les quatre opérations. Base des mathématiques. Classes primaires et second degré. Les Éditions sociales françaises, Paris. 149 pages.

JAULIN-MANNONI, Francine (1975). Le pourquoi en mathématique. Les Éditions sociales françaises, Paris. 206 pages.

KAMII, Constance K. (1985). Young children reinvent arithmetic. Implications of Piaget's theory. Teachers college, Columbia university, New-York, 269 pages.

KARPLUS, Robert, KARPLUS, Elizabeth, FORMISANO, Marina, PAULSEN, A.C. (1975). Proportional Reasoning and Control Variables in Seven Countries. Advancing Education Through Science-Oriented Program. California Univerity. Berkeley Lawrence Hall of Science. 62 pages. ED 132 046.

KARPLUS, R., KARPLUS, E., WOLLMAN, W. (1974). *Intellectual Development beyond Elementary School IV: Ratio, the influence of cognitive style.* In School, Science and Mathematics, Vol. 74, p. 476-482.

KARPLUS, Robert, KARPLUS, Elizabeth (1980). *Intellectual Development beyond Elementary School VIII: Proportional, Probabilistic and Correlational Reasoning.* In School, Science and Mathematics, Vol. 80, No. 8, p. 673-683.

KARPLUS, R., PULOS, S., STAGE, E.K. (1983a). *Proportional reasoning of early adolescents.* In R. Lesh et M. Landau (Éd.), Acquisition of mathematics concepts and processes, Academic Press, New-York, p. 45-91.

KELLY, Bernadette, GERNSTEN, Russel, CARNINE, Douglas (1990). *Student error patterns as a Function of Curriculum Design: Teaching Fractions to Remedial High school Students with Learning Disabilities*. In Journal of Learning Disabilities. Vol. 23, No. 1, p. 23-29.

KERANTO, Tapio (1984). *Processes and Strategies in Solving Elementary Verbal Multiplication and Division Tasks: Their Relationship with Piaget Abilities, Memory Capacity Skills and Rational Numbers*. Université de Tampere, Hameelina (Finlande), 12 pages. (ED 239 906).

KERSLAKE, Daphne (1979). Fractions: Children's strategies and errors. A report of the strategies and errors in Secondary Mathematics project. NFER-NELSON Publishing Company Ltd, Darville House, Windsor, England, 109 pages.

KIEREN, Thomas E. (1976a). *On the Mathematical, Cognitive and Instructional Foundations of Rational Numbers*. In LESH, Richard, Ed. Number and Measurement: Papers from a Workshop. Ohio State University, Columbus, Ohio, p. 101-141.

KIEREN, Thomas E., NELSON, D. (1978). *The Operator Construct of Rational Numbers in Childwood and Adolescence - An Exploratory Study*. In The Alberta Journal of Educational Research, Vol. 24, No.1, p.22-30.

KIEREN, Thomas E., SOUTHWELL, B. (1979). *The Development in Children and Adolescents of the Construct of Rational Numbers as Operators*. In The Alberta Journal of Educational Research, Vol. 25, No.4, p.234-247.

KIEREN, Thomas E. (1980). *The Rational Number Construct - Its Elements and Mechanisms*. In KIEREN, Thomas E., Éd. Recent Research on Number Learning. Eric Ed 212 463, pages 125-150.

KIEREN, Thomas E. (1990). *Understanding for Teaching for Understanding*. In The Alberta Journal of Educational Research. Vol. 36, No. 3, p. 191-201.

KIEREN, Thomas E. (1984). *One Point of View: Helping Children Understand Rational Numbers*. In Arithmetic Teacher, Vol. 31, No.6, p.3.

LAMON, Susan J. (1993). *Ratio and proportion: connecting content and children's thinking*. In Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 24, No.1, p. 41-61.

LAWSON, Anton, BLAKE, A.J.D (1976). *Concrete and Formal Thinking in High School Biology Students as Measured by Three Separate Instruments*. In Journal of Research in Science Teaching, Vol. 13, p. 227-235.

LAWTON, Carol A. (1993). *Contextual factors affecting errors in proportional reasoning*. In Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 24, No.5, p.460-466.

LEGENDRE-BERGERON, Marie-Françoise (1980). Lexique de la psychologie du développement de Jean Piaget. Gaëtan Morin, Boucherville, Québec, 238 pages.

LEHRER, Richard, FRANKE, Megan Loef (1992). *Applying personal construct psychology to the study of teachers's knowledge of fractions*. In Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 23, No.3, p.223-241.

LESH, Richard et LANDAU, Masha (1983). Acquisition of mathematics concepts and processes. Academic Press, New-York. 407 pages.

LESTER, Frank, J. (1984). *Teacher Education: Preparing Teachers to Teach Rational Numbers*. In Arithmetic Teacher, Vol. 31, No.6, p.54-56.

LOVELL, K. (1971). *Proportionality and Probability*. In M. Ras kopf, L. Steffe, S. Toback (Éd.) Piagetian cognitive development research and mathematical education, Reston, VA. p. 136-148. Cité par Kieren et Nelson (1978).

MACK, Nancy K. (1990). *Learning fractions with understanding: building on informal knowledge*. In Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 21, No.1, p.16-32.

MARSHALL, Hermine H. (1992). *Reconceptualizing Learning for Restructured school*. Présentation à Annual Meeting of the American Educational Research Association (San Francisco). 14 pages.

MARTIN, Louise et BAILLARGEON, Gérald (1989). Statistique appliquée à la psychologie. Les éditions SMG, Trois-Rivières. 799 pages.

National Council of Teachers of Mathematics. (1974). Piagetian Cognitive Development Research and Mathematical Education. New-York, 241 pages.

NIAZ, Mansoon (1989). *The Role of Cognitive Style and its Influence on Proportional Reasoning*. In Journal of Research in Science Teaching, Vol. 26, No 3, p. 221-235.

NOELTING, Gérald et al. (1982). Le développement cognitif et le mécanisme d'équilibration. Gaëtan Morin, éditeur, Chicoutimi, 509 pages.

NOELTING, Gérald (1980a). *The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part I - Differentiation of stages*. In Educational studies in mathematics, vol 11, No.2, pp.217-253.

NOELTING, Gérald (1980b). *The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part II - Problem-structure at successive stages; problem solving strategies and the mechanism of adaptive restructuring*. In Educational studies in mathematics, vol 11, No.3, pp.331-363.

NOELTING, Gérald, ROUSSEAU, Jean-Pierre (1993). L'Épreuve des Concentrations. École de Psychologie, Université Laval, Québec, 109 pages.

NOVILLIS, Carol F. (1979). *Why Teach Elementary School Students The Division Meaning of Fractions*. In School, Science and Mathematics, Vol. 79, NO 8, p. 705-708.

NOVILLIS, Carol F. (1976). *An Analysis of the Fraction Concept into a Hierarchy of Selected Sub-concepts and the Testing of Hierarchical Dependancies*.In Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 7, No.3, p.131-144.

PALACIO-QUINTIN, Ercilia (1987). Apprendre les mathématiques, un jeu d'enfant. Les presses de l'université du Québec. Montréal. 260 pages.

PAYNE, Joseph N. (1984). *Teaching Rational Numbers*. In Arithmetic Teacher, Vol. 31, No.6, p.14-17.

PIAGET, J., INHELDER, B. (1973). La psychologie de l'enfant. Presses universitaires de France, Paris. 124 pages. Collection Que sais-je? #369.

PIAGET, Jean (1972). L'épistémologie génétique. Presses universitaires de France, Paris. 126 pages. Collection Que sais-je? #1399.

PIAGET, J., SZEMINSKA, A. (1967). La genèse du nombre chez l'enfant. Delachaux et Niestlé, Neuchatel, Suisse. 4ème édition. Collection Actualités pédagogiques et psychologiques. 317 pages.

PIAGET, J., INHELDER, B., SZEMINSKA, A. (1966). The child's conception of geometry. Basic Books, New-York. Cité par Kieren et Nelson (1978)

PIAGET, Jean (1965). *Les structures mathématiques et les structures opératoires de l'intelligence.* In GATTENO et al. L'enseignement des mathématiques. Nouvelles perspectives. Tome I, Delachaux et Niestlé, Neuchatel, Suisse. p. 12-33.

PIAGET, Jean (1955). La naissance de l'intelligence chez l'enfant. Delachaux et Niestlé, Paris. 371 pages.

POST, Thomas et al. (1985). *Order and Equivalence of Rational Numbers: A cognitive Analysis.* In Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 16, No.1, p.18-36.

PREVOST Fernand J. (1984). *Teaching Rational Numbers - Junior High School.* In Arithmetic Teacher, Vol. 31, No.6, p.43-46.

RENNER, John W., PASKE, William C. (1977). *Comparing two forms of Instruction in College Physics.* In Journal of Physics Vol. 45, No 9, p.851-859.

ROSEMAN, Louis (1985). *Ten Essential Concepts for Remediation In Mathematics.* In Mathematics Teacher, Vol. 78, No. 7, p.502-507.

SAENZ-LUDLOW, Adalira (1994). *Michael's Fraction Schemes.* In Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 25, No.1, p.50-85.

SHALL, W.E. (1978). Activity-oriented mathematics reading for elementary teachers. Prindle, Weber and Schmidt inc., Boston, 479 pages.

PIAGET, Jean (1972). L'épistémologie génétique. Presses universitaires de France, Paris. 126 pages. Collection Que sais-je? #1399.

PIAGET, J., SZEMINSKA, A. (1967). La genèse du nombre chez l'enfant. Delachaux et Niestlé, Neuchatel, Suisse. 4ème édition. Collection Actualités pédagogiques et psychologiques. 317 pages.

PIAGET, J., INHELDER, B., SZEMINSKA, A. (1966). The child's conception of geometry. Basic Books, New-York. Cité par Kieren et Nelson (1978)

PIAGET, Jean (1965). *Les structures mathématiques et les structures opératoires de l'intelligence*. In GATTENO et al. L'enseignement des mathématiques. Nouvelles perspectives. Tome I, Delachaux et Niestlé, Neuchatel, Suisse. p. 12-33.

PIAGET, Jean (1955). La naissance de l'intelligence chez l'enfant. Delachaux et Niestlé, Paris. 371 pages.

POST, Thomas et al. (1985). *Order and Equivalence of Rational Numbers: A cognitive Analysis*.In Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 16, No.1, p.18-36.

PREVOST Fernand J. (1984). *Teaching Rational Numbers - Junior High School*. In Arithmetic Teacher, Vol. 31, No.6, p.43-46.

RENNER, John W., PASKE, William C. (1977). *Comparing two forms of Instruction in College Physics*. In Journal of Physics Vol. 45, No 9, p.851-859.

ROSEMAN, Louis (1985). *Ten Essential Concepts for Remediation In Mathematics*. In Mathematics Teacher, Vol. 78, No. 7, p.502-507.

SAENZ-LUDLOW, Adalira (1994). *Michael's Fraction Schemes*. In Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 25, No.1, p.50-85.

SHALL, W.E. (1978). Activity-oriented mathematics reading for elementary teachers. Prindle, Weber and Schmidt inc., Boston, 479 pages.

SMITH, Frank (1979). La compréhension et l'apprentissage. Editions HRW, Montréal. 279 pages.

STREEFLAND, Philip H. (1991). *There is no more safety in numbers: a new conception of mathematics teaching*. In Radical constructivism in mathematics education, Ernst Von Glaserfeld (Ed.), Kluwer academic publishers, Dordricht. p. 1-11.

SURAT, Alyssa et al. (1987). *Strategies for Developing Critical Thinking in Mathematics*. Inservice presentation for Green Valley Elementary School, 17 pages. (ED 291 575)

SUYDAM, Marilyn N. (1979). *Review of recent research related to the concepts of fractions and ratio*. In Critical Reviews in Mathematics Education (National Council of Teachers of Mathematics). p. 3-45. (ED 222 338)

SWENSON, Esther J. (1973). Teaching mathematics to children. Macmillan Company, New-York. 2ème édition. pp. 226-245.

TARDIF, Jacques (1992). Pour un enseignement stratégique. L'apport de la psychologie cognitive. Editions Logiques, Montréal. 474 pages.

THORNTON Melvin C., FULLER, Robert G. (1981). *How do College Students Solve Proportion Problems?* In Journal of Research in Science Teaching, vol. 18, No 4, p. 335-340.

VERGNAUD, Gérard (1983). L'enfant, la mathématique et la réalité. Peter Lang, Francfort. 218 pages.

Vocabulaire de l'éducation au Québec (1990). Sous la direction de Joce-lyne Biron. Publications du Québec, Québec. 227 pages.

VON GLASERFELD, Ernst, éd. (1991). Radical Constructivism in Mathematis Education. Kluwer academic publishers. Dordricht, 248 pages.

WACHSMUTH, Ipke et al. (1983). *Children's Quantitative Notion of Rational Number*. National Science Foundation, Washington, 43 pages. (ED 229 218)

WAGNER, Sigrid (1976). *Conservation of Equation and Function and Its Relationship to Formal Operational Thought*. (ED 141 117)

WEARNE-HIEBERT, Diana, HIEBERT, James (1983). *Junior High School Student's Understanding of Fractions*. In School Science and Mathematics. Vol. 83 (2), Fev. 83. p.96-106.

WESCOTT, Alvin M. (1978). Creative Teaching of mathematics in elementary school. Allyn and Bacon Inc., Boston. 2ème édition. 374 pages.

WOODWARD, John, GERSTEN, Russel (1992). *Innovative Technology for Secondary Students with Learning Disabilities*. In Exceptional Children. Vol.58, No.5, p. 407-415.

ZLOT, William (1976). Elementary school mathematics. Teaching the basic skills. Thomas Y. Cromwell Company, New-York. 493 pages.

ANNEXES

ANNEXE 1

LES ITEMS DE CONCENTRATIONS 93 (FORME GÉNÉRALE)

LES ITEMS DE CONCENTRATION 93 (FORME GÉNÉRALE)

Stade		No	Composition	Stratégie
	IA	1	(4,1) vs (1,4)	Centration sur le jus
		2	(1,2) vs (2,1)	
Intuitif	IB	3	(1,0) vs (1,1)	Concordance -
		4	(1,2) vs (1,3)	Différence
	IC	5	(2,1) vs (3,4)	Compensation simple
		6	(2,3) vs (1,1)	
	IIA	7	(1,1) vs (2,2)	Couple (1,1)
		8	(2,2) vs (3,3)	
Opératoire concret	IIB	9	(1,2) vs (2,2)	Couple (1,n) ou (n,1)
		10	(3,1) vs (6,2)	
	IIC	11	(2,4) vs (3,6)	Couple quelconque
		12	(4,3) vs (8,6)	
Opératoire formel	IIIA	13	(1,2) vs (2,3)	Multiplicité d'un terme combine deux opérations équivalence et concordance - différence
		14	(3,1) vs (5,2)	
	IIIB	15	(5,2) vs (7,3)	Dénominateur commun
		16	(3,5) vs (5,8)	
Opératoire métaformel	IV	17	(1,0,1) vs (0,2,0)	Addition de pourcentages
		18	(0,2,1) vs (2,0,4)	
		19	(1,1,3) vs (1,0,2)	
		20	(1,1,1) vs (2,1,2)	

ANNEXE 2

ÉPREUVE DES CONCENTRATIONS 93 - FORME GÉNÉRALE, DE NOELTING ET ROUSSEAU

Concentrations 93
Forme générale

NOM: ______________________ DATE: ______________

AGE: ______________ DATE DE NAISSANCE: ______________

ECOLE: ______________________ CLASSE: ______________

I

A		B
		
+	=	+
☐	☐	☐

POURQUOI? ____

____

II

A		B
		
+	=	+
☐	☐	☐

POURQUOI? ____

____

III

A		B
		
+	=	+
☐	☐	☐

POURQUOI? ____

____

1) A  B 

+ ☐ = ☐ + ☐

POURQUOI?

2) A  B 

+ ☐ = ☐ + ☐

POURQUOI?

3) A  B 

+ ☐ = ☐ + ☐

POURQUOI?

4) A  B 

+ ☐ = ☐ + ☐

POURQUOI?

5) A

B

\+ □ = □ + □

POURQUOI? ______________________________

6) A

B

\+ □ = □ + □

POURQUOI? ______________________________

7) A

B

\+ □ = □ + □

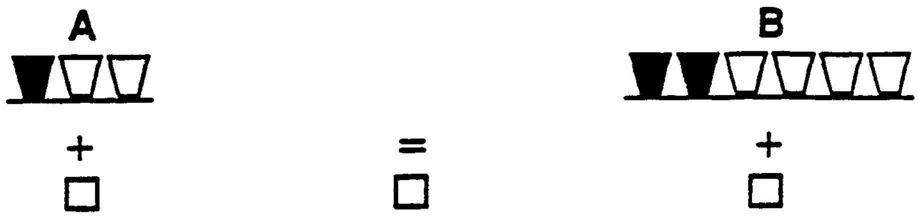
POURQUOI? ______________________________

8) A

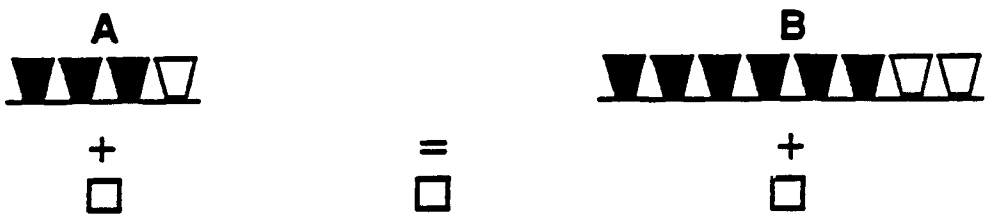
B

\+ □ = □ + □

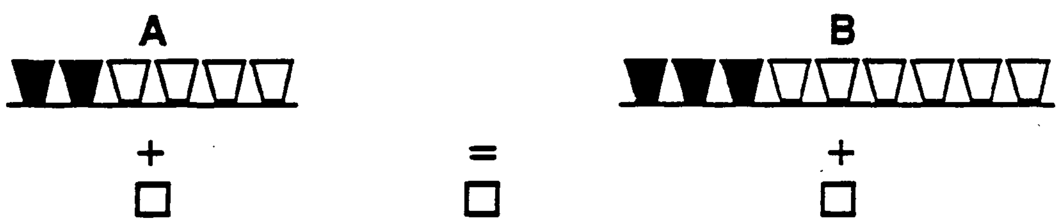
POURQUOI? ______________________________

9) 

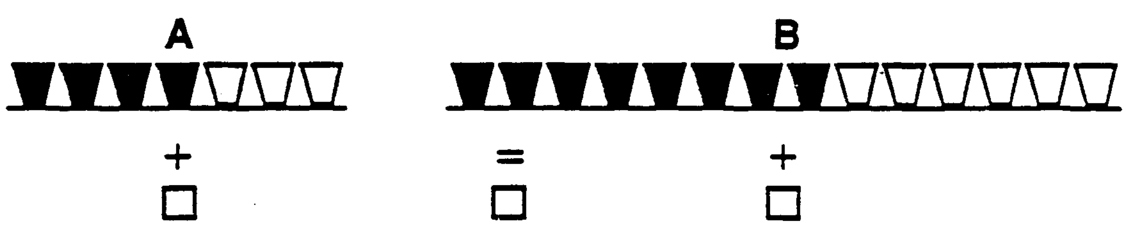
POURQUOI? ____

10) 

POURQUOI? ____

11) 

POURQUOI? ____

12) 

POURQUOI? ____

13) A  B 

\+ ☐ = ☐ \+ ☐

POURQUOI?

14) A  B 

\+ ☐ = ☐ \+ ☐

POURQUOI?

15) A  B 

\+ ☐ = ☐ \+ ☐

POURQUOI?

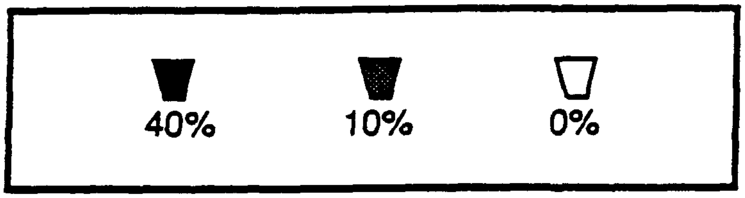
16) A  B 

\+ ☐ = ☐ \+ ☐

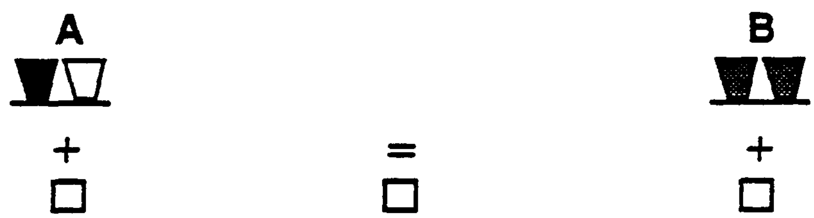
POURQUOI?

Concentrations 93
Pourcentages

NOM: ______________________ DATE: ______________
AGE: ______________ DATE DE NAISSANCE: ______________
ECOLE: ____________________ CLASSE: ______________



17)



POURQUOI? ____

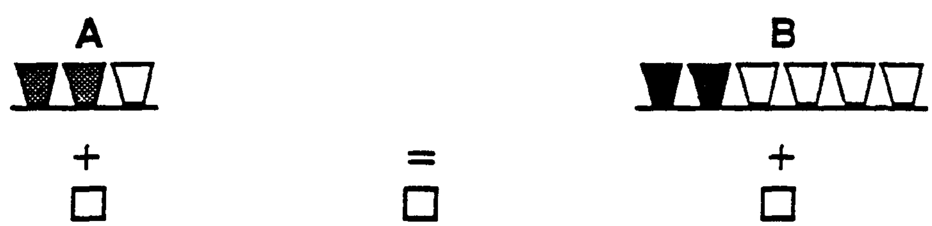
____

____

____

____

18)



POURQUOI? ____

____

____

____

____

19)

A

B

+ □ = □ + □

POURQUOI? ____________________

20)

A

B

+ □ = □ + □

POURQUOI? ____________________

ANNEXE 3

RATIONAL NUMBER THINKING TEST DE KIEREN

NOM: ______________________________ **DATE:** ____________

DATE DE NAISSANCE: ______________ **AGE:** ____________

ÉCOLE: ______________________________ **NIVEAU:** ____________

RATIONAL NUMBER
THINKING TEST

FORM 88:1*

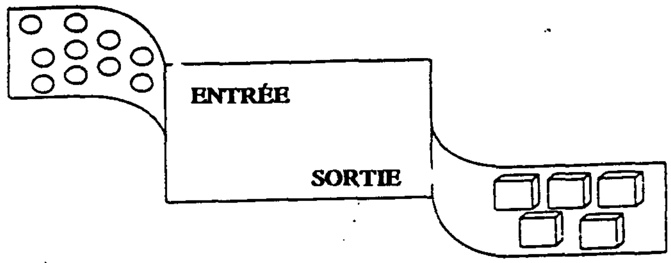
Thomas Kieren
University of Alberta

*Graphics and Layout by
Lynn Sawyer

Les numéros 1 à 3 portent sur des machines. Ton travail consistera à trouver comment les machines fonctionnnent et à décrire comment elles fonctionnent.

EXEMPLE:

Voici une machine avec 10 pièces qui entrent et 5 paquets qui ressortent.



Voici un peu plus d'information.

Pièces qui entrent		Paquets qui sortent
12	------------------------------	6
8	------------------------------	4
20	------------------------------	10
9	------------------------------	4 1/2

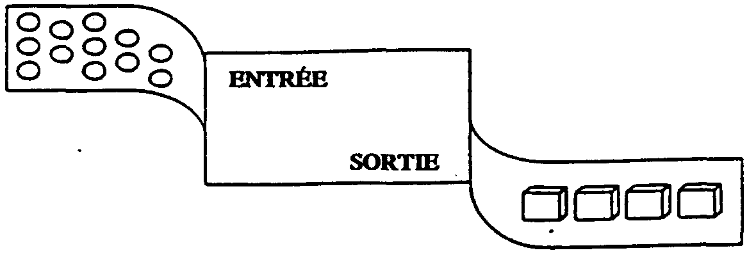
Peux-tu résoudre?

Pièces qui entrent		Paquets qui sortent
4	------------------------------	_____
60	------------------------------	_____
_____	------------------------------	9

Tu aurais dû répondre:

4	--------------	2
60	--------------	30
18	--------------	9

1. Voici une machine différente. Dans l'image, 12 objets sont entrés dans la machine et 4 paquets sont sortis.



Voici un peu plus d'information à propos de cette machine.

Pièces qui entrent		Paquets qui sortent
15	------------------------------	5
27	------------------------------	9
6	------------------------------	2
18	------------------------------	6
10	------------------------------	3 1/3

Complète les espaces vides:

	Pièces qui entrent		Paquets qui sortent
A)	9	------------------------------	______
B)	24	------------------------------	______
C)	60	------------------------------	______
D)	96	------------------------------	______
E)	81	------------------------------	______
F)	35	------------------------------	______

Comment as-tu trouvé le nombre de paquets qui devait sortir?

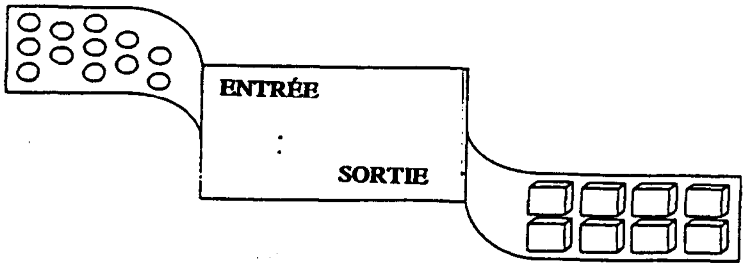
____

____

Dans les numéros ci-dessous, on te donne un nombre de paquets et tu doit trouver combien il y avait de pièces à l'entrée de la machine.

	Pièces qui entrent		Paquets qui sortent
A)	_____	------------------------------	10
B)	_____	------------------------------	40
C)	_____	------------------------------	1 200
D)	_____	------------------------------	6 2/3

2. Voici une autre machine. Dans l'image, 12 objets sont entrés dans la machine et 8 paquets sont sortis.



Voici un peu plus d'information à propos de cette machine.

Pièces qui entrent		Paquets qui sortent
33	------------------------------	22
6	------------------------------	4
21	------------------------------	14
20	------------------------------	13 1/3
7 1/2	------------------------------	5

Complète les espaces vides:

	Pièces qui entrent		Paquets qui sortent
A)	45	------------------------------	______
B)	24	------------------------------	______
C)	60	------------------------------	______
D)	81	------------------------------	______
E)	102	------------------------------	______
F)	50	------------------------------	______

Comment as-tu trouvé le nombre de paquets qui devait sortir?

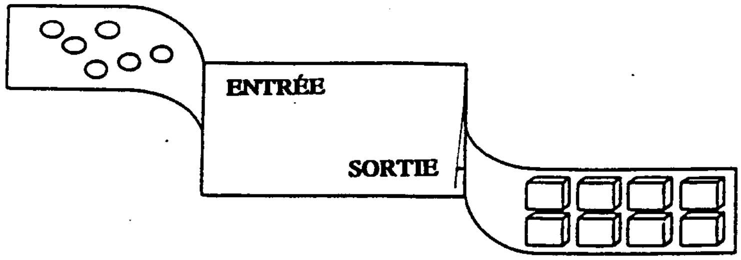
____

____

Dans les numéros ci-dessous, on te donne un nombre de paquets et tu doit trouver combien il y avait de pièces à l'entrée de la machine.

	Pièces qui entrent		Paquets qui sortent
A)	_____	------------------------------	10
B)	_____	------------------------------	18
C)	_____	------------------------------	140
D)	_____	------------------------------	6 2/3

3. Voici une machine différente. Dans l'image, 6 objets sont entrés dans la machine et 8 paquets sont sortis.



Voici un peu plus d'information à propos de cette machine.

Pièces qui entrent		Paquets qui sortent
9	------------------------------	12
33	------------------------------	44
21	------------------------------	28
13 1/2	------------------------------	18
25	------------------------------	33 1/3

Complète les espaces vides:

	Pièces qui entrent		Paquets qui sortent
A)	45	------------------------------	_____
B)	24	------------------------------	_____
C)	75	------------------------------	_____
D)	300	------------------------------	_____
E)	99	------------------------------	_____
F)	40	------------------------------	_____

Comment as-tu trouvé le nombre de paquets qui devait sortir?

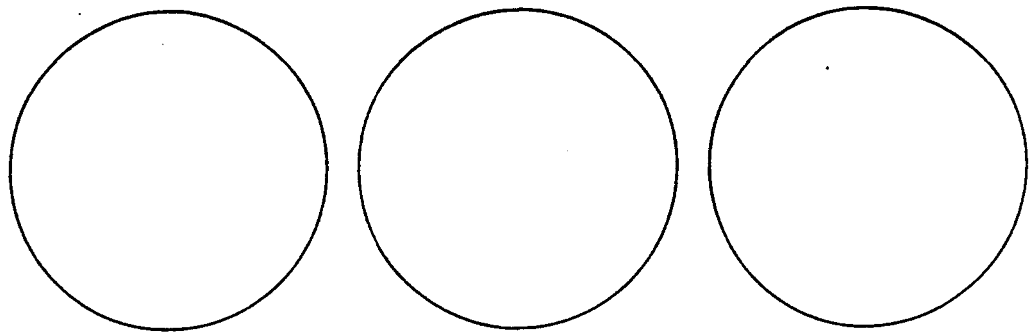
____

____

Dans les numéros ci-dessous, on te donne un nombre de paquets et tu doit trouver combien il y avait de pièces à l'entrée de la machine.

	Pièces qui entrent		Paquets qui sortent
A)	_____	------------------------------	24
B)	_____	------------------------------	36
C)	_____	------------------------------	200
D)	_____	------------------------------	50

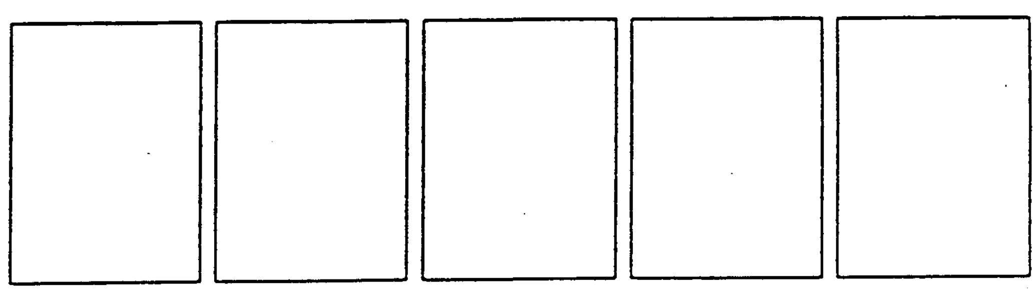
4. Voici trois pizzas.



A) Montre comment elles pourraient être partagées entre 6 personnes.

B) Combien chaque personne a-t-elle?

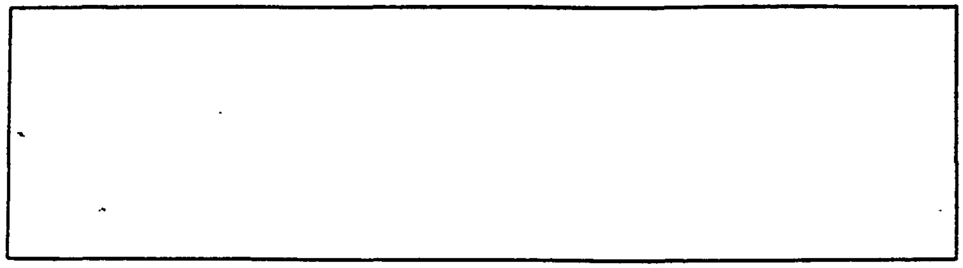
5. Voici 5 tablettes de chocolat.



A) Montrer comment elles pourraient être partagées entre 2 personnes.

B) Combien chaque personne a-t-elle?

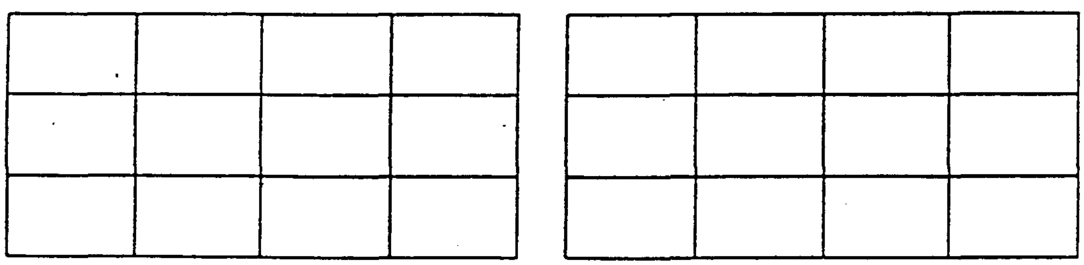
6. Voici une tablette de chocolat.



A) Montre comment elle pourrait être séparée entre trois personnes.

B) Combien chaque personne a-t-elle?

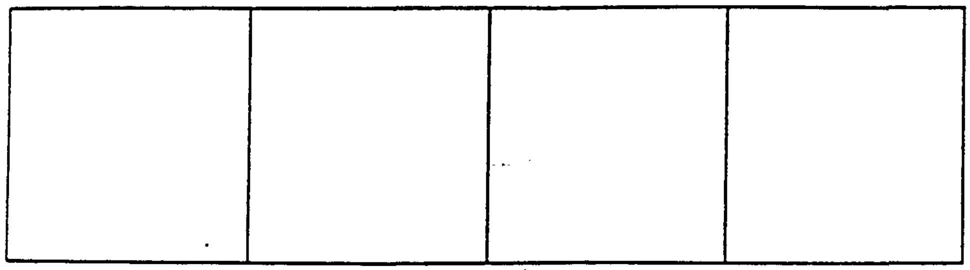
7. Voici deux tablettes de chocolat.



A) Montre comment elles pourraient être partagées entre huit personnes.

B) Combien chaque personne a-t-elle?

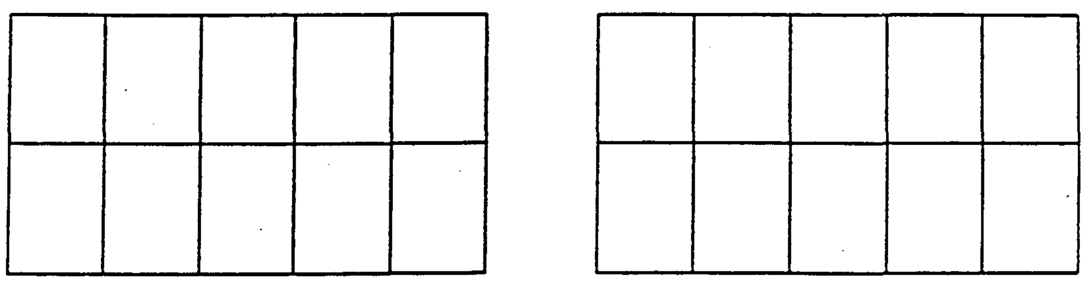
8. Voici une tablette de chocolat.



A) Montre comment elle pourrait être partagée entre trois personnes.

B) Combien chaque personne a-t-elle?

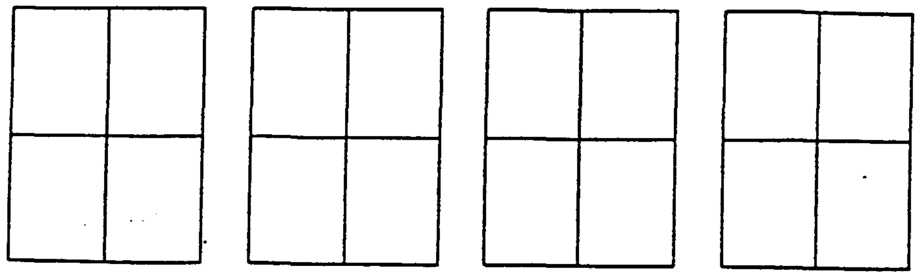
9. Voici deux tablettes de chocolat.



A) Montre comment elles pourraient être partagées entre huit personnes.

B) Combien chaque personne a-t-elle?

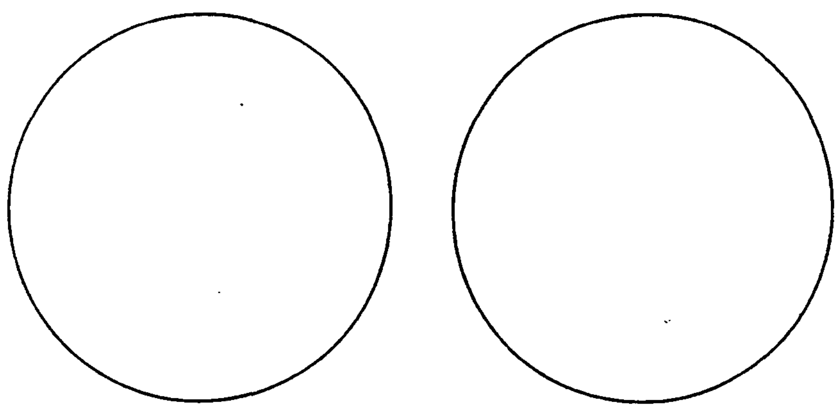
10. Voici quatre tablettes de chocolat.



A) Montre comment elles pourraient être partagées entre trois personnes.

B) Combien chaque personne a-t-elle?

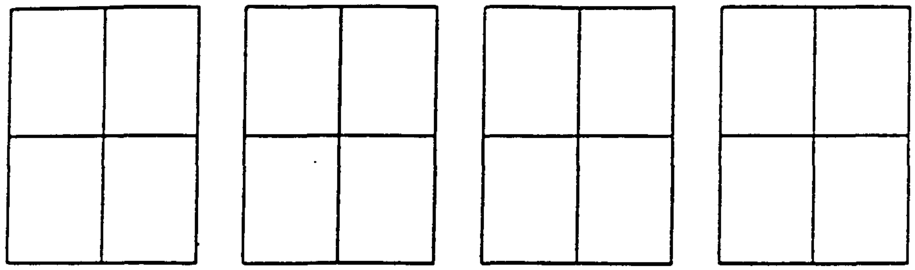
11. Voici deux pizzas.



A) Montre comment elles pourraient être partagées entre trois personnes.

B) Combien chaque personne a-t-elle?

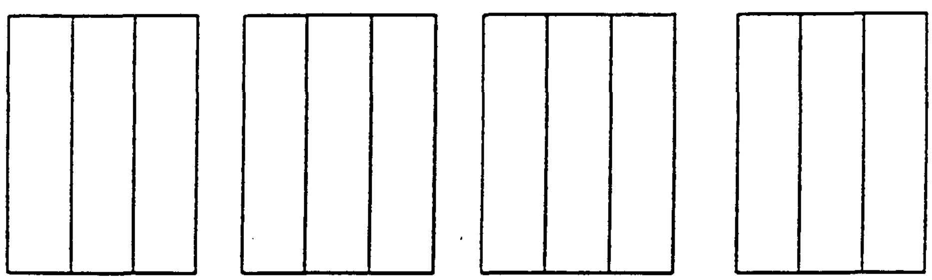
12. Voici quatre tablettes de chocolat.



A) Montre comment elles pourraient être partagées entre six personnes.

B) Combien chaque personne a-t-elle?

13. Voici quatre tablettes de chocolat.

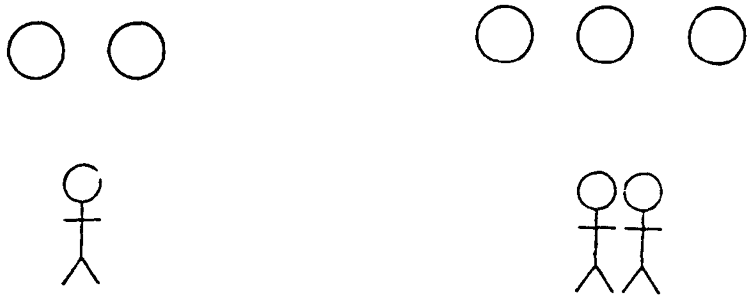


A) Montre comment elles pourraient être partagées entre six personnes.

B) Combien chaque personne a-t-elle?

Les numéros 14 à 21 traitent de mini-pizzas. Dans chacun des groupes, chaque personne reçoit exactement une part égale de pizza. Dans chacun des numéros, tu dois dire qui aura le plus de pizza, ceux qui sont dans le groupe A ou ceux du groupe B, ou s'ils reçoivent la même quantité de pizza. Ensuite, tu expliqueras la réponse que tu as donnée. Tu peux dessiner sur les mini-pizzas si cela peut t'aider.

EXEMPLE:

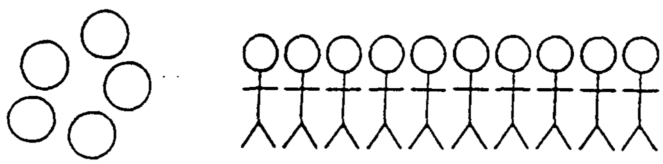


A B

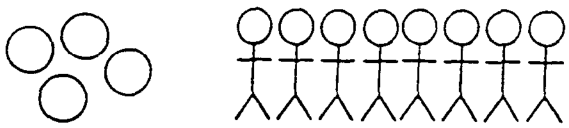
Qui a le plus de pizza? A
B
Même chose

Comment le sais-tu? *Dans A, la personne en a 2 tandis que dans B, chacune des personnes en a moins que 2, chacune en a une et doit partager l'autre.*

14.



A



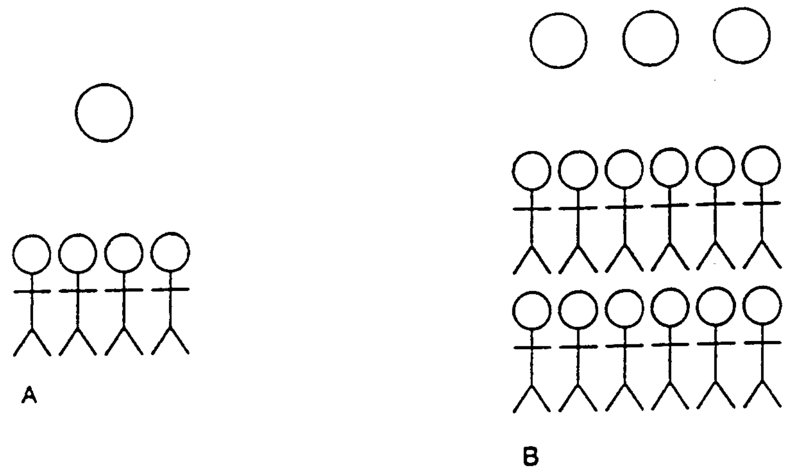
B

Qui a le plus de pizza? A
B
Même chose

Comment le sais-tu? ______________________________

____

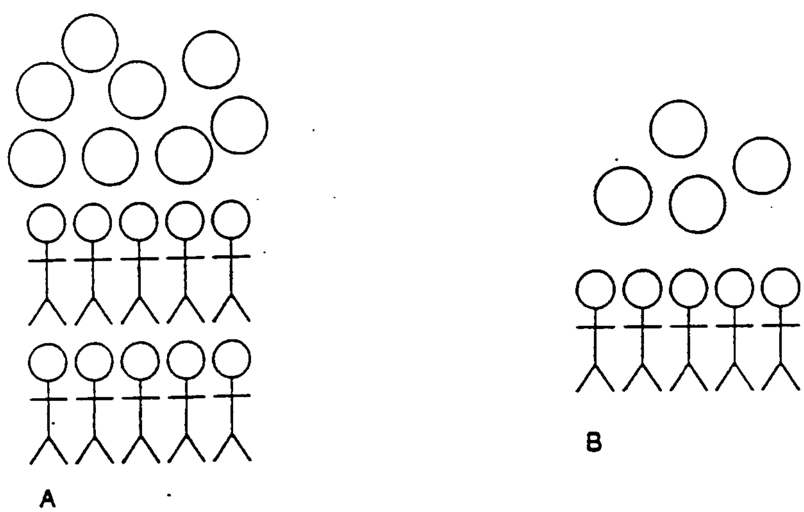
15.



Qui a le plus de pizza? A
B
Même chose

Comment le sais-tu? ______________________________
____

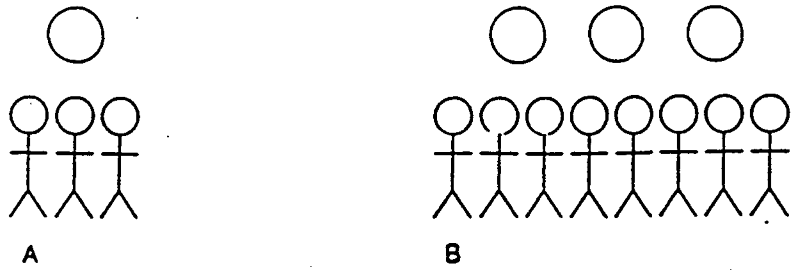
16.



Qui a le plus de pizza? A
B
Même chose

Comment le sais-tu? ______________________________
____

17.

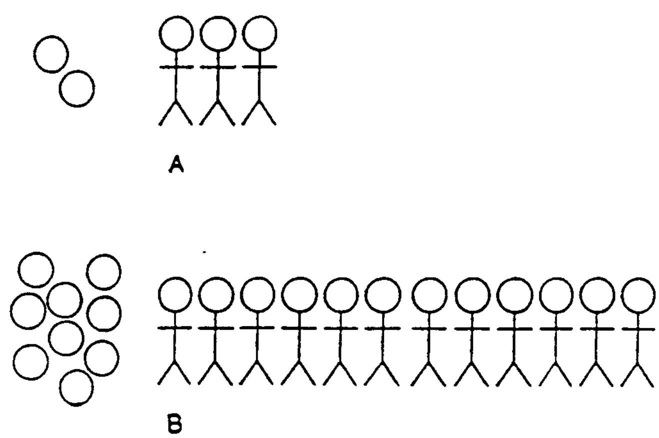


Qui a le plus de pizza? A
B
Même chose

Comment le sais-tu? ______________________________

____

18.

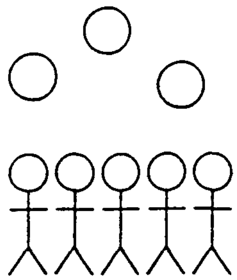


Qui a le plus de pizza? A
B
Même chose

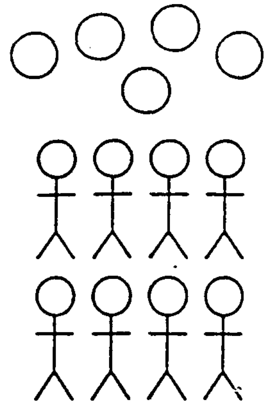
Comment le sais-tu? ______________________________

____

19.



A



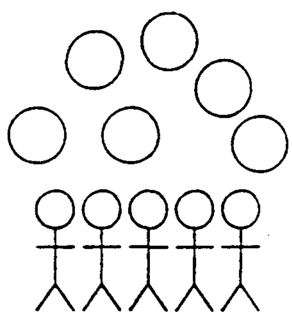
B

Qui a le plus de pizza? A
B
Même chose

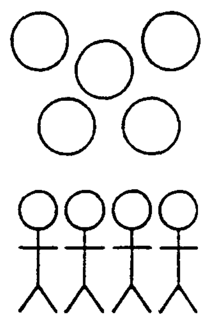
Comment le sais-tu? ____________________

____

20.



A



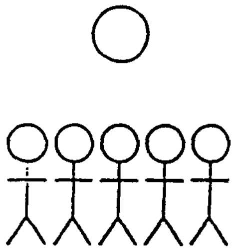
B

Qui a le plus de pizza? A
B
Même chose

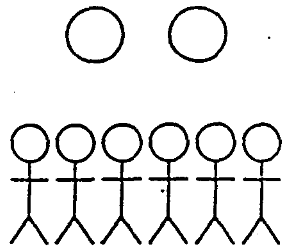
Comment le sais-tu? ____________________

____

21.



A



B

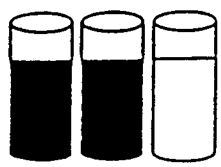
Qui a le plus de pizza? A
B
Même chose

Comment le sais-tu? ______________________________

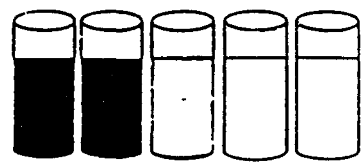
____

Les numéros 22 à 27 de cette épreuve consistent à fabriquer un breuvage au chocolat à partir d'un mélange de lait au chocolat et de lait. Pour ces numéros, tu auras à dire lequel des deux mélanges (A ou B) goûte plus le chocolat. Tu peux dessiner sur le questionnaire si cela peut t'aider.

EXEMPLE:



A

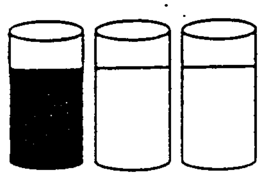


B

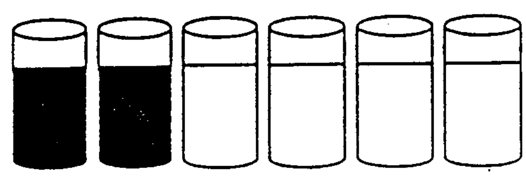
Lequel goûte plus le chocolat? A
B
Même chose

Comment le sais-tu? *Parce que A a beaucoup plus de chocolat que de lait et que B en a moins.*

22.



A



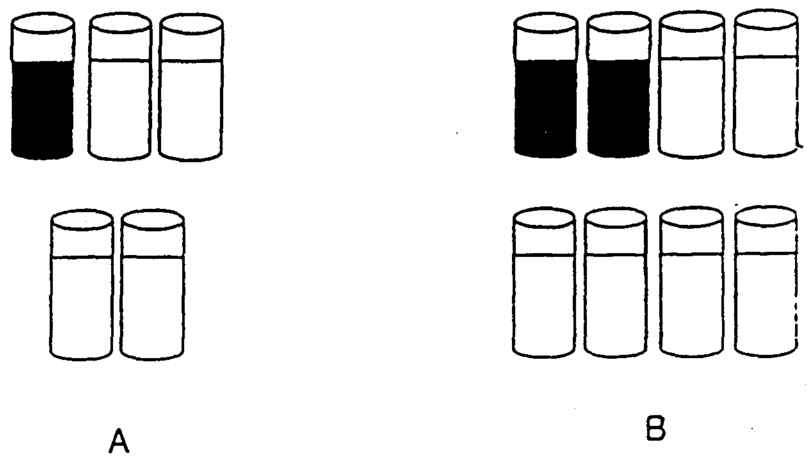
B

Lequel goûte plus le chocolat? A
B
Même chose

Comment le sais-tu? ______________________________

____

23.

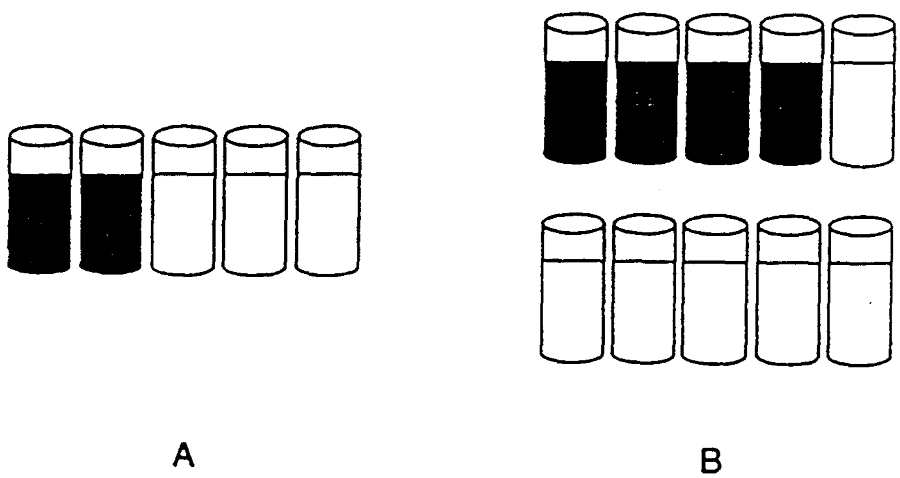


Lequel goûte plus le chocolat? A
B
Même chose

Comment le sais-tu? ______________________________

____

24.

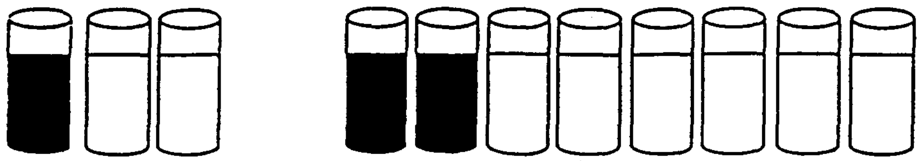


Lequel goûte plus le chocolat? A
B
Même chose

Comment le sais-tu? ______________________________

____

25.



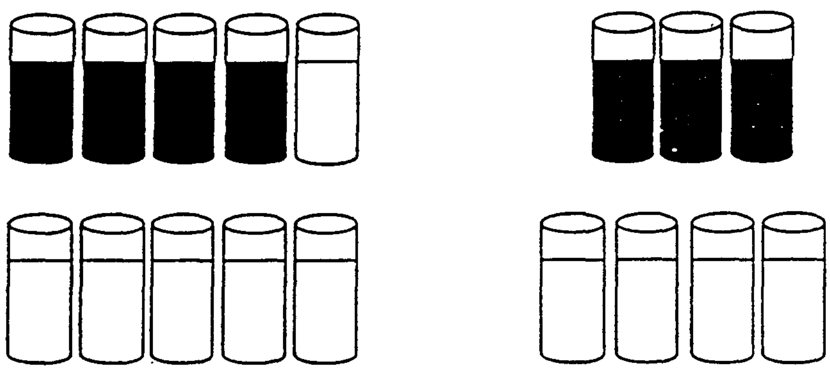
A B

Lequel goûte plus le chocolat? A
B
Même chose

Comment le sais-tu? ______________________________

____

26.



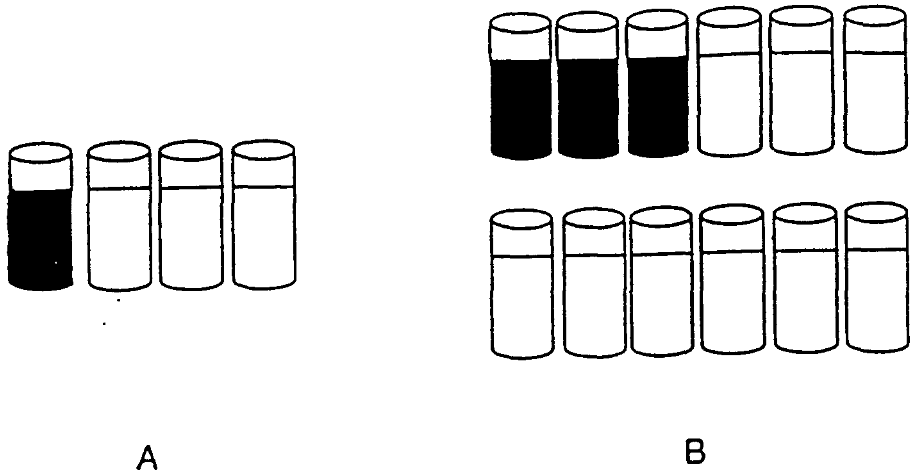
A B

Lequel goûte plus le chocolat? A
B
Même chose

Comment le sais-tu? ______________________________

____

27.



Lequel goûte plus le chocolat?

A
B
Même chose

Comment le sais-tu? ______________________________

____

ANNEXE 4

TEST SUR LES FRACTIONS

SECTION D: DIVISIONS

1. $4/5 \div 3/4 =$ 2. $2/3 \div 8/9 =$ 3. $6/7 \div 2 =$

4. $5/6 \div 3 =$ 5. $5 \div 1/5 =$ 6. $4 \div 3/5 =$

7. $2\ 2/5 \div 4 =$ 8. $3\ 1/3 \div 1/2 =$

SECTION E: PROBLÈMES ÉCRITS

Pour cette section, tu dois laisser les traces de ta démarche (calculs).

1. Les statistiques nous disent que 2 enfants sur 5 ont des caries dentaires. Si une école compte 250 élèves, combien devraient avoir des caries?

2. Un marchand de fruits vend ses oranges au prix de 50 sous pour trois oranges. Combien paierais-tu pour 12 oranges?

3. Il en coûte environ 250$ par semaine pour nourrir 6 personnes. Combien en coûterait-il pour nourrir 8 personnes?

4. Pierre avait 240$ dans son compte de caisse. Il en dépense 1/3 pour des patins neufs et 1/4 du reste pour des gants de hockey. Combien reste-il d'argent dans son compte?

NOM: ______________________________ **DATE:** _____________

DATE DE NAISSANCE: ______________ **AGE:** _____________

ÉCOLE: ____________________________ **NIVEAU:** _____________

SECTION A: ADDITIONS

1. 1/2 + 1/2 =
2. 4/5 + 1/10 =
3. 3/7 + 2/7=
4. 1/4 + 1/8 =
5. 2/3 + 1/4 =
6. 5/9 + 1/6=
7. $\begin{array}{r} 4\ \ 2/5 \\ +\ \underline{3\ \ 2/5} \end{array}$
8. $\begin{array}{r} 2\ \ 3/4 \\ +\ \underline{3\ \ 1/4} \end{array}$
9. $\begin{array}{r} 6\ \ 3/4 \\ +\ \underline{1\ \ 2/3} \end{array}$

SECTION B: SOUSTRACTIONS

1. 3/5 - 1/5 =
2. 5/6 - 2/3 =
3. 8/9 - 7/9=
4. 11/12 - 1/3 =
5. 1/4 - 1/5 =
6. 5/6 - 3/8=
7. $\begin{array}{r} 8\ \ 6/7 \\ -\ \underline{3\ \ 4/7} \end{array}$
8. $\begin{array}{r} 5\ \ 1/3 \\ -\ \underline{1\ \ 2/3} \end{array}$
9. $\begin{array}{r} 3\ \ 1/8 \\ -\ \underline{\ \ 1/4} \end{array}$

SECTION C: MULTIPLICATIONS

1. 3 X 1/4 =
2. 4 X 2/3 =
3. 1/2 X 1/4=
4. 2/3 X 1/3 =
5. 5/6 X 3/4 =
6. 8/9 X 3/8=
7. 2 2/5 X 4 =
8. 2/9 X 1 1/2 =