



MÉMOIRE PRÉSENTÉ À  
L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À CHICOUTIMI  
COMME EXIGENCE PARTIELLE  
À L'OBTENTION DU GRADE DE  
MAÎTRE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES (M.Sc.A.)  
DANS LE CADRE DU PROGRAMME DE  
MAÎTRISE EN INGÉNIERIE

PAR  
JEAN NADEAU  
B.Ing.

IDENTIFICATION D'UN MODÈLE LINÉAIRE POUR  
L'ANALYSE DYNAMIQUE DU PROCÉDÉ D'ÉLECTROLYSE  
DE L'ALUMINIUM

JUIN 1993



### **Mise en garde/Advice**

Afin de rendre accessible au plus grand nombre le résultat des travaux de recherche menés par ses étudiants gradués et dans l'esprit des règles qui régissent le dépôt et la diffusion des mémoires et thèses produits dans cette Institution, **l'Université du Québec à Chicoutimi (UQAC)** est fière de rendre accessible une version complète et gratuite de cette œuvre.

Motivated by a desire to make the results of its graduate students' research accessible to all, and in accordance with the rules governing the acceptance and diffusion of dissertations and theses in this Institution, the **Université du Québec à Chicoutimi (UQAC)** is proud to make a complete version of this work available at no cost to the reader.

L'auteur conserve néanmoins la propriété du droit d'auteur qui protège ce mémoire ou cette thèse. Ni le mémoire ou la thèse ni des extraits substantiels de ceux-ci ne peuvent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

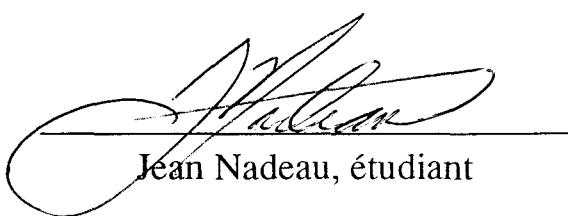
The author retains ownership of the copyright of this dissertation or thesis. Neither the dissertation or thesis, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

## RÉSUMÉ

L'électrolyse de l'aluminium est un procédé électro-chimique hybride qui consiste à produire du métal, par l'entremise d'un courant électrique et d'alumine dissoute dans un bain de cryolithe à température élevée. Actuellement, les modèles mathématiques représentant la dynamique de ce procédé sous forme de bilans massique et énergétique sont constitués d'équations différentielles ordinaires couplées, non-linéaires et à coefficients variants.

L'objectif de ce mémoire est d'identifier à partir d'un modèle non-linéaire existant, un modèle linéaire à coefficients constants. Un simulateur numérique est élaboré pour la résolution du système d'équations différentielles et pour l'identification paramétrique des fonctions de transfert qui sont à la base du modèle linéaire.

Le modèle obtenu est représentatif du modèle non-linéaire, lorsqu'il est appliqué aux alentours des conditions normales d'opération. De plus, par la réduction du modèle linéaire découplé, on obtient un modèle de contrôle aussi valable, mais de dimension réduite et d'une grande simplicité. L'analyse dynamique du système démontre que les réponses à l'échelon associées à ce procédé complexe sont simples, ayant soit la forme d'une exponentielle, d'une rampe ou d'une combinaison de ces dernières.



Jean Nadeau, étudiant

---



Rung T. Bui, dir. de recherche

---



Laszlo Tikasz, co-dir. de recherche

## REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier mon directeur de recherche, le professeur Rung Tien Bui, pour m'avoir donné l'opportunité de poursuivre des études avancées, dans un domaine aussi pertinent que l'électrolyse de l'aluminium. De plus, je désire lui témoigner toute ma gratitude, pour m'avoir laissé bénéficier de ses connaissances scientifiques et de sa rigueur mathématique, tout au long de mes travaux de recherche. Je remercie mon co-directeur de recherche, le professeur-chercheur Laszlo Tikasz, pour son support technique constant, en ce qui concerne le procédé. Sa disponibilité, son inlassable patience et son expérience ont beaucoup contribué à l'élaboration de la démarche scientifique à la base de ce projet.

Par ailleurs, je m'en voudrais de passer sous silence les précieux conseils du chercheur Réjean Ouellet, au niveau informatique et mathématique, qui ont aussi directement contribué à l'avancement et la réussite de ce projet de maîtrise. J'aimerais aussi remercier Abdelhamid (Azzedine) Meghlaoui, pour son support technique, et Danny Ouellet, pour m'avoir fourni un environnement informatique adéquat, pour la rédaction de ce mémoire. De plus, je remercie les professeurs qui ont participé à ma formation académique au niveau des études supérieures, par ordre alphabétique Janos Horvath, Yasar Kocae, Patrick Louchez, Jean-Paul Paquet, Jean Perron, Vinko Potocnik et Laszlo Tikasz.

Je désire remercier le Groupe de Recherche en Ingénierie des Procédés et Systèmes (GRIPS) et le Programme d'Aide Institutionnelle à la Recherche (PAIR) de l'Université du Québec à Chicoutimi, pour leur généreuse contribution financière au projet sous forme de bourse d'études et de bourse d'excellence.

Finalement, je veux remercier mon épouse, Marie-Josée Lavoie, pour sa compréhension, son encouragement soutenu et son écoute attentive, durant cette période intensive d'études.

## TABLE DES MATIÈRES

Résumé .....	ii
Remerciements .....	iii
Liste des tableaux .....	vi
Liste des figures .....	vii
Liste des symboles .....	xi
<b>Chapitre 1:</b> Introduction.....	<b>1</b>
<b>Chapitre 2:</b> Revue des travaux antérieurs .....	<b>5</b>
<b>Chapitre 3:</b> Objectifs et méthodologie.....	<b>10</b>
<b>Chapitre 4:</b> Le simulateur numérique .....	<b>11</b>
4.1 Les deux modes de fonctionnement du simulateur .....	12
4.1.1 L'option simulation.....	12
4.1.2 L'option identification .....	13
4.2 Les limites du simulateur .....	15
<b>Chapitre 5:</b> Approximation linéaire du modèle non-linéaire d'ordre neuf .....	<b>16</b>
5.1 Les méthodes préconisées .....	16
5.1.1 Série de Taylor tronquée au premier ordre.....	16
5.1.2 Méthode des moindres carrés.....	18
5.1.3 Identification paramétrique des fonctions de transfert.....	19
5.2 Les résultats .....	23
5.2.1 Le modèle linéaire d'ordre vingt-deux .....	35
5.2.2 Développement des modèles linéaires d'ordre vingt-six et vingt-sept .....	44
5.2.3 Interprétation des résultats .....	60
5.2.4 Les limites d'applicabilité du modèle linéaire d'ordre vingt-sept .....	70
5.2.5 La validation du modèle linéaire d'ordre vingt-sept.....	73

5.2.5.1 Validation quantitative en fonction de l'amplitude des sollicitations.....	74
5.2.5.2 Validation qualitative en fonction d'une situation réelle d'opération .....	76
5.3 Méthodologie pour l'identification d'un modèle linéaire à partir d'un autre état stationnaire.....	86
<b>Chapitre 6: Analyse dynamique du procédé .....</b>	<b>93</b>
6.1 Les fonction de transfert .....	93
6.1.1 Les gains statiques et les gains en vitesse.....	93
6.1.2 Les constantes de temps.....	95
6.1.3 L'emplacement des pôles et la stabilité .....	96
6.2 La robustesse du système en boucle fermée.....	97
6.2.1 Les diagrammes de Bode.....	97
6.2.2 Les marges de gain et de phase.....	100
<b>Chapitre 7: Conclusion et travaux futurs suggérés.....</b>	<b>103</b>
Annexe A: Détails de l'identification des fonctions de transferts.....	106
Annexe B: Détails du développement des équations différentielles.....	117
Annexe C: Exemple d'un fichier de données initiales (.INI).....	125
Annexe D: Exemple d'un fichier de données générées (.DAT).....	126
Annexe E: Exemple de fichiers de fonctions de transfert (.FT) .....	128
Annexe F: Environnement informatique.....	131
Annexe G: Spécifications techniques de la cuve d'électrolyse .....	132
Références.....	134

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 5.1 Matrice <b>H</b> représentant les fonctions de transfert avec délais .....	34
Tableau 5.2 Matrice <b>H</b> représentant les fonctions de transfert sans délais .....	36
Tableau 5.3 Matrice <b>H</b> représentant les fonctions de transfert avec délais approximés .....	49
Tableau 5.4 Erreurs relatives calculées, après quatre heures de sollicitation pour des amplitudes de 10%.....	75
Tableau 6.1 Représentation du sens des réponses indicielles.....	94
Tableau 6.2 Représentation des constantes de temps du procédé exprimées en secondes .....	95
Tableau 6.3 Représentation des marges de gain et de phase du système.....	100

## LISTE DES FIGURES

Figure 1.1 Vue de coupe transversale d'une cuve d'électrolyse à anodes pré-cuites .....	2
Figure 4.1 Représentation schématique du simulateur numérique .....	12
Figure 4.2 Exemple d'une simulation sous l'influence du système de contrôle .....	13
Figure 4.3 Sollicitation par la variable de contrôle DAC avec un échelon de +10% .....	14
Figure 5.1 Sollicitation de la variable de contrôle DAC par un échelon de +10% .....	24
Figure 5.2 Exemple d'une réponse associée à une fonction de transfert de la forme (5-7).....	25
Figure 5.3 Exemple d'une réponse associée à une fonction de transfert telle que (5-10).....	28
Figure 5.4 Sollicitation de la variable de contrôle DMA par un échelon de -10% .....	29
Figure 5.5 Exemple d'une réponse associée à une fonction de transfert de la forme (5-15).....	30
Figure 5.6 Exemple d'une réponse associée à une fonction de transfert de la forme (5-16).....	31
Figure 5.7 Exemple d'une réponse associée à une fonction de transfert de la forme (5-13).....	33
Figure 5.8 Comparaison entre l'approximation linéaire du délai par Padé à celle par série de Taylor .....	48
Figure 5.9 Comparaison entre le modèle non-linéaire et le modèle linéaire pour la variable d'état X1 sollicitée par la variable de contrôle DAC à +10% .....	61
Figure 5.10 Comparaison entre le modèle non-linéaire et le modèle linéaire pour la variable d'état X1 sollicitée par la variable de contrôle DMA à - 10% .....	61

Figure 5.11 Comparaison entre le modèle non-linéaire et le modèle linéaire pour la variable d'état X2 sollicitée par la variable de contrôle DAC à +10% .....	62
Figure 5.12 Comparaison entre le modèle non-linéaire et le modèle linéaire pour la variable d'état X2 sollicitée par la variable de contrôle DMA à -10% .....	62
Figure 5.13 Comparaison entre le modèle non-linéaire et le modèle linéaire pour la variable d'état C sollicitée par la variable de contrôle DAC à +10% .....	63
Figure 5.14 Comparaison entre le modèle non-linéaire et le modèle linéaire pour la variable d'état C sollicitée par la variable de contrôle DMA à -10% .....	63
Figure 5.15 Comparaison entre le modèle non-linéaire et le modèle linéaire pour la variable M1 sollicitée par DAC à +10% .....	64
Figure 5.16 Comparaison entre le modèle non-linéaire et le modèle linéaire pour la variable M1 sollicitée par DMA à -10% .....	64
Figure 5.17 Comparaison entre le modèle non-linéaire et le modèle linéaire pour la variable d'état T1 sollicitée par la variable de contrôle DAC à +10% .....	65
Figure 5.18 Comparaison entre le modèle non-linéaire et le modèle linéaire pour la variable d'état T1 sollicitée par la variable de contrôle DMA à -10% .....	66
Figure 5.19 Comparaison entre le modèle non-linéaire et le modèle linéaire pour la variable d'état M2 sollicitée par la variable de contrôle DAC à +10% .....	66
Figure 5.20 Comparaison entre le modèle non-linéaire et le modèle linéaire pour la variable d'état M2 sollicitée par la variable de contrôle DMA à -10% .....	67
Figure 5.21 Comparaison entre le modèle non-linéaire et le modèle linéaire pour la variable d'état T2 sollicitée par la variable de contrôle DAC à +10% .....	67

Figure 5.22 Comparaison entre le modèle non-linéaire et le modèle linéaire pour la variable d'état T2 sollicitée par la variable de contrôle DMA à - 10% .....	68
Figure 5.23 Courbe représentant le modèle non-linéaire d'ordre 9 et le modèle linéaire d'ordre 27 pour la variable d'état M3 sollicitée par la variable de contrôle DAC à +10% .....	68
Figure 5.24 Courbe représentant le modèle non-linéaire d'ordre 9 et le modèle linéaire d'ordre 27 pour la variable d'état M3 sollicitée par la variable de contrôle DMA à -10% .....	69
Figure 5.25 Comparaison entre le modèle non-linéaire et le modèle linéaire pour la variable d'état T3 sollicitée par la variable de contrôle DAC à +10% .....	69
Figure 5.26 Comparaison entre le modèle non-linéaire et le modèle linéaire pour la variable d'état T3 sollicitée par la variable de contrôle DMA à -10% .....	70
Figure 5.27 Graphique représentant la zone d'applicabilité du modèle linéaire par rapport à la fonction $R=f(C)$ .....	72
Figure 5.28 Représentation d'un cycle de contrôle simplifié en fonction de deux courbes $R=f(C)$ . Les étapes essentielles y sont numérotées et doivent être lues dans un ordre croissant. Les flèches correspondent à des actions de contrôle .....	77
Figure 5.29 Comparaison entre le modèle non-linéaire et le modèle linéaire en ce qui concerne la variable d'observation R (résistance) de la cuve lorsqu'elle est sous l'influence du système de contrôle .....	80
Figure 5.30 Comparaison entre le modèle non-linéaire et le modèle linéaire en ce qui concerne la variable d'état C (concentration en alumine) lorsque la cuve est sous l'influence du système de contrôle.....	82
Figure 5.31 Comparaison entre le modèle non-linéaire et le modèle linéaire en ce qui concerne la variable d'état T1 (température du bain) lorsque la cuve est sous l'influence du système de contrôle.....	83
Figure 5.32 Affichage des points (C,R) provenant de la simulation du modèle non-linéaire avec système de contrôle en comparaison avec les courbes $R=f(C)$ .....	85

Figure 5.33 Logigramme pour la reconstruction d'un modèle linéaire à partir d'un autre état stationnaire .....	92
Figure 6.1 Emplacement des pôles dans le plan complexe .....	96
Figure 6.2 Diagramme de Bode en amplitude en réponse à un changement dans la variable de contrôle DAC.....	98
Figure 6.3 Diagramme de Bode en phase en réponse à un changement dans la variable de contrôle DAC.....	98
Figure 6.4 Diagramme de Bode en amplitude en réponse à un changement dans la variable de contrôle DMA.....	99
Figure 6.5 Diagramme de Bode en phase en réponse à un changement dans la variable de contrôle DMA.....	99

## LISTE DES SYMBOLES

<b>A</b>	matrice d'évolution dynamique
<b>A<sub>i</sub></b>	sous-matrice d'évolution dynamique de la $i^{\text{ième}}$ variable d'état
<b>b</b>	ordonnée à l'origine de la rampe
<b>B</b>	matrice d'application de contrôle
<b>B<sub>i</sub></b>	sous-matrice d'application de contrôle de la $i^{\text{ième}}$ variable d'état
<b>C</b>	matrice d'observation
<b>C<sub>i</sub></b>	sous-matrice d'observation de la $i^{\text{ième}}$ variable d'état
<b>C</b>	concentration en alumine dans le bain; variable d'état (%massique)
<b>C<sub>op</sub></b>	point d'opération de la concentration en alumine (%massique)
<b>C<sub>p1</sub></b>	chaleur spécifique du bain ( J / kg °C)
<b>C<sub>p2</sub></b>	chaleur spécifique de la gelée ( J / kg °C)
<b>C<sub>p3</sub></b>	chaleur spécifique du métal ( J / kg °C)
<b>C<sub>s</sub></b>	concentration en alumine à saturation (%massique)
<b>d<sub>kj</sub></b>	élément de la matrice <b>D</b> correspondant au couplage entrée-sortie reliant la $k^{\text{ième}}$ variable d'état à la $j^{\text{ième}}$ variable de contrôle
<b>D</b>	matrice de couplage entrée-sortie
<b>D<sub>i</sub></b>	sous-matrice de couplage entrée-sortie de la $i^{\text{ième}}$ variable d'état
<b>dac,DAC</b>	distance anode-cathode; variable de contrôle (m)
<b>dma,DMA</b>	taux d'alimentation en alumine; variable de contrôle (kg/s)
<b>Δm<sub>t</sub></b>	taux du siphonnage de métal (kg/s)
<b>E</b>	vecteur constant correspondant au régime pseudo-stationnaire
<b>h<sub>ij</sub></b>	élément de la matrice <b>H</b> correspondant à la fonction de transfert de la $i^{\text{ième}}$ variable d'état par rapport à la $j^{\text{ième}}$ variable de contrôle
<b>H</b>	matrice des fonctions de transfert
<b>H<sub>f</sub></b>	chaleur de fusion du bain (J/kg)
<b>I</b>	matrice identité
<b>I</b>	courant de ligne (A)

$k_1$	paramètre de dissolution de l'alumine dispersée ( s <sup>-1</sup> %massique)
$k_2$	paramètre de dissolution de l'alumine déposée ( s <sup>-1</sup> %massique)
$k_3$	paramètre de déposition de l'alumine dispersée à déposer (s <sup>-1</sup> )
$k_5$	paramètre de production de métal (kg/s A)
$k_6$	rapport alumine-métal
K	gain statique
$K_v$	gain en vitesse
m	pente de la rampe
$M_1$	masse du bain; variable d'état (kg)
$M_2$	masse de la gelée; variable d'état (kg)
$M_3$	masse de métal; variable d'état (kg)
P	vecteur constant dont chaque élément correspond à $d_i * dm_{a_0}$ (kg)
Q	chaleur totale entrant dans le volume de contrôle par unité de temps (W)
$Q_A$	chaleur passant du bain à l'anode par unité de temps(W)
$Q_B$	chaleur passant du métal à la cathode de carbone par unité de temps (W)
$Q_F$	chaleur passant de la zone de solidification à la gelée par unité de temps (W)
$Q_{F1}$	chaleur allant du bain vers la zone de solidification par unité de temps (W)
$Q_{F2}$	chaleur allant du métal vers la zone de solidification par unité de temps (W)
$Q_{Ha}$	énergie nécessaire pour réchauffer l'alumine par unité de temps (W)
$Q_K$	chaleur passant du bain au métal par unité de temps (W)
$Q_s$	chaleur passant de la gelée aux parois par unité de temps (W)
R	résistance de la cuve ( $\mu\Omega$ )
$R_{op}$	point d'opération de la résistance ( $\mu\Omega$ )
s	variable indépendante complexe en terme de Laplace (rad/s)
t	variable indépendante dans le temps (s)
$t_o$	point d'intersection de l'abscisse avec $X_o$
$t_{35}$	temps correspondant à 35,3% du régime établi (s)

$t_{60}$	temps correspondant à 60% du régime établi (s)
$t_{85}$	temps correspondant à 85,3% du régime établi (s)
$T_F$	température de solidification de la gelée ( $^{\circ}\text{C}$ )
$T_L$	température du liquidus ( $^{\circ}\text{C}$ )
$T_1$	température du bain; variable d'état ( $^{\circ}\text{C}$ )
$T_2$	température de la gelée; variable d'état ( $^{\circ}\text{C}$ )
$T_3$	température du métal; variable d'état ( $^{\circ}\text{C}$ )
<b>u</b>	vecteur de contrôle
$U, u$	variable de contrôle
<b>x</b>	vecteur d'état
<b>X</b>	variable d'état
$x_0$	point d'opération ou condition initiale d'une variable d'état
$X_1$	masse d'alumine dispersée dans le bain; variable d'état (kg)
$X_2$	masse d'alumine déposée; variable d'état (kg)
<b>y</b>	vecteur d'observation
<b>z</b>	vecteur d'état intermédiaire
$z_1-z_{27}$	variables d'état intermédiaires
'	changement de variables

### Alphabet grec

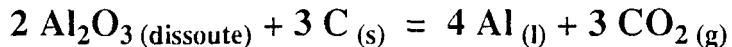
$\theta$	délai (s)
$\tau$	constante de temps (s)
$\zeta$	coefficient d'amortissement

P.S. Étant donné certains impondérables techniques, la notation indicelle n'a pu être utilisée pour les variables d'état dans les graphiques. Par exemple, la température du bain  $T_1$  exprimée sous la forme d'un graphique doit être interprétée comme étant  $T_1$ .

# CHAPITRE 1

## INTRODUCTION

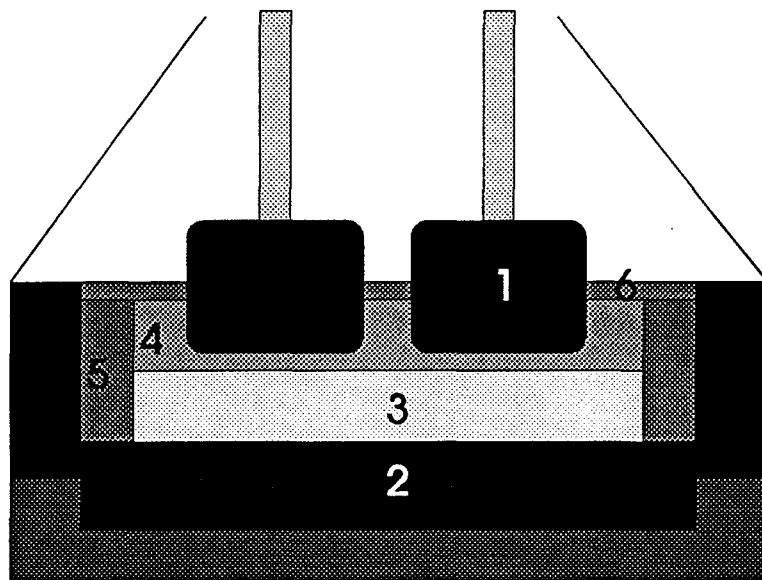
L'électrolyse de l'aluminium est un procédé qui a pris naissance à la fin des années 1800. Il est connu de nos jours sous le nom de procédé Hall-Héroult, en mémoire de ces deux chercheurs qui ont réussi à produire de l'aluminium, par réduction électrolytique de l'alumine ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ) dissoute dans un bain de cryolithe ( $\text{Na}_3\text{AlF}_6$ ). Il résulte de cette réaction électro-chimique l'aluminium liquide qui descend au fond de la cuve d'électrolyse (figure 1.1) pour constituer la cathode et l'oxygène libéré qui réagit avec l'anode de carbone pour la consumer et former du dioxyde de carbone ( $\text{CO}_2$ ). Voici la réaction chimique globale qui représente ce procédé:



La cuve d'électrolyse (figure 1.1) est constituée de plusieurs composantes physiques dont voici une brève description. L'anode et la cathode sont les électrodes qui permettent la circulation du courant qui est de l'ordre des dizaines voire des centaines de milliers d'ampères. Le courant circule de l'anode (pôle positif) vers la cathode (pôle négatif) et il peut être considéré comme d'intensité constante. L'anode est immergée dans le bain (électrolyte en fusion dans laquelle se retrouvent l'alumine et quelques additifs), de manière à assurer une surface de contact assez grande entre le carbone et l'électrolyte. Le courant passe à travers le bain, qui de par sa composition chimique favorise la réduction électrolytique de l'alumine.

De plus, le bain étant en contact avec les parois latérales, il y a solidification de ce dernier pour former la gelée. Celle-ci agit comme un tampon thermique dans la cuve et comme agent de protection contre la détérioration des parois de carbone. D'autres composantes comme la croûte agissent elles aussi comme isolants thermiques. Finalement, de par sa densité l'aluminium produit se dépose sur la cathode de carbone et agit comme un

équipotentielle électrique dû à sa grande conductivité électrique. La profondeur du métal liquide augmente proportionnellement à la production d'aluminium. La distance anode-cathode (DAC) est d'environ 4 à 5 cm. Le but de cette énumération n'est pas de dresser une liste exhaustive de toutes les composantes de la cuve d'électrolyse mais plutôt de décrire brièvement celles qui sont essentielles à la compréhension du procédé.



- 1) anode
- 2) cathode de carbone
- 3) aluminium (cathode)
- 4) bain
- 5) gelée
- 6) croûte

Figure 1.1 Vue de coupe transversale d'une cuve d'électrolyse à anodes pré-cuites

Au niveau industriel, une salle de cuves comporte des centaines de cuves d'électrolyse connectées électriquement en série. Les cuves agissent comme des résistances et, par le fait même, chacune d'entre elles correspond à une chute de tension de l'ordre de 4 à 5 volts. Par contre, un phénomène indésirable appelé effet anodique, provoqué par une trop faible concentration en alumine dans le bain, peut faire augmenter cette chute de tension jusqu'à 50 volts. Cette situation particulière engendre une énorme consommation d'énergie, une augmentation de la température globale de la cuve et une multitude d'autres phénomènes qui sont de nature perturbatrice.

En terme de contrôle, la seule variable d'observation qui est disponible de façon continue est la chute de tension de la cuve d'électrolyse. Toutefois, il est possible, à partir de cette dernière, de déduire la résistance de la cuve et la concentration en alumine. L'estimation de cette concentration est plus ou moins précise et sert principalement à maintenir la concentration d'alumine dans une plage de 2 à 4%. Par ailleurs, de manière à garder le procédé dans une plage d'opération acceptable, certaines opérations manuelles et automatiques doivent être effectuées de façon régulière. Au niveau manuel, nous pouvons citer le retrait d'aluminium par l'intermédiaire d'un siphon, l'échantillonnage du bain pour le contrôle de sa composition par l'ajout d'additifs chimiques, le changement d'anodes et la mesure de la température du bain par thermocouple. Au niveau automatique, il y a le mouvement anodique qui est généralement fonction de la chute de tension de la cuve, et l'alimentation en alumine qui est plus ou moins bien contrôlée, étant donné le manque de variables d'observation.

Étant donné la grande complexité de ce procédé électro-chimique, plusieurs études ont été effectuées dans le but d'améliorer sa compréhension et son contrôle. Ainsi l'électro-chimie, la modélisation, la simulation et le transfert de chaleur ont fortement contribué à l'évolution de la compréhension du procédé. Au niveau contrôle, on a assisté à une grande amélioration, toutefois il reste encore beaucoup à faire, pour maintenir le procédé à l'intérieur d'une plage d'opération désirable. La littérature scientifique n'est pas abondante au sujet de l'analyse dynamique du système. Celle-ci est essentielle si l'on désire obtenir de l'information sur certaines caractéristiques du procédé telles que les constantes de temps et les gains du système. Une façon d'effectuer cette analyse est d'identifier un modèle linéaire de la forme  $\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$  valable à l'intérieur d'une plage qui se situe aux alentours du point d'opération, puis appliquer les techniques d'analyse conventionnelles. On devrait être capable de cerner en cours de route, le degré de représentativité d'un tel modèle linéaire, quitte à garder certaines non-linéarités pour assurer au modèle simplifié une représentativité acceptable. Ce mémoire

porte d'une part sur la réduction linéaire d'un modèle mathématique représentant le procédé, et d'autre part sur l'analyse dynamique du système, par l'entremise du modèle réduit obtenu. Nous verrons par la suite qu'il est possible d'obtenir un modèle linéaire avec une bonne représentativité.

Un simulateur numérique sert de base dans ce mémoire. Il est utilisé à la place du procédé réel comme générateur de données expérimentales. Le simulateur est basé sur un ensemble d'équations différentielles non-linéaires, et pour cette raison il est aussi désigné sous le nom de modèle non-linéaire, par opposition au modèle linéaire qui est le premier objectif de ce projet. Dans une première étape, la construction du modèle linéaire est réalisée par identification paramétrique des fonctions de transfert, pour deux raisons majeures: assurer la stabilité numérique et entamer l'étape d'analyse en parallèle avec celle de la simplification linéaire. Dans une deuxième étape, celle de l'analyse du système, on inclut l'analyse des réponses indicielles et des fonctions de transfert, la localisation des pôles dans le plan complexe comme critère de stabilité, les diagrammes de Bode ainsi que les marges de gain et de phase en faisant l'hypothèse que le système est contrôlé en boucle fermée par une rétroaction unitaire négative.

En conséquence, les chapitres de ce mémoire sont organisés de manière à situer le lecteur dans le processus à suivre pour la réalisation de ces objectifs. Après une introduction dans le Chapitre 1, le Chapitre 2 fait une revue des travaux antérieurs et le Chapitre 3 présente succinctement les objectifs et la méthodologie. Au Chapitre 4 on présente le simulateur numérique de la cuve qui sert de point de départ à ces travaux. Le Chapitre 5 présente l'identification des fonctions de transfert, le développement du modèle linéaire ainsi que sa validation. Au Chapitre 6 on présente l'analyse dynamique du procédé à partir du modèle linéaire identifié au chapitre précédent. Finalement, le Chapitre 7 forme la conclusion de ce mémoire et présente des recommandations pour les travaux futurs.

## CHAPITRE 2

### REVUE DES TRAVAUX ANTÉRIEURS

De manière à situer le lecteur dans le contexte actuel, voici un aperçu historique sur l'évolution des modèles mathématiques représentant le procédé de l'électrolyse de l'aluminium.

En 1972, Dow et Goodnow [4] s'intéressent aux variations de la température du bain en fonction de certaines variables d'opération. Ils remarquent que le mauvais fonctionnement d'une cuve d'électrolyse se manifeste souvent à travers la température du bain. Ils évoquent que la dynamique de cette dernière est fonction d'un bilan énergétique et du temps écoulé depuis la dernière alimentation en alumine. Par une régression multiple, ils modélisent l'effet à long terme de l'énergie injectée sur la température moyenne quotidienne du bain, avec des résultats qui démontrent une bonne corrélation. Ils aimeraient contrôler la cuve par l'intermédiaire de la température du bain, mais ils ne trouvent aucun moyen satisfaisant pour mesurer cette dernière en continu. En conséquence, les résultats de leur étude se limitent à une meilleure compréhension du procédé.

Par la suite en 1973, Ek [5] construit un modèle constitué de 16 équations différentielles non-linéaires représentant la dynamique du procédé de l'électrolyse de l'aluminium. Il sépare la cuve en 13 composantes distinctes et produit pour chacune de ces dernières un bilan massique et énergétique. Il en fait de même avec les 3 masses (dont 2 de  $\text{Al}_2\text{O}_3$  et 1 de  $\text{AlF}_3$ ) qui se retrouvent sous forme cachée à l'intérieur du bain ou de la cuve. En d'autres termes, le modèle est constitué de 16 variables d'état dont 7 sont des masses et 9 sont des températures. Le modèle obtenu tient compte de la plupart des phénomènes caractérisant ce procédé notamment les réactions chimiques, l'alimentation de matériaux froids et les fluctuations de la gelée sur les parois. Le modèle est utilisé comme partie intégrante d'un simulateur qui utilise pour

condition initiale une solution stationnaire. On s'en sert notamment pour étudier différentes constructions de cuves, conditions d'opération ou stratégies de contrôle.

En 1976, Saksvikroenning, Vee et Gran [14] proposent l'utilisation d'un filtre de Kalman qui implique l'application d'un modèle réduit linéaire en parallèle avec le procédé, de manière à être en mesure d'évaluer certaines variables d'importance. L'objectif de leur étude est de combler le manque de variables mesurées par l'entremise d'un estimateur, et à élaborer une stratégie de contrôle pour la cuve d'électrolyse. L'estimateur utilise comme variables d'entrée la résistance de la cuve et la température des blocs de carbone situés sur les côtés. Les auteurs concluent que 2 non-linéarités doivent être conservées à l'intérieur du modèle réduit, soit la résistance en fonction de la concentration en alumine dans le bain, et la dispersion de l'alumine dans le bain et la boue, lors de l'opération du cassage de la croûte. Ils affirment qu'il est difficile d'évaluer l'efficacité de l'estimateur étant donné l'incertitude sur la mesure de la température moyenne du bain et sur celle de la concentration moyenne de l'alumine dissoute dans l'électrolyte.

En 1981, Hashimoto et Ikeuchi [8], apportent une variante aux modèles mentionnés antérieurement, en tenant compte de la diffusion de la masse dans les couches frontières de solidification de la gelée, qui se situe entre le bain et cette dernière. Le modèle résultant semble offrir plus de précision en particulier sur la variation massique de la gelée.

En 1985, Moen, Aalbu et Borg [11] construisent un contrôleur adaptatif permettant de contrôler l'alimentation en alumine par point de manière plus rigoureuse. Les auteurs soutiennent que la stabilité d'une cuve d'électrolyse réside majoritairement dans une alimentation en alumine bien contrôlée. Ils en concluent que les deux rôles que le contrôleur doit jouer sont de maintenir la concentration en alumine à l'intérieur d'une certaine limite et garder la résistance près de la valeur de référence. Sous l'effet d'un tel contrôle, on peut trouver si la cuve est dans un état de sur-alimentation ou de sous-alimentation,

et ce en fonction de la variation de la résistance par rapport à la concentration de l'alumine. Par ailleurs, ce système de contrôle doit être intimement lié à celui de l'anode, en ce sens que ce dernier doit minimiser le nombre de mouvements de l'anode de manière à ne pas interférer dans l'estimation de la concentration de l'alumine. En conséquence, le contrôleur entraîne une diminution de la fréquence des effets anodiques et une stabilisation des opérations de la cuve. Par contre, l'algorithme utilisé fait abstraction de plusieurs variables d'état non-négligeables comme les températures et la formation de boue (dépôts d'alumine non-dissoute sur la surface de carbone cathodique).

Les travaux de Sörheim et Borg (1989) [16] se situent chronologiquement à la suite de ceux de Moen, Aalbu et Borg (1985) [11]. L'objectif principal des travaux de Sörheim et Borg est de raffiner le cheminement permettant d'estimer l'état de la cuve, et ce par l'entremise d'un modèle non-linéaire d'ordre 18 et d'un filtre de Kalman étendu sous-optimal. Afin de réaliser un estimateur d'une capacité et d'une efficacité accrues, ils utilisent les mesures suivantes: la résistance du bain et sa dérivée partielle par rapport à la concentration en alumine, la température du bain et la quantité de fluorure dans le bain. Les résultats démontrent que l'estimateur est précis et robuste, dans le sens où il tient compte de certains phénomènes tels l'effet anodique et les pertes de courant sans causer d'erreurs fatales. L'erreur maximale commise dans l'estimation de la température du bain (qui est proportionnelle à la précision des lectures prises par l'opérateur) est de l'ordre de 4 °C, sur une période de 6 jours. Par contre, dans le cas de la concentration en alumine, l'estimation se trouve à environ -1.5% d' $\text{Al}_2\text{O}_3$  de la réponse réelle sur une période de 24 heures. Selon les auteurs, la prochaine étape est la conception d'un contrôleur optimal pour la cuve d'électrolyse.

En 1992, Tikasz, Bui et Potocnik [17], développent un modèle non-linéaire d'ordre 18 qui sert de base à un simulateur construit pour l'étude du comportement dynamique et du contrôle de la cuve, ainsi qu'à la formation de

personnel. Le simulateur peut servir d'outil de décisions et de supervision pour la cuve. Ils proposent ensuite une version simplifiée du modèle où ils regroupent les composantes de la cuve possédant des propriétés similaires comme les sections supérieure et inférieure de la gelée, et ils excluent les composantes qui ont peu d'importance dans le contexte d'une dynamique à court terme notamment la cathode de carbone. Ils réussirent à réduire le nombre de composantes à six soit: trois phases distinctes d'alumine, le bain , la gelée et le métal. En ce sens, ils font suite aux travaux de Hashimoto et Ikeuchi [8] (qui considèrent l'alumine comme une entité distincte) ou aux travaux de Ek [5] (qui la considère comme étant en phase dissoute ou non-dissoute), en élargissant cette représentation à trois formes soit l'alumine dispersée, déposée et dissoute dans le bain. Les auteurs soutiennent que le bilan massique de l'alumine est une partie sensible du modèle et doit être traité adéquatement par le modèle. Il en résulte un modèle non-linéaire représentant six masses et trois températures. Sa dynamique, qui provient elle aussi de bilans massique et énergétique, est représentée par les neuf équations différentielles suivantes:

$$\frac{dX_1}{dt} = \text{dma} - k_1 X_1 (C_s - C) - k_3 X_1 \quad (2-1)$$

$$\frac{dX_2}{dt} = k_3 X_1 - k_2 X_2 (C_s - C) \quad (2-2)$$

$$\frac{dC}{dt} = \frac{k_1 X_1 (C_s - C) + k_2 X_2 (C_s - C) - k_6 k_5 I}{M_1} \quad (2-3)$$

$$\frac{dM_1}{dt} = \text{dma} - k_6 k_5 I - \frac{dM_2}{dt} \quad (2-4)$$

$$\frac{dT_1}{dt} = \frac{Q - Q_A - Q_K - Q_{F1} - Q_{Ha}}{M_1 C_{p1}} \quad (2-5)$$

$$\frac{dM_2}{dt} = \frac{Q_F - Q_{F1} - Q_{F2}}{H_F + (C_{p1}(T_1 - T_F) + C_{p2}(T_2 - T_F))/2 + C_{p2}(T_F - T_2)} \quad (2-6)$$

$$\frac{dT_2}{dt} = \frac{Q_F - Q_s}{M_2 C_{p2}} \quad (2-7)$$

$$\frac{dM_3}{dt} = k_5 I - \Delta m_t \quad (2-8)$$

$$\frac{dT_3}{dt} = \frac{Q_K - Q_B - Q_{F2} + k_5 I C_{p3}(T_1 - T_3)}{M_3 C_{p3}} \quad (2-9)$$

où les variables d'état sont les suivantes:

$X_1$  : masse d'alumine dispersée dans le bain;

$X_2$  : masse d'alumine déposée;

$C$  : concentration d'alumine dissoute dans le bain;

$M_1$  : masse du bain;

$T_1$  : température du bain;

$M_2$  : masse de la gelée;

$T_2$  : température de la gelée;

$M_3$  : masse du métal;

$T_3$  : température du métal.

Nous verrons au prochain chapitre comment se situe le présent travail de recherche, dans le prolongement des travaux mentionnés ci-dessus.

## CHAPITRE 3

### OBJECTIFS ET MÉTHODOLOGIE

Actuellement, les modèles mathématiques représentant la dynamique de ce procédé sous forme de bilans massique et énergétique sont non-linéaires, et par le fait même sont difficiles à mettre en oeuvre pour des fins d'analyse dynamique et de contrôle.

Dans le cadre de ce projet de recherche nous partons du modèle non-linéaire d'ordre neuf de Tikasz et al. [17] et proposons de construire un modèle linéaire de la forme  $\frac{dx}{dt} = A x(t) + B u(t)$ , qui servirait d'outil pour étudier la dynamique du procédé, par l'intermédiaire des techniques d'analyse de systèmes linéaires. La démarche envisagée est la suivante:

- 1) À partir du modèle non-linéaire d'ordre neuf de Tikasz et al. [17] construire un simulateur et l'utiliser comme substitut du procédé réel;
- 2) Faisant usage du simulateur ainsi obtenu, développer un modèle linéaire applicable aux alentours d'un point d'opération nominal de la cuve;
- 3) Valider le modèle linéaire ainsi obtenu en comparant ses sorties avec celles du simulateur construit à l'étape 1 et cerner les limites d'applicabilité de ce modèle linéaire;
- 4) En guise de généralisation, développer une méthodologie pour reconstruire le modèle linéaire pour qu'il soit valable autour d'un autre point d'opération de la cuve;
- 5) À partir du modèle linéaire, faire l'analyse dynamique du procédé en passant par les fonctions de transfert et l'étude de stabilité.

# CHAPITRE 4

## LE SIMULATEUR NUMÉRIQUE

Dans ce chapitre, nous présentons la constitution et le fonctionnement du simulateur numérique construit à partir du modèle non-linéaire d'ordre neuf de Tikasz et al. [17], tel que mentionné au point 1 du chapitre précédent. Le simulateur (voir Figure 4.1) est constitué de cinq blocs distincts. Le premier de ces blocs est le système d'équations différentielles qui représente la dynamique du procédé. La résolution de ce système d'équations est réalisée à partir de valeurs stationnaires qui forment le point d'opération du procédé. Ces dernières proviennent de la partie statique d'un modèle non-linéaire d'ordre dix-huit [17] et ont été ajustées manuellement en équilibrant un à un les flux de chaleur. Le deuxième bloc décrit les équations algébriques du système. Celui-ci alimente le système d'équations différentielles avec les paramètres géométriques et physiques variables (thermiques, électriques, chimiques et mécaniques) (voir Annexe G). À noter que les paramètres physiques peuvent varier en fonction des paramètres géométriques alors que ces derniers à leur tour varient en fonction du procédé. Ainsi, les échanges de chaleur représentés par les équations différentielles dépendent des flux thermiques qui dépendent des surfaces d'échanges de chaleur. Or, si on provoque un mouvement anodique vers le haut, le niveau de bain va baisser ce qui provoque une diminution des surfaces d'échanges de chaleur. Cet exemple démontre le rôle que le deuxième bloc joue par rapport au premier. Le troisième bloc est celui associé aux opérations manuelles et automatiques pratiquées sur le procédé, principalement l'alimentation en alumine et les mouvements anodiques. Le quatrième bloc fournit les paramètres physiques et géométriques constants aux équations différentielles et algébriques. Par exemple, les dimensions de la cuve sont des paramètres géométriques constants. Ce bloc inclut aussi la valeur de chaque variable d'état en régime stationnaire -i.e. le point d'opération. Finalement, le dernier bloc représente les résultats provenant de la résolution du système d'équations différentielles et certaines autres variables d'importance comme la résistance de la cuve et la hauteur du bain.

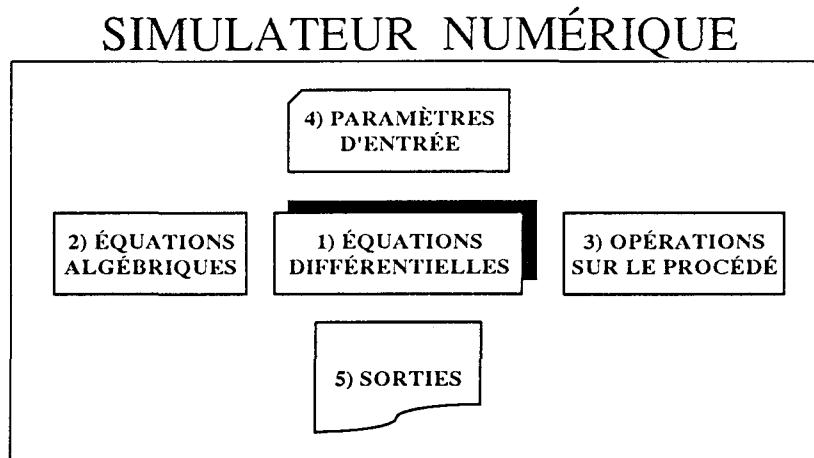


Figure 4.1 Représentation schématique du simulateur numérique

Nous commençons ce chapitre en décrivant les deux modes de fonctionnement de ce simulateur soit l'option simulation et l'option identification du procédé. Nous discuterons ensuite des limites du simulateur, dans le cadre de ce projet.

## 4.1 Les deux modes de fonctionnement du simulateur

Le simulateur nous offre deux options. La première est celle où l'on désire observer le procédé, dans un mode réel opérationnel où la plupart des phénomènes physiques sont considérés. La seconde est reliée à une idéalisation du procédé qui fait abstraction, jusqu'à un certain point, de la réalité et de certaines opérations, de manière à identifier le système par l'entremise de sollicitations prédéterminées.

### 4.1.1 L'option simulation

Ce premier mode de fonctionnement est celui qui s'apparente le plus à la réalité du procédé de l'électrolyse de l'aluminium. Il tient compte de tous les phénomènes physiques associés aux bilans massiques et énergétiques qui forment les équations différentielles et algébriques. Certaines opérations qui sont couramment pratiquées sur le processus sont aussi incluses dans cette

option, notamment l'alimentation discrète par point, le retrait de métal et l'extinction d'effets anodiques. De plus, cette option nous offre la possibilité d'utiliser un système de contrôle pour maintenir la concentration en alumine à l'intérieur d'une plage d'opération (voir figure 4.2). Quand cette option est sélectionnée, l'alimentation en alumine est volontairement réduite à 80% de sa valeur à l'équilibre, et ce à partir de la quatrième heure de simulation. Le contrôleur prend le procédé en charge en le maintenant dans une zone d'opération, par des actions de contrôle sur l'alimentation en alumine (DMA) et la distance anode-cathode (DAC). Nous verrons au Chapitre 5 le rôle et le fonctionnement détaillé du contrôleur, dans le cadre de la validation du modèle linéaire. En conséquence, ce mode de fonctionnement se prête bien à la compréhension du procédé, sous des conditions réelles d'opération.

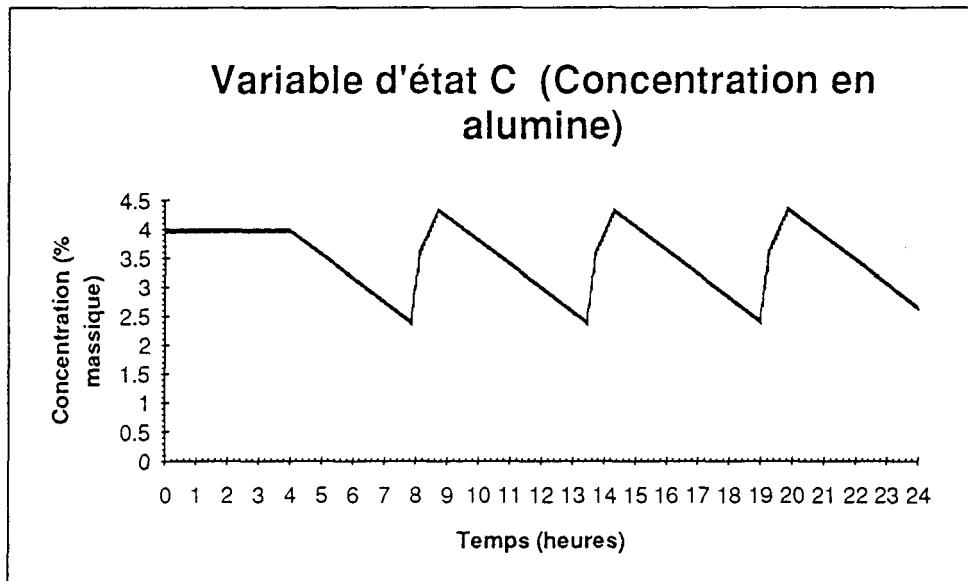


Figure 4.2 Exemple d'une simulation sous l'influence du système de contrôle

#### 4.1.2 L'option identification

Pour sa part, l'option identification est préconisée si l'on désire étudier la réponse d'une variable d'état à une sollicitation sous forme d'échelon d'une variable de contrôle. Ce mode de fonctionnement permet de générer un échelon d'amplitude et de signe déterminés par l'usager, et permet la génération automatique des fonctions de transfert associées à une variable de

contrôle prédéterminée (nous verrons au Chapitre 5 que cette option sera utilisée, dans un cadre plus large que l'analyse dynamique du système). Or, pour l'identification paramétrique de fonctions de transfert, il est essentiel que le modèle non-linéaire qui sert de point de départ soit dans un état parfaitement stationnaire (paramètres ne changent pas avec le temps) avant d'appliquer la sollicitation. En conséquence, quand cette option est sélectionnée, l'alimentation en alumine et le retrait de métal doivent être supposés pratiqués de façon continue, au lieu d'être des actions discrètes dans le temps comme c'est le cas en réalité.

Par ailleurs, les fonctions de transfert identifiées diffèrent pour chaque variable de sollicitation. Si l'usager sélectionne la variable de contrôle DMA (alimentation en alumine), il obtient les neuf fonctions de transfert associées à cette sollicitation. En conséquence, de manière à identifier les dix-huit fonctions de transfert du procédé (neuf variables d'état pour chacune des deux variables de contrôle), il faut procéder en deux parties. La figure 4.3 montre un exemple de sollicitation par la variable de contrôle DAC (Distance Anode-Cathode) avec un échelon d'une amplitude correspondant à dix pour cent de la valeur nominale et de signe positif.

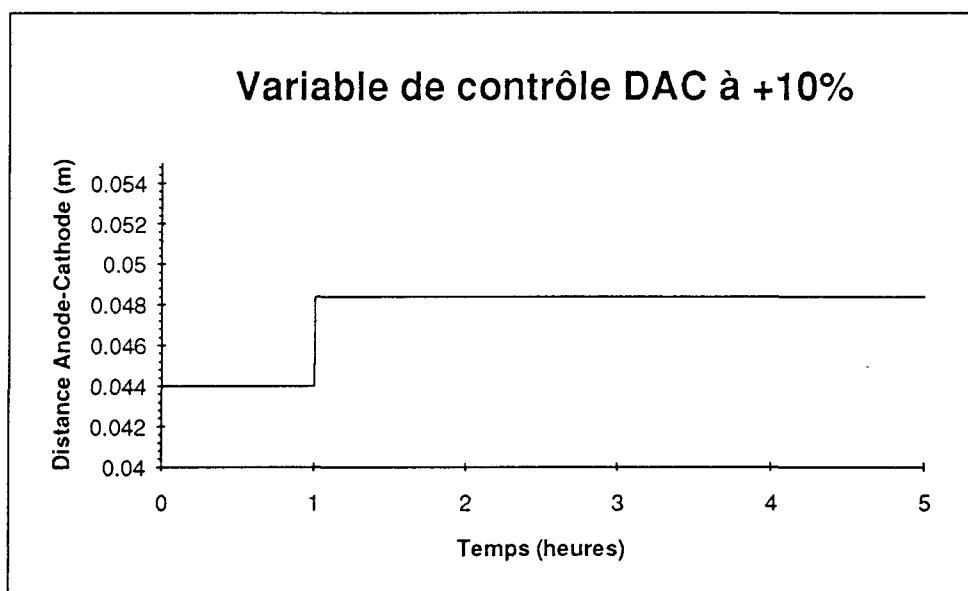


Figure 4.3 Sollicitation par la variable de contrôle DAC avec un échelon de +10%

## 4.2 Les limites du simulateur

Étant donné les objectifs de ce projet à savoir l'identification d'un modèle linéaire et l'analyse dynamique d'une cuve d'électrolyse, nous devons déterminer des limites acceptables pour la validité du simulateur. Il est possible de rencontrer deux sortes de limites du simulateur soit, d'une part, les limites d'application du modèle mathématique (équations différentielles plus équations algébriques) et d'autre part, les limites en ce qui a trait à la quantité d'opérations considérées comme nécessaires. En ce qui concerne le modèle, il doit être employé sous des conditions normales d'opération de la cuve. Notamment, il ne demeure valide que si la concentration en alumine dans le bain se situe entre 1,5% et 7% et si la distance anode-cathode se trouve entre 3 et 6 cm. En conséquence, il tient compte de tous les phénomènes usuels de transfert de masses et de chaleur hormis les phénomènes particuliers tels que la formation de boue entre la cathode de carbone et le métal. Au niveau des opérations effectuées sur le procédé, le simulateur tient compte de l'alimentation en alumine par point, du retrait de métal et de l'extinction des effets anodiques mais exclut notamment les changements d'anodes.

Finalement, certaines variables sont considérées comme étant constantes car leurs variations sont négligeables pour une dynamique à court terme; c'est le cas par exemple du rapport de concentration de NaF et de AlF<sub>3</sub> (ratio) et du pourcentage de CaF<sub>2</sub>.

# CHAPITRE 5

## APPROXIMATION LINÉAIRE DU MODÈLE NON-LINÉAIRE D'ORDRE NEUF

Dans ce chapitre, nous discutons dans un premier temps des méthodes préconisées dans l'optique d'une approximation linéaire et nous en adoptons une pour les fins de cette étude. Dans un deuxième temps, nous discutons d'une part de l'élaboration et de la validation du modèle linéaire, et d'autre part nous parlons des limites d'applicabilité de ce dernier. Finalement, dans un troisième temps, on discute de la méthode à utiliser pour identifier un nouveau modèle linéaire dans un état stationnaire autre que celui autour duquel le premier modèle linéaire a été construit.

### 5.1 Les méthodes préconisées

Dans cette section, on énumère trois méthodes d'approximation linéaire en faisant ressortir les avantages et les inconvénients de chacune. L'adoption d'une méthode particulière est fonction de l'application envisagée. En conséquence, la méthode sélectionnée doit être fonction d'une analyse dynamique du système.

#### 5.1.1 Série de Taylor tronquée au premier ordre

Les équations différentielles ordinaires formant le modèle non-linéaire sont constituées de plusieurs termes dont certains sont linéaires et d'autres ne le sont pas. De manière à linéariser ce type d'équations différentielles, nous décomposons en série de Taylor les termes non-linéaires et nous les tronquons au premier ordre. Ainsi, nous obtenons un système d'équations différentielles ordinaires (ÉDO) linéaires. Voici la forme générale d'une série de Taylor pour une fonction (i.e. un terme non-linéaire de l'ÉDO) à 3 variables:

$$f(X_1, X_2, X_3) = f(X_{1o}, X_{2o}, X_{3o}) + \frac{d f(X_1, X_2, X_3)}{dX_1} \Big|_{(X_{1o}, X_{2o}, X_{3o})} (X_1 - X_{1o}) + \\ \frac{d f(X_1, X_2, X_3)}{dX_2} \Big|_{(X_{1o}, X_{2o}, X_{3o})} (X_2 - X_{2o}) + \frac{d f(X_1, X_2, X_3)}{dX_3} \Big|_{(X_{1o}, X_{2o}, X_{3o})} \\ (X_3 - X_{3o}) + \text{erreur d'approximation} \quad (5-1)$$

où

$f(X_{1o}, X_{2o}, X_{3o})$  est l'évaluation de  $f$  au point d'opération  $(X_{1o}, X_{2o}, X_{3o})$   
 $\frac{d f(X_1, X_2, X_3)}{dX_1} \Big|_{(X_{1o}, X_{2o}, X_{3o})}$  est la dérivée partielle de  $f$  par rapport à  
 $X_1$  évaluée au point d'opération  
 $(X_{1o}, X_{2o}, X_{3o})$

Par exemple, l'équation différentielle 2-1 répétée ci-dessous comme équation 5-2, qui représente la variation de la masse d'alumine dispersée dans l'électrolyte par rapport au temps, possède 4 termes dont seulement un est non-linéaire ( $k_1$ ,  $k_3$  et  $C_s$  étant des constantes).

$$\frac{dX_1}{dt} = \text{dma} - k_1 X_1 C_s + k_1 X_1 C - k_3 X_1 \quad (5-2)$$

Pour linéariser cette équation il faut, d'une part, trouver l'équivalence linéaire de  $X_1 C$  par sa série de Taylor, en vertu de la formulation 5-1 :

$$X_1 C = (X_{1o} C_o) + C_o (X_1 - X_{1o}) + X_{1o} (C - C_o) \quad (5-3)$$

D'autre part, il suffit de substituer 5-3 dans 5-2 pour obtenir une équation différentielle ordinaire linéaire (5-4) qui ne demeure valide qu'à proximité du point d'opération  $(X_{1o}, C_o)$  :

$$\frac{dX_1}{dt} = a_{11} X_1 + a_{13} C + b_{12} \text{dma} + q_1 \quad (5-4)$$

$$\begin{aligned} \text{où } \quad & a_{11} = -k_1 C_s + k_1 C_o - k_3 \\ & a_{13} = k_1 X_{1o} \\ & b_{12} = 1 \\ & q_1 = -k_1 X_{1o} C_o \end{aligned}$$

Contrairement aux méthodes de linéarisation statistiques, celle-ci possède l'avantage de conserver une signification physique à l'intérieur des coefficients constants. Par contre, cette méthode est longue et fastidieuse. Après linéarisation de toutes les équations, il est impossible de changer la nature d'un paramètre sans altérer la validité du modèle. En d'autres termes, si à un moment donné, on détecte qu'un paramètre a été considéré comme constant alors qu'il est variable, à ce moment, il faut reprendre une partie des calculs effectués. Ainsi, malgré ses mérites cette méthode est écartée en ce qui concerne ce travail.

### 5.1.2 Méthode des moindres carrés

Cette technique permet l'identification des coefficients formant les matrices **A** et **B** du système sous la formulation d'état, et ce par l'application de la méthode des moindres carrés à des données provenant d'un procédé réel ou d'une simulation numérique.

La façon de procéder est la suivante. On recueille les données associées aux variables d'état et aux variables de contrôle constituant l'équation différentielle non-linéaire étudiée. On effectue une régression linéaire multiple sur ces données pour trouver les coefficients formant l'équation différentielle linéaire. En d'autres termes, ces derniers formeront les coefficients  $a_{ij}$  et  $b_{ij}$  des matrices **A** et **B** sous la formulation d'état où **A** est la matrice d'évolution dynamique et **B** est la matrice d'application de contrôle.

Cette méthode est simple d'utilisation et possède un bon degré de précision pour des fins de contrôle (Ouellet, Bui et Perron [13]). Toutefois, il en demeure que cette méthode peut générer des pôles positifs (pseudo-

instabilité) alors qu'en réalité le système est stable ce qui exclut son utilisation, dans le cadre du présent travail.

### 5.1.3 Identification paramétrique des fonctions de transfert

Cette méthode permet l'obtention de fonctions de transfert d'ordre égale ou inférieur à 2 avec ou sans délai par l'entremise de données provenant directement du procédé ou d'une simulation numérique. À partir des fonctions de transfert obtenues on déduit la matrice d'évolution dynamique  $\mathbf{A}$ , la matrice d'application de contrôle  $\mathbf{B}$ , la matrice d'observation  $\mathbf{C}$  et la matrice de couplage entrée-sortie  $\mathbf{D}$  qui vont former le modèle linéaire.

Voici un bref résumé de cette méthode d'identification paramétrique. On choisit une variable d'état comme sortie et une variable de contrôle comme entrée reliées à la fonction de transfert désirée. On provoque un changement en échelon dans la variable de contrôle et on trace le comportement de la variable d'état en réponse à cette commande (réponse indicielle). On identifie la forme de cette réponse, de manière à choisir le type de fonction de transfert lui étant associée. Selon ce type les paramètres à identifier peuvent être un ou une combinaison des coefficients suivants: constante de temps ( $\tau$ ), gain statique ( $K$ ), gain en vitesse ( $K_v$ ), coefficient d'amortissement ( $\zeta$ ) et délai ( $\theta$ ) du système. Voici l'énumération de quelques méthodes d'identification paramétrique de fonctions de transfert:

#### i) Type Proportionnel:

On utilise ce type de fonction de transfert, lorsque la réponse indicielle est de la même forme que la sollicitation - i.e. d'une forme échelon. L'expression ci-dessous montre la représentation de cette fonction de transfert:

$$h_{ij} = K \quad (5-5)$$

où  $K$  est le gain statique

Voici comment calculer le gain:

$$K = \frac{\Delta X}{\Delta U} \quad (5-6)$$

où       $\Delta X$  est le changement de la variable d'état, en régime établi et  $\Delta U$  est le changement de la variable de contrôle

### ii) Type Intégral:

Ce type de fonction de transfert est utilisé lorsque la réponse à l'échelon correspond à une rampe accompagnée ou non d'un délai (voir la figure 5.2 à la section suivante). L'expression ci-dessous montre la représentation de cette fonction de transfert:

$$h_{ij} = \frac{K_v e^{-\theta s}}{s} \quad (5-7)$$

où       $K_v$  est le gain en vitesse  
 $\theta$  est le délai

Les deux paramètres à identifier sont le gain en vitesse et le délai. Ils peuvent être calculés de la façon suivante:

$$K_v = \frac{\Delta X / \Delta t}{\Delta U} \quad (5-8)$$

où       $\Delta X / \Delta t$  est la pente de la variable d'état p/r au temps, en régime établi

$$\theta = \frac{x_0 - b}{m} \quad (5-9)$$

où       $x_0$  est la condition initiale de la variable d'état

$m$  et  $b$  sont respectivement la pente et l'ordonnée à l'origine de l'équation de la rampe  $\therefore$   
 $x(t) = mt + b$

### iii) Type du premier ordre:

Cette troisième forme de fonction de transfert est employée lorsque la réponse indicielle ressemble à une exponentielle (voir la figure 5.3 à la section suivante). L'expression (5-10) montre une fonction de transfert de premier ordre avec délai.

$$h_{ij} = \frac{K e^{-\theta s}}{\tau s + 1} = \frac{K e^{-\theta s}/\tau}{s + 1/\tau} \quad (5-10)$$

où  $\tau$  est la constante de temps

Ici, nous avons trois paramètres à identifier soit: le gain statique, la constante de temps et le délai. On calcule le gain statique à partir de la relation (5-6). Pour évaluer la constante de temps et le délai, on peut utiliser les équations (5-11) et (5-12) formulées [15] par Sundaresan et Krishnaswamy qui sont basées sur une minimisation de la différence entre la réponse indicielle et le modèle, au sens des moindres carrés. La méthode fait appel aux temps correspondant à 35,3% ( $t_{35}$ ) et 85,3% ( $t_{85}$ ) de la réponse en régime établi.

$$\tau = 0,67 (t_{85} - t_{35}) \quad (5-11)$$

$$\theta = 1,3 t_{35} - 0,29 t_{85} \quad (5-12)$$

### vi) Type du deuxième ordre:

Cette quatrième forme de fonction de transfert est utilisée lorsque la réponse indicielle a la forme d'un 'S' c'est-à-dire avec un point d'inflexion.

deuxième ordre sans délai.

$$H = \frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1} \quad (5-13)$$

où  $\zeta$  est le coefficient d'amortissement

L'identification des paramètres (gain, constantes de temps et coefficient d'amortissement) est réalisée, par l'intermédiaire de la méthode de Smith [15] qui est valable pour des systèmes sous- ou sur-amortis. Elle est basée sur les temps correspondant à 20% ( $t_{20}$ ) et 60% ( $t_{60}$ ) de la valeur en régime établi. Contrairement à la méthode de Sundaresan et al., celle-ci nécessite l'utilisation d'un abaque pour l'identification des paramètres [15]. Par contre, nous verrons plus loin que dans la plupart des cas les réponses indicielles de deuxième ordre se rapprochent de l'amortissement critique. Donc, on pose le coefficient d'amortissement ( $\zeta$ ) égal à un ce qui signifie que le système est constitué d'un double pôle réel négatif. Cette approximation nous permet de dériver, par l'entremise de la charte de Smith [15], une expression algébrique pour exprimer la double constante de temps:

$$\tau = \frac{t_{60}}{2} \quad (5-14)$$

Le lecteur intéressé aux méthodes d'identification pour les systèmes de premier et deuxième ordre peut se référer à Seborg, Edgar et Mellichamp [15] pour de plus amples détails.

Par ailleurs, comme mentionné au chapitre 4, pour appliquer une méthode d'identification paramétrique des fonctions de transfert, les variables de contrôle doivent être continues. Or, nous savons que dans la pratique, l'alimentation en alumine (DMA) est faite de façon discrète. Pour pallier à ce problème, il est possible à partir du simulateur de modifier ce signal d'entrée pour lui donner la forme continue. Par exemple, au lieu d'alimenter la cuve à

pour lui donner la forme continue. Par exemple, au lieu d'alimenter la cuve à 2,9 kg à toutes les quatre minutes, on l'alimente à 0,012 kg/s ce qui n'altère en rien la quantité totale d'alumine injectée. De la même façon, on peut effectuer le retrait de métal ( $\Delta m_t$ ) en continu, pour faire en sorte que le procédé soit dans un état stationnaire tel que requis pour utiliser cette technique. Évidemment, il serait difficile voire irréalisable d'effectuer ces transformations sur le procédé réel mais c'est précisément ce qui souligne l'avantage des simulations numériques.

En conséquence, étant donné les objectifs de l'étude à savoir l'approximation linéaire du modèle mathématique et l'analyse dynamique du procédé, nous retenons cette méthode comme étant la plus rapide et la plus appropriée à nos besoins.

## 5.2 Les résultats

Dans cette section, nous discutons des modèles linéaires obtenus par identification paramétrique des fonctions de transfert. Ces résultats proviennent directement de l'option identification du simulateur. Ainsi, les fonctions de transfert générées sont de cinq configurations différentes dont certaines peuvent être accompagnées d'un délai. Celles-ci sont des combinaisons des types de fonctions de transfert (5-5), (5-7), (5-10) et (5-13) discutés à la section 5.1.3. Donc, voici une énumération de ces configurations chacune incluant un exemple de calculs:

### i) Configuration Intégrale:

Comme mentionné à la section 5.1.3, cette configuration de fonction de transfert est utilisée lorsque la réponse à l'échelon correspond à une rampe (voir la figure 5.2). De plus, dans plusieurs cas elle est employée en conjonction avec un délai comme le démontre la formulation (5-7). Par contre,

si le délai est inexistant alors  $\theta = 0$  ce qui met le terme exponentiel égal à 1 au numérateur. Ainsi, la fonction de transfert devient un intégrateur pur.

$$h_{ij} = \frac{K_v e^{-\theta s}}{s} \quad (5-7)$$

où  $K_v = \frac{\Delta X / \Delta t}{\Delta U}$  est le gain en vitesse

$\Delta X / \Delta t$  est la pente de la variable d'état p/r au temps, en régime établi

$\Delta U$  est la variation de la variable de contrôle

$\theta$  est le délai

Exemple: Calcul de la fonction de transfert  $h_{41} = \frac{M_1(s)}{DAC(s)}$

À la figure 5.1 on voit que l'on sollicite le système avec un saut de 10% dans la variable de contrôle Distance Anode-Cathode (DAC). En observant la figure 5.2, on remarque que la réponse de  $M_1$  à cet échelon est en effet une rampe en conjonction avec un délai. Nous devons donc calculer le gain en vitesse ( $K_v$ ) et le délai ( $\theta$ ), de manière à identifier cette fonction de transfert.

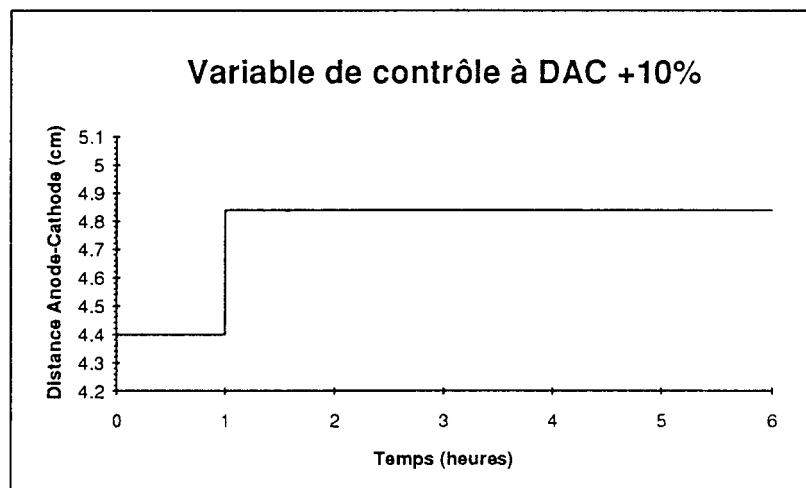


Figure 5.1 Sollicitation de la variable de contrôle DAC par un échelon de +10%

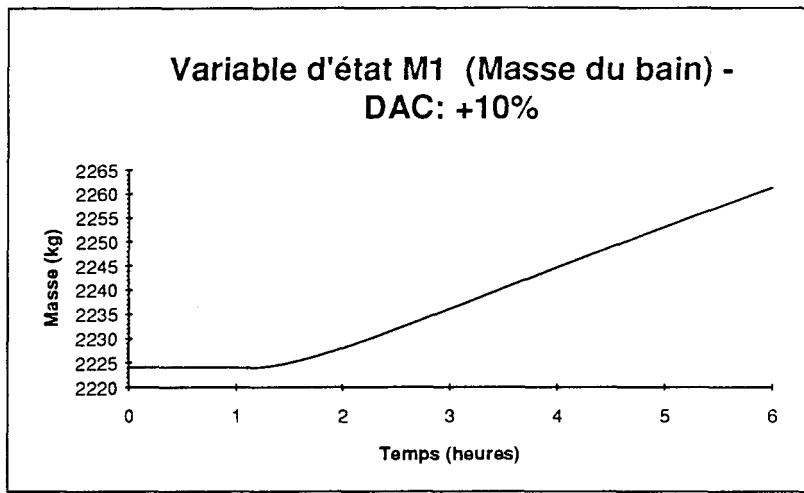


Figure 5.2 Exemple d'une réponse associée à une fonction de transfert de la forme (5-7)

Voici le calcul du gain en vitesse:

$$K_v = \frac{\Delta X / \Delta t}{\Delta U} = \frac{21 \text{ kg} / 9000 \text{ s}}{0,0044 \text{ m}} = 0,53 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

Maintenant, pour calculer le délai, il nous faut identifier l'équation de la rampe (figure 5.2):  $x(t) = mt + b$

1) On trouve la pente comme suit:

$$\begin{aligned} m &= \frac{\Delta M_1}{\Delta t} = K_v \cdot \Delta DAC \\ &= 0,53 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \times 0,0044 \text{ m} = 0,00233 \text{ kg/s} \end{aligned}$$

2) Par la suite, on déduit l'ordonnée à l'origine:

$$\begin{aligned} b &= x_1 - mt_1 \quad \text{où } (t_1, x_1) \text{ est un point quelconque sur la droite} \\ &= 2244,71 \text{ kg} - (0,00233 \text{ kg/s} \times 14400 \text{ s}) = 2211,15 \text{ kg} \end{aligned}$$

3) Donc l'équation de la rampe est:  $x(t) = 0,00233 t + 2211,15$

Nous sommes, maintenant, en mesure de calculer le délai:

- 1) On trouve le point d'intersection de la rampe avec la condition initiale (i.e. le point d'opération  $x_0$ ):

$$t_0 = \frac{x_0 - b}{m} = \frac{2224,0 \text{ kg} - 2211,15 \text{ kg}}{0,00233 \text{ kg/s}} = 5500 \text{ s}$$

- 2) On déduit  $\theta$  en soustrayant de  $t_0$  la valeur en  $t$  correspondant au début de l'échelon, ce qui correspond à 3600 s donc:

$$\theta = 5500 \text{ s} - 3600 \text{ s} = 1900 \text{ s}$$

Finalement, en vertu de la transformée de Laplace, les fonctions de transfert sont toujours établies à partir de conditions initiales nulles, en se rappelant que  $\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s) - f(0)$  où  $f(0)=0$ . En conséquence, nous devons effectuer les changements de variables suivants, de manière à respecter cette condition:

$$M_1'(t) = M_1(t) - M_{10} \quad \text{où } M_{10} \text{ est le point d'opération}$$

$$M_{10} = M_1(0) = 2224 \text{ kg}$$

$$M_1'(0) = (2224 - 2224) \text{ kg} = 0$$

donc, la condition initiale de  $M_1'(t)$  est égale à zéro.

$$dac'(t) = dac(t) - dac_0 \quad \text{où } dac_0 \text{ est le point d'opération}$$

$$dac_0 = dac(0) = 0,044 \text{ m}$$

$$dac'(0) = (0,044 - 0,044) \text{ m} = 0$$

et, la condition initiale de  $dac'(t)$  est elle aussi égale à zéro.

Enfin, la fonction de transfert identifiée est:

$$h_{41} = \frac{M_1'(s)}{DAC'(s)} = \frac{0,53 e^{-1900s}}{s}$$

En conséquence, toutes les fonctions de transfert qui seront identifiées ultérieurement subiront une translation négative égale au point d'opération pour la variable d'état et la variable de contrôle  $\therefore X'(t) = X(t) - X_o$  et  $u'(t) = u(t) - u_o$

### ii) Configuration du premier ordre:

Cette deuxième forme de fonction de transfert est employée lorsque la réponse indicielle (réponse à l'échelon) ressemble à une exponentielle (voir la figure 5.3). Par ailleurs, l'expression (5-10) montre une fonction de transfert de premier ordre avec délai. Nous verrons plus loin que, dans la plupart des cas, celui-ci est nul ou négligeable.

$$h_{ij} = \frac{K e^{-\theta s}}{\tau s + 1} = \frac{K e^{-\theta s}/\tau}{s + 1/\tau} \quad (5-10)$$

où  $K = \frac{\Delta X}{\Delta U}$  est le gain statique

$\tau$  est la constante de temps

$\Delta X$  est la variation de la variable d'état, en régime établi

Exemple: Calcul de la fonction de transfert  $h_{91} = \frac{T_3'(s)}{DAC'(s)}$

Ici, on utilise la même sollicitation qu'à l'exemple précédent, c'est à dire celle de la figure 5.1. En observant la figure 5.3, on remarque que la réponse de  $T_3$  à cet échelon est une exponentielle en conjonction avec un léger retard. Nous devons donc calculer

le gain statique ( $K$ ), la constante de temps ( $\tau$ ) et le délai ( $\theta$ ), de manière à identifier cette fonction de transfert en son entier.

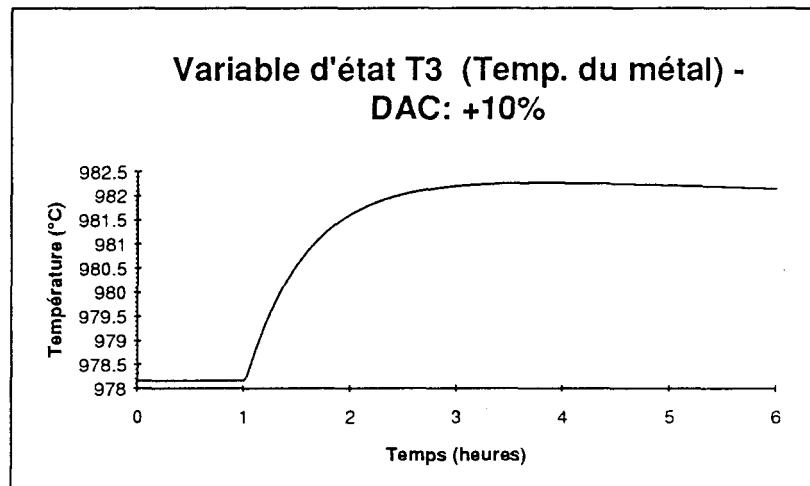


Figure 5.3 Exemple d'une réponse associée à une fonction de transfert telle que (5-10)

Ainsi, voici le calcul du gain statique:

$$K = \frac{\Delta X}{\Delta U} = \frac{\Delta T_3}{\Delta DAC} = \frac{4,09 \text{ } ^\circ\text{C}}{0,0044m} = 930 \text{ } \frac{^\circ\text{C}}{m}$$

Par ailleurs, de manière à évaluer les coefficients  $\tau$  et  $\theta$ , nous utilisons les équations (5-11) et (5-12) mentionnées à la section 5.1.3 formulées par Sundaresan et Krishnaswamy et répétées ci-après:

$$\tau = 0,67 (t_{85} - t_{35}) \quad (5-11)$$

$$= 0,67 (3750 - 930) \text{ s} = 1900 \text{ s}$$

$$\theta = 1,3 t_{35} - 0,29 t_{85} \quad (5-12)$$

$$= (1,3 \times 930 \text{ s}) - (0,29 \times 3750 \text{ s}) = 120 \text{ s}$$

En conséquence, la fonction de transfert est:

$$h_{91} = \frac{T_3'(s)}{DAC'(s)} = \frac{930 e^{-120s}}{1900 s + 1}$$

### iii) Configuration Proportionnelle + Intégrale

Cette configuration peut être associée à la fonction de transfert d'un contrôleur Proportionnel-Integral (PI) dans le sens que la réponse indicielle correspond à une rampe superposée à un gain statique. Elle est donc une combinaison des types de fonctions de transfert (5-5) et (5-7) mentionnés à la section 5.1.3 et aux items i) et ii) ci-dessus. De plus, cette forme ne comporte aucun délai comme le démontre la formulation (5-15):

$$h_{ij} = K + \frac{K_v}{s} \quad (5-15)$$

Exemple: Calcul de la fonction de transfert  $h_{12} = \frac{X_1'(s)}{\text{DMA}'(s)}$

À la figure 5.4 on voit que l'on sollicite le système avec un saut de -10% dans la variable de contrôle alimentation en alumine (DMA). En observant la figure 5.5, on remarque que la réponse de  $X_1$  à cet échelon correspond à un gain statique plus une rampe. Nous devons donc calculer le gain statique ( $K$ ) et le gain en vitesse ( $K_v$ ), de manière à identifier cette fonction de transfert.

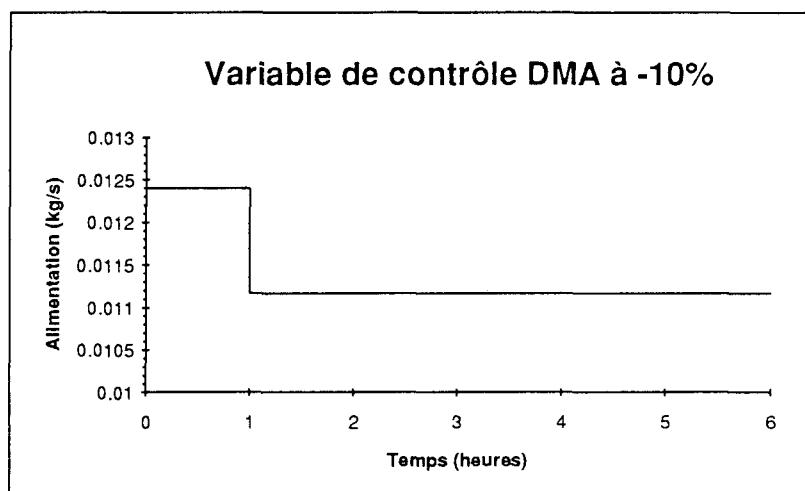


Figure 5.4 Sollicitation de la variable de contrôle DMA par un échelon de -10%

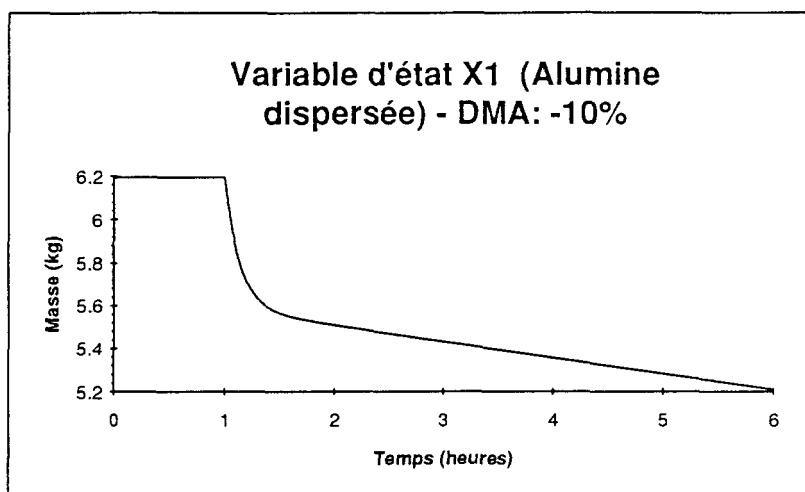


Figure 5.5 Exemple d'une réponse associée à une fonction de transfert de la forme (5-15)

On calcule le gain en vitesse, de la même manière qu'à l'item i):

$$K_v = \frac{\Delta X / \Delta t}{\Delta U} = \frac{\Delta X_1 / \Delta t}{\Delta DMA} = 0,01646$$

Par ailleurs, le gain statique est calculé comme à l'item ii) à l'exception du fait que  $\Delta X$  doit être identifié sur un court intervalle, de façon à éviter l'effet produit par la superposition de la rampe.

$$K = \frac{\Delta X}{\Delta U} = \frac{\Delta X_1}{\Delta DMA} = 496,60 \text{ s}$$

En conséquence, la fonction de transfert est:

$$h_{12} = \frac{X_1'(s)}{DMA'(s)} = 496,60 + \frac{0,01646}{s}$$

#### iv) Configuration de premier ordre + Intégrale

Cette configuration s'avère être la plus complexe des fonctions de transfert identifiées. En effet, celle-ci correspond à la conjonction d'un premier ordre avec délai et d'un intégrateur pur comme le démontre la formulation (5-16).

$$h_{ij} = \frac{K e^{-\theta s}}{\tau s + 1} + \frac{K_v}{s} \quad (5-16)$$

Exemple: Calcul de la fonction de transfert  $h_{s2} = \frac{T_1'(s)}{\text{DMA}'(s)}$

Ici, on réutilise la sollicitation de la figure 5.4. Ainsi, on remarque, à la figure 5.6, que la réponse de  $T_1$  à cet échelon est une exponentielle en conjonction avec un délai le tout superposé à une rampe. Nous devons donc calculer le gain statique ( $K$ ), la constante de temps ( $\tau$ ), le délai ( $\theta$ ) et le gain en vitesse ( $K_v$ ), pour identifier la fonction de transfert en son entier.

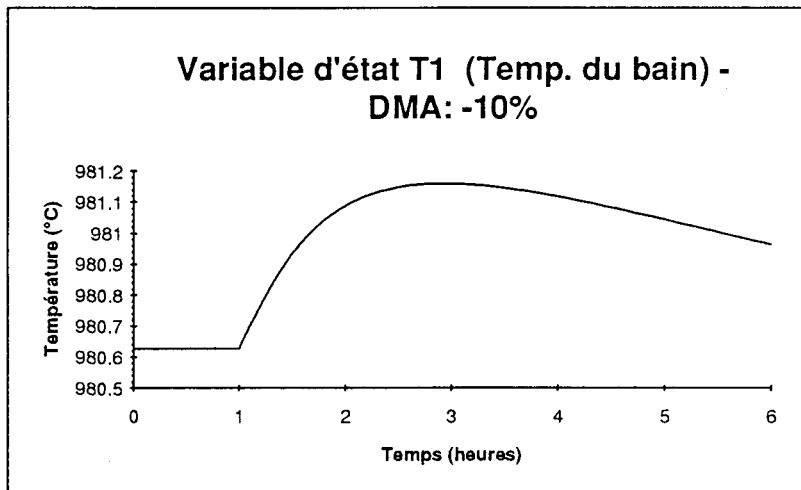


Figure 5.6 Exemple d'une réponse associée à une fonction de transfert de la forme (5-16)

En terme de fonction de transfert on superpose un premier ordre et un intégrateur. En fait, à partir de cette courbe (figure 5.6), il est facile de déterminer l'intégrateur puisque après un certain temps la fonction de transfert de premier ordre atteint un régime permanent. Donc, de la même manière qu'à l'item i) et iii) on calcule le gain en vitesse et on trouve que:

$$K_v = \frac{\Delta T_1 / \Delta t}{\Delta \text{DMA}} = 0,01725 \text{ °C/kg}$$

Par contre, il est plus complexe de déduire la fonction de transfert de premier ordre, car elle est influencée en tout temps par l'effet de l'intégrateur. En d'autres termes, le gain et la constante de temps que l'on pourrait identifier directement à la figure 5.6 seraient erronés. Le gain serait plus petit et la constante de temps serait plus grande que la réalité. En conséquence, de manière à extraire les bons paramètres, il faut soustraire la rampe de la réponse (figure 5.6), de façon à trouver l'exponentielle recherchée. Le simulateur effectue cette soustraction point par point puis à partir de cette nouvelle courbe, on applique les mêmes calculs qu'à l'item ii) pour identifier les paramètres K,  $\tau$  et  $\theta$ . On trouve alors:

$$K = -583,42 \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{kg/s}} \quad \tau = 2500 \text{ s} \quad \theta = 200 \text{ s}$$

En conséquence, la fonction de transfert qui en découle est:

$$h_{52} = \frac{T_1'(s)}{\text{DMA}'(s)} = \frac{-583,42 e^{-200s}}{2500 \text{ s} + 1} + \frac{0,01725}{s}$$

#### v) Configuration du deuxième ordre:

Cette dernière configuration de fonction de transfert est employée lorsque la réponse indicielle comporte un point d'inflexion (voir la figure 5.7). L'expression (5-13) montre une fonction de transfert de deuxième ordre sans délai.

$$h_{ij} = \frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1} \quad (5-13)$$

où  $\zeta$  est le coefficient d'amortissement

Exemple: Calcul de la fonction de transfert  $h_{21} = \frac{X_2'(s)}{\text{DAC}'(s)}$

Ici, on utilise la sollicitation de la figure 5.1 . En observant la figure 5.7, on remarque que la réponse de  $X_2$  à cet échelon est de

la forme d'un système de deuxième ordre. Nous devons donc calculer le gain statique ( $K$ ) et la constante de temps ( $\tau$ ) (où  $\zeta=1$ ), de manière à identifier cette fonction de transfert en son entier.

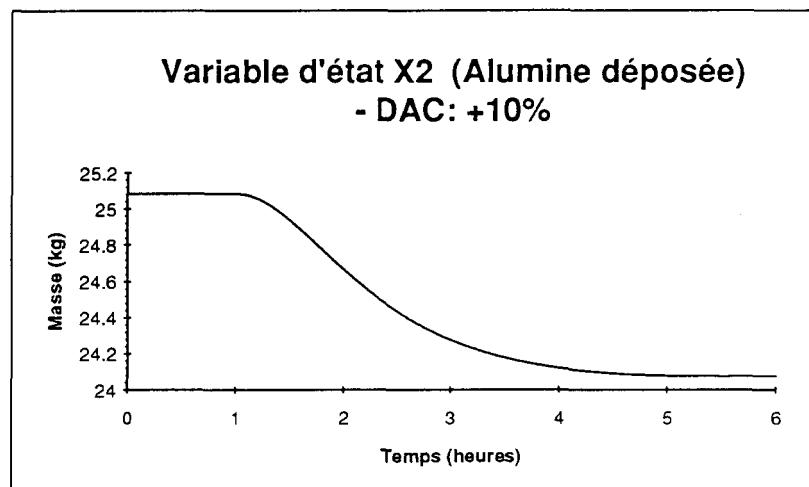


Figure 5.7 Exemple d'une réponse associée à une fonction de transfert de la forme (5-13)

On identifie le gain statique comme précédemment:  $K = -230 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$

Par ailleurs, de manière à évaluer la double constante de temps, on utilise l'équation (5-14) mentionnée à la section 5.1.3 et répétée ci-après:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{t_{60}}{2} & (5-14) \\ &= \frac{5000}{2} \text{ s} = 2500 \text{ s} \end{aligned}$$

En conséquence, la fonction de transfert est:

$$h_{21} = \frac{X_2'(s)}{\text{DAC}'(s)} = \frac{-230}{0,63 \times 10^7 \text{ s}^2 + 5000 \text{ s} + 1}$$

Finalement, à partir de l'une ou l'autre de ces cinq configurations de base, il nous est possible de construire toutes les fonctions de transfert du procédé. Les détails de la construction des fonctions de transfert sont présentés à l'annexe A. Nous avons utilisé une forme matricielle (voir tableau 5.1) pour afficher les résultats, de manière à démontrer que le nombre

maximal de fonctions de transfert pour un système d'ordre neuf à deux entrées est de vingt-six, soit le nombre de variables d'état multiplié par le nombre de variables de contrôle. Donc, les variables de contrôle correspondent aux colonnes de la matrice des fonctions de transfert que nous appelons **H** (tableau 5.1) et les variables d'état sont associées aux lignes de cette matrice. En d'autres termes, chaque élément  $h_{ij}$  (où  $i$  correspond à la  $i$  ième variable d'état et  $j$  à la  $j$  ième variable de contrôle) de cette matrice correspond à une fonction de transfert.

En conséquence, voici une énumération de ces fonctions de transfert qui vont constituer la base de la simplification linéaire du modèle de Tikasz et al. [17] identifiées par l'entremise de l'option identification du simulateur (voir l'annexe E pour visualiser un exemple de fichiers de fonctions de transfert):

Tableau 5.1 Matrice **H** représentant les fonctions de transfert avec délais

$h_{11} = \frac{X_1'(s)}{DAC'(s)} = \frac{-49 e^{-480s}}{1600 s + 1}$	$h_{12} = \frac{X_1'(s)}{DMA'(s)} = 496,60 + \frac{0,01646}{s}$
$h_{21} = \frac{X_2'(s)}{DAC'(s)} = \frac{-230}{0,63 \times 10^7 s^2 + 5000 s + 1}$	$h_{22} = \frac{X_2'(s)}{DMA'(s)} = 463,40 + \frac{0,2083}{s}$
$h_{31} = \frac{C'(s)}{DAC'(s)} = \frac{0,12}{0,44 \times 10^7 s^2 + 4600 s + 1}$	$h_{32} = \frac{C'(s)}{DMA'(s)} = \frac{0,3507 \times 10^{-3} e^{-1900s}}{s}$
$h_{41} = \frac{M_1'(s)}{DAC'(s)} = \frac{0,53 e^{-1900s}}{s}$	$h_{42} = \frac{M_1'(s)}{DMA'(s)} = \frac{0,8838 e^{-950s}}{s}$
$h_{51} = \frac{T_1'(s)}{DAC'(s)} = \frac{980 e^{-0,3s}}{1900 s + 1}$	$h_{52} = \frac{T_1'(s)}{DMA'(s)} = \frac{-583,42 e^{-200s}}{2500 s + 1} + \frac{0,01725}{s}$
$h_{61} = \frac{M_2'(s)}{DAC'(s)} = \frac{-0,53 e^{-1900s}}{s}$	$h_{62} = \frac{M_2'(s)}{DMA'(s)} = \frac{2870,6}{0,1958 \times 10^8 s^2 + 8850 s + 1}$
$h_{71} = \frac{T_2'(s)}{DAC'(s)} = \frac{0,058 e^{-3800s}}{s}$	$h_{72} = \frac{T_2'(s)}{DMA'(s)} = \frac{-332,36}{0,3198 \times 10^8 s^2 + 11310 s + 1}$
$h_{81} = \frac{M_3'(s)}{DAC'(s)} = 0$	$h_{82} = \frac{M_3'(s)}{DMA'(s)} = 0$
$h_{91} = \frac{T_3'(s)}{DAC'(s)} = \frac{930 e^{-120s}}{1900 s + 1}$	$h_{92} = \frac{T_3'(s)}{DMA'(s)} = \frac{-553,37 e^{-300s}}{2500 s + 1} + \frac{0,01624}{s}$

Une première visualisation de ces résultats nous montre que deux fonctions de transfert sur dix-huit sont égales à zéro. Ces fonctions de transfert sont les suivantes:  $h_{81}$  et  $h_{82}$ . Un tel résultat signifie qu'il n'y a pas de liens entre la variable d'état et la variable de contrôle. En effet, l'équation d'état  $\frac{dM_3}{dt} = k_5 I - \Delta m_t$  exclut tous liens entre  $M_3$ ,  $dma$  et  $dac$ , puisque d'une part si le retrait de métal est continu ( $\Delta m_t = k_5 I$ ) alors  $\frac{dM_3}{dt} = 0$ , et d'autre part même si  $\Delta m_t = 0$  alors  $\frac{dM_3}{dt} = k_5 I$  ce qui donne une équation différentielle avec le terme de droite constant.

En conséquence, les fonctions de transfert identifiées au tableau 5.1 sont à la base du processus de simplification linéaire. C'est à partir de ces dernières que nous allons construire le modèle d'état.

### 5.2.1 Le modèle linéaire d'ordre vingt-deux

Ce modèle d'état à formulation restreinte (i.e. sans délais) est constitué de vingt-deux équations différentielles ordinaires linéaires découplées. Les délais sont exclues temporairement, dans cette première tentative d'approximation linéaire du modèle non-linéaire initial. Nous verrons à la section suivante comment ajouter ces délais pour former un modèle plus fidèle, sans l'encombrer outre mesure. Par ailleurs, la dimension du modèle est déterminé par l'ordre et le nombre de fonctions de transfert. Ainsi, au tableau 5.2, on voit que ce dernier est formé de quatorze fonctions de transfert d'ordre un et quatre d'ordre deux, ce qui correspond bien à un système d'ordre vingt-deux.

Tableau 5.2 Matrice  $H$  représentant les fonctions de transfert sans délais

$h_{11} = \frac{X_1'(s)}{DAC'(s)} = \frac{-49}{1600 s + 1}$	$h_{12} = \frac{X_1'(s)}{DMA'(s)} = 496,60 + \frac{0,01646}{s}$
$h_{21} = \frac{X_2'(s)}{DAC'(s)} = \frac{-230}{0,63 \times 10^7 s^2 + 5000 s + 1}$	$h_{22} = \frac{X_2'(s)}{DMA'(s)} = 463,40 + \frac{0,2083}{s}$
$h_{31} = \frac{C'(s)}{DAC'(s)} = \frac{0,12}{0,44 \times 10^7 s^2 + 4600 s + 1}$	$h_{32} = \frac{C'(s)}{DMA'(s)} = \frac{0,3507 \times 10^{-3}}{s}$
$h_{41} = \frac{M_1'(s)}{DAC'(s)} = \frac{0,53}{s}$	$h_{42} = \frac{M_1'(s)}{DMA'(s)} = \frac{0,8838}{s}$
$h_{51} = \frac{T_1'(s)}{DAC'(s)} = \frac{980}{1900 s + 1}$	$h_{52} = \frac{T_1'(s)}{DMA'(s)} = \frac{-583,42}{2500 s + 1} + \frac{0,01725}{s}$
$h_{61} = \frac{M_2'(s)}{DAC'(s)} = \frac{-0,53}{s}$	$h_{62} = \frac{M_2'(s)}{DMA'(s)} = \frac{2870,6}{0,1958 \times 10^8 s^2 + 8850 s + 1}$
$h_{71} = \frac{T_2'(s)}{DAC'(s)} = \frac{0,058}{s}$	$h_{72} = \frac{T_2'(s)}{DMA'(s)} = \frac{-332,36}{0,3198 \times 10^8 s^2 + 11310 s + 1}$
$h_{81} = \frac{M_3'(s)}{DAC'(s)} = 0$	$h_{82} = \frac{M_3'(s)}{DMA'(s)} = 0$
$h_{91} = \frac{T_3'(s)}{DAC'(s)} = \frac{930}{1900 s + 1}$	$h_{92} = \frac{T_3'(s)}{DMA'(s)} = \frac{-553,37}{2500 s + 1} + \frac{0,01624}{s}$

Donc d'une part, on conçoit un système physique constitué de 9 variables d'état, et d'autre part, le modèle mathématique en comporte vingt-deux. Quelle est la relation qui unit le modèle et le système physique? La réponse est simple. Chaque ligne de la matrice de fonctions de transfert  $H$  correspond, dans les faits, à une sortie qui représente une variable d'état physique. En d'autres termes, toutes les variables d'état peuvent être identifiées, selon la formulation suivante:

$$Y_k = X_k = [(h_{k1} + d_{k1}) DAC'(s)] + [(h_{k2} + d_{k2}) DMA'(s)] \quad (5-17)$$

où  $Y_k$  est la sortie correspondant à la variable d'état  $k$   
 $X_k$  est la  $k$ ième variable d'état

- $h_{k1}$  est la fonction de transfert (excluant les couplages entrée-sortie) reliant la variable d'état  $k$  à la variable de contrôle 1 - i.e. DAC
- $h_{k2}$  est la fonction de transfert (excluant les couplages entrée-sortie) reliant la variable d'état  $k$  à la variable de contrôle 2 - i.e. DMA
- $d_{k1}$  est une constante de couplage entrée-sortie reliant la variable d'état  $k$  à la variable de contrôle DAC
- $d_{k2}$  est une constante de couplage entrée-sortie reliant la variable d'état  $k$  à la variable de contrôle DMA

En conséquence, en posant  $Z_{k1} = h_{k1} \text{ DAC}'(s)$  et  $Z_{k2} = h_{k2} \text{ DMA}'(s)$  on obtient:

$$Y_k = X_k = Z_{k1} + Z_{k2} + d_{k1} \text{ DAC}'(s) + d_{k2} \text{ DMA}'(s) \quad (5-18)$$

où  $Z_{k1}$  est la variable d'état  $k_1$  intermédiaire à  $X_k$   
 $Z_{k2}$  est la variable d'état  $k_2$  intermédiaire à  $X_k$

À titre d'exemple, voici le calcul détaillé de l'alumine dispersée dans le bain - i.e. la variable d'état  $X_1$ :

$$Y_1(s) = \frac{-49}{1600 s + 1} \text{ DAC}'(s) + \left[ 496,60 + \frac{0,01646}{s} \right] \text{ DMA}'(s)$$

$$Y_1(s) = \frac{-0,30 \times 10^{-1}}{s + 0,61 \times 10^{-3}} \text{ DAC}'(s) + \left[ 496,60 + \frac{0,1646 \times 10^{-1}}{s} \right] \text{ DMA}'(s)$$

On remarque immédiatement qu'il y a un lien direct entre  $Y_1$  et  $\text{DMA}'$ . En conséquence, nous aurons une matrice D - i.e. une matrice de couplage entrée-sortie. On pose  $Y_1 = Z_1 + Z_2 + 496,60 \text{ DMA}'(s)$

où :  $Z_1(s) = \frac{-0,30 \times 10^{-1}}{s + 0,61 \times 10^{-3}} \text{ DAC}'(s)$  et  $Z_2(s) = \frac{0,1646 \times 10^{-1}}{s} \text{ DMA}'(s)$

$$sZ_1(s) = -0,61 \times 10^{-3} Z_1(s) - 0,30 \times 10^{-1} DAC'(s)$$

$$sZ_2(s) = 0,1646 \times 10^{-1} DMA'(s)$$

Et, en vertu de la transformée de Laplace  $\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s) - f(0)$  où la condition initiale est égale à zéro ( $f(0)=0$ ), on obtient les équations différentielles suivantes:

$$\frac{dz_1}{dt} = -0,61 \times 10^{-3} z_1(t) - 0,30 \times 10^{-1} dac'(t) \quad \frac{dz_2}{dt} = 0,1646 \times 10^{-1} dma'(t)$$

Par ailleurs, étant donné que ces équations proviennent de fonctions de transfert, les variables d'état intermédiaires  $z$  ont comme conditions initiales  $z_1(0)=z_2(0)=0$ .

Sous une forme matricielle on obtient:

$$\begin{matrix} A_1 & z(t) & B_1 & u(t) \\ \begin{pmatrix} \frac{dz_1}{dt} \\ \frac{dz_2}{dt} \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} -0,61 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,30 \times 10^{-1} & 0 \\ 0 & 0,1646 \times 10^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dac'(t) \\ dma'(t) \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$y_1(t) = X_1(t) = \begin{pmatrix} C_1 & z(t) \\ D_1 & u(t) \end{pmatrix} = (1 \quad 1) \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} + (0 \quad 496,60) \begin{pmatrix} dac'(t) \\ dma'(t) \end{pmatrix}$$

De la même façon, on obtient le modèle linéaire d'ordre vingt-deux découplé:

$$\frac{dz_1}{dt} = -0,61 \times 10^{-3} z_1(t) - 0,30 \times 10^{-1} dac'(t) \tag{5-19}$$

$$\frac{dz_2}{dt} = 0,1646 \times 10^{-1} dma'(t) \tag{5-20}$$

$$\frac{dz_3}{dt} = z_4(t) \quad (5-21)$$

$$\frac{dz_4}{dt} = -0,80 \times 10^{-3} z_4(t) - 0,16 \times 10^{-6} z_3(t) - 0,37 \times 10^{-4} dac'(t) \quad (5-22)$$

$$\frac{dz_5}{dt} = 0,2083 dma'(t) \quad (5-23)$$

$$\frac{dz_6}{dt} = z_7(t) \quad (5-24)$$

$$\frac{dz_7}{dt} = -0,11 \times 10^{-2} z_7(t) - 0,23 \times 10^{-6} z_6(t) + 0,27 \times 10^{-7} dac'(t) \quad (5-25)$$

$$\frac{dz_8}{dt} = 0,3507 \times 10^{-3} dma'(t) \quad (5-26)$$

$$\frac{dz_9}{dt} = 0,53 dac'(t) \quad (5-27)$$

$$\frac{dz_{10}}{dt} = 0,8838 dma'(t) \quad (5-28)$$

$$\frac{dz_{11}}{dt} = -0,53 \times 10^{-3} z_{11}(t) + 0,52 dac'(t) \quad (5-29)$$

$$\frac{dz_{12}}{dt} = -0,40 \times 10^{-3} z_{12}(t) - 0,23503 dma'(t) \quad (5-30)$$

$$\frac{dz_{13}}{dt} = 0,1725 \times 10^{-1} dma'(t) \quad (5-31)$$

$$\frac{dz_{14}}{dt} = -0,53 dac'(t) \quad (5-32)$$

$$\frac{dz_{15}}{dt} = z_{16}(t) \quad (5-33)$$

$$\frac{dz_{16}}{dt} = -0,452 \times 10^{-3} z_{16}(t) - 0,5107 \times 10^{-7} z_{15}(t) + 0,1466 \times 10^{-3} dma'(t) \quad (5-34)$$

$$\frac{dz_{17}}{dt} = 0,58 \times 10^{-1} dac'(t) \quad (5-35)$$

$$\frac{dz_{18}}{dt} = z_{19}(t) \quad (5-36)$$

$$\frac{dz_{19}}{dt} = -0,3537 \times 10^{-3} z_{19}(t) - 0,3127 \times 10^{-7} z_{18}(t) - 0,10393 \times 10^{-4} dma'(t) \quad (5-37)$$

$$\frac{dz_{20}}{dt} = -0,53 \times 10^{-3} z_{20}(t) + 0,49 \text{ dac}'(t) \quad (5-38)$$

$$\frac{dz_{21}}{dt} = -0,40 \times 10^{-3} z_{21}(t) - 0,22292 \text{ dma}'(t) \quad (5-39)$$

$$\frac{dz_{22}}{dt} = 0,1624 \times 10^{-1} \text{ dma}'(t) \quad (5-40)$$

Le développement de chacune des équations (5-19) à (5-40) est présenté à l'annexe B.

Finalement, nos variables physiques sont:

$$X_1'(t) = y_1(t) = z_1(t) + z_2(t) + 496,60 \text{ dma}'(t)$$

$$X_2'(t) = y_2(t) = z_3(t) + z_5(t) + 463,40 \text{ dma}'(t)$$

$$C'(t) = y_3(t) = z_6(t) + z_8(t)$$

$$M_1'(t) = y_4(t) = z_9(t) + z_{10}(t)$$

$$T_1'(t) = y_5(t) = z_{11}(t) + z_{12}(t) + z_{13}(t)$$

$$M_2'(t) = y_6(t) = z_{14}(t) + z_{15}(t)$$

$$T_2'(t) = y_7(t) = z_{17}(t) + z_{18}(t)$$

$$M_3'(t) = y_8(t) = 0$$

$$T_3'(t) = y_9(t) = z_{20}(t) + z_{21}(t) + z_{22}(t)$$

On remarque qu'il y a un lien direct entre les variables d'état  $X_1$  et  $X_2$  et la variable de contrôle  $\text{dma}$ . Cette situation s'explique par le fait que ces variables ont été approximées, par l'intermédiaire de la configuration de fonction de transfert PI (5-15) qui possède un gain  $K$  en plus de l'intégrale. Nous verrons plus loin comment exprimer ces couplages entrée-sortie, sous forme matricielle. Par ailleurs, on remarque que la masse de métal ( $M_3$ ) n'est fonction d'aucune variables d'état  $z$  et qu'elle est égale à sa condition initiale. Ceci n'est pas une surprise puisque nous avons considéré le retrait de métal comme étant continu au même taux que sa production. Donc, cette masse reste toujours la même. Toutefois, nous devons ajouter que cette situation idéalisée du procédé n'est qu'un artifice utilisé pour linéarisation du modèle. Nous

verrons plus loin comment tenir compte de la production de métal, à l'intérieur du modèle linéaire.

En conséquence, voici les résultats sous forme matricielle:

$$\frac{dz}{dt} = A z(t) + B u'(t) \quad (5-41)$$

$$y(t) = C z(t) + D u'(t) \quad (5-42)$$

Matrice d'évolution dynamique: Les coefficients de cette matrice correspondent aux pôles du système.

$$A_{22 \times 22} = \begin{bmatrix} A_1 & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ . & A_2 & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & A_3 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & A_4 & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & A_5 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & A_6 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & A_7 & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & . & . & A_9 & . & . \end{bmatrix}$$

$$\text{où } A_1 = \begin{pmatrix} -0,61 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_5 = \begin{pmatrix} -0,53 \times 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & -0,40 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -0,16 \times 10^{-6} & -0,80 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0,5107 \times 10^{-7} & -0,452 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -0,23 \times 10^{-6} & -0,11 \times 10^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0,3127 \times 10^{-7} & -0,3537 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_9 = \begin{pmatrix} -0,53 \times 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & -0,40 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice d'application de contrôle: Les éléments de cette matrice correspondent au rapport du gain sur la constante de temps.

$$\mathbf{B}_{22 \times 2} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_3 \\ \mathbf{B}_4 \\ \mathbf{B}_5 \\ \mathbf{B}_6 \\ \mathbf{B}_7 \\ \mathbf{B}_9 \end{pmatrix}$$

$$\text{où } \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} -0,30 \times 10^{-1} & 0 \\ 0 & 0,1646 \times 10^{-1} \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}_5 = \begin{pmatrix} 0,52 & 0 \\ 0 & -0,23503 \\ 0 & 0,1725 \times 10^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0,37 \times 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0,2083 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}_6 = \begin{pmatrix} -0,53 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0,1466 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0,27 \times 10^{-7} & 0 \\ 0 & 0,3507 \times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}_7 = \begin{pmatrix} 0,058 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -0,10393 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}_4 = \begin{pmatrix} 0,53 & 0 \\ 0 & 0,8838 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}_9 = \begin{pmatrix} 0,49 & 0 \\ 0 & -0,22292 \\ 0 & 0,1624 \times 10^{-1} \end{pmatrix}$$

Matrice d'observation: Les éléments de cette matrice représentent les combinaisons linéaires qui font le lien entre les variables d'état z et les variables physiques.

$$C_{9 \times 22} = \begin{pmatrix} C_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & C_2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & C_3 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & C_4 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & C_5 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & C_6 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & C_7 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & C_9 \end{pmatrix}$$

où     $C_1 = C_4 = (1 \ 1)$                           $C_6 = C_7 = (1 \ 1 \ 0)$   
 $C_2 = C_3 = (1 \ 0 \ 1)$                           $C_8 = (0)$   
 $C_5 = C_9 = (1 \ 1 \ 1)$

Matrice de couplage entrée-sortie:

Cette matrice est aussi appelée matrice de transmission directe, nom qui décrit son rôle dans la liaison directe entre les variables de contrôle et les variables de sortie. Dans le cas présent, les coefficients de cette matrice correspondent au gain statique d'un PI.

$$D_{9 \times 2} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \end{pmatrix}$$

$$\text{où } \begin{aligned} \mathbf{D}_1 &= (0 & 496,60) \\ \mathbf{D}_2 &= (0 & 463,40) \\ \mathbf{D}_3 = \mathbf{D}_4 = \mathbf{D}_5 = \mathbf{D}_6 = \mathbf{D}_7 = \mathbf{D}_8 = \mathbf{D}_9 &= (0 & 0) \end{aligned}$$

**Note:** Le changement de variables  $u'(t) = u(t) - u_0$ , nous a permis d'écrire le vecteur d'observation sous forme standard, c'est-à-dire  $y(t) = C z(t) + D u'(t)$ . Si cette translation n'avait pas été faite, la forme du vecteur d'observation aurait été  $y(t) = C z(t) + D u(t) - P$  où  $P$  est un vecteur constant de dimension  $9 \times 1$  dont chaque élément correspond au produit de  $d_i$  par  $dma_0$  où  $d_i$  est l'élément de la matrice  $D$  associé à la  $i^{\text{ème}}$  variable d'état physique. Plus spécifiquement, on peut dire que  $p_i$  (élément de la matrice  $P$ ) correspond à la variation de la  $i^{\text{ème}}$  variable d'état divisé par l'amplitude de la sollicitation de la variable de contrôle  $dma$ .  $\therefore p_i = \frac{\Delta X_i}{(dma/dma_0)-1}$ . Donc, les éléments  $p_1$  et  $p_2$  sont constants tandis que les éléments  $p_3$  à  $p_9$  sont nuls.

De plus, on peut vérifier la véracité de l'ordre des matrices obtenues, en utilisant la bien connue expression de la matrice de transfert:

$$\mathbf{H} = \mathbf{C} (\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (5-43)$$

$$9 \times 2 = (9 \times 22) (22 \times 22) (22 \times 2) + 9 \times 2$$

Par ailleurs, les conditions initiales des variables physiques demeurent celles du modèle non-linéaire. Par contre, comme mentionné antérieurement dans le développement des équations différentielles donnant  $z_1$  et  $z_2$ , les variables d'état intermédiaires ont toutes des conditions initiales égales à zéro.

### 5.2.2 Développement des modèles linéaires d'ordre vingt-six et vingt-sept

On se rappelle qu'à la section précédente nous avons identifié un modèle à formulation restreinte. Ici, on tente d'inclure les délais du système à

l'intérieur du modèle, de manière à obtenir une formulation d'état complète. Pour ce faire, nous devons tenir compte des retards dans l'approximation linéaire. Or, nous avons choisi de les traiter de deux façons:

- 1) Si le délai est négligeable par rapport à la plus petite des constantes de temps du système, alors on le considère comme étant nul.
- 2) Si le délai ne peut être négligé, alors on remplace l'expression mathématique du délai par une des approximations polynomiales suivantes:
  - i) Par la série de Taylor tronquée au premier ordre;
  - ii) Par approximation de Padé 1/1 (i.e. d'ordre 1) [15].

En vertu de l'énoncé 1), nous pouvons déclarer que les délais associés aux fonctions de transfert  $h_{11}$ ,  $h_{51}$ ,  $h_{91}$ ,  $h_{42}$ ,  $h_{52}$  et  $h_{92}$  peuvent être considérés comme étant égales à zéro. De plus, on remarque au tableau 5.1 que tous les autres délais sont en conjonction avec des fonctions de transfert de configuration intégrale (5-7). En conséquence, voici le développement des approximations polynomiales 2i) et 2ii) pour une forme intégrale:

Par série de Taylor :

On remplace le terme  $e^{-\theta s}$  par sa série de Taylor tronquée au premier ordre:

$$e^{-\theta s} \equiv 1 - \theta s \quad (5-44)$$

ainsi, on obtient:

$$h_{ij} = \frac{K_v e^{-\theta s}}{s} \equiv \frac{K_v (1 - \theta s)}{s} = \frac{K_v}{s} - K_v \theta$$

$$h_{ij} = \frac{K_v e^{-\theta s}}{s} \equiv \frac{K_v}{s} - K_v \theta \quad (5-45)$$

On remarque que cette forme est la même que la configuration Proportionnelle + Intégrale formulée à l'équation (5-15). De plus, on voit aussi que le terme  $\frac{K_v}{s}$  reste le même et que le délai se manifeste à travers le terme proportionnel  $-K_v \theta$ . Cette approximation n'ajoute aucun ordre supplémentaire au modèle linéaire. En conséquence, elle nous permet d'améliorer la justesse du modèle sans l'encombrer outre mesure. Cependant, elle ajoute une liaison directe entre la variable d'état et la variable de contrôle.

Par approximation de Padé 1/1:

On remplace le terme  $e^{-\theta s}$  par l'approximation suivante:

$$e^{-\theta s} \equiv \frac{1 - \frac{\theta s}{2}}{1 + \frac{\theta s}{2}} \quad (5-46)$$

Et, on obtient:

$$h_{ij} = \frac{K_v e^{-\theta s}}{s} \equiv \frac{K_v \left( \frac{1 - \frac{\theta s}{2}}{1 + \frac{\theta s}{2}} \right)}{s} = \frac{K_v - \frac{K_v \theta s}{2}}{s + \frac{\theta s^2}{2}} = \frac{\frac{2K_v}{\theta} - K_v s}{s \left( s + \frac{2}{\theta} \right)}$$

On décompose en fractions partielles la fonction de transfert obtenue, de manière à trouver des fractions ayant une seule racine au dénominateur:

$$h_{ij} = \frac{\frac{2K_v}{\theta} - K_v s}{s\left(s + \frac{2}{\theta}\right)} = \frac{K_0}{s} + \frac{K_1}{\left(s + \frac{2}{\theta}\right)}$$

$$K_0 = \lim_{s \rightarrow 0} \left( s \times \frac{\frac{2K_v}{\theta} - K_v s}{s\left(s + \frac{2}{\theta}\right)} \right) = K_v$$

$$K_1 = \lim_{s \rightarrow -2/\theta} \left( \left(s + \frac{2}{\theta}\right) \times \frac{\frac{2K_v}{\theta} - K_v s}{s\left(s + \frac{2}{\theta}\right)} \right) = -2 K_v$$

Et le résultat final est le suivant:

$$h_{ij} = \frac{K_v e^{-\theta s}}{s} \equiv \frac{K_v}{s} - \frac{2K_v}{\left[s + \frac{2}{\theta}\right]} = \frac{K_v}{s} - \frac{K_v \theta}{\left[\frac{\theta}{2}s + 1\right]} \quad (5-47)$$

On remarque que cette forme de fonction de transfert correspond à une configuration mentionnée à la section 5.2 soit celle de Premier ordre + Intégrale (5-16). Le terme  $\frac{K_v}{s}$  demeure inchangé et le délai se manifeste à travers la fonction de transfert de premier ordre. Le gain de cette dernière est  $-K_v \theta$  et la constante de temps est  $\frac{\theta}{2}$ . Contrairement à l'approximation par série de Taylor, l'approximation de Padé ajoute un ordre supplémentaire au modèle linéaire. Par contre, comme le démontre la figure 5.8, celle-ci est plus précise ce qui justifie son emploi lorsque les délais sont importants.

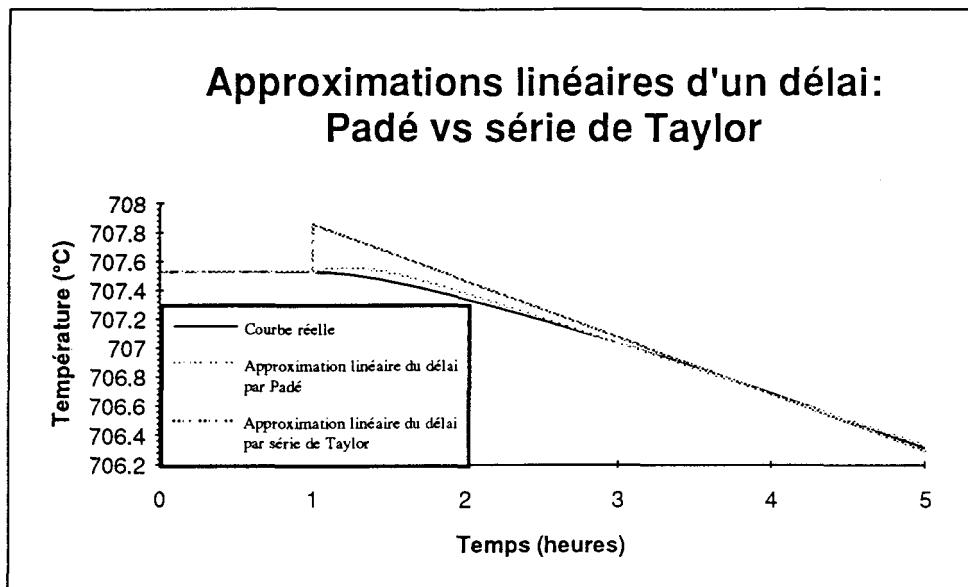


Figure 5.8 Comparaison entre l'approximation linéaire du délai par Padé à celle par série de Taylor

En conséquence, étant donné la grandeur des délais rencontrés dans les fonctions de transfert  $h_{41}$ ,  $h_{61}$ ,  $h_{71}$  et  $h_{32}$  nous avons choisi l'approximation par Padé dont en voici un exemple:

Exemple: Approximation du délai de  $h_{32} = \frac{C(s)}{DMA'(s)} = \frac{0,3507 \times 10^{-3} e^{-1900s}}{s}$   
par Padé 1/1:

En vertu de 5-47 on peut écrire:

$$h_{32} = \frac{0,3507 \times 10^{-3}}{s} - \frac{0,3507 \times 10^{-3} \times 1900}{\frac{1900}{2}s + 1}$$

$$\text{Donc, } h_{32} = \frac{0,3507 \times 10^{-3} e^{-1900s}}{s} \equiv \frac{-0,67}{950s + 1} + \frac{0,3507 \times 10^{-3}}{s}$$

De la même façon, on trouve les fonctions de transfert finales qui serviront de base, dans la constitution des modèles linéaires d'ordre vingt-six et vingt-sept:

Tableau 5.3 Matrice **H** représentant les fonctions de transfert avec délais approximés.

$h_{11} = \frac{X_1'(s)}{DAC'(s)} = \frac{-49}{1600 s + 1}$	$h_{12} = \frac{X_1'(s)}{DMA'(s)} = 496,60 + \frac{0,01646}{s}$
$h_{21} = \frac{X_2'(s)}{DAC'(s)} = \frac{-230}{0,63 \times 10^7 s^2 + 5000 s + 1}$	$h_{22} = \frac{X_2'(s)}{DMA'(s)} = 463,40 + \frac{0,2083}{s}$
$h_{31} = \frac{C'(s)}{DAC'(s)} = \frac{0,12}{0,44 \times 10^7 s^2 + 4600 s + 1}$	$h_{32} = \frac{C'(s)}{DMA'(s)} = \frac{-0,67}{950 s + 1} + \frac{0,3507 \times 10^{-3}}{s}$
$h_{41} = \frac{M_1'(s)}{DAC'(s)} = \frac{-1000}{950 s + 1} + \frac{0,53}{s}$	$h_{42} = \frac{M_1'(s)}{DMA'(s)} = \frac{0,8838}{s}$
$h_{51} = \frac{T_1'(s)}{DAC'(s)} = \frac{980}{1900 s + 1}$	$h_{52} = \frac{T_1'(s)}{DMA'(s)} = \frac{-583,42}{2500 s + 1} + \frac{0,01725}{s}$
$h_{61} = \frac{M_2'(s)}{DAC'(s)} = \frac{1000}{950 s + 1} - \frac{0,53}{s}$	$h_{62} = \frac{M_2'(s)}{DMA'(s)} = \frac{2870,6}{0,1958 \times 10^8 s^2 + 8850 s + 1}$
$h_{71} = \frac{T_2'(s)}{DAC'(s)} = \frac{-220}{1900 s + 1} + \frac{0,058}{s}$	$h_{72} = \frac{T_2'(s)}{DMA'(s)} = \frac{-332,36}{0,3198 \times 10^8 s^2 + 11310 s + 1}$
$h_{81} = \frac{M_3'(s)}{DAC'(s)} = 0$	$h_{82} = \frac{M_3'(s)}{DMA'(s)} = 0$
$h_{91} = \frac{T_3'(s)}{DAC'(s)} = \frac{930}{1900 s + 1}$	$h_{92} = \frac{T_3'(s)}{DMA'(s)} = \frac{-553,37}{2500 s + 1} + \frac{0,01624}{s}$

Et, comme à la section 5.2.1 on trouve les équations d'état suivantes:

$$\frac{dz_1}{dt} = -0,61 \times 10^{-3} z_1(t) - 0,30 \times 10^{-1} dac'(t) \quad (5-48)$$

$$\frac{dz_2}{dt} = 0,1646 \times 10^{-1} dma'(t) \quad (5-49)$$

$$\frac{dz_3}{dt} = z_4(t) \quad (5-50)$$

$$\frac{dz_4}{dt} = -0,80 \times 10^{-3} z_4(t) - 0,16 \times 10^{-6} z_3(t) - 0,37 \times 10^{-4} dac'(t) \quad (5-51)$$

$$\frac{dz_5}{dt} = 0,2083 dma'(t) \quad (5-52)$$

$$\frac{dz_6}{dt} = z_7(t) \quad (5-53)$$

$$\frac{dz_7}{dt} = -0,11 \times 10^{-2} z_7(t) - 0,23 \times 10^{-6} z_6(t) + 0,27 \times 10^{-7} dac'(t) \quad (5-54)$$

$$\frac{dz_8}{dt} = -0,10 \times 10^{-2} z_8(t) - 0,70138 \times 10^{-3} dma'(t) \quad (5-55)$$

$$\frac{dz_9}{dt} = 0,3507 \times 10^{-3} dma'(t) \quad (5-56)$$

$$\frac{dz_{10}}{dt} = -0,10 \times 10^{-2} z_{10}(t) - 1,1 dac'(t) \quad (5-57)$$

$$\frac{dz_{11}}{dt} = 0,53 dac'(t) \quad (5-58)$$

$$\frac{dz_{12}}{dt} = 0,8838 dma'(t) \quad (5-59)$$

$$\frac{dz_{13}}{dt} = -0,53 \times 10^{-3} z_{13}(t) + 0,52 dac'(t) \quad (5-60)$$

$$\frac{dz_{14}}{dt} = -0,40 \times 10^{-3} z_{14}(t) - 0,23503 dma'(t) \quad (5-61)$$

$$\frac{dz_{15}}{dt} = 0,1725 \times 10^{-1} dma'(t) \quad (5-62)$$

$$\frac{dz_{16}}{dt} = -0,10 \times 10^{-2} z_{16}(t) + 1,1 dac'(t) \quad (5-63)$$

$$\frac{dz_{17}}{dt} = -0,53 dac'(t) \quad (5-64)$$

$$\frac{dz_{18}}{dt} = z_{19}(t) \quad (5-65)$$

$$\frac{dz_{19}}{dt} = -0,452 \times 10^{-3} z_{19}(t) - 0,5107 \times 10^{-7} z_{18}(t) + 0,1466 \times 10^{-3} dma'(t) \quad (5-66)$$

$$\frac{dz_{20}}{dt} = -0,53 \times 10^{-3} z_{20}(t) - 0,12 dac'(t) \quad (5-67)$$

$$\frac{dz_{21}}{dt} = 0,58 \times 10^{-1} dac'(t) \quad (5-68)$$

$$\frac{dz_{22}}{dt} = z_{23}(t) \quad (5-69)$$

$$\frac{dz_{23}}{dt} = -0,3537 \times 10^{-3} z_{23}(t) - 0,3127 \times 10^{-7} z_{22}(t) - 0,10393 \times 10^{-4} \text{dma}'(t) \quad (5-70)$$

$$\frac{dz_{24}}{dt} = -0,53 \times 10^{-3} z_{24}(t) + 0,49 \text{ dac}'(t) \quad (5-71)$$

$$\frac{dz_{25}}{dt} = -0,40 \times 10^{-3} z_{25}(t) - 0,22292 \text{ dma}'(t) \quad (5-72)$$

$$\frac{dz_{26}}{dt} = 0,1624 \times 10^{-1} \text{ dma}'(t) \quad (5-73)$$

Ainsi, on obtient le modèle d'ordre vingt-six qui, comme le modèle d'ordre vingt-deux, possède une masse de métal constante, dû au fait que l'on retire le métal en continu.

Donc, voici les variables d'état physiques qui constituent ce modèle:

$$X_1'(t) = y_1(t) = z_1(t) + z_2(t) + 496,60 \text{ dma}'(t) \quad (5-74)$$

$$X_2'(t) = y_2(t) = z_3(t) + z_5(t) + 463,40 \text{ dma}'(t) \quad (5-75)$$

$$C'(t) = y_3(t) = z_6(t) + z_8(t) + z_9(t) \quad (5-76)$$

$$M_1'(t) = y_4(t) = z_{10}(t) + z_{11}(t) + z_{12}(t) \quad (5-77)$$

$$T_1'(t) = y_5(t) = z_{13}(t) + z_{14}(t) + z_{15}(t) \quad (5-78)$$

$$M_2'(t) = y_6(t) = z_{16}(t) + z_{17}(t) + z_{18}(t) \quad (5-79)$$

$$T_2'(t) = y_7(t) = z_{20}(t) + z_{21}(t) + z_{22}(t) \quad (5-80)$$

$$M_3'(t) = y_8(t) = 0 \quad (5-81)$$

$$T_3'(t) = y_9(t) = z_{24}(t) + z_{25}(t) + z_{26}(t) \quad (5-82)$$

Par ailleurs, la réalité étant ce qu'elle est, nous devons corriger le modèle identifié sous des conditions idéales, de manière à tenir compte du procédé réel, à savoir avec une production de métal continue et un retrait de métal égal à zéro sur une période de vingt-quatre heures, en se rappelant que cette dernière opération n'est pratiquée qu'une seule fois par jour. Donc, de manière à tenir compte de la production de métal, on ajoute l'équation différentielle linéaire (2-9) du modèle non-linéaire initial avec un retrait de

métal égal à zéro ( $\Delta m_t=0$ ). Le modèle linéaire passe d'un ordre vingt-six à un ordre vingt-sept.

De plus, on se rappelle que le modèle d'ordre vingt-six était identifié à partir d'un régime parfaitement stationnaire, car le métal produit était extrait de façon continue. En d'autres termes, le niveau de métal était constant et, par le fait même, les surfaces d'échange de chaleur l'étaient aussi. En ce sens, si le retrait de métal est égal à zéro, alors les surfaces d'échange latérales varient linéairement dans le temps -i.e. de la même façon que la production de métal. En fait, on remarque que toutes les variables d'état varient linéairement en fonction du temps en régime pseudo-stationnaire (i.e. sans sollicitation) à l'exception de la masse de bain et la masse de gelée qui augmentent en forme de parabole. Par contre, ces dernières ne fluctuent que très peu sur une période de vingt-quatre heures et par conséquent elles peuvent être considérées comme linéaires. Donc, de manière à tenir compte du régime pseudo-stationnaire dans les équations d'état, nous utilisons le principe de superposition en additionnant une rampe à chacune des variables d'état suivantes:  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $C$ ,  $M_1$ ,  $T_1$ ,  $M_2$ ,  $T_2$  et  $T_3$  ( $M_3$  est exclue car elle est en régime établi). Pour ce faire, on ajoute une constante (égale à la pente de la rampe) à chacune des équations différentielles suivantes:  $\frac{dz_2}{dt}$ ,  $\frac{dz_5}{dt}$ ,  $\frac{dz_9}{dt}$ ,  $\frac{dz_{11}}{dt}$ ,  $\frac{dz_{15}}{dt}$ ,  $\frac{dz_{17}}{dt}$ ,  $\frac{dz_{21}}{dt}$  et  $\frac{dz_{26}}{dt}$ . À la lumière de cette énumération, on note que le choix doit se limiter aux équations différentielles du type  $\frac{dz}{dt} = k.u$ , c'est-à-dire celles qui ont le terme de droite à toutes fins pratiques constant. On se rappelle que la résolution d'une É.D.O. linéaire standard  $\frac{dz}{dt} = \frac{-1}{\tau} z + \frac{k}{\tau} u$  (i.e. l'autre type d'É.D.O. rencontré dans le modèle linéaire) donne une réponse exponentielle. Si les équations formant le modèle avaient toutes été de cette forme, nous aurions été contraints d'ajouter huit équations différentielles avec un terme de droite constant (égal à la pente de la rampe), pour tenir compte du régime pseudo-stationnaire. Tout bien considéré, cette modification améliore considérablement l'efficacité du modèle linéaire

sans altérer sa dimension. Voici un exemple qui démontre comment modifier les équations différentielles citées ci-dessus.

Exemple: La variable d'état  $T_1$  varie, de façon linéaire (une rampe), lorsqu'elle est en régime pseudo-stationnaire. Alors, on trouve la pente de ce régime de la manière suivante:

$$m = \frac{\Delta T_1}{\Delta t} = -1,944 \times 10^{-5} \frac{^\circ C}{s}$$

Par la suite, on ajoute cette valeur à une équation différentielle de la forme  $\frac{dz}{dt} = k.u$  associée à la variable d'état  $T_1$ :

$$\frac{dz_{15}}{dt} = \mathbf{-1,944 \times 10^{-5}} + 0,1725 \times 10^{-1} \text{dma}'(t) \quad (5-97)$$

De la même façon, on identifie le modèle linéaire d'ordre vingt-sept sous sa forme finale, correspondant le plus au procédé physique. Les chiffres en gras indiquent les pentes nouvellement ajoutées.

$$\frac{dz_1}{dt} = \mathbf{-0,61 \times 10^{-3}} z_1(t) - 0,30 \times 10^{-1} \text{dac}'(t) \quad (5-83)$$

$$\frac{dz_2}{dt} = \mathbf{1,000 \times 10^{-6}} + 0,1646 \times 10^{-1} \text{dma}'(t) \quad (5-84)$$

$$\frac{dz_3}{dt} = z_4(t) \quad (5-85)$$

$$\frac{dz_4}{dt} = -0,80 \times 10^{-3} z_4(t) - 0,16 \times 10^{-6} z_3(t) - 0,37 \times 10^{-4} \text{dac}'(t) \quad (5-86)$$

$$\frac{dz_5}{dt} = \mathbf{4,444 \times 10^{-6}} + 0,2083 \text{dma}'(t) \quad (5-87)$$

$$\frac{dz_6}{dt} = z_7(t) \quad (5-88)$$

$$\frac{dz_7}{dt} = -0,11 \times 10^{-2} z_7(t) - 0,23 \times 10^{-6} z_6(t) + 0,27 \times 10^{-7} dac'(t) \quad (5-89)$$

$$\frac{dz_8}{dt} = -0,10 \times 10^{-2} z_8(t) - 0,70138 \times 10^{-3} dma'(t) \quad (5-90)$$

$$\frac{dz_9}{dt} = -2,222 \times 10^{-9} + 0,3507 \times 10^{-3} dma'(t) \quad (5-91)$$

$$\frac{dz_{10}}{dt} = -0,10 \times 10^{-2} z_{10}(t) - 1,1 dac'(t) \quad (5-92)$$

$$\frac{dz_{11}}{dt} = 4,111 \times 10^{-5} + 0,53 dac'(t) \quad (5-93)$$

$$\frac{dz_{12}}{dt} = 0,8838 dma'(t) \quad (5-94)$$

$$\frac{dz_{13}}{dt} = -0,53 \times 10^{-3} z_{13}(t) + 0,52 dac'(t) \quad (5-95)$$

$$\frac{dz_{14}}{dt} = -0,40 \times 10^{-3} z_{14}(t) - 0,23503 dma'(t) \quad (5-96)$$

$$\frac{dz_{15}}{dt} = -1,944 \times 10^{-5} + 0,1725 \times 10^{-1} dma'(t) \quad (5-97)$$

$$\frac{dz_{16}}{dt} = -0,10 \times 10^{-2} z_{16}(t) + 1,1 dac'(t) \quad (5-98)$$

$$\frac{dz_{17}}{dt} = -4,111 \times 10^{-5} - 0,53 dac'(t) \quad (5-99)$$

$$\frac{dz_{18}}{dt} = z_{19}(t) \quad (5-100)$$

$$\frac{dz_{19}}{dt} = -0,452 \times 10^{-3} z_{19}(t) - 0,5107 \times 10^{-7} z_{18}(t) + 0,1466 \times 10^{-3} dma'(t) \quad (5-101)$$

$$\frac{dz_{20}}{dt} = -0,53 \times 10^{-3} z_{20}(t) - 0,12 dac'(t) \quad (5-102)$$

$$\frac{dz_{21}}{dt} = 4,056 \times 10^{-6} + 0,58 \times 10^{-1} dac'(t) \quad (5-103)$$

$$\frac{dz_{22}}{dt} = z_{23}(t) \quad (5-104)$$

$$\frac{dz_{23}}{dt} = -0,3537 \times 10^{-3} z_{23}(t) - 0,3127 \times 10^{-7} z_{22}(t) - 0,10393 \times 10^{-4} dma'(t) \quad (5-105)$$

$$\frac{dz_{24}}{dt} = -0,53 \times 10^{-3} z_{24}(t) + 0,49 dac'(t) \quad (5-106)$$

$$\frac{dz_{25}}{dt} = -0,40 \times 10^{-3} z_{25}(t) - 0,22292 dma'(t) \quad (5-107)$$

$$\frac{dz_{26}}{dt} = -2,139 \times 10^{-5} + 0,1624 \times 10^{-1} dma'(t) \quad (5-108)$$

$$\frac{dz_{27}}{dt} = k_5 I \quad (5-109)$$

Et les variables physiques demeurent inchangées à l'exception de la masse de métal qui devient:

$$M_3'(t) = y_8(t) = z_{27}(t) \quad (5-110)$$

Si on désire décrire les équations d'état sous forme standard (5-41) nous devons faire un changement de variables, car certaines équations comportent des constantes qui ne multiplient ni variables d'état, ni variables de contrôle. Donc, voici les modifications à apporter:

$$\frac{dz_2'}{dt} = \frac{dz_2}{dt} - 1,000 \times 10^{-6}$$

$$\frac{dz_5'}{dt} = \frac{dz_5}{dt} - 4,444 \times 10^{-6}$$

$$\frac{dz_9'}{dt} = \frac{dz_9}{dt} + 2,222 \times 10^{-9}$$

$$\frac{dz_{11}'}{dt} = \frac{dz_{11}}{dt} - 4,111 \times 10^{-5}$$

$$\frac{dz_{15}'}{dt} = \frac{dz_{15}}{dt} + 1,944 \times 10^{-5}$$

$$\frac{dz_{17}'}{dt} = \frac{dz_{17}}{dt} + 4,111 \times 10^{-5}$$

$$\frac{dz_{21}'}{dt} = \frac{dz_{21}}{dt} - 4,056 \times 10^{-6}$$

$$\frac{dz_{26}'}{dt} = \frac{dz_{26}}{dt} + 2,139 \times 10^{-5}$$

les autres étant de la forme  $\frac{d z_k'}{dt} = \frac{d z_k}{dt} + 0$

Ainsi, on obtient la formulation standard  $\frac{dz'}{dt} = A z'(t) + B u'(t)$

Par ailleurs, si ce changement de variables n'avait pas été effectué, nous aurions retrouvé la forme matricielle suivante:  $\frac{dz}{dt} = A z(t) + B u(t) + E$  où  $E$  est un vecteur constant de dimension  $27 \times 1$  correspondant au régime pseudo-stationnaire et est constitué de neuf coefficients constants (les huit constantes ajoutées plus le terme constant de l'équation de la production de métal) et de dix-huit coefficients nuls.

En conséquence, voici le modèle linéaire d'ordre vingt-sept, sous la forme matricielle standard:

Matrice d'évolution dynamique:

$$A_{27 \times 27} = \begin{pmatrix} A_1 & . & 0 \\ . & A_2 & . \\ . & . & A_3 & . \\ . & . & . & A_4 & . \\ . & . & . & . & A_5 & . \\ . & . & . & . & . & A_6 & . \\ . & . & . & . & . & . & A_7 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & A_8 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & . & . & . & A_9 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

où

$$A_1 = \begin{pmatrix} -0,61 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -0,16 \times 10^{-6} & -0,80 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0,23 \times 10^{-6} & -0,11 \times 10^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,10 \times 10^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} -0,10 \times 10^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_5 = \begin{pmatrix} -0,53 \times 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & -0,40 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_6 = \begin{pmatrix} -0,10 \times 10^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -0,5107 \times 10^{-7} & -0,452 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_7 = \begin{pmatrix} -0,53 \times 10^{-3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -0,3127 \times 10^{-7} & -0,3537 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_8 = (0)$$

$$\mathbf{A}_9 = \begin{pmatrix} -0,53 \times 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & -0,40 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice d'application de contrôle:

$$\mathbf{B}_{27 \times 2} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_3 \\ \mathbf{B}_4 \\ \mathbf{B}_5 \\ \mathbf{B}_6 \\ \mathbf{B}_7 \\ \mathbf{B}_8 \\ \mathbf{B}_9 \end{bmatrix}$$

$$\text{où } \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} -0,30 \times 10^{-1} & 0 \\ 0 & 0,1646 \times 10^{-1} \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}_6 = \begin{pmatrix} 1,1 & 0 \\ -0,53 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0,1466 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0,37 \times 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0,2083 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}_7 = \begin{pmatrix} -0,12 & 0 \\ 0,058 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -0,10393 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0,27 \times 10^{-7} & 0 \\ 0 & -0,70138 \times 10^{-3} \\ 0 & 0,3507 \times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_4 = \begin{pmatrix} -1,1 & 0 \\ 0,53 & 0 \\ 0 & 0,8838 \end{pmatrix} \quad B_9 = \begin{pmatrix} 0,49 & 0 \\ 0 & -0,22292 \\ 0 & 0,1624 \times 10^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}_5 = \begin{pmatrix} 0,52 & 0 \\ 0 & -0,23503 \\ 0 & 0,1725 \times 10^{-1} \end{pmatrix}$$

#### Matrice d'observation:

$$\begin{aligned} \text{où } C_1 &= (1 \ 1) \\ C_2 &= (1 \ 0 \ 1) \\ C_3 &= (1 \ 0 \ 1 \ 1) \\ C_4 = C_5 = C_9 &= (1 \ 1 \ 1) \\ C_6 = C_7 &= (1 \ 1 \ 1 \ 0) \\ C_8 &= (1) \end{aligned}$$

Matrice de couplage entrée-sortie:

$$D_{9 \times 2} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{où } D_1 &= (0 \quad 496,60) \\ D_2 &= (0 \quad 463,40) \\ D_3 = D_4 = D_5 = D_6 = D_7 = D_8 = D_9 &= (0 \quad 0) \end{aligned}$$

En comparant ces résultats et ceux obtenus pour le modèle linéaire d'ordre vingt-deux, on remarque que la matrice A possède quatre éléments supplémentaires, c'est-à-dire quatre pôles engendrés par l'utilisation de l'approximation de Padé. Autrement dit, l'ordre du système est passé de vingt-deux à vingt-six par l'ajout de ces pôles et de vingt-six à vingt-sept pour tenir compte de la production de métal, qui on se rappelle était exclue du modèle linéaire d'ordre vingt-deux. De plus, contrairement aux modèles précédents, le modèle d'ordre vingt-sept tient compte du régime pseudo-stationnaire et par

conséquent, même si aucune sollicitation n'est appliquée, le modèle linéaire demeure représentatif. En outre, si on perturbe le système par l'entremise des variables de contrôle, on obtiendra la superposition de la réponse du système idéalisé et du régime pseudo-stationnaire.

### 5.2.3 Interprétation des résultats

Les pages qui vont suivre introduisent les résultats, sous forme de graphiques. On y compare les réponses indicielles du modèle non-linéaire d'ordre neuf à celles du modèle linéaire d'ordre vingt-sept, en portant une emphase sur l'interprétation physique et mathématique des résultats. Pour ce faire, on sollicite le modèle linéaire, de la même manière que nous l'avons fait avec le modèle non-linéaire (avec alimentation continue et sans retrait de métal), pour obtenir une nouvelle série de réponses indicielles. Par la suite, on superpose les courbes, de façon à valider partiellement le modèle identifié. Voici ces graphiques en série de deux, chaque variable d'état étant sollicitée, successivement, par un échelon de 10% de la variable de contrôle DAC (voir la figure 5.1) et par un échelon de -10% de la variable de contrôle DMA (voir la figure 5.4).

À la figure 5.9, on voit que l'alumine dispersée dans le bain diminue lorsque l'on augmente la distance anode-cathode. En effet, l'augmentation de cette variable de contrôle entraîne une hausse de la température du bain ce qui provoque une augmentation du taux de dissolution de l'alumine et par le fait même une diminution de l'alumine non-dissoute ( $X_1$  et  $X_2$ ) dans le bain. Au niveau mathématique, on remarque que l'approximation de cette réponse indicielle par une forme exponentielle est justifiée.

En ce qui concerne la sollicitation de la variable de contrôle DMA, on remarque qu'une baisse dans l'alimentation entraîne directement une baisse en alumine dispersée dans le bain (voir figure 5.10). Physiquement, ceci s'explique par le fait que la consommation demeure constante même si l'alimentation diminue -i.e. on consomme une partie de l'alumine accumulée

dans le bain. Du point de vue de l'approximation linéaire, la superposition des courbes (figure 5.10), donne une réponse indicelle qui se comporte comme une rampe juxtaposée à un gain statique.

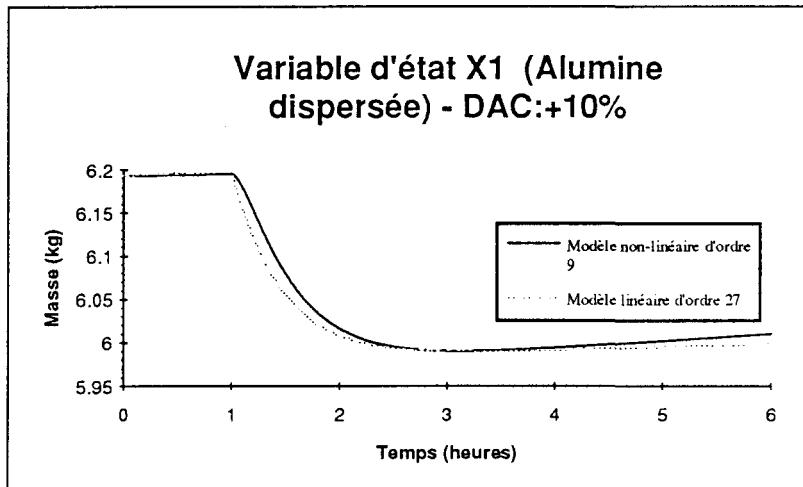


Figure 5.9 Comparaison entre le modèle non-linéaire et le modèle linéaire pour la variable d'état  $X_1$  sollicitée par la variable de contrôle DAC à +10%

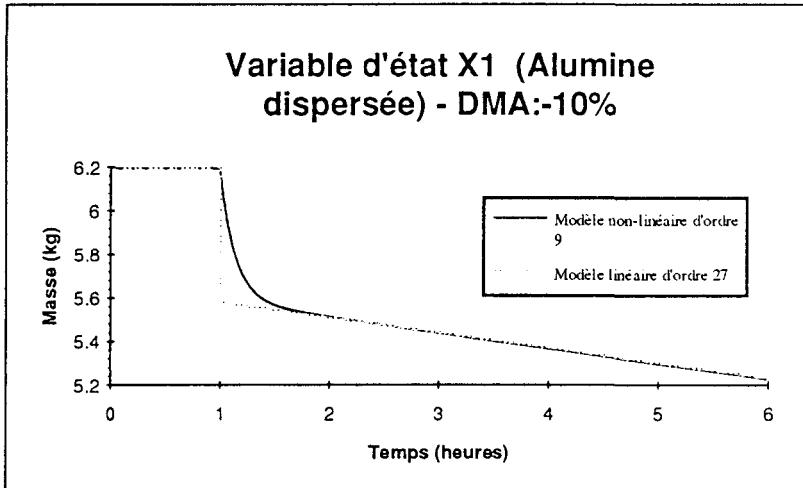


Figure 5.10 Comparaison entre le modèle non-linéaire et le modèle linéaire pour la variable d'état  $X_1$  sollicitée par la variable de contrôle DMA à -10%

Aux figures 5.11 et 5.12 l'alumine déposée réagit dans le même sens que l'alumine dispersée (figures 5.9 et 5.10). En conséquence, les mêmes remarques s'appliquent pour la variable d'état  $X_2$  au niveau de l'interprétation physique. Du point de vue mathématique, on remarque à la figure 5.11 qu'il est justifié d'utiliser une approximation linéaire du deuxième ordre pour  $X_2$ .

(sollicitée par DAC) étant donné l'emplacement du point d'infexion qui est éloigné par rapport au début de la sollicitation. Par contre, on voit à la figure 5.12 que l'approximation de  $X_2$  par une forme PI est moins valable que celle de  $X_1$  lorsque sollicitée par la même variable de contrôle. Physiquement, on explique ce phénomène par le fait que le taux de dissolution de l'alumine déposée ( $X_2$ ) est plus lent que celui de l'alumine dispersée ( $X_1$ ). Il en demeure que cette approximation est acceptable.

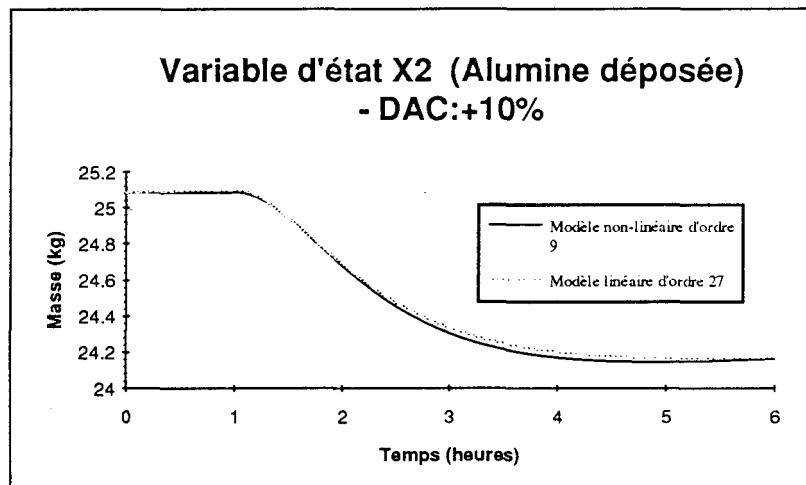


Figure 5.11 Comparaison entre le modèle non-linéaire et le modèle linéaire pour la variable d'état  $X_2$  sollicitée par la variable de contrôle DAC à +10%

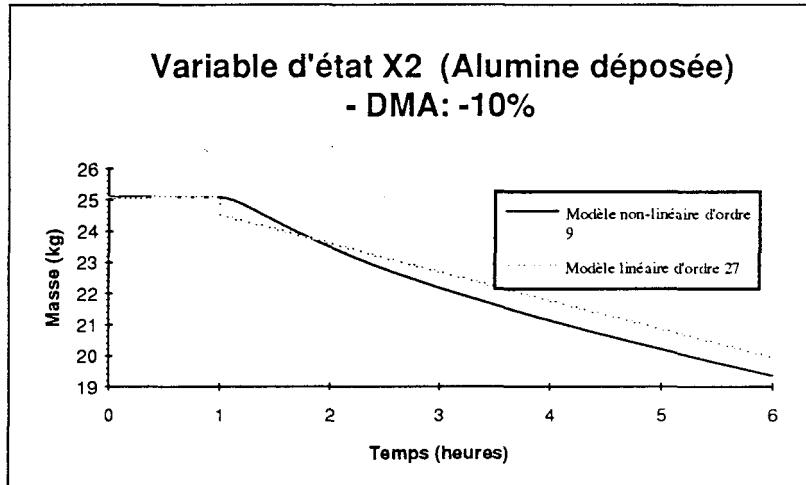


Figure 5.12 Comparaison entre le modèle non-linéaire et le modèle linéaire pour la variable d'état  $X_2$  sollicitée par la variable de contrôle DMA à -10%

Par ailleurs, on voit à la figure 5.13 qu'une hausse de la distance anode-cathode entraîne une légère augmentation de la concentration en alumine.

Comme mentionné précédemment, l'augmentation de la température du bain favorise la dissolution de l'alumine en réserve dans le bain - i.e.  $X_1$  et  $X_2$ . Donc, une partie de l'alumine passe des phases dispersée et déposée à la phase dissoute. À la figure 5.14, on remarque que C réagit dans le même sens que  $X_1$  et  $X_2$  (figures 5.10 et 5.12) pour la même raison - i.e. l'on consomme plus que l'on alimente. Du point de vue mathématique, on voit que l'utilisation d'un système de deuxième ordre pour la fonction de transfert de C par rapport à DAC (figure 5.13) est justifiée. Il en va de même pour l'approximation de C par rapport à DMA par un intégrateur en conjonction avec un délai (figure 5.14).

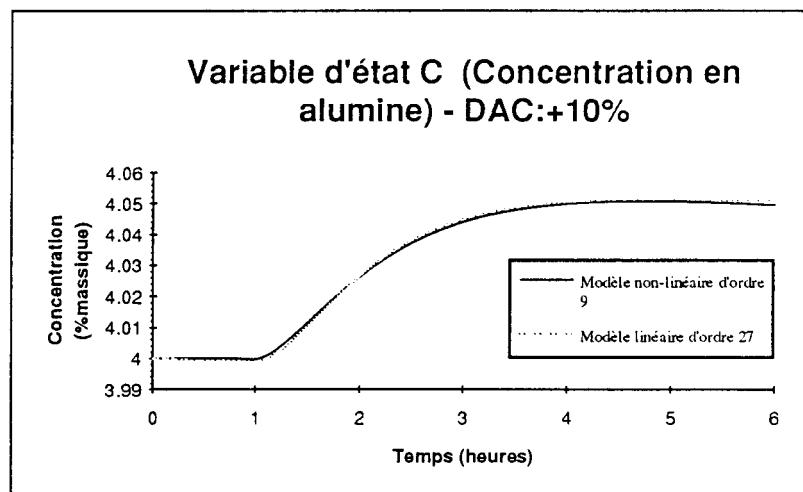


Figure 5.13 Comparaison entre le modèle non-linéaire et le modèle linéaire pour la variable d'état C sollicitée par la variable de contrôle DAC à +10%

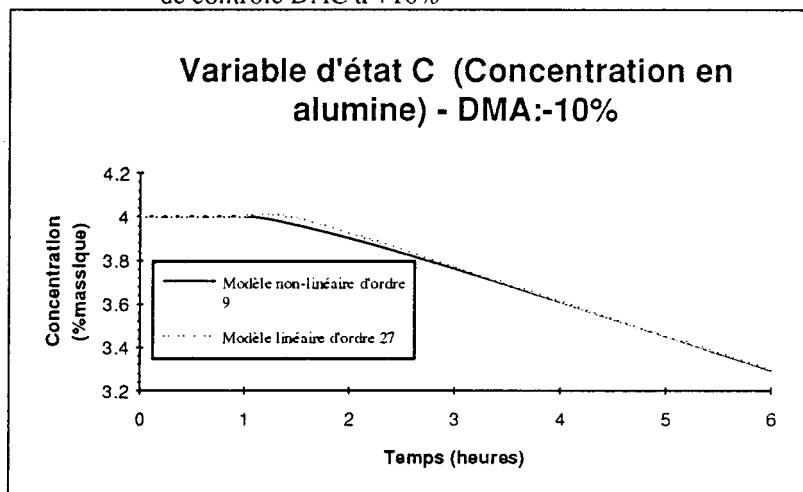


Figure 5.14 Comparaison entre le modèle non-linéaire et le modèle linéaire pour la variable d'état C sollicitée par la variable de contrôle DMA à -10%

En ce qui concerne la masse du bain ( $M_1$ ) lorsque sollicitée par la variable de contrôle DAC (figure 5.15), on voit que la représentation par une rampe en conjonction avec un délai est très efficace. Du point de vue physique, le fait d'augmenter la distance anode-cathode provoque une hausse de la température du bain ce qui entraîne la fonte de la gelée et une augmentation de la masse de bain. Par ailleurs, on voit à la figure 5.16 que l'approximation de la réponse indicelle de  $M_1$  (par rapport à DMA) par une rampe est elle aussi très bonne. En ce qui concerne l'interprétation du sens de cette courbe, on mentionne qu'une baisse dans l'alimentation entraîne directement une diminution de l'alumine à l'intérieur du bain (i.e. une baisse de la masse du bain) puisque la consommation demeure constante.

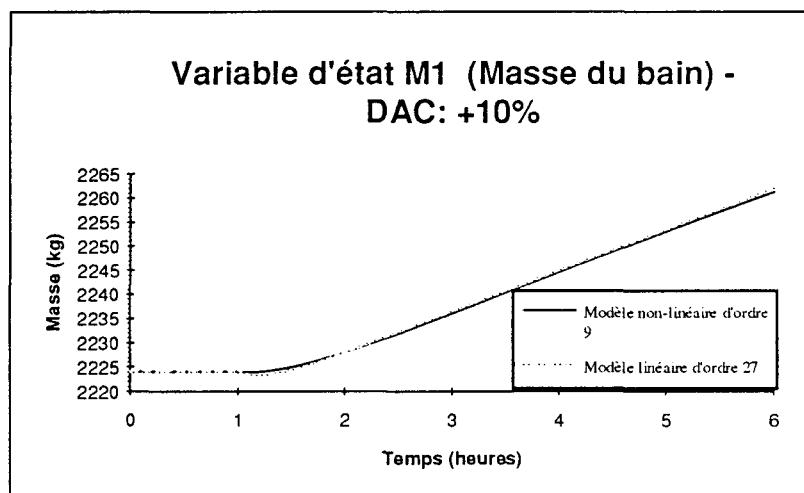


Figure 5.15 Comparaison entre le modèle non-linéaire et le modèle linéaire pour la variable  $M_1$  sollicitée par DAC à +10%

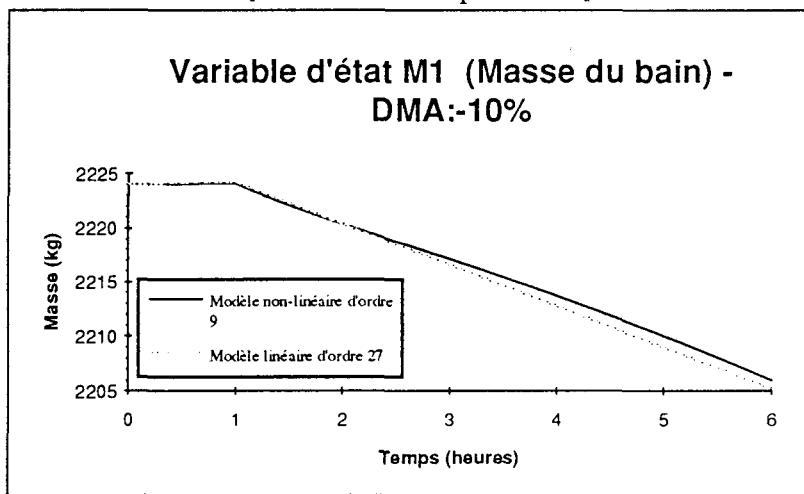


Figure 5.16 Comparaison entre le modèle non-linéaire et le modèle linéaire pour la variable  $M_1$  sollicitée par DMA à -10%

À la figure 5.17 on voit que la température du bain ( $T_1$ ) réagit comme un système de premier ordre, lorsqu'on sollicite cette variable d'état par la distance anode-cathode. En ce sens, nous pouvons faire une analogie électrique en associant cette réponse indicielle à celle d'un condensateur qui se charge. Du point de vue physique, nous avons déjà mentionné à plusieurs reprises qu'une augmentation de la DAC provoque un apport d'énergie supplémentaire au bain et par le fait même une augmentation de sa température.

Par ailleurs, on remarque à la figure 5.18 que la température du bain possède deux tendances opposées lorsqu'elle est sollicitée par l'alimentation en alumine. La première qui tend à la faire augmenter est causée par le fait qu'il y a moins d'alumine à dissoudre et à réchauffer. La deuxième qui tend à la faire diminuer est occasionnée par la chute de résistance. D'un point de vue mathématique, la première est exprimée par une exponentielle positive et la deuxième par une rampe négative.

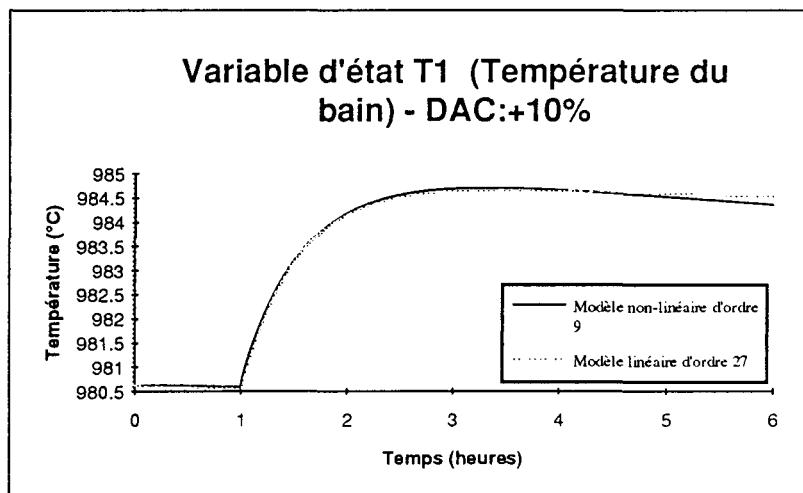


Figure 5.17 Comparaison entre le modèle non-linéaire et le modèle linéaire pour la variable d'état  $T_1$  sollicitée par la variable de contrôle DAC à +10%

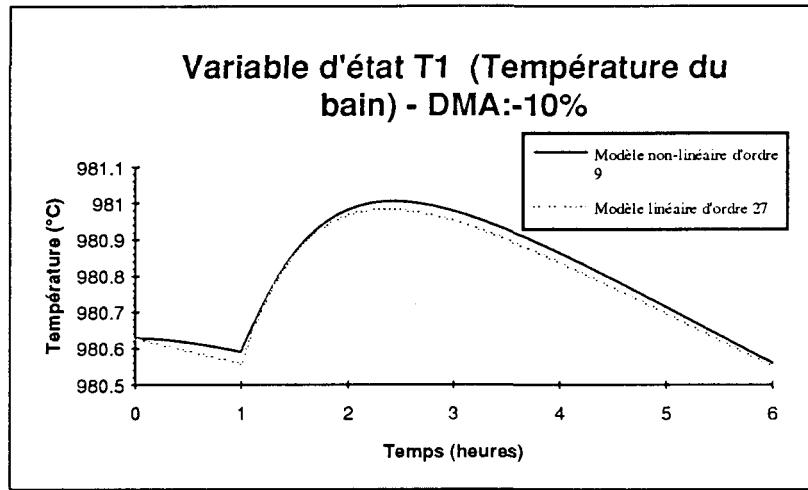


Figure 5.18 Comparaison entre le modèle non-linéaire et le modèle linéaire pour la variable d'état  $T_1$  sollicitée par la variable de contrôle DMA à -10%

Au niveau de la masse de gelée ( $M_2$ ), l'approximation par une rampe en conjonction avec un délai est elle aussi très efficace lorsqu'on la sollicite par l'intermédiaire de la variable de contrôle DAC (voir figure 5.19). À la figure 5.20, on voit que l'approximation de  $M_2$  (sollicitée par DMA) par un système de deuxième ordre est tout aussi valable. Comme mentionné précédemment, une augmentation de la température du bain entraîne une baisse de la masse de gelée et ce indépendamment du choix de la variable de contrôle.

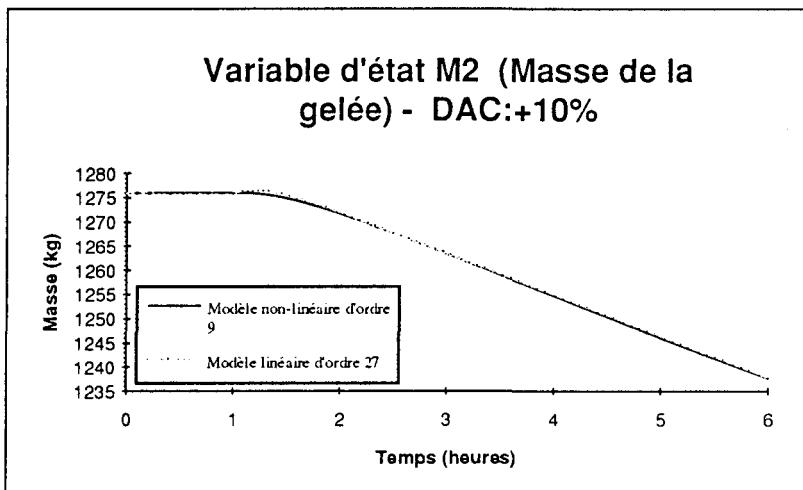


Figure 5.19 Comparaison entre le modèle non-linéaire et le modèle linéaire pour la variable d'état  $M_2$  sollicitée par la variable de contrôle DAC à +10%

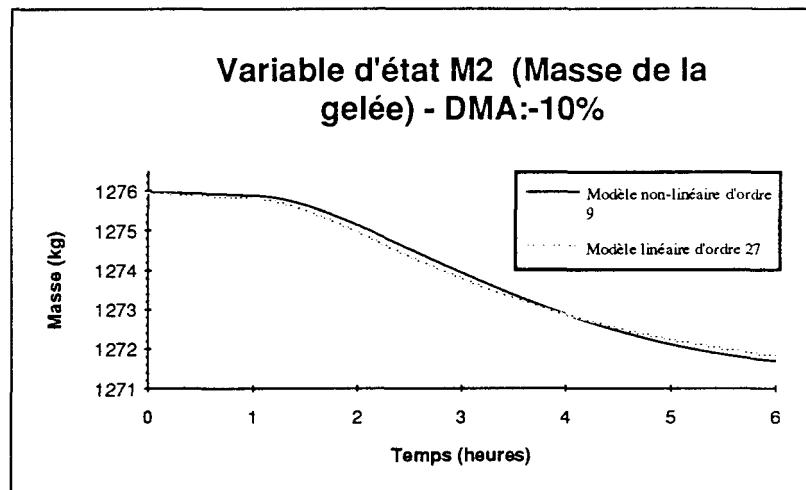


Figure 5.20 Comparaison entre le modèle non-linéaire et le modèle linéaire pour la variable d'état M<sub>2</sub> sollicitée par la variable de contrôle DMA à -10%

Par ailleurs à la figure 5.21, on remarque que l'approximation de la température de la gelée (lorsque sollicitée par la DAC) par une rampe et un délai est elle aussi excellente. À la figure 5.22, on voit que T<sub>2</sub> lorsque sollicitée par l'alimentation réagit comme un système de deuxième ordre. Du point de vue physique, cette température augmente dans le même sens que celle du bain mais moins promptement, car la gelée agit comme un tampon thermique.

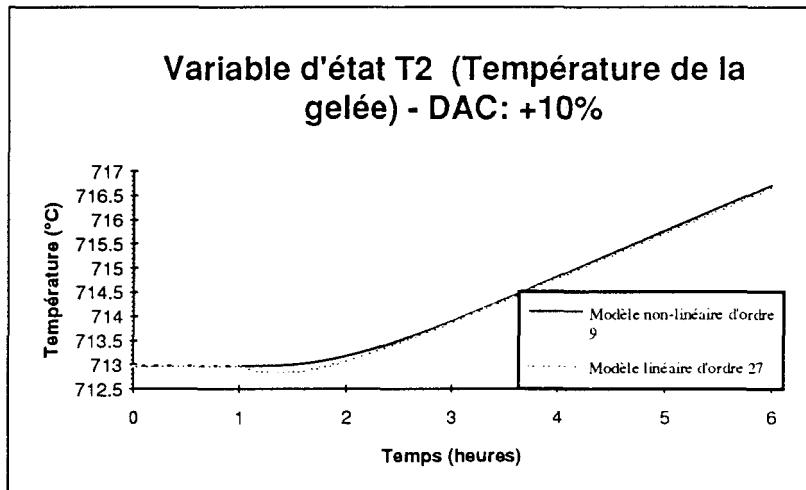


Figure 5.21 Comparaison entre le modèle non-linéaire et le modèle linéaire pour la variable d'état T<sub>2</sub> sollicitée par la variable de contrôle DAC à +10%

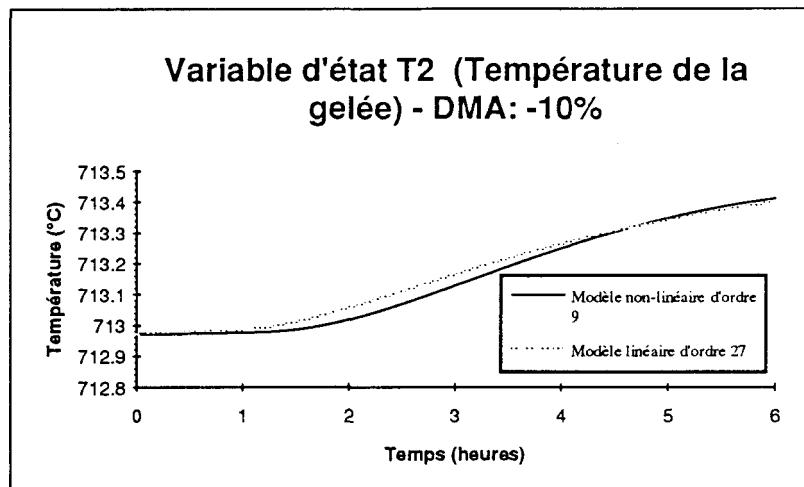


Figure 5.22 Comparaison entre le modèle non-linéaire et le modèle linéaire pour la variable d'état  $T_2$  sollicitée par la variable de contrôle DMA à -10%

On voit aux figures 5.23 et 5.24 qu'il n'existe aucun lien entre la masse de métal et l'une ou l'autre des variables de contrôle.

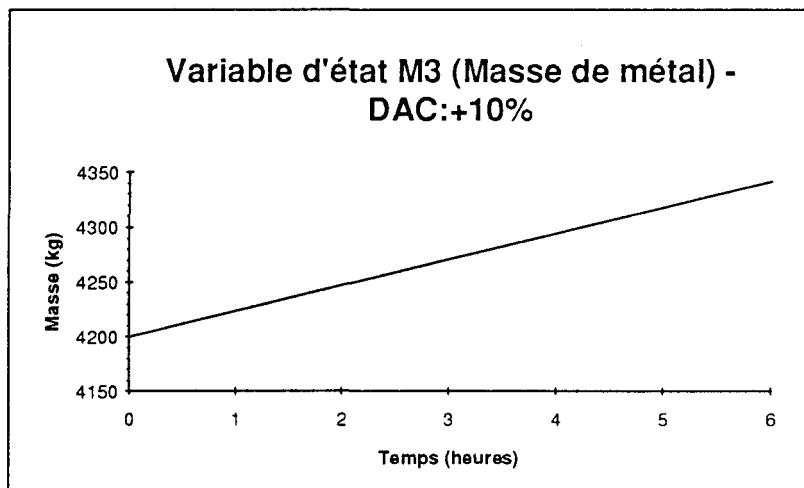


Figure 5.23 Courbe représentant le modèle non-linéaire d'ordre 9 et le modèle linéaire d'ordre 27 pour la variable d'état  $M_3$  sollicitée par la variable de contrôle DAC à +10%

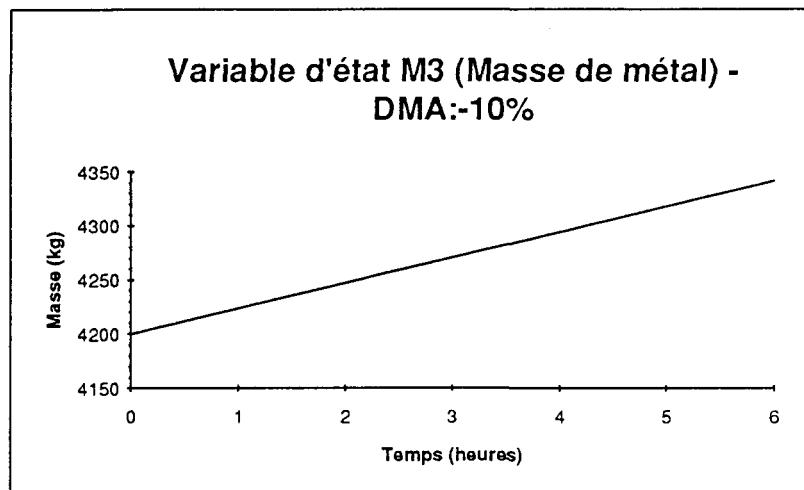


Figure 5.24 Courbe représentant le modèle non-linéaire d'ordre 9 et le modèle linéaire d'ordre 27 pour la variable d'état  $M_3$  sollicitée par la variable de contrôle DMA à -10%

Finalement, on remarque aux figures 5.25 et 5.26 que la température du métal réagit de la même manière que la température du bain à l'exception du fait que  $T_3$  possède des délais légèrement plus élevés que  $T_1$ . Ceci s'explique par le fait qu'une partie de l'énergie est d'abord transmise au bain et par la suite le bain transmet cette énergie au métal.

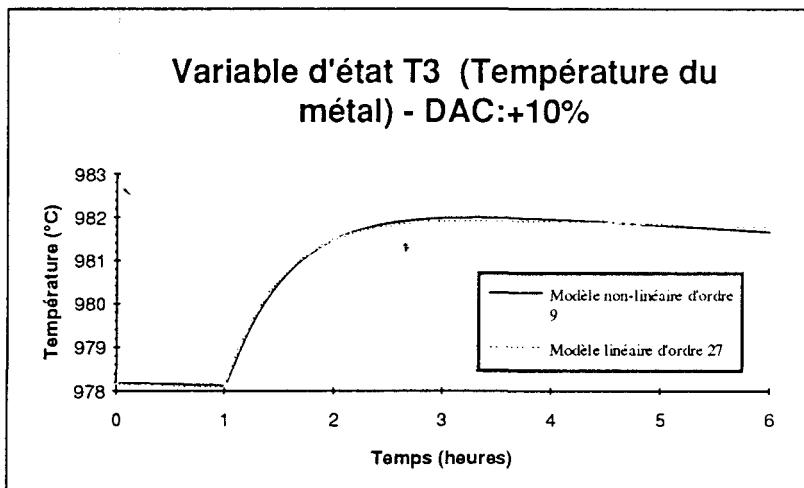


Figure 5.25 Comparaison entre le modèle non-linéaire et le modèle linéaire pour la variable d'état  $T_3$  sollicitée par la variable de contrôle DAC à +10%

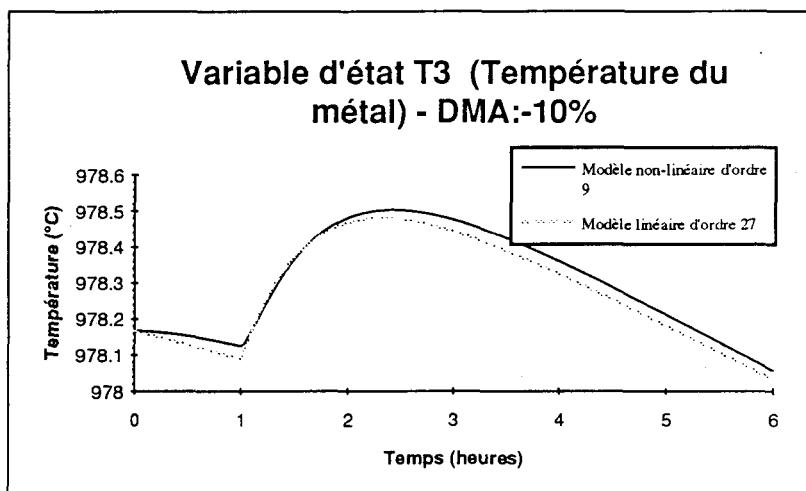


Figure 5.26 Comparaison entre le modèle non-linéaire et le modèle linéaire pour la variable d'état  $T_3$  sollicitée par la variable de contrôle DMA à -10%

À la lumière des résultats obtenus, le modèle linéaire d'ordre vingt-sept semble être représentatif du procédé. La prochaine étape consiste à cerner les limites d'applicabilité de ce modèle.

#### 5.2.4 Les limites d'applicabilité du modèle linéaire d'ordre vingt-sept

Les limites d'applicabilité du modèle linéaire d'ordre vingt-sept peuvent être établies, par l'entremise de la courbe représentant la résistance de la cuve ( $R$ ) en fonction de la concentration en alumine dans le bain ( $C$ ) (voir la figure 5.27). En effet, la fonction  $R=f(C)$  possède l'avantage de démontrer simultanément l'impact des deux variables de contrôle sur le procédé en son ensemble. Ainsi, les variations associées à la distance anode-cathode (DAC) se manifestent, à travers la résistance de la cuve et les changements dans l'alimentation en alumine (DMA) se manifestent, à travers la concentration en alumine dans le bain. Cependant, la résistance ne dépend pas uniquement de la

concentration en alumine mais aussi des variables de contrôle et d'autres variables d'état telles que la température du bain et la masse de gelée - i.e.  $R=f(C)$  est une approximation de  $R=f(C,T_1,M_2,DAC,DMA)$ . En conséquence, nous devons considérer certains paramètres constants, de manière à tracer la fonction  $R=f(C)$  et c'est cet exercice qui nous permettra de cerner les limites d'applicabilité du modèle linéaire. Voici la liste des paramètres (consulter l'annexe G pour de plus amples détails sur la configuration de la cuve) nécessaires pour construire cette courbe lorsque  $DAC=4,4$  cm (figure 5.27):

Distance anode-cathode: 4,4 cm

Température du bain: 980,6 °C

Masse de la gelée: 1276 kg

Résistance externe: 9  $\mu\Omega$

Surface effective du bain: 11,21 m<sup>2</sup>

Surface anodique: 7,5 m<sup>2</sup>

Concentration en fluorure de calcium ( $CaF_2$ ): 5%

Conductivité électrique du bain: 168,54  $\frac{1}{\Omega \cdot m}$

Rapport cryolithaire  $NaF/AlF_3$ : 1,2

Fraction de la surface anodique recouverte de bulles: 0,25

Épaisseur de la couche de bulles sous l'anode: 0,015 m

Fraction de gaz dans la couche de bulles: 0,08

Épaisseur de la couche de bulles adhérant à l'anode: 0,005 m

Par ailleurs, le fait d'avoir identifié une partie du système par la sollicitation de la distance anode-cathode, entraîne le besoin d'ajouter deux courbes supplémentaires au graphique de la résistance en fonction de la concentration. En fait, si on conserve les paramètres d'opération ci-dessus constants à l'exception de la distance anode-cathode, on remarque (à la figure 5.27) que l'on génère deux courbes additionnelles soit une pour la distance anode-cathode avec une amplitude de +10% ( $DAC+10\%$ ) et une pour la  $DAC-10\%$ .

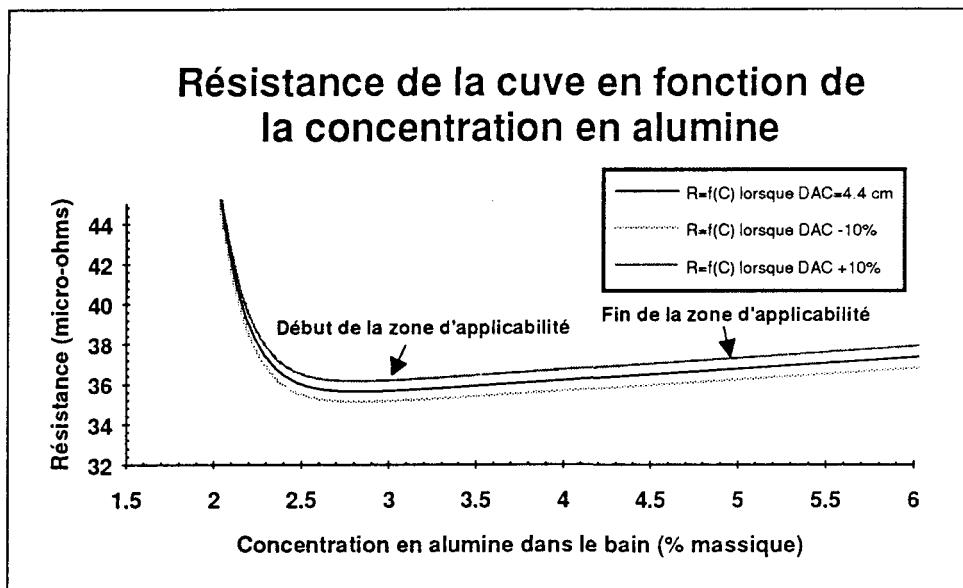


Figure 5.27 Graphique représentant la zone d'applicabilité du modèle linéaire par rapport à la fonction  $R=f(C)$

En fait, ces courbes deviennent les limites inférieure et supérieure du modèle (vues par la résistance), car elles correspondent à l'amplitude maximale de la variable de contrôle DAC que peut subir le modèle linéaire. De plus, de manière à cerner les limites d'applicabilité en ce qui concerne la seconde variable de contrôle à savoir l'alimentation, nous remarquons que la courbe représentant la résistance en fonction de la concentration est constituée de trois sections distinctes. La première est la plage d'opération du procédé, c'est-à-dire la partie centrale de la courbe où la résistance varie à toutes fins pratiques, de façon linéaire. Par la suite, à l'extrême gauche du graphique de la figure 5.27, on retrouve la section qui représente l'état de sous-alimentation du procédé, qui dans le pire des cas provoque l'effet anodique. On remarque à la même figure que la sous-alimentation débute lorsque la concentration en alumine dans le bain devient plus faible que 3% - i.e. lorsque la dérivée de  $R$  par rapport à  $C$  change de signe. Finalement, la troisième partie qui constitue l'état de sur-alimentation n'est pas représenté à la figure 5.27, car cette situation particulière était exclue au départ du modèle non-linéaire. Par contre, il est bon de mentionner que cette dernière se manifeste aussi par une augmentation dans la résistance mais d'intensité moindre et qu'elle débute

lorsque la concentration dépasse approximativement 5%. À la lumière de ces propos, nous définissons la zone d'applicabilité du modèle linéaire comme étant la surface cernée, d'une part en ordonnée par la courbe  $R=f(C)$  lorsque la distance anode-cathode est de 10% supérieure au point d'opération et par la courbe  $R=f(C)$  quand la DAC est de 10% inférieure à ce même point, et d'autre part en abscisse par les concentrations 3% et 5% (voir la figure 5.27). Toutefois, cette zone n'est pas formelle, car nous devons garder en esprit que pour le moment, elle est constituée de courbes approximatives; nous verrons, à la section suivante, que ces dernières sont valables, en traçant les points  $(C,R)$  provenant d'une simulation dynamique.

Finalement, nous considérons le modèle linéaire comme représentatif s'il est maintenu à l'intérieur de la zone d'applicabilité, par des actions de contrôle qui ne forcent pas le point d'opération à en sortir.

### 5.2.5 La validation du modèle linéaire d'ordre vingt-sept

La validation du modèle linéaire d'ordre vingt-sept est réalisée en deux phases. Dans la première phase, on calcule l'erreur qui sépare le modèle linéaire du modèle non-linéaire, pour une sollicitation d'amplitude de 10% d'une durée de cinq heures -i.e. la grandeur de perturbation que nous avons utilisée pour effectuer l'identification. Cette première phase de la validation est idéalisée, en ce sens qu'on fait varier les variables de contrôle une à une séparément ce qui n'est pas toujours le cas dans la réalité. Ainsi, si on sollicite la distance anode-cathode, on garde l'alimentation en alumine constante et située au point d'opération. Néanmoins, cette première phase nous donne une idée sur l'importance des erreurs en question. Dans une deuxième phase, on teste le modèle linéaire sous des conditions se rapprochant plus de la réalité. On implante un système de contrôle dans le simulateur, de manière à laisser osciller les deux modèles à l'intérieur d'une certaine plage d'opération. Il est alors possible de vérifier qualitativement le modèle linéaire sous l'influence de diverses actions de contrôle appliquées simultanément.

### 5.2.5.1 Validation quantitative en fonction de l'amplitude des sollicitations

Dans cette première étape de la validation, nous désirons calculer l'erreur relative qui sépare le modèle linéaire d'ordre vingt-sept du modèle non-linéaire d'ordre neuf, et ce pour chacune des variables d'état. Cette erreur est évaluée par l'entremise des figures 5.9 à 5.26 de la section 5.2.3, en prenant l'écart entre les deux modèles après cinq heures de sollicitation et en divisant par l'amplitude maximale.

Commençons par l'alumine dispersée dans le bain ( $X_1$ ). On calcule une erreur relative de 6,2% lorsque sollicitée par la distance anode-cathode (figure 5.9) et de 0,32% pour une sollicitation par l'alimentation en alumine (figure 5.10). Aux figures 5.11 et 5.12, les erreurs relatives pour l'alumine déposée ( $X_2$ ) sont de 0,45% pour la distance anode-cathode et de 10,5% pour l'alimentation. En ce qui concerne la concentration en alumine dans le bain, l'erreur est de 2,8% lorsque la sollicitation provient de la distance anode-cathode et de 0,81% lorsque la sollicitation provient de l'alimentation en alumine. On remarque aux figures 5.13 et 5.14 la qualité de poursuite du modèle linéaire.

Toujours de la même façon, on trouve aux figure 5.15 et 5.16 une erreur relative de 0,5% lorsque la variable d'état  $M_1$  (masse du bain) est sollicitée par DAC et une de 4,1% quand elle est perturbée par DMA. De plus, l'approximation linéaire de la température du bain (variable d'état  $T_1$ ) apparait elle aussi valable sous l'effet des deux variables de contrôle. Pour une variation dans la distance anode-cathode, on trouve une erreur relative de 3,8% (voir figure 5.17) et pour une variation dans l'alimentation en alumine on évalue l'erreur à 1,9% (voir figure 5.18). La figure 5.19 montre que l'approximation de la masse de gelée ( $M_2$ ) est excellente lorsqu'elle est sollicitée par DAC et DMA; les erreurs relatives sont de 0,5% et de 3%. En ce qui concerne la température de la gelée ( $T_2$ ), on trouve une erreur de 1,6%,

lorsqu'elle est sollicitée par la DAC et une erreur de 2,7% quand elle est perturbée par DMA (voir les figures 5.21 et 5.22).

Par ailleurs, en ce qui concerne la masse de métal ( $M_3$ ), on remarque que les courbes sont complètement confondues (figures 5.23 et 5.24). Ceci est normal, car l'équation différentielle correspondant à la production de métal, dans le modèle non-linéaire initial, était déjà sous forme linéaire. En conséquence,  $M_3$  est représentée de la même façon dans les deux modèles ce qui entraîne une erreur relative de 0% indépendamment du choix de la variable de contrôle (la production de métal n'est pratiquement pas influencée par les variables de contrôle).

Pour la variable d'état  $T_3$  (température du métal), on observe une erreur relative de 2,3%, lorsque l'on sollicite par la distance anode-cathode (figure 5.25) et de 5,1%, quand on perturbe l'alimentation en alumine (figure 5.26).

Finalement, voici un tableau récapitulant les erreurs qui séparent le modèle linéaire du modèle non-linéaire initial:

Tableau 5.4 Erreurs relatives calculées, après cinq heures de sollicitation pour des amplitudes de 10%

Variable d'état	Variable de contrôle perturbée	
	DAC	DMA
$X_1$	6,2%	0,32%
$X_2$	0,45%	10,5%
C	2,8%	0,81%
$M_1$	0,50%	4,1%
$T_1$	3,8%	1,9%
$M_2$	0,50%	3,0%
$T_2$	1,6%	2,7%
$M_3$	0%	0%
$T_3$	2,3%	5,1%

À la lumière de ces résultats on peut conclure que le modèle linéaire est valable, car de façon générale les erreurs relatives sont de l'ordre de 3%, pour des sollicitations d'amplitude de 10% sur une durée de cinq heures. En définitive, on peut considérer le modèle linéaire comme représentatif du modèle non-linéaire initial, pour des sollicitations de courtes durées appliquées séparément.

### **5.2.5.2 Validation qualitative en fonction d'une situation réelle d'opération**

Cette étape constitue la deuxième phase dans la validation du modèle linéaire d'ordre vingt-sept. Nous essayons ici de tester le modèle sous des conditions d'opération qui se rapprochent un peu plus de la réalité, de façon à comparer qualitativement l'influence simultanée des variables de contrôle. On implante un algorithme, dans le simulateur, de façon à garder le procédé à l'intérieur d'une plage d'opération qui se situe entre 2,3% et 4% de concentration en alumine. Pour ce faire, le contrôleur de type "bang-bang" utilise la valeur de la résistance (la seule variable d'observation mesurée en continu), de manière à évaluer l'état du procédé et réagir par des actions de contrôle adéquats. Voici un bref résumé de l'algorithme de fonctionnement du contrôleur, qui nous servira ultérieurement dans l'interprétation des résultats provenant de la simulation numérique sous asservissement:

- Si la résistance se situe à l'intérieur de la zone morte ( $R_{op}-0,5\mu\Omega \leq R \leq R_{op}+0,5\mu\Omega$ ), alors le système de contrôle est inactif;
- Si la résistance est plus petite que la limite inférieure ( $R_{op}-0,5\mu\Omega$ ), alors on augmente la distance anode-cathode de 1 mm;
- Si la résistance dépasse la limite supérieure ( $R_{op}+0,5\mu\Omega$ ), alors on diminue la DAC de 1 mm. Par contre, si la résistance dépasse une seconde fois la limite supérieure dans un laps de temps donné, alors on

désactive temporairement le système de contrôle au niveau du mouvement anodique et on débute l'alimentation accélérée pour une période fixe de 80 minutes (20 minutes avec DMAx3 et 60 minutes avec DMAx1,5), de manière à éviter l'effet anodique.

La figure 5.28 montre le fonctionnement du contrôleur, par l'entremise d'un cycle de contrôle établi à partir de deux courbes  $R=f(C)$ . Évidemment, plus le système d'asservissement est élaboré, plus le cycle de contrôle est complexe. Or, il est question ici d'implanter un contrôleur pour valider le modèle et non de concevoir une commande sophistiquée. Le cycle de contrôle qui est associé au système d'asservissement implanté dans le simulateur est décrit ci-dessous.

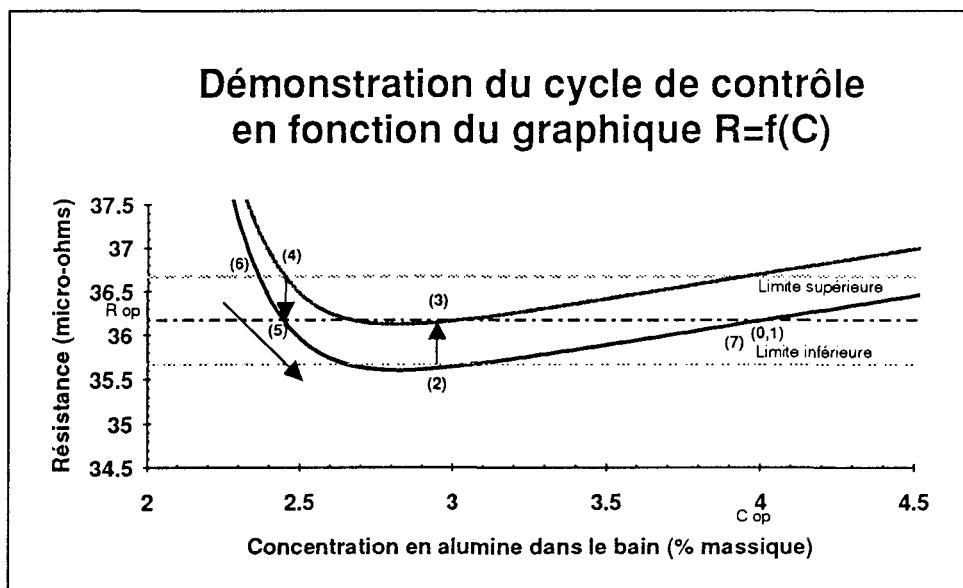


Figure 5.28 Représentation d'un cycle de contrôle simplifié en fonction de deux courbes  $R=f(C)$ . Les étapes essentielles y sont numérotées et doivent être lues dans un ordre croissant. Les flèches correspondent à des actions de contrôle.

Remarque: Dans le graphique ci-dessus,  $R_{op}$  correspond au point d'opération de la résistance. Par contre, étant donné que les courbes  $R=f(C)$  sont des approximations des courbes réelles, ce point ne doit pas être considéré comme le vrai point d'opération. En fait, la valeur réelle est de  $36,6 \mu\Omega$  comparativement à  $36,2 \mu\Omega$  pour ce

graphique. Enfin, cette figure doit être interprétée comme une approximation du cycle de contrôle réel.

À la figure 5.28, les points critiques sont numérotés dans l'ordre décrivant la séquence de fonctionnement du système d'asservissement. Voici les étapes commentées de ce cycle de contrôle:

- (0) - (1) Le procédé est positionné au point d'opération ( $C_{op}$ ,  $R_{op}$ ), car on alimente de manière à obtenir un bilan massique nul. En d'autres termes, on se situe dans la zone morte du contrôleur, et par conséquent aucune action de contrôle n'est prescrite.
- (1) - (2) La concentration en alumine décroît progressivement, car on alimente à 80% de la valeur à l'équilibre, afin d'éviter les accumulations d'alumine dans la cuve; la résistance varie dans le même sens que la concentration.
- (2) La résistance sort de la limite inférieure fixée par le contrôleur.
- (2) - (3) ACTION DE CONTRÔLE: l'anode est montée 1 mm.
- (3) La résistance se retrouve à l'intérieur de la zone morte du contrôleur, près du point d'opération.
- (3) - (4) Zone non-linéaire; la résistance augmente et la concentration en alumine diminue.
- (4) La résistance sort de la limite supérieure.
- (4) - (5) ACTION DE CONTRÔLE: l'anode est baissée de 1 mm.
- (5) La résistance revient au point d'opération.

- (5) - (6) La concentration diminue et la résistance continue son ascension.
- (6) La résistance dépasse la limite supérieure pour une seconde de fois, en peu de temps, ce qui présage l'effet anodique.
- (6) - (7) ACTION DE CONTRÔLE: on multiplie par 3 l'alimentation (3x) pour une période de 20 minutes et, par la suite, on la multiplie par 1,5 (1,5x) pour 60 minutes; les actions de contrôle sur la DAC sont désactivées durant cette période.
- (7) La résistance et la concentration sont de retour dans la zone morte du contrôleur à proximité du point d'opération.

On remarque que, comme nous l'avions souhaité, les deux variables de contrôle sont parfois sollicitées simultanément. Notamment, l'alimentation en alumine est maintenue à 80% de sa valeur à l'équilibre, à partir de la quatrième heure de simulation. Donc, lorsque le contrôleur commande une action sur la distance anode-cathode, nous obtenons la superposition des deux entrées. Nous verrons, dans les pages qui vont suivre, si le modèle linéaire demeure représentatif dans ce cas.

Maintenant que nous connaissons les conditions sous lesquelles le modèle sera soumis, on tente de valider qualitativement le modèle linéaire en analysant les variables auxquelles nous avons accès dans la réalité, à savoir la résistance de la cuve (variable d'observation), la concentration en alumine et la température du bain (ces deux dernières étant des variables d'état). Pour ce faire, on simule les deux modèles sur une période de vingt-quatre heures avec asservissement et on trace le comportement dynamique des trois variables en question. Par la suite, on identifie les étapes du cycle de contrôle sur chaque graphique, de façon à expliquer le comportement dynamique des variables, en fonction des actions de contrôle du système de contrôle. La figure 5.29 donne la comparaison entre les deux modèles pour la résistance de la cuve.

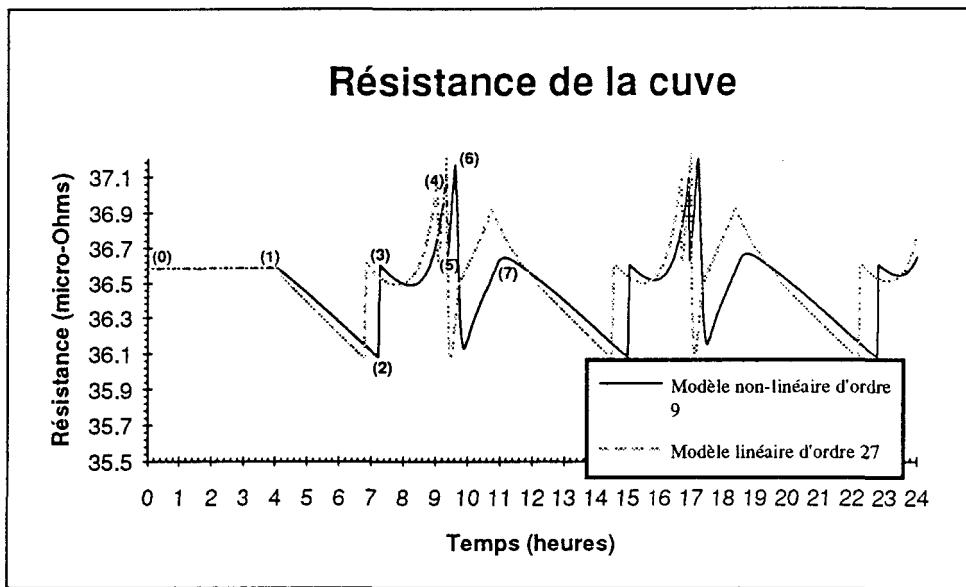


Figure 5.29 Comparaison entre le modèle non-linéaire et le modèle linéaire en ce qui concerne la variable d'observation R (résistance) de la cuve lorsqu'elle est sous l'influence du système de contrôle

On remarque que le modèle linéaire réagit de la même façon que le modèle non-linéaire, mais accuse une légère avance (une vingtaine de minutes) par rapport à ce dernier. Ceci s'explique par le fait que le contrôleur du modèle linéaire est activé avant celui du modèle non-linéaire, car la résistance de la cuve prédicta par ce dernier atteint la limite inférieure de la zone morte avant celle prédicta par le modèle non-linéaire. En fait, le déphasage entre les deux modèles débute à l'étape (2) et est conservé durant toute la durée de simulation. De plus, voici une énumération qui décrit les autres étapes du cycle de contrôle à travers la dynamique de la résistance:

- (0) - (1) La résistance de la cuve est constante, car on alimente le procédé de manière à obtenir un bilan massique nul.
- (1) Début de l'alimentation à 80% de sa valeur à l'équilibre.
- (1) - (2) Régression de la résistance en fonction de la diminution de la concentration en alumine.
- (2) - (3) L'anode est montée de 1 mm; la résistance augmente.
- (3) - (4) La résistance se situe dans une zone non-linéaire (on se retrouve à l'extérieur de la limite d'applicabilité du modèle linéaire), car elle augmente même si la concentration baisse.

- (4) - (5) L'anode est baissée de 1 mm; la résistance diminue.
- (5) - (6) La concentration diminue et la résistance continue son ascension.
- (6) - (7) On active l'alimentation accélérée ce qui occasionne une chute temporaire dans la résistance et il s'ensuit un retour au point d'opération.

Finalement, à partir de l'étape (7), le cycle recommence suivant le même processus - i.e. de l'étape (1) à (7). Cette parfaite symétrie ne correspond pas à la réalité et peut être aisément expliquée par les facteurs suivants:

- le courant de ligne est considéré comme étant constant ce qui n'est pas le cas dans la réalité;
- le modèle se situe toujours à proximité du point d'opération nominal;
- tous les bruits internes sont excluent du simulateur.

En conséquence, les figures 5.29 à 5.31 doivent être interprétées en fonction des facteurs mentionnés ci-dessus. Par ailleurs, on remarque à la figure 5.30 que l'approximation linéaire de la concentration en alumine possède les mêmes caractéristiques que celle de la résistance. Les réponses des deux modèles sont rapprochées à l'exception du déphasage occasionné par l'imperfection du modèle linéaire. Cependant, nous avons été contraint de négliger le délai associé à cette variable lorsque sollicitée par l'alimentation en alumine (DMA). En effet, celui-ci améliore la justesse de cette réponse pour des sollicitations près de 10%, mais détériore considérablement la qualité du modèle pour de grandes perturbations comme celles engendrées par l'alimentation accélérée. En conséquence, l'équation représentant la concentration en alumine (5-76) devient l'équation (5-111) qui est citée à la fin de cette section. Donc, comme nous l'avons fait pour la résistance, voici une énumération qui décrit les étapes du cycle de contrôle à travers la dynamique de la concentration en alumine:

- (0) - (1) La concentration est constante, car on alimente le procédé de manière à obtenir un bilan massique nul.
- (1) Début de l'alimentation à 80% de sa valeur à l'équilibre.
- (1) - (6) La concentration en alumine diminue progressivement.

- (6) - (7) L'alimentation accélérée est activée; la forte pente indique une alimentation de 1,5x et la pente plus faible correspond à une alimentation 3x.

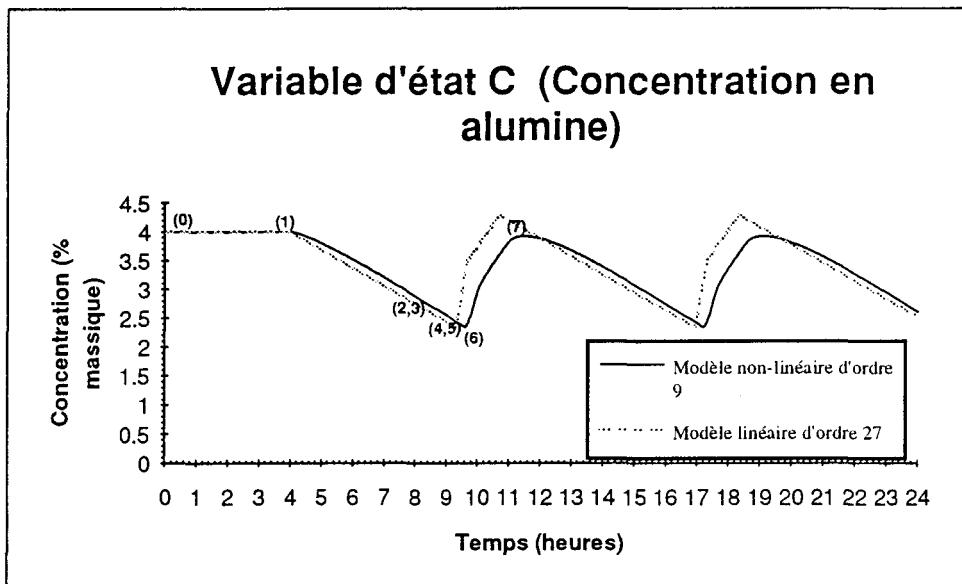


Figure 5.30 Comparaison entre le modèle non-linéaire et le modèle linéaire en ce qui concerne la variable d'état C (concentration en alumine) lorsque la cuve est sous l'influence du système de contrôle

En ce qui concerne la température du bain (figure 5.31), on observe un léger écart pour les étapes entre (3) et (6) qui s'explique par le fait que le modèle linéaire sort de sa limite d'applicabilité entre ces points (section 5.2.4). À partir de l'étape (3), la résistance commence à augmenter avec la diminution de la concentration, ce qui va à l'encontre du modèle linéaire. Toutefois la figure 5.31 montre que globalement, l'approximation pour cette variable est acceptable. Notamment, pour les deux modèles, la température moyenne du bain tend à diminuer en fonction du temps. On se rappelle qu'à la section 5.2.2 nous avons ajouté des constantes à certaines équations différentielles du modèle linéaire, de manière à tenir compte de l'accumulation du métal. Ainsi, à la lumière de ces résultats, on constate qu'il était justifié d'agir de cette façon, car autrement la température moyenne du bain aurait demeuré stationnaire à 980,6 °C en ce qui concerne le modèle linéaire.

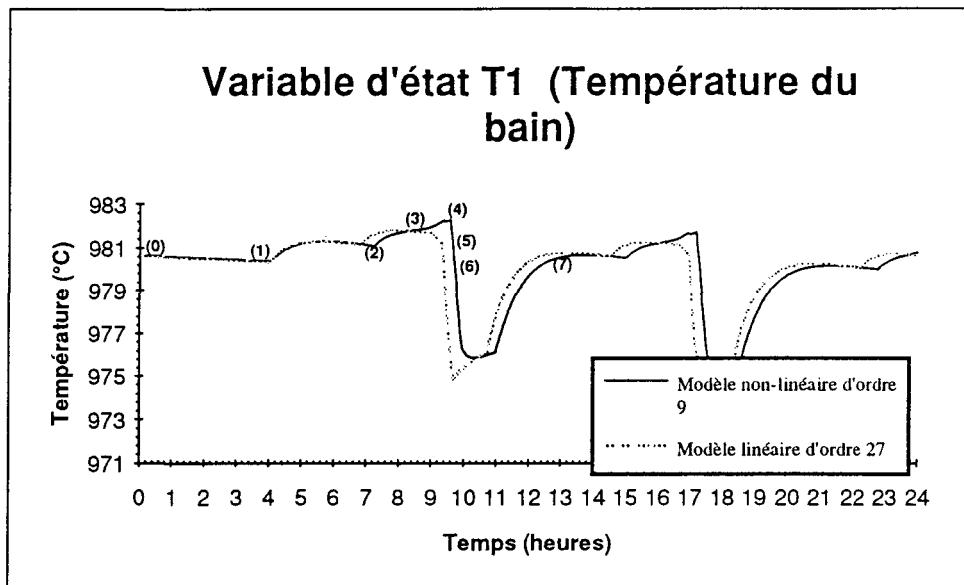


Figure 5.31 Comparaison entre le modèle non-linéaire et le modèle linéaire en ce qui concerne la variable d'état  $T_1$  (température du bain) lorsque la cuve est sous l'influence du système de contrôle

En conséquence, de la même façon que pour les variables précédentes, voici l'énumération des étapes du cycle de contrôle, en fonction de la dynamique de  $T_1$  (explications par rapport au modèle non-linéaire):

- (0) - (1) La température diminue même si le bilan massique de l'alumine est parfaitement balancé; l'aire d'échange thermique augmente dans le même sens que la production de métal, ce qui favorise la dissipation de la chaleur et par conséquent une baisse de la température du bain.
- (1) Début de l'alimentation réduite.
- (1) - (2) On injecte moins d'alumine dans la cuve. Donc l'énergie qui n'est pas utilisée pour dissoudre et réchauffer la masse d'alumine en moins est fournie directement au bain, ce qui entraîne une élévation de la température du bain.
- (2) - (3) L'anode est montée de 1 mm, ce qui provoque une augmentation de la résistance et de la température.

- (3) - (4) Zone non-linéaire; la résistance et la température continuent leur ascension.
- (4) - (6) L'anode est baissée de 1 mm, ce qui entraîne une baisse de la résistance et de la température.
- (6) - (7) L'alimentation accélérée provoque une baisse de la température de bain. Deux causes majeures explique ce phénomène. La première, est occasionnée par le fait qu'une partie de l'énergie disponible dans le bain doit être utilisée pour réchauffer et dissoudre la masse d'alumine supplémentaire. La deuxième, est causée par la diminution de la résistance provoquée par l'augmentation de la concentration en alumine dans le bain.

En conséquence, on conclut que le modèle linéaire d'ordre vingt-sept est représentatif, même sous l'influence simultanée des variables de contrôle, et ce pour ces trois variables d'importance fondamentale.

Dans un autre ordre d'idées, nous avons mentionné à quelques reprises que la courbe représentant la résistance de la cuve en fonction de la concentration en alumine (figure 5.27) était approximative. Or, nous avons recueilli les points  $(C, R)$ , provenant de la simulation du modèle non-linéaire avec le système de contrôle sur une période de vingt-quatre heures, et nous les avons tracés à la figure 5.32. On y constate que l'approximation de  $R=f(C, T_1, M_2, DAC, DMA)$  par  $R=f(C)$  était justifiée.

De plus, à partir de ces résultats, on note que le système de contrôle maintient la concentration en alumine entre 2,3% et 4%. On se rappelle que la limite d'applicabilité du modèle linéaire est de 3% à 5%. En conséquence, on voit que le contrôleur permet de sortir temporairement de la limite d'applicabilité du modèle linéaire, ce qui explique le léger écart entre les deux modèles pour la variable d'état  $T_1$ .

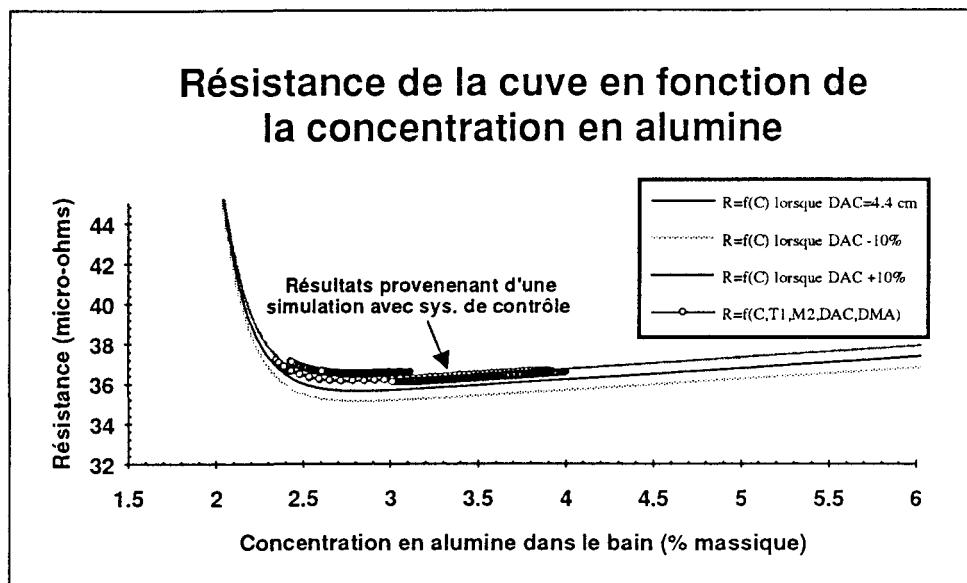


Figure 5.32 Affichage des points (C,R) provenant de la simulation du modèle non-linéaire avec système de contrôle en comparaison avec les courbes  $R=f(C)$

En définitive, on conclut que le modèle linéaire d'ordre vingt-sept assure une représentation adéquate du modèle non-linéaire initial, pour les variables  $R$ ,  $C$  et  $T_1$ . De plus, étant donné que le modèle identifié est découpé, nous pouvons réduire son ordre à dix (en retirant tout simplement les variables d'état qui n'ont pas d'incidence directe sur le contrôle du procédé), de manière à ne conserver que les variables d'état qui ont une influence directe sur la résistance de la cuve, à savoir  $C$ ,  $T_1$  et  $M_2$ . Nous avons aussi retiré l'équation (5-90) qui tient compte du délai associé à la réponse de la concentration ( $C$ ) lorsque sollicitée par l'alimentation en alumine (DMA), pour les raisons citées précédemment. On obtient ainsi un modèle de contrôle linéaire d'une grande simplicité:

$$\frac{dz_6}{dt} = z_7(t) \quad (5-88)$$

$$\frac{dz_7}{dt} = -0,11 \times 10^{-2} z_7(t) - 0,23 \times 10^{-6} z_6(t) + 0,27 \times 10^{-7} dac'(t) \quad (5-89)$$

$$\frac{dz_9}{dt} = -2,222 \times 10^{-9} + 0,3507 \times 10^{-3} dma'(t) \quad (5-91)$$

$$\frac{dz_{13}}{dt} = -0,53 \times 10^{-3} z_{13}(t) + 0,52 \text{ dac}'(t) \quad (5-95)$$

$$\frac{dz_{14}}{dt} = -0,40 \times 10^{-3} z_{14}(t) - 0,23503 \text{ dma}'(t) \quad (5-96)$$

$$\frac{dz_{15}}{dt} = -1,944 \times 10^{-5} + 0,1725 \times 10^{-1} \text{ dma}'(t) \quad (5-97)$$

$$\frac{dz_{16}}{dt} = -0,10 \times 10^{-2} z_{16}(t) + 1,1 \text{ dac}'(t) \quad (5-98)$$

$$\frac{dz_{17}}{dt} = -4,111 \times 10^{-5} - 0,53 \text{ dac}'(t) \quad (5-99)$$

$$\frac{dz_{18}}{dt} = z_{19}(t) \quad (5-100)$$

$$\frac{dz_{19}}{dt} = -0,452 \times 10^{-3} z_{19}(t) - 0,5107 \times 10^{-7} z_{18}(t) + 0,1466 \times 10^{-3} \text{ dma}'(t) \quad (5-101)$$

Les variables d'état physique sont:

$$C'(t) = y_3(t) = z_6(t) + z_9(t) \quad (5-111)$$

$$T_1'(t) = y_5(t) = z_{13}(t) + z_{14}(t) + z_{15}(t) \quad (5-78)$$

$$M_2'(t) = y_6(t) = z_{16}(t) + z_{17}(t) + z_{18}(t) \quad (5-79)$$

En conséquence, un modèle constitué seulement de dix équations différentielles linéaires serait suffisant pour des fins d'études de contrôle du procédé.

### 5.3 Méthodologie pour l'identification d'un modèle linéaire à partir d'un autre état stationnaire

Nous avons identifié et validé, dans les sections précédentes, un modèle linéaire considéré comme représentatif du modèle non-linéaire initial s'il est maintenu à l'intérieur d'une zone d'applicabilité. Cependant, dans le contexte où nous désirons utiliser un modèle linéaire, en parallèle avec le procédé, pour

évaluer ou contrôler des variables d'état particulières, nous devons prévoir quelques améliorations substantielles au processus d'identification. Ainsi, l'utilisation d'un modèle linéaire unique est proscrite, car il faut envisager qu'un changement éventuel de consigne pour une période donnée peut déplacer le point d'opération à l'extérieur de la limite d'applicabilité du modèle linéaire. En conséquence, nous devons altérer le processus d'identification, de façon à assurer un modèle linéaire valable, en fonction de l'état actuel du procédé réel. En ce sens, il est de mise, dans une première phase, de combiner le simulateur non-linéaire au simulateur linéaire, de manière à n'obtenir qu'un seul programme. Par la suite, il est nécessaire d'implanter un nouvel algorithme principal qui doit nous assurer la liaison entre le procédé et l'identification du modèle linéaire. En conséquence, voici l'algorithme qui pourrait permettre une extension des présents travaux:

- 0) On évalue l'état du procédé réel, par l'entremise du point d'opération actuel de la résistance.
- 1) Si le point d'opération se situe à l'intérieur de la zone d'applicabilité, on active le modèle linéaire en cours et on retourne à l'étape 0. Par contre, si le point d'opération est situé à l'extérieur de la zone d'applicabilité, on passe à l'étape 2.
- 2) Si la concentration en alumine (évaluée par l'intermédiaire de la résistance) ne respecte pas la condition  $3\% \leq C \leq 5\%$ , on désactive temporairement le modèle linéaire en cours, car on se situe dans une zone non-linéaire de la courbe  $R=f(C)$ ; on retourne à l'étape 0. Par contre, si cette condition est respectée, on doit identifier un nouveau modèle linéaire; on passe à l'étape 3.
- 3) On trouve un nouvel état stationnaire (point d'opération), en posant toutes les équations différentielles du modèle non-linéaire égales à zéro et on résout le système d'équations non-linéaires ainsi obtenu par une méthode numérique (pour simplifier cette tâche fastidieuse, on fait appel à une sous-

routine informatique de résolution de systèmes non-linéaires telle que SNSQE [10] qui provient de la librairie NMAS - voir annexe F).

- 4) On désamorce le modèle linéaire et on active le modèle non-linéaire. On sollicite la distance anode-cathode (DAC) avec un échelon d'amplitude de 10% d'une durée de cinq heures; on mémorise les réponses indicielles pour chacune des variables d'état.

Remarque: toutes les procédures informatiques nécessaires pour compléter cette étape sont disponibles dans la version non-linéaire du simulateur.

- 5) On identifie les fonctions de transfert, par l'intermédiaire de la sous-routine FT. Celle-ci identifie les paramètres (gain statique, constante de temps et gain en vitesse) des fonctions de transfert dont les configurations (i.e. les types) ont été déterminées à l'avance.

Remarque: la procédure FT ainsi que les routines qui lui sont rattachées sont disponibles dans la version non-linéaire du simulateur.

- 6) On répète les étapes 4 et 5 en utilisant, cette fois-ci, une sollicitation de - 10% dans l'alimentation en alumine (DMA).

- 7) On obtient le système d'équations différentielles linéaires, en transférant les paramètres identifiés aux étapes 4, 5 et 6 dans la structure suivante:

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{-1}{\tau_{11}} z_1(t) + \frac{K_{11}}{\tau_{11}} dac'(t) \quad (5-112)$$

$$\frac{dz_2}{dt} = 1,000 \times 10^{-6} + Kv_{12} dma'(t) \quad (5-113)$$

$$\frac{dz_3}{dt} = z_4(t) \quad (5-114)$$

$$\frac{dz_4}{dt} = -\frac{2}{\tau_{21}} z_4(t) - \frac{1}{\tau_{21}^2} z_3(t) + \frac{K_{21} dac'(t)}{\tau_{21}^2} \quad (5-115)$$

$$\frac{dz_5}{dt} = 4,444 \times 10^{-6} + Kv_{22} dma'(t) \quad (5-116)$$

$$\frac{dz_6}{dt} = z_7(t) \quad (5-117)$$

$$\frac{dz_7}{dt} = -\frac{2}{\tau_{31}} z_7(t) - \frac{1}{\tau_{31}^2} z_6(t) + \frac{K_{31} dac'(t)}{\tau_{31}^2} \quad (5-118)$$

$$\frac{dz_8}{dt} = \frac{-1}{\tau_{32}} z_8(t) + \frac{K_{32}}{\tau_{32}} dma'(t) \quad (5-119)$$

$$\frac{dz_9}{dt} = -2,222 \times 10^{-9} + Kv_{32} dma'(t) \quad (5-120)$$

$$\frac{dz_{10}}{dt} = \frac{-1}{\tau_{41}} z_{10}(t) + \frac{K_{41}}{\tau_{41}} dac'(t) \quad (5-121)$$

$$\frac{dz_{11}}{dt} = 4,111 \times 10^{-5} + Kv_{41} dac'(t) \quad (5-122)$$

$$\frac{dz_{12}}{dt} = Kv_{42} dma'(t) \quad (5-123)$$

$$\frac{dz_{13}}{dt} = \frac{-1}{\tau_{51}} z_{13}(t) + \frac{K_{51}}{\tau_{51}} dac'(t) \quad (5-124)$$

$$\frac{dz_{14}}{dt} = \frac{-1}{\tau_{52}} z_{14}(t) + \frac{K_{52}}{\tau_{52}} dma'(t) \quad (5-125)$$

$$\frac{dz_{15}}{dt} = -1,944 \times 10^{-5} + Kv_{52} dma'(t) \quad (5-126)$$

$$\frac{dz_{16}}{dt} = \frac{-1}{\tau_{61}} z_{16}(t) + \frac{K_{61}}{\tau_{61}} dac'(t) \quad (5-127)$$

$$\frac{dz_{17}}{dt} = -4,111 \times 10^{-5} + Kv_{61} dac'(t) \quad (5-128)$$

$$\frac{dz_{18}}{dt} = z_{19}(t) \quad (5-129)$$

$$\frac{dz_{19}}{dt} = -\frac{2}{\tau_{62}} z_{19}(t) - \frac{1}{\tau_{62}^2} z_{18}(t) + \frac{K_{62} dma'(t)}{\tau_{62}^2} \quad (5-130)$$

$$\frac{dz_{20}}{dt} = \frac{-1}{\tau_{71}} z_{20}(t) + \frac{K_{71}}{\tau_{71}} dac'(t) \quad (5-131)$$

$$\frac{dz_{21}}{dt} = 4,056 \times 10^{-6} + Kv_{71} dac'(t) \quad (5-132)$$

$$\frac{dz_{22}}{dt} = z_{23}(t) \quad (5-133)$$

$$\frac{dz_{23}}{dt} = -\frac{2}{\tau_{72}} z_{23}(t) - \frac{1}{\tau_{72}^2} z_{22}(t) + \frac{K_{72} dma'(t)}{\tau_{72}^2} \quad (5-134)$$

$$\frac{dz_{24}}{dt} = \frac{-1}{\tau_{91}} z_{24}(t) + \frac{K_{91}}{\tau_{91}} dac'(t) \quad (5-135)$$

$$\frac{dz_{25}}{dt} = \frac{-1}{\tau_{92}} z_{25}(t) + \frac{K_{92}}{\tau_{92}} dma'(t) \quad (5-136)$$

$$\frac{dz_{26}}{dt} = -2,139 \times 10^{-5} + Kv_{92} dma'(t) \quad (5-137)$$

$$\frac{dz_{27}}{dt} = k_5 I \quad (5-138)$$

où  $K_{ij}$  est le gain statique de la fonction de transfert  $h_{ij}$

$\tau_{ij}$  est la constante de temps de la fonction de transfert  $h_{ij}$

$Kv_{ij}$  est le gain en vitesse de la fonction de transfert  $h_{ij}$

Remarque: on constate que les équations différentielles sont de la même forme que celles identifiées à la section 5.2.2

8) De la même façon, on obtient les variables d'état physiques, en transférant les paramètres de couplage entrée-sortie identifiés aux étapes 4, 5 et 6 dans la structure suivante:

$$X_1'(t) = y_1(t) = z_1(t) + z_2(t) + K_{12} dma'(t) \quad (5-139)$$

$$X_2'(t) = y_2(t) = z_3(t) + z_5(t) + K_{22} dma'(t) \quad (5-140)$$

$$C'(t) = y_3(t) = z_6(t) + z_8(t) + z_9(t) \quad (5-76)$$

$$M_1'(t) = y_4(t) = z_{10}(t) + z_{11}(t) + z_{12}(t) \quad (5-77)$$

$$T_1'(t) = y_5(t) = z_{13}(t) + z_{14}(t) + z_{15}(t) \quad (5-78)$$

$$M_2'(t) = y_6(t) = z_{16}(t) + z_{17}(t) + z_{18}(t) \quad (5-79)$$

$$T_2'(t) = y_7(t) = z_{20}(t) + z_{21}(t) + z_{22}(t) \quad (5-80)$$

$$M_3'(t) = y_8(t) = z_{27}(t) \quad (5-110)$$

$$T_3'(t) = y_9(t) = z_{24}(t) + z_{25}(t) + z_{26}(t) \quad (5-82)$$

9) Finalement, on évalue une nouvelle zone d'applicabilité, on amorce le modèle linéaire et on retourne à l'étape 0.

En définitive, on constate qu'un tel algorithme est réalisable et peut jouer un rôle important, dans l'élaboration d'un contrôleur ou d'un estimateur qui fonctionnerait en parallèle avec le procédé. Un logigramme résumant les différentes étapes est présenté à la page suivante.

P.S. : Les étapes inscrites dans le logigramme (figure 5.33) correspondent à celles de l'algorithme mentionné ci-dessus.

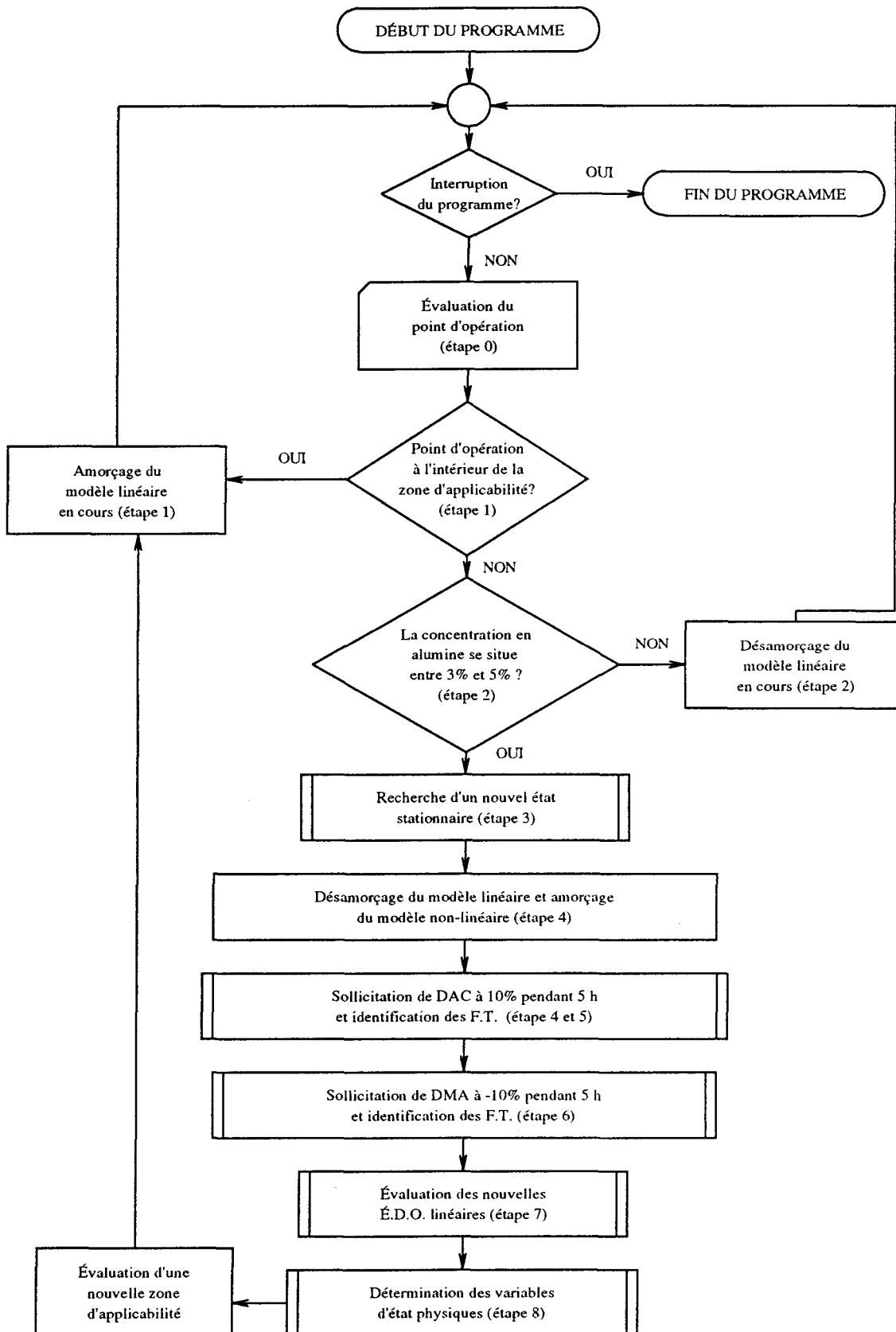


Figure 5.33 Logigramme pour la reconstruction d'un modèle linéaire à partir d'un autre état stationnaire

# CHAPITRE 6

## ANALYSE DYNAMIQUE DU PROCÉDÉ

Dans ce chapitre nous étudions dans un premier temps, les fonctions de transfert identifiées au chapitre précédent, notamment les constantes de temps et l'emplacement des pôles dans le plan complexe, de façon à aborder la question de stabilité. Dans un deuxième temps, nous discutons de la robustesse du système linéaire. On suppose une rétroaction unitaire négative et on calcule les marges de gain et de phase, par l'entremise des diagrammes de Bode.

### 6.1 Les fonctions de transfert

Au chapitre 5, nous avons construit une approximation linéaire du procédé, par l'intermédiaire d'une identification paramétrique des fonctions de transfert du système. Dans ce chapitre, on utilise ces résultats (voir tableau 5.3) dans une optique d'analyse de systèmes, de manière à faire ressortir le rôle des paramètres de ces fonctions de transfert à savoir les gains, les constantes de temps et les pôles.

#### 6.1.1 Les gains statiques et les gains en vitesse

Très peu d'information peut être extraite des gains, car chaque gain est relatif à une variable d'état spécifique soit de par sa nature (température ou masse) ou de par sa grandeur. Il est aberrant de comparer des gains de masses avec des gains de températures. De la même manière, il n'est pas utile de comparer une variable d'état dont la grandeur est de l'ordre de quelques kilogrammes avec une variable d'état qui est de l'ordre des milliers de

kilogrammes. En conséquence, il serait inutile de construire un tableau qui compareraient les gains du système entre eux. Cependant, le signe du gain est une information pertinente, car il indique dans quel sens la variable d'état réagit par rapport à la sollicitation. Le tableau suivant donne le sens de chaque réponse indicelle en fonction des variables de contrôle:

Tableau 6.1 Représentation du sens des réponses indicielles

	DAC	DMA
$X_1$	-	+
$X_2$	-	+
C	+	+
$M_1$	+	+
$T_1$	+	- ; +
$M_2$	-	+
$T_2$	+	-
$M_3$	N/A	N/A
$T_3$	+	- ; +

où + : signifie que la variable d'état varie dans le même sens que la variable de contrôle

- : signifie que la variable d'état varie dans le sens contraire de la variable de contrôle

N/A: ne s'applique pas

À titre d'exemple, on remarque au tableau 6.1 que la variable d'état  $T_1$  (la température du bain) augmente dans le même sens que la distance anode-cathode (DAC). Par contre, lorsque l'on change la sollicitation (i.e. DMA) cette même variable d'état varie dans un premier temps dans le sens contraire à la sollicitation et dans un deuxième temps dans le même sens que la sollicitation.

### 6.1.2 Les constantes de temps

La constante de temps d'un système indique la durée du régime transitoire - i.e. le terme  $e^{-t/\tau}$  de la partie naturelle de la réponse s'élimine lorsque  $t = 3\tau$  à  $5\tau$  [1]. En ce sens, plus la constante de temps est grande, plus le régime transitoire est long et plus la constante de temps est petite, plus le régime transitoire est court. Donc, encore à la lumière des résultats obtenus au chapitre 5 (tableau 5.3), voici les constantes de temps du procédé reliées aux différentes variables d'état et variables de contrôle:

Tableau 6.2 Représentation des constantes de temps  
du procédé exprimées en secondes

	DAC	DMA
X <sub>1</sub>	1600	N/A
X <sub>2</sub>	2500*	N/A
C	2090**	950
M <sub>1</sub>	950	N/A
T <sub>1</sub>	1900	2500
M <sub>2</sub>	950	4425*
T <sub>2</sub>	1900	5655*
M <sub>3</sub>	N/A	N/A
T <sub>3</sub>	1900	2500

\* temps de réponse correspondant à une double constante de temps ( $\zeta=1$ )

\*\* temps de réponse correspondant à deux constantes de temps distinctes ( $\zeta=1,1$ )

On remarque au tableau 6.2, qu'il a trois groupes de constantes de temps, celles qui sont de l'ordre de 1000 secondes (environ 15 minutes), celles de l'ordre de 2000 secondes (environ 30 minutes) et celles qui sont de l'ordre de 5000 secondes (approximativement 1 heure et 20 minutes). Le premier ensemble est constitué de trois constantes de temps qui proviennent des approximations de délais par Padé. Le deuxième groupe comporte dix constantes de temps qui proviennent directement des réponses indicielles à l'exception d'une seule constante qui provient d'une approximation par Padé.

Le dernier ensemble comporte quatre constantes de temps qui proviennent uniquement des réponses indicielles. Celles-ci sont de plus de deux fois plus grandes que celles du deuxième groupe, car elles sont associées à la masse et à la température de la gelée, lorsque ces dernières sont sollicitées par l'alimentation en alumine. On se rappelle que dans la réalité la gelée agit comme le tampon thermique de la cuve. Finalement, en faisant abstraction des délais, on remarque de façon générale que ce procédé possède deux constantes de temps c'est-à-dire celle de 2000 secondes et celle de 5000 secondes.

### 6.1.3 L'emplacement des pôles et la stabilité

On se rappelle qu'un pôle est une valeur de  $s$  qui fait que le dénominateur d'une fonction de transfert s'annule [1]. L'emplacement de ces pôles dans le plan complexe (figure 6.1), donne deux informations pertinentes sur le système à savoir sa dynamique et sa stabilité. En conséquence, à partir d'une simple analyse de pôles, il est possible de classifier le procédé. Étant donné que notre modèle est découplé, on retrouve les pôles du système sur la diagonale principale de la matrice d'évolution dynamique. Donc, nous avons vingt-sept pôles (l'ordre du modèle et la dimension de la matrice A) qui se répartissent de la façon suivante: dix se situent à l'origine, trois se situent à  $-0,18 \times 10^{-3}$  et un à  $-0,23 \times 10^{-3}$ , trois à  $-0,40 \times 10^{-3}$ , deux à  $-0,48 \times 10^{-3}$ , quatre à  $-0,53 \times 10^{-3}$ , deux à  $-0,63 \times 10^{-3}$  et deux à  $-1,05 \times 10^{-3}$ . La figure 6.1 donne l'emplacement de chacun de ces pôles dans le plan complexe.

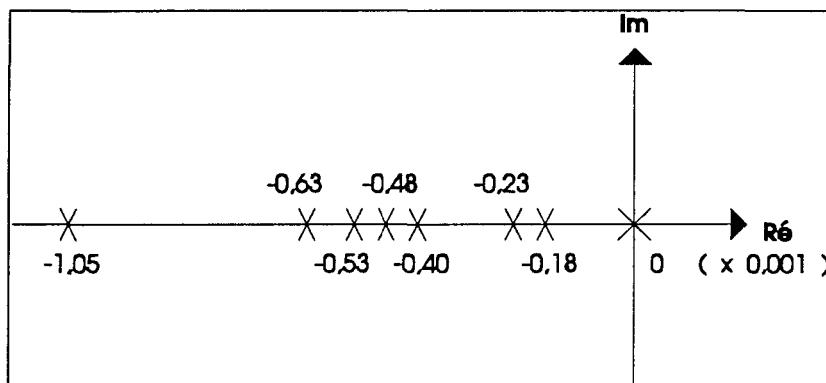


Figure 6.1 Emplacement des pôles dans le plan complexe

Le modèle est composé de pôles réels négatifs et de pôles à l'origine, ce qui signifie que selon le modèle linéaire le système est stable. Ceci est conforme à la réalité. Cependant, il faut garder à l'esprit que cette analyse est basée sur un modèle linéarisé aux alentours d'un point d'opération et par le fait même, elle ne demeure valable que si on se situe à l'intérieur des limites d'applicabilité du modèle linéaire d'ordre vingt-sept (section 5.2.4).

## 6.2 La robustesse du système en boucle fermée

Cette section se scinde en deux parties. Dans un premier temps, on présente la réponse en fréquence des fonctions de transfert du système, par l'intermédiaire de diagrammes de Bode. Dans un deuxième temps, on fait l'hypothèse que le système fonctionne en système asservi à rétroaction unitaire négative, de manière à calculer la marge qui nous sépare du régime d'auto-oscillation. Pour ce faire, on utilise les diagrammes de Bode, pour calculer les marges de gain et phase.

### 6.2.1 Les diagrammes de Bode

Le diagramme de Bode représente graphiquement la réponse en fréquence de l'amplitude et de la phase d'une fonction de transfert à une sollicitation sinusoïdale. Dans le cas du procédé étudié, les entrées se manifestent généralement sous la forme d'un échelon ou d'une rampe. Nonobstant cette restriction, on utilise les diagrammes de Bode, de manière à déduire les marges de gain et de phase. Ces dernières sont les indices de robustesse du système en boucle fermée, à savoir la marge de sécurité qui nous sépare du régime auto-oscillant. Les figures qui suivent donnent les diagrammes de Bode (tracées par l'intermédiaire de MAT-LAB) des fonctions de transfert décrites au tableau 5.3. Noter que les transmittances nulles  $h_{81}$  et  $h_{82}$  ne sont pas représentées sous forme graphique de manière à alléger la lecture des diagrammes.

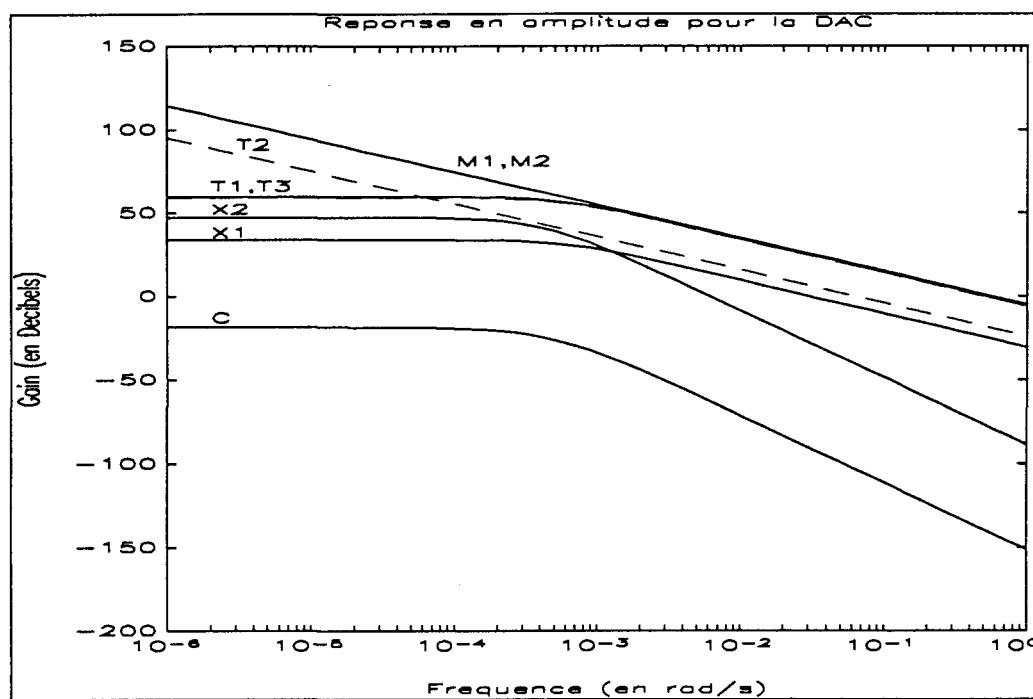


Figure 6.2 Diagramme de Bode en amplitude en réponse à un changement dans la variable de contrôle DAC

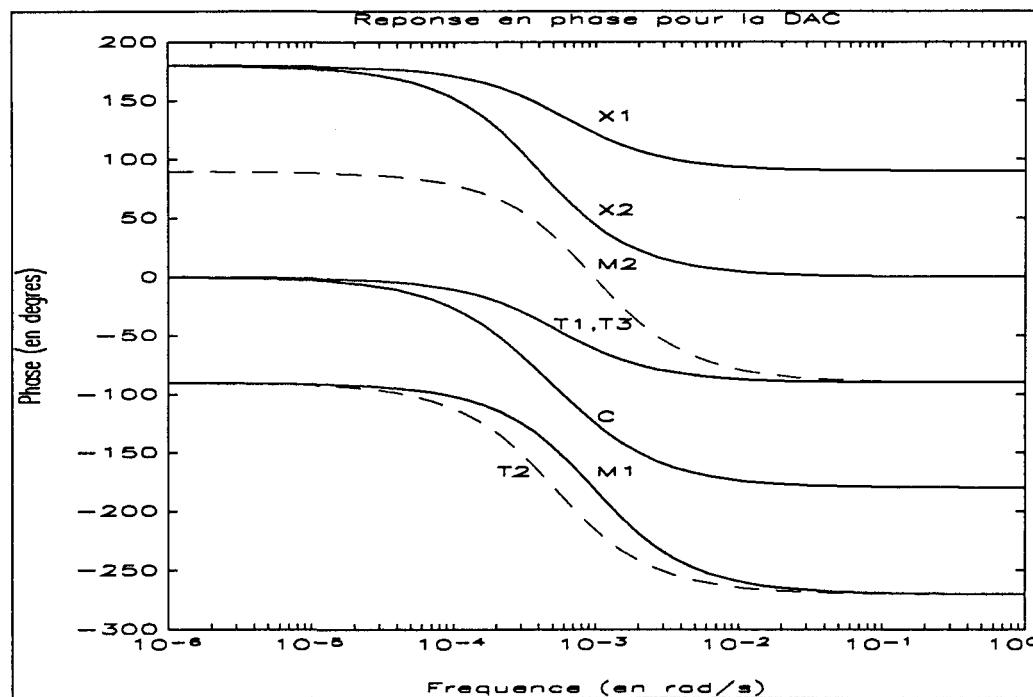


Figure 6.3 Diagramme de Bode en phase en réponse à un changement dans la variable de contrôle DAC

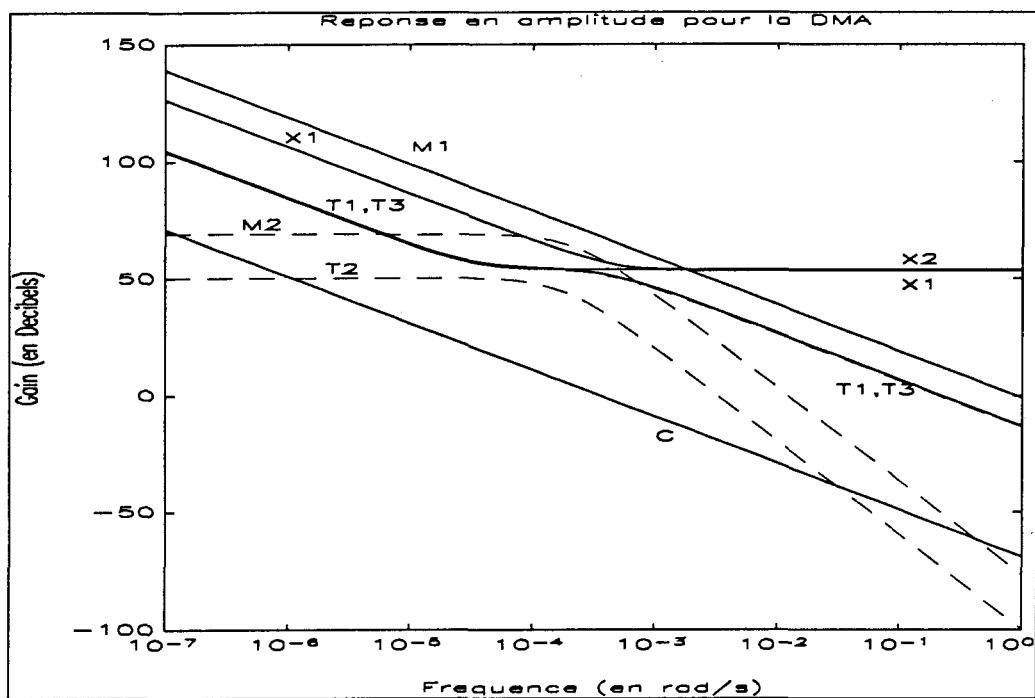


Figure 6.4 Diagramme de Bode en amplitude en réponse à un changement dans la variable de contrôle DMA

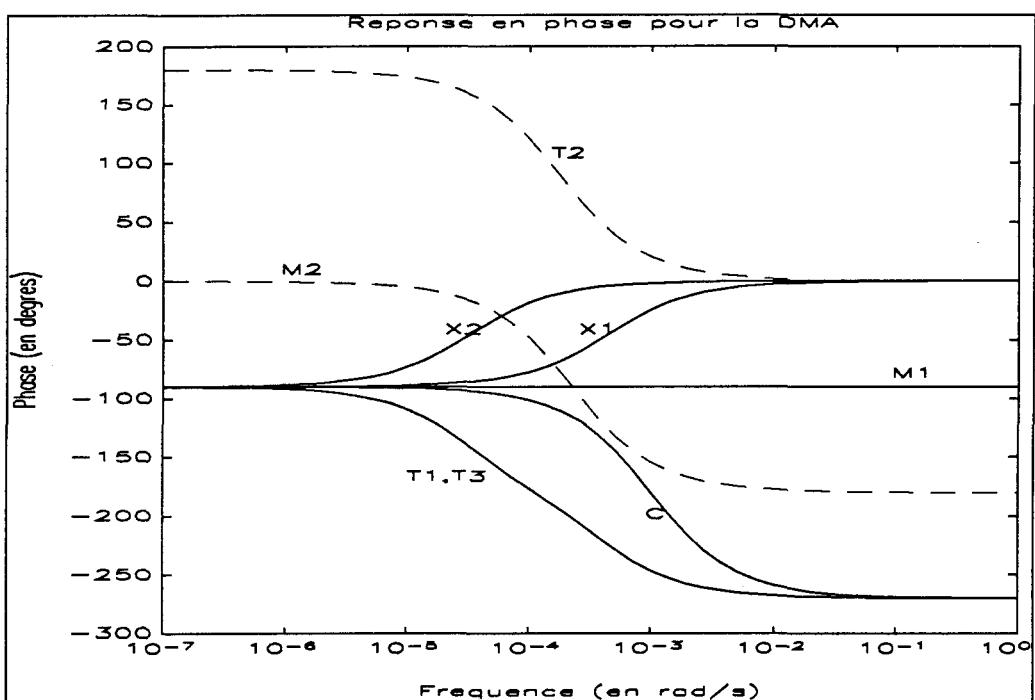


Figure 6.5 Diagramme de Bode en phase en réponse à un changement dans la variable de contrôle DMA

## 6.2.2 Les marges de gain et de phase

Comme mentionné antérieurement, les marges de gain et de phase constituent la marge de sécurité qui nous sépare du régime d'auto-oscillation, lorsque le système est en rétroaction unitaire négative. Plus spécifiquement, la marge de gain se définit comme étant le gain nécessaire pour faire monter l'amplitude à la valeur unitaire (0 dB), lorsque la phase de la fonction de transfert en boucle ouverte est de -180 degrés (si K>0) ou de 0 degré (si K<0).

Tableau 6.3 Représentation des marges de gain et de phase du système

Fonctions de transfert	Marge de gain (dB)	Marge de phase (degrés)	Fonctions de transfert	Marge de gain (dB)	Marge de phase (degrés)
$h_{11} = \frac{X_1'(s)}{DAC'(s)}$	infini	90	$h_{12} = \frac{X_1'(s)}{DMA'(s)}$	infini	N/A
$h_{21} = \frac{X_2'(s)}{DAC'(s)}$	infini	2	$h_{22} = \frac{X_2'(s)}{DMA'(s)}$	infini	N/A
$h_{31} = \frac{C'(s)}{DAC'(s)}$	infini	N/A	$h_{32} = \frac{C'(s)}{DMA'(s)}$	12	55
$h_{41} = \frac{M_1'(s)}{DAC'(s)}$	-54	-90	$h_{42} = \frac{M_1'(s)}{DMA'(s)}$	infini	90
$h_{51} = \frac{T_1'(s)}{DAC'(s)}$	infini	90	$h_{52} = \frac{T_1'(s)}{DMA'(s)}$	-60	-90
$h_{61} = \frac{M_2'(s)}{DAC'(s)}$	-54	-90	$h_{62} = \frac{M_2'(s)}{DMA'(s)}$	infini	2
$h_{71} = \frac{T_2'(s)}{DAC'(s)}$	-40	-92	$h_{72} = \frac{T_2'(s)}{DMA'(s)}$	infini	3
$h_{81} = \frac{M_3'(s)}{DAC'(s)}$	N/A	N/A	$h_{82} = \frac{M_3'(s)}{DMA'(s)}$	N/A	N/A
$h_{91} = \frac{T_3'(s)}{DAC'(s)}$	infini	90	$h_{92} = \frac{T_3'(s)}{DMA'(s)}$	-60	-90

où N/A : ne s'applique pas

De la même façon, la marge de phase se définit comme étant le déphasage nécessaire pour compléter une phase de -180 degrés (si  $K>0$ ) ou de 0 degré (si  $K<0$ ), lorsque l'amplitude de la fonction de transfert en boucle ouverte est unitaire.

On voit au tableau 6.3 les marges de gain et de phase identifiées, par l'entremise des diagrammes de Bode. À la lumière de ces résultats, on remarque que le système linéarisé est instable (génération de pôles positifs pour les F.T.  $h_{41}$ ,  $h_{61}$ ,  $h_{71}$ ,  $h_{52}$  et  $h_{92}$ ), lorsqu'il fonctionne en système asservi à rétroaction unitaire négative. Par exemple, la fonction de transfert  $h_{41}$  en boucle ouverte possède un pôle à l'origine et un à -0,00105 (stabilité). Cependant, il y a création de deux pôles positif (instabilité) lorsqu'on ajoute la rétroaction:

$$\text{En boucle ouverte: } \frac{-496,5 s + 0,53}{950 s (s + 0,00105)} \quad \text{pôles} = 0 \text{ et } -0,00105$$

$$\text{En boucle fermée: } \frac{-496,5 s + 0,53}{950 (s - 0,52051)(s - 0,00107)} \quad \text{pôles} = 0,52051 \text{ et } 0,00107$$

En effet, si on analyse cette fonction de transfert par le critère de Nyquist, on remarque que la zone de transfert englobe le point (-1,0) (puisque  $K>0$ ), ce qui confirme l'apparition des pôles positifs. Par ailleurs, plusieurs marges de gain ou de phase sont négatives ce qui indique une instabilité en boucle fermée. On remarque que dans la plupart des cas ces dernières sont des transmittances avec délai (on se rappelle qu'au chapitre 5 nous avons amélioré la précision du modèle linéaire en tenant compte des délais, par approximations de Padé). En effet, à l'origine la fonction de transfert mentionnée comme exemple ci-dessus avait la forme d'un intégrateur pur (stable en boucle ouverte ou fermée). L'ajout du délai a altéré cette dernière pour devenir premier ordre + intégrale ce qui a entraîné l'instabilité en boucle fermée unitaire négative. Cependant, nous affirmons que l'instabilité a été engendrée par le délai pur (pour les F.T.  $h_{41}$ ,  $h_{61}$  et  $h_{71}$ ) et non par son approximation linéaire. Par exemple, la marge de gain de la fonction de

transfert mentionnée ci-dessus est de -54 dB pour le délai linéarisé comparativement à -56 dB pour le délai pur. Dans les deux cas  $h_{41}$  est instable en boucle fermée unitaire négative. Un exercice similaire pourrait être réalisé dans des travaux ultérieurs, pour démontrer si l'instabilité provient du modèle non-linéaire ou du modèle linéaire avec délais purs. Par ailleurs, les fonctions de transfert  $h_{52}$  et  $h_{92}$  qui ne possèdent aucun délai sont elles aussi instables, mais parce qu'elles engendrent des pôles positifs en boucle fermée unitaire négative.

Toutefois, les fonctions de transfert qui possèdent des marges de gain et de phase positives sont stables et celles qui possèdent des marges de gain ou de phase négatives peuvent être corrigées par l'effet d'un contrôleur proportionnel. De plus, certaines transmittances ne possèdent pas de marges de gain (N/A), ce qui signifie que leur phase n'atteint jamais -180 degrés (si  $K>0$ ) ou 0 degré (si  $K<0$ ). De la même manière, certaines transmittances ne possèdent pas de marges de phase (N/A) car leur amplitude ne pourra jamais atteindre la valeur unitaire lorsque la phase est de -180 degrés ou de 0 degré.

En définitive, on conclut que le système linéarisé est stable en boucle ouverte mais instable en boucle fermée avec rétroaction unitaire négative. Cependant, il en demeure que le système en boucle fermée pourrait être stabilisé, par l'application d'une commande adéquate en cascade avec le procédé.

# CHAPITRE 7

## CONCLUSION ET TRAVAUX FUTURS SUGGÉRÉS

La présente étude a permis de développer un modèle linéaire d'ordre dix-neuf, pour étudier la dynamique du procédé de l'électrolyse de l'aluminium. Le modèle a été validé à partir du modèle Tikasz et al. [17] et démontre une bonne représentativité, sous des conditions normales d'opération.

Le point de départ de ce projet de recherche a été le simulateur numérique présenté au Chapitre 4, qui agit comme substitut du procédé réel. Non seulement il a été utilisé dans la résolution des équations différentielles, il a aussi servi comme outil essentiel dans l'approximation du modèle non-linéaire.

La méthode d'identification paramétrique des fonctions de transfert a été utilisée pour générer le modèle linéaire. Elle garantit la stabilité du système et si les réponses indicielles sont toutes du premier ou du deuxième ordre, on en déduit facilement un système d'équations différentielles découplées. Cependant, de manière à obtenir un modèle linéaire adéquat, nous avons été contraints d'utiliser certains artifices mathématiques. Dans un premier temps, nous avons estimé les délais associés à certaines fonctions de transfert par Padé 1/1 étant donné leur grande amplitude. Dans un deuxième temps, on a ajouté des constantes à certaines équations différentielles, de manière à tenir compte des coefficients variables dans le temps tels que les aires d'échange de chaleur qui augmentent en fonction de la production de métal. En ce sens il a été démontré, *a posteriori*, qu'il était tout à fait légitime d'idéaliser le procédé (alimentation et retrait de métal continu) pour des fins d'identification, et de revenir aux détails réels du procédé par la suite en tenant compte de la production de métal.

Par ailleurs, les limites d'applicabilité du modèle linéaire ont été établies, à partir du graphique de la résistance en fonction de la concentration en alumine. En abscisse, la limite d'applicabilité se situe entre 3% et 5%, et en ordonnée entre les courbes DAC-10% et DAC+10%. Par la suite, la validation a été réalisée en deux phases. D'une part, la validation quantitative a été effectuée, par le calcul de l'erreur relative séparant le modèle linéaire du modèle non-linéaire initial, pour des sollicitations indépendantes d'amplitude de 10% et d'une durée de cinq heures. Les erreurs relatives calculées sont de l'ordre de 3%. D'autre part, la validation qualitative a été réalisée en activant un algorithme de contrôle pour garder le procédé à l'intérieur d'une plage de concentration d'alumine, de manière à vérifier l'impact de la superposition des variables de contrôle ainsi que la réaction du modèle lorsqu'il se situe à l'extérieur de la zone d'applicabilité. Les variables dont l'accès est possible dans la réalité ont été vérifiées, à savoir la concentration en alumine dans le bain ( $C$ ), la résistance de la cuve ( $R$ ) et la température du bain ( $T_1$ ). Elles réagissent toutes comme celles du modèle non-linéaire, même lorsqu'on sort temporairement des limites d'applicabilité. Par ailleurs, étant donné que le modèle linéaire est découplé, nous avons réduit son ordre à dix, pour former un autre modèle linéaire ne comprenant que les variables d'importance capitale pour le procédé soit  $C, R$  et  $T_1$ . Ce modèle de contrôle est tout aussi valable que le précédent, mais de dimension réduite et d'une grande simplicité.

Dans un autre ordre d'idées, nous pouvons faire les remarques suivantes, en ce qui concerne l'analyse dynamique du système:

- on retrouve deux formes de réponses indicielles: l'exponentielle (avec ou sans point d'inflexion) pour les fonctions de transfert du deuxième ou du premier ordre, et la rampe pour les fonctions de transfert de type intégrateur;
- les constantes de temps peuvent être classées en trois groupes, de l'ordre de 15 minutes, 30 minutes et 1 heure et 20 minutes respectivement, le troisième groupe étant associé à l'inertie de la gelée lorsqu'elle est sollicitée par l'alimentation en alumine (DMA);

- le système linéarisé est stable en boucle ouverte, car les pôles sont situés à l'origine ou sur la partie négative de l'axe réel du plan complexe;
- le système linéarisé devient instable lorsqu'il subit l'effet d'une boucle fermée avec rétroaction unitaire sans compensation.

Pour faire suite aux travaux de recherche rapportés dans ce mémoire, nous suggérons les étapes suivantes:

- 1) Combiner le modèle non-linéaire et le modèle linéaire dans un simulateur unique, de manière à unifier et structurer les manipulations informatiques.
- 2) Informatiser, en son entier, le processus d'identification du modèle linéaire. Pour ce faire, on suggère de suivre les étapes 4 à 9 de l'algorithme élaboré, à la section 5.3. On se rappelle que ce dernier pourrait être utilisé dans une optique de contrôle ou d'estimation du procédé.
- 3) Adapter les paramètres du simulateur à une catégorie de cuve industrielle et valider les modèles (non-linéaire et linéaire), à partir de données réelles.
- 4) Si l'étape 3 s'avère concluante, implanter l'algorithme de la section 5.3, en portant une réflexion sur le choix d'un type de commande adapté aux réalités du procédé.

Par ailleurs, il serait intéressant de pousser davantage l'analyse dynamique du procédé. Ainsi, la détermination de l'observabilité et de la contrôlabilité du système pourrait s'inscrire à la suite des travaux complétés au Chapitre 6.

## ANNEXE A

### DÉTAILS DE L'IDENTIFICATION DES FONCTIONS DE TRANSFERT

On trouve dans cette annexe, les calculs détaillés portant sur l'identification des fonctions de transfert avec délais du tableau 5.1. Quelques exemples ont été présentés dans le texte à la section 5.2. Pour fins de référence, cette annexe donne l'identification de toutes les fonctions de transfert.

$$1) \quad h_{11} = \frac{X_1'(s)}{DAC'(s)} = \frac{K e^{-\theta s}}{\tau s + 1}$$

$$\Delta X_1 = -0,2140 \text{ kg}$$

$$\Delta DAC = 0,0044 \text{ m}$$

$$t_{35} = 1170 \text{ s}$$

$$t_{85} = 3600 \text{ s}$$

$$K = \frac{\Delta X_1}{\Delta DAC} = -0,92 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$$

$$\tau = 0,67 (t_{85} - t_{35}) \quad (5-11)$$

$$= 0,67 (3600 - 1170) \text{ s} = 1600 \text{ s}$$

$$\theta = 1,3 t_{35} - 0,29 t_{85} \quad (5-12)$$

$$= (1,3 \times 1170 \text{ s}) - (0,29 \times 3600 \text{ s}) = 480 \text{ s}$$

$$h_{11} = \frac{X_1'(s)}{DAC'(s)} = \frac{-49 e^{-480s}}{1600 s + 1}$$

$$2) \quad h_{21} = \frac{X_2'(s)}{DAC'(s)} = \frac{K}{\tau^2 s^2 + 2 \tau \zeta s + 1}$$

$$\Delta X_2 = -1,0120 \text{ kg}$$

$$\Delta DAC = 0,0044 \text{ m}$$

$$t_{60} = 5000 \text{ s}$$

$$K = \frac{\Delta X_2}{\Delta DAC} = -230 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$$

On pose  $\zeta = 1$  donc d'après la méthode de Smith [15]:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{t_{60}}{2} \\ &= \frac{5000}{2} \text{ s} = 2500 \text{ s} \end{aligned} \tag{5-14}$$

$$h_{21} = \frac{X_2'(s)}{DAC'(s)} = \frac{-230}{0,63 \times 10^7 s^2 + 5000 s + 1}$$

$$3) \quad h_{31} = \frac{C'(s)}{DAC'(s)} = \frac{K}{\tau^2 s^2 + 2 \tau \zeta s + 1}$$

$$\Delta C = 0,00053 \text{ fraction massique}$$

$$\Delta DAC = 0,0044 \text{ m}$$

$$t_{60} = 4440 \text{ s}$$

$$K = \frac{\Delta C}{\Delta DAC} = 0,12 \frac{\text{fraction massique}}{\text{m}}$$

Pour une meilleure approximation, on pose ici  $\zeta = 1,1$  et toujours d'après la méthode de Smith [15] on trouve:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{t_{60}}{2,1} \\ &= \frac{4440}{2,1} \text{ s} = 2100 \text{ s} \end{aligned} \tag{5-14a}$$

$$h_{31} = \frac{C'(s)}{DAC'(s)} = \frac{0,12}{0,44 \times 10^7 s^2 + 4600 s + 1}$$

$$4) \quad h_{41} = \frac{M_1'(s)}{DAC'(s)} = \frac{K_v e^{-\theta s}}{s}$$

$$\Delta M_1 = 21 \text{ kg}$$

$$\Delta t = 9000 \text{ s}$$

$$\Delta DAC = 0,0044 \text{ m}$$

$$x_0 = 2240,0 \text{ kg}$$

$$t_1 = 14400 \text{ s}$$

$$x_1 = 2244,71 \text{ kg}$$

$$K_v = \frac{\Delta M_1 / \Delta t}{\Delta DAC} = \frac{21 \text{ kg} / 9000 \text{ s}}{0,0044 \text{ m}} = 0,53 \frac{\text{kg/s}}{\text{m}}$$

$$m = \frac{\Delta M_1}{\Delta t} = K_v \times \Delta DAC = 0,53 \frac{\text{kg/s}}{\text{m}} \times 0,0044 \text{ m} = 0,00233 \text{ kg/s}$$

$$b = x_1 - mt_1 = 2244,71 \text{ kg} - (0,00233 \text{ kg/s} \times 14400 \text{ s}) = 2211,15 \text{ kg}$$

$$t_o = \frac{x_0 - b}{m} = \frac{2224,0 \text{ kg} - 2211,15 \text{ kg}}{0,00233 \text{ kg/s}} = 5500 \text{ s}$$

$$\theta = t_o - 3600 \text{ s} = 5500 \text{ s} - 3600 \text{ s} = 1900 \text{ s}$$

$$h_{41} = \frac{M_1'(s)}{DAC'(s)} = \frac{0,53 e^{-1900s}}{s}$$

$$5) \quad h_{51} = \frac{T_1'(s)}{DAC'(s)} = \frac{K e^{-\theta s}}{\tau s + 1}$$

$$\Delta T_1 = 4,31 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\Delta DAC = 0,0044 \text{ m}$$

$$t_{35} = 810 \text{ s}$$

$$t_{85} = 3630 \text{ s}$$

$$K = \frac{\Delta T_1}{\Delta DAC} = 980 \frac{\text{°C}}{\text{m}}$$

$$\tau = 0,67 (t_{85} - t_{35})$$

$$= 0,67 (3630 - 810) \text{ s} = 1900 \text{ s}$$
(5-11)

$$\theta = 1,3 t_{35} - 0,29 t_{85}$$

$$= (1,3 \times 810 \text{ s}) - (0,29 \times 3630 \text{ s}) = 0,3 \text{ s}$$
(5-12)

$$h_{51} = \frac{T_1'(s)}{DAC'(s)} = \frac{980 e^{-0,3s}}{1900 s + 1}$$

$$6) \quad h_{61} = \frac{M_2'(s)}{DAC'(s)} = \frac{K_v e^{-\theta s}}{s}$$

$$\Delta M_2 = -21 \text{ kg}$$

$$\Delta t = 9000 \text{ s}$$

$$\Delta DAC = 0,0044 \text{ m}$$

$$x_0 = 1275,98 \text{ kg}$$

$$t_1 = 14400 \text{ s}$$

$$x_1 = 1255,29 \text{ kg}$$

$$K_v = \frac{\Delta M_2 / \Delta t}{\Delta DAC} = \frac{-21 \text{ kg} / 9000 \text{ s}}{0,0044 \text{ m}} = -0,53 \frac{\text{kg/s}}{\text{m}}$$

$$m = \frac{\Delta M_2}{\Delta t} = K_v \cdot \Delta DAC = -0,53 \frac{\text{kg/s}}{\text{m}} \times 0,0044 \text{ m} = -0,00233 \text{ kg/s}$$

$$b = x_1 - mt_1 = 1255,29 \text{ kg} - (-0,00233 \text{ kg/s} \times 14400 \text{ s}) = 1288,8 \text{ kg}$$

$$t_0 = \frac{x_0 - b}{m} = \frac{1275,98 \text{ kg} - 1288,8 \text{ kg}}{-0,00233 \text{ kg/s}} = 5500 \text{ s}$$

$$\theta = t_0 - 3600 \text{ s} = 5500 \text{ s} - 3600 \text{ s} = 1900 \text{ s}$$

$$h_{61} = \frac{M_2'(s)}{DAC'(s)} = \frac{-0,53 e^{-1900s}}{s}$$

$$7) \quad h_{71} = \frac{T_2'(s)}{DAC'(s)} = \frac{K_v e^{-\theta s}}{s}$$

$$\Delta T_2 = 2,30 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\Delta t = 9000 \text{ s}$$

$$\Delta DAC = 0,0044 \text{ m}$$

$$x_0 = 712,99 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$t_1 = 14400 \text{ s}$$

$$x_1 = 714,81 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$K_v = \frac{\Delta T_2 / \Delta t}{\Delta DAC} = \frac{2,30 \text{ } ^\circ\text{C} / 9000 \text{ s}}{0,0044 \text{ m}} = 0,058 \frac{\text{ } ^\circ\text{C/s}}{\text{m}}$$

$$m = \frac{\Delta T_2}{\Delta t} = K_v \cdot \Delta DAC = 0,058 \frac{\text{kg/s}}{\text{m}} \times 0,0044 \text{ m} = 0,00026 \text{ } ^\circ\text{C/s}$$

$$b = x_1 - mt_1 = 714,81 \text{ } ^\circ\text{C} - (0,00026 \text{ } ^\circ\text{C/s} \times 14400 \text{ s}) = 711,07 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$t_o = \frac{x_0 - b}{m} = \frac{712,99 \text{ } ^\circ\text{C} - 711,07 \text{ } ^\circ\text{C}}{0,00026 \text{ } ^\circ\text{C/s}} = 7400 \text{ s}$$

$$\theta = t_o - 3600 \text{ s} = 7400 \text{ s} - 3600 \text{ s} = 3800 \text{ s}$$

$$h_{71} = \frac{T_2'(s)}{DAC'(s)} = \frac{0,058 e^{-3800s}}{s}$$

$$8) \quad h_{81} = \frac{M_3'(s)}{DAC'(s)} = 0$$

$$9) \quad h_{91} = \frac{T_3'(s)}{DAC'(s)} = \frac{K e^{-\theta s}}{\tau s + 1}$$

$$\Delta T_3 = 4,09 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\Delta DAC = 0,0044 \text{ m}$$

$$t_{35} = 930 \text{ s}$$

$$t_{85} = 3750 \text{ s}$$

$$K = \frac{\Delta T_3}{\Delta DAC} = 930 \frac{^\circ\text{C}}{\text{m}}$$

$$\tau = 0,67 (t_{85} - t_{35}) \quad (5-11)$$

$$= 0,67 (3750 - 930) \text{ s} = 1900 \text{ s}$$

$$\theta = 1,3 t_{35} - 0,29 t_{85} \quad (5-12)$$

$$= (1,3 \times 930 \text{ s}) - (0,29 \times 3750 \text{ s}) = 120 \text{ s}$$

$$h_{91} = \frac{T_3'(s)}{DAC'(s)} = \frac{930 e^{-120s}}{1900 s + 1}$$

$$10) \quad h_{12} = \frac{X_1'(s)}{DMA'(s)} = K + \frac{K_v}{s}$$

$$\Delta X_{11} = -0,61598 \text{ kg}$$

$$\Delta X_{12} = -0,1838 \text{ kg}$$

$$\Delta DMA = -0,0012404 \text{ kg/s}$$

$$\Delta t = 9000 \text{ s}$$

$$K = \frac{\Delta X_{11}}{\Delta DMA} = 496,60 \text{ s}$$

$$K_v = \frac{\Delta X_{12}/\Delta t}{\Delta DMA} = 0,01646$$

$$h_{12} = \frac{X_1'(s)}{DMA'(s)} = 496,60 + \frac{0,01646}{s}$$

$$11) h_{22} = \frac{X_2'(s)}{DMA'(s)} = K + \frac{K_v}{s}$$

$$\Delta X_{21} = -0,57480 \text{ kg}$$

$$\Delta X_{22} = -2,325 \text{ kg}$$

$$\Delta DMA = -0,0012404 \text{ kg/s}$$

$$\Delta t = 9000 \text{ s}$$

$$K = \frac{\Delta X_{21}}{\Delta DMA} = 463,40 \text{ s}$$

$$K_v = \frac{\Delta X_{22}/\Delta t}{\Delta DMA} = 0,2083$$

$$h_{22} = \frac{X_2'(s)}{DMA'(s)} = 463,40 + \frac{0,2083}{s}$$

$$12) h_{32} = \frac{C'(s)}{DMA'(s)} = \frac{K_v e^{-\theta s}}{s}$$

$$\Delta C = -0,003920 \text{ fraction massique}$$

$$\Delta DMA = -0,0012404 \text{ kg/s}$$

$$\Delta t = 9000 \text{ s}$$

$$x_0 = 0,04 \text{ fraction massique}$$

$$t_1 = 14400 \text{ s}$$

$$x_1 = 0,03614 \text{ fraction massique}$$

$$K_v = \frac{\Delta C / \Delta t}{\Delta DMA} = 0,3507 \times 10^{-3} \frac{\text{fraction massique}}{\text{kg}}$$

$$m = \frac{\Delta C}{\Delta t} = K_v \cdot \Delta DMA = -4,35 \times 10^{-7} \frac{\text{fraction massique}}{\text{s}}$$

$$b = x_1 - mt_1 = 0,0424 \text{ fraction massique}$$

$$t_0 = \frac{x_0 - b}{m} = 5500 \text{ s}$$

$$\theta = t_0 - 3600 \text{ s} = 1900 \text{ s}$$

$$h_{32} = \frac{C(s)}{DMA'(s)} = \frac{0,3507 \times 10^{-3} e^{-1900s}}{s}$$

$$13) \quad h_{42} = \frac{M_1'(s)}{DMA'(s)} = \frac{K_v e^{-\theta s}}{s}$$

$$\Delta M_1 = -9,866 \text{ kg}$$

$$\Delta t = 9000 \text{ s}$$

$$\Delta DMA = -0,0012404 \text{ kg/s}$$

$$x_0 = 2224,0 \text{ kg}$$

$$t_1 = 14400 \text{ s}$$

$$x_1 = 2213,3 \text{ kg}$$

$$K_v = \frac{\Delta M_1 / \Delta t}{\Delta DMA} = 0,8838$$

$$m = \frac{\Delta M_1}{\Delta t} = K_v \cdot \Delta DMA = -0,001096 \text{ kg/s}$$

$$b = x_1 - mt_1 = 2229,0 \text{ kg}$$

$$t_0 = \frac{x_0 - b}{m} = 4550 \text{ s}$$

$$\theta = t_0 - 3600 \text{ s} = 950 \text{ s}$$

$$h_{42} = \frac{M_1'(s)}{DMA'(s)} = \frac{0,8838 e^{-950s}}{s}$$

$$14) \quad h_{52} = \frac{T_1'(s)}{DMA'(s)} = \frac{K e^{-\theta s}}{\tau s + 1} + \frac{K_v}{s}$$

$$\Delta T_{11} = 0,7237 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\Delta T_{12} = -0,1541 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\Delta t = 7200 \text{ s}$$

$$\Delta DMA = -0,0012404 \text{ kg/s}$$

$$t_{35} = 1260 \text{ s}$$

$$t_{85} = 4965 \text{ s}$$

$$K = \frac{\Delta T_{11}}{\Delta DMA} = -583,42 \frac{{}^\circ\text{C}}{\text{kg/s}}$$

$$\tau = 0,67 (t_{85} - t_{35}) \quad (5-11)$$

$$= 0,67 (4965 - 1260) \text{ s} = 2500 \text{ s}$$

$$\theta = 1,3 t_{35} - 0,29 t_{85} \quad (5-12)$$

$$= (1,3 \times 1260 \text{ s}) - (0,29 \times 4965 \text{ s}) = 200 \text{ s}$$

$$K_v = \frac{\Delta T_{12}/\Delta t}{\Delta DMA} = 0,01725 \text{ } ^\circ\text{C/kg}$$

$$h_{52} = \frac{T_1'(s)}{DMA'(s)} = \frac{-583,42 e^{-200s}}{2500 s + 1} + \frac{0,01725}{s}$$

$$15) \quad h_{62} = \frac{M_2'(s)}{DMA'(s)} = \frac{K}{\tau^2 s^2 + 2 \tau \zeta s + 1}$$

$$\Delta M_2 = -3,56 \text{ kg}$$

$$\Delta \text{DMA} = -0,0012404 \text{ kg/s}$$

$$t_{60} = 8850 \text{ s}$$

$$K = \frac{\Delta M_2}{\Delta \text{DMA}} = 2870,6 \text{ s}$$

On pose  $\zeta = 1$  donc d'après la méthode de Smith [15]:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{t_{60}}{2} \\ &= \frac{8850}{2} \text{ s} = 4425 \text{ s} \end{aligned} \tag{5-14}$$

$$h_{62} = \frac{M_2'(s)}{\text{DMA}'(s)} = \frac{2870,6}{0,1958 \times 10^8 \text{ s}^2 + 8850 \text{ s} + 1}$$

$$16) \quad h_{72} = \frac{T_2'(s)}{\text{DMA}'(s)} = \frac{K}{\tau^2 \text{ s}^2 + 2 \tau \zeta \text{ s} + 1}$$

$$\Delta T_2 = 0,41 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$\Delta \text{DMA} = -0,0012404 \text{ kg/s}$$

$$t_{60} = 11310 \text{ s}$$

$$K = \frac{\Delta T_2}{\Delta \text{DMA}} = -332,36 \frac{{}^{\circ}\text{C}}{\text{kg/s}}$$

On pose  $\zeta = 1$  donc d'après la méthode de Smith [15]:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{t_{60}}{2} \\ &= \frac{11310}{2} \text{ s} = 5655 \text{ s} \end{aligned} \tag{5-14}$$

$$h_{72} = \frac{T_2'(s)}{DMA'(s)} = \frac{-332,36}{0,3198 \times 10^8 s^2 + 11310 s + 1}$$

$$17) \quad h_{82} = \frac{M_3'(s)}{DMA'(s)} = 0$$

$$18) \quad h_{92} = \frac{T_3'(s)}{DMA'(s)} = \frac{K e^{-\theta s}}{\tau s + 1} + \frac{K_v}{s}$$

$$\Delta T_{31} = 0,6864 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\Delta T_{32} = -0,1450 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\Delta t = 7200 \text{ s}$$

$$\Delta DMA = -0,0012404 \text{ kg/s}$$

$$t_{35} = 1365 \text{ s}$$

$$t_{85} = 5070 \text{ s}$$

$$K = \frac{\Delta T_{31}}{\Delta DMA} = -553,37 \frac{^\circ\text{C}}{\text{kg/s}}$$

$$\tau = 0,67 (t_{85} - t_{35}) \quad (5-11)$$

$$= 0,67 (5070 - 1365) \text{ s} = 2500 \text{ s}$$

$$\theta = 1,3 t_{35} - 0,29 t_{85} \quad (5-12)$$

$$= (1,3 \times 1365 \text{ s}) - (0,29 \times 5070 \text{ s}) = 300 \text{ s}$$

$$K_v = \frac{\Delta T_{32}/\Delta t}{\Delta DMA} = 0,01624 \text{ } ^\circ\text{C/kg}$$

$$h_{92} = \frac{T_3'(s)}{DMA'(s)} = \frac{-553,37 e^{-300s}}{2500 s + 1} + \frac{0,01624}{s}$$

## ANNEXE B

### DÉTAILS DU DÉVELOPPEMENT DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

On retrouve dans cette annexe, les détails du passage des fonctions de transfert aux équations différentielles, pour le modèle linéaire à formulation restreinte (d'ordre vingt-deux). En d'autres termes, cette annexe nous donne la suite des calculs effectués à la section 5.2.1 .

**Variable d'état physique  $X_1$ :**

$$Y_1(s) = \frac{-49}{1600 s + 1} DAC'(s) + \left[ 496,60 + \frac{0,1646 \times 10^{-1}}{s} \right] DMA'(s)$$

$$Y_1(s) = \frac{-0,30 \times 10^{-1}}{s + 0,61 \times 10^{-3}} DAC'(s) + \left[ 496,60 + \frac{0,1646 \times 10^{-1}}{s} \right] DMA'(s)$$

on pose  $Y_1(s) = Z_1(s) + Z_2(s) + 496,60 DMA'(s)$

où  $Z_1(s) = \frac{-0,30 \times 10^{-1}}{s + 0,61 \times 10^{-3}} DAC'(s)$  et  $Z_2(s) = \frac{0,1646 \times 10^{-1}}{s} DMA'(s)$

$$sZ_1(s) = -0,61 \times 10^{-3} Z_1(s) - 0,30 \times 10^{-1} DAC'(s)$$

$$sZ_2(s) = 0,1646 \times 10^{-1} DMA'(s)$$

Et, en vertu de la transformée de Laplace  $\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s) - f(0)$  où la condition initiale est égale à zéro ( $f(0)=0$ ), on obtient les équations différentielles suivantes:

$$\boxed{\frac{dz_1}{dt} = -0,61 \times 10^{-3} z_1(t) - 0,30 \times 10^{-1} dac'(t)} \quad (5-19)$$

$$\boxed{\frac{dz_2}{dt} = 0,1646 \times 10^{-1} dma'(t)} \quad (5-20)$$

**Variable d'état physique X<sub>2</sub>:**

$$Y_2(s) = \frac{-230}{0,63 \times 10^7 s^2 + 5000 s + 1} DAC'(s) + \left[ 463,40 + \frac{0,2083}{s} \right] DMA'(s)$$

$$Y_2(s) = \frac{-0,37 \times 10^{-4}}{s^2 + 0,80 \times 10^{-3} s + 0,16 \times 10^{-6}} DAC'(s) + \left[ 463,40 + \frac{0,2083}{s} \right] DMA'(s)$$

$$\text{on pose } Y_2(s) = Z_3(s) + Z_5(s) + 463,40 DMA'(s)$$

$$\text{où } Z_3(s) = \frac{-0,37 \times 10^{-4}}{s^2 + 0,80 \times 10^{-3} s + 0,16 \times 10^{-6}} DAC'(s) \text{ et } Z_5(s) = \frac{0,2083}{s} DMA'(s)$$

$$s^2 Z_3 = -0,80 \times 10^{-3} s Z_3 - 0,16 \times 10^{-6} Z_3 - 0,37 \times 10^{-4} DAC'(s)$$

$$\frac{d^2 z_3}{dt^2} = -0,80 \times 10^{-3} \frac{dz_3}{dt} - 0,16 \times 10^{-6} z_3(t) - 0,37 \times 10^{-4} dac'(t)$$

$$\boxed{\frac{dz_3}{dt} = z_4(t)} \quad (5-21)$$

$$\boxed{\frac{dz_4}{dt} = -0,80 \times 10^{-3} z_4(t) - 0,16 \times 10^{-6} z_3(t) - 0,37 \times 10^{-4} dac'(t)} \quad (5-22)$$

$$sZ_5(s) = 0,2083 DMA'(s)$$

$$\boxed{\frac{dz_5}{dt} = 0,2083 \text{ dma}'(t)} \quad (5-23)$$

**Variable d'état physique C:**

$$Y_3(s) = \frac{0,12}{0,44 \times 10^7 s^2 + 4600 s + 1} DAC'(s) + \frac{0,3507 \times 10^{-3}}{s} DMA'(s)$$

$$Y_3(s) = \frac{0,27 \times 10^{-7}}{s^2 + 0,11 \times 10^{-2} s + 0,23 \times 10^{-6}} DAC'(s) + \frac{0,3507 \times 10^{-3}}{s} DMA'(s)$$

$$\text{on pose } Y_3(s) = Z_6(s) + Z_8(s)$$

$$\text{où } Z_6(s) = \frac{0,27 \times 10^{-7}}{s^2 + 0,11 \times 10^{-2} s + 0,23 \times 10^{-6}} DAC'(s)$$

$$\text{et } Z_8(s) = \frac{0,3507 \times 10^{-3}}{s} DMA'(s)$$

$$s^2 Z_6 = -0,11 \times 10^{-2} s Z_6 - 0,23 \times 10^{-6} Z_6 + 0,27 \times 10^{-7} DAC'(s)$$

$$\frac{d^2 z_6}{dt^2} = -0,11 \times 10^{-2} \frac{dz_6}{dt} - 0,23 \times 10^{-6} z_6(t) + 0,27 \times 10^{-7} dac'(t)$$

$$\boxed{\frac{dz_6}{dt} = z_7(t)} \quad (5-24)$$

$$\boxed{\frac{dz_7}{dt} = -0,11 \times 10^{-2} z_7(t) - 0,23 \times 10^{-6} z_6(t) + 0,27 \times 10^{-7} dac'(t)} \quad (5-25)$$

$$sZ_8(s) = 0,3507 \times 10^{-3} DMA'(s)$$

$$\boxed{\frac{dz_8}{dt} = 0,3507 \times 10^{-3} \text{ dma}'(t)} \quad (5-26)$$

**Variable d'état physique M<sub>1</sub>:**

$$Y_4(s) = \frac{0,53}{s} \text{ DAC}'(s) + \frac{0,8838}{s} \text{ DMA}'(s)$$

on pose  $Y_4(s) = Z_9(s) + Z_{10}(s)$

$$\text{où } Z_9(s) = \frac{0,53}{s} \text{ DAC}'(s) \quad \text{et} \quad Z_{10}(s) = \frac{0,8838}{s} \text{ DMA}'(s)$$

$$sZ_9(s) = 0,53 \text{ DAC}'(s) \quad sZ_{10}(s) = 0,8838 \text{ DMA}'(s)$$

$$\boxed{\frac{dz_9}{dt} = 0,53 \text{ dac}'(t)} \quad (5-27)$$

$$\boxed{\frac{dz_{10}}{dt} = 0,8838 \text{ dma}'(t)} \quad (5-28)$$

**Variable d'état physique T<sub>1</sub>:**

$$Y_5(s) = \frac{980}{1900 s + 1} \text{ DAC}'(s) - \frac{583,42}{2500 s + 1} \text{ DMA}'(s) + \frac{0,1725 \times 10^{-1}}{s} \text{ DMA}'(s)$$

$$Y_5(s) = \frac{0,52}{s + 0,53 \times 10^{-3}} \text{ DAC}'(s) - \frac{0,23503}{s + 0,40 \times 10^{-3}} \text{ DMA}'(s) + \frac{0,1725 \times 10^{-1}}{s} \text{ DMA}'(s)$$

on pose  $Y_5(s) = Z_{11}(s) + Z_{12}(s) + Z_{13}(s)$

$$\text{où } Z_{11}(s) = \frac{0,52}{s + 0,53 \times 10^{-3}} \text{ DAC}'(s), \quad Z_{12}(s) = \frac{-0,23503}{s + 0,40 \times 10^{-3}} \text{ DMA}'(s)$$

$$\text{et } Z_{13}(s) = \frac{0,1725 \times 10^{-1}}{s} \text{ DMA}'(s)$$

$$sZ_{11}(s) = -0,53 \times 10^{-3} Z_{11}(s) + 0,52 \text{ DAC}'(s)$$

$$\boxed{\frac{dz_{11}}{dt} = -0,53 \times 10^{-3} z_{11}(t) + 0,52 \text{ dac}'(t)} \quad (5-29)$$

$$sZ_{12}(s) = -0,40 \times 10^{-3} Z_{12}(s) - 0,23503 \text{ DMA}'(s)$$

$$\boxed{\frac{dz_{12}}{dt} = -0,40 \times 10^{-3} z_{12}(t) - 0,23503 \text{ dma}'(t)} \quad (5-30)$$

$$sZ_{13}(s) = 0,1725 \times 10^{-1} \text{ DMA}'(s)$$

$$\boxed{\frac{dz_{13}}{dt} = 0,1725 \times 10^{-1} \text{ dma}'(t)} \quad (5-31)$$

**Variable d'état physique M<sub>2</sub>:**

$$Y_6(s) = \frac{-0,53}{s} \text{ DAC}'(s) + \frac{2870,6}{0,1958 \times 10^8 s^2 + 8850 s + 1} \text{ DMA}'(s)$$

$$Y_6(s) = \frac{-0,53}{s} \text{ DAC}'(s) + \frac{0,14660 \times 10^{-3}}{s^2 + 0,4520 \times 10^{-3} s + 0,5107 \times 10^{-7}} \text{ DMA}'(s)$$

$$\text{on pose } Y_6(s) = Z_{14}(s) + Z_{15}(s)$$

$$\text{où } Z_{14}(s) = \frac{-0,53}{s} \text{ DAC}'(s) \quad \text{et}$$

$$Z_{15}(s) = \frac{0,14660 \times 10^{-3}}{s^2 + 0,4520 \times 10^{-3} s + 0,5107 \times 10^{-7}} \text{ DMA}'(s)$$

$$sZ_{14}(s) = -0,53 \text{ DAC}'(s)$$

$$\boxed{\frac{dz_{14}}{dt} = -0,53 \text{ dac}'(t)} \quad (5-32)$$

$$s^2 Z_{15} = -0,4520 \times 10^{-3} s Z_{15} - 0,5107 \times 10^{-7} Z_{15} + 0,14660 \times 10^{-3} \text{ DMA}'(s)$$

$$\frac{d^2 z_{15}}{dt^2} = -0,4520 \times 10^{-3} \frac{dz_{15}}{dt} - 0,5107 \times 10^{-7} z_{16}(t) + 0,14660 \times 10^{-3} \text{ dma}'(t)$$

$$\boxed{\frac{dz_{15}}{dt} = z_{16}(t)} \quad (5-33)$$

$$\boxed{\frac{dz_{16}}{dt} = -0,452 \times 10^{-3} z_{16}(t) - 0,5107 \times 10^{-7} z_{15}(t) + 0,1466 \times 10^{-3} \text{ dma}'(t)} \quad (5-34)$$

**Variable d'état physique  $T_2$ :**

$$Y_7(s) = \frac{0,58 \times 10^{-1}}{s} \text{ DAC}'(s) - \frac{332,36}{0,3198 \times 10^8 s^2 + 11310 s + 1} \text{ DMA}'(s)$$

$$Y_7(s) = \frac{0,58 \times 10^{-1}}{s} \text{ DAC}'(s) - \frac{0,10393 \times 10^{-4}}{s^2 + 0,3537 \times 10^{-3} s + 0,3127 \times 10^{-7}} \text{ DMA}'(s)$$

$$\text{on pose } Y_7(s) = Z_{17}(s) + Z_{18}(s)$$

$$\text{où } Z_{17}(s) = \frac{0,58 \times 10^{-1}}{s} \text{ DAC}'(s) \quad \text{et}$$

$$Z_{18}(s) = \frac{-0,10393 \times 10^{-4}}{s^2 + 0,3537 \times 10^{-3} s + 0,3127 \times 10^{-7}} \text{ DMA}'(s)$$

$$sZ_{17}(s) = 0,58 \times 10^{-1} DAC'(s)$$

$$\boxed{\frac{dz_{17}}{dt} = 0,58 \times 10^{-1} dac'(t)} \quad (5-35)$$

$$s^2 Z_{18} = -0,3537 \times 10^{-3} s Z_{18} - 0,3127 \times 10^{-7} Z_{18} - 0,10393 \times 10^{-4} DMA'(s)$$

$$\frac{d^2 z_{18}}{dt^2} = -0,3537 \times 10^{-3} \frac{dz_{18}}{dt} - 0,3127 \times 10^{-7} z_{18}(t) - 0,10393 \times 10^{-4} dma'(t)$$

$$\boxed{\frac{dz_{18}}{dt} = z_{19}(t)} \quad (5-36)$$

$$\boxed{\frac{dz_{19}}{dt} = -0,3537 \times 10^{-3} z_{19}(t) - 0,3127 \times 10^{-7} z_{18}(t) - 0,10393 \times 10^{-4} dma'(t)} \quad (5-37)$$

**Variable d'état physique M<sub>3</sub>:**

$$Y_8(s) = 0$$

**Variable d'état physique T<sub>3</sub>:**

$$Y_9(s) = \frac{930}{1900 s + 1} DAC'(s) - \frac{553,37}{2500 s + 1} DMA'(s) + \frac{0,1624 \times 10^{-1}}{s} DMA'(s)$$

$$Y_9(s) = \frac{0,49}{s + 0,53 \times 10^{-3}} DAC'(s) - \frac{0,22292}{0,40 \times 10^{-3} s + 1} DMA'(s) + \frac{0,1624 \times 10^{-1}}{s} DMA'(s)$$

$$\text{on pose } Y_9(s) = Z_{20}(s) + Z_{21}(s) + Z_{22}(s)$$

où  $Z_{20}(s) = \frac{0,49}{s + 0,53 \times 10^{-3}} \text{DAC}'(s)$  ,  $Z_{21}(s) = \frac{-0,22292}{s + 0,40 \times 10^{-3}} \text{DMA}'(s)$   
et  $Z_{22}(s) = \frac{0,1624 \times 10^{-1}}{s} \text{DMA}'(s)$

$$sZ_{20}(s) = -0,53 \times 10^{-3} Z_{20}(s) + 0,49 \text{ DAC}'(s)$$

$$\frac{dz_{20}}{dt} = -0,53 \times 10^{-3} z_{20}(t) + 0,49 \text{ dac}'(t)$$

(5-38)

$$sZ_{21}(s) = -0,40 \times 10^{-3} Z_{21}(s) - 0,22292 \text{ DMA}'(s)$$

$$\frac{dz_{21}}{dt} = -0,40 \times 10^{-3} z_{21}(t) - 0,22292 \text{ dma}'(t)$$

(5-39)

$$sZ_{22}(s) = 0,1624 \times 10^{-1} \text{ DMA}'(s)$$

$$\frac{dz_{22}}{dt} = 0,1624 \times 10^{-1} \text{ dma}'(t)$$

(5-40)

## ANNEXE C

### EXEMPLE D'UN FICHIER DE DONNÉES INITIALES (.INI)

Ce type de fichier est utilisé au début de la simulation, pour fournir au simulateur numérique certaines particularités du procédé. Un tel fichier allège les séances d'utilisation du simulateur, par la réduction du nombre d'entrées au clavier. Voici le fichier commenté M9D.INI utilisé pour l'identification du modèle linéaire:

<u>FICHIER</u>	<u>DESCRIPTION</u>
6,19	<i>Condition initiale de l'alumine dispersée X<sub>1</sub> (kg)</i>
25,08	<i>Condition initiale de l'alumine déposée X<sub>2</sub> (kg)</i>
0.04	<i>Condition initiale de la concentration en alumine C (fraction massique)</i>
2224	<i>Condition initiale de la masse du bain M<sub>1</sub> (kg)</i>
980,6	<i>Condition initiale de la température du bain T<sub>1</sub> (°C)</i>
1276	<i>Condition initiale de la masse de gelée M<sub>2</sub> (kg)</i>
713	<i>Condition initiale de la température de gelée T<sub>2</sub> (°C)</i>
4200	<i>Condition initiale de la masse de métal M<sub>3</sub> (kg)</i>
978,2	<i>Condition initiale de la température du métal T<sub>3</sub> (°C)</i>
15.0	<i>Période d'affichage des résultats (s)</i>
n	<i>Affichage des flux de chaleur (o=oui et n=non)</i>
5.0	<i>Durée de la simulation (h)</i>
o	<i>Alimentation en alumine (o=oui et n=non)</i>
2.977	<i>Quantité d'alumine injectée toutes les quatre minutes (kg)</i>
10.0	<i>Durée d'une alimentation (s)</i>

## ANNEXE D

### EXEMPLE D'UN FICHIER DE DONNÉES GÉNÉRÉES (.DAT)

Ce fichier contient les résultats numériques d'une simulation. Les lignes doivent être interprétées comme un état du procédé au niveau temporel et les colonnes comme des variables. À titre d'exemple, voici une ligne du fichier CTRL24.DAT correspondant à l'état du procédé après une heure de simulation du modèle non-linéaire:

```
1      6.19524    25.08689   3.99983    2224.1126  19.98981
980.5904   1275.8869  8.80737    712.97596  4223.633   16.5616
978.1248   36.5835    0.012404   4.4       5.218
```

Voici la description des variables en fonction du numéro de colonne:

<u># de colonne</u>	<u>DESCRIPTION</u>
1)	<i>Temps (h)</i>
2)	<i>Alumine dispersée X<sub>1</sub> (kg)</i>
3)	<i>Alumine déposée X<sub>2</sub> (kg)</i>
4)	<i>Concentration en alumine C (% massique)</i>
5)	<i>Masse du bain M<sub>1</sub> (kg)</i>
6)	<i>Hauteur du bain (cm)</i>
7)	<i>Température du bain T<sub>1</sub> (°C)</i>
8)	<i>Masse de gelée M<sub>2</sub> (kg)</i>
9)	<i>Épaisseur de la gelée (cm)</i>
10)	<i>Température de gelée T<sub>2</sub> (°C)</i>
11)	<i>Masse de métal M<sub>3</sub> (kg)</i>
12)	<i>Hauteur du métal (cm)</i>
13)	<i>Température du métal T<sub>3</sub> (°C)</i>

- 14) *Résistance de la cuve ( $\mu\Omega$ )*
- 15) *Taux d'alimentation en alumine (kg/s)*
- 16) *Distance Anode-Cathode (cm)*
- 17) *Voltage de la cuve (V)*

## ANNEXE E

### EXAMPLE DE FICHIERS DE FONCTIONS DE TRANSFERT (.FT)

Ce type de fichier contient le résultat d'une identification, à savoir les fonctions de transfert par rapport à une variable de contrôle spécifique. Pour chaque identification, le simulateur crée deux fichiers de fonctions de transfert. Le premier exprime les fonctions de transfert sous forme de pôles et inclut les approximations de délais. Le second les affiche sous forme standard à savoir avec gains, constante de temps et délai pur. Voici les quatre fichiers résultants d'une identification complète (DAC et DMA) :

**Nom du fichier:** DAC.FT

$$H_{11} = -0.79E-03 / (s + 0.86E-03)$$

$$H_{21} = -0.37E-04 / (s^{**2} + 0.80E-03 s + 0.16E-06)$$

$$H_{31} = 0.27E-07 / (s^{**2} + 0.11E-02 s + 0.23E-06)$$

$$H_{41} = (-0.11E+01 / (s + 0.10E-02)) + (0.53E+00 / s)$$

$$H_{51} = 0.52E+00 / (s + 0.53E-03)$$

$$H_{61} = (0.11E+01 / (s + 0.10E-02)) + (-0.53E+00 / s)$$

$$H_{71} = (-0.12E+00 / (s + 0.53E-03)) + (0.58E-01 / s)$$

$$H_{81} = 0$$

$$H_{91} = 0.49E+00 / (s + 0.53E-03)$$

**Nom du fichier:** DACTHETA.FT

$$H_{11} = -0.49E+02 / 0.16E+04 s + 1$$

$$DELAI = 0.48E+03$$

$$H_{21} = -0.23E+03 / (0.63E+07 s^{**2} + 0.50E+04 s + 1)$$

$$H_{31} = 0.12E+00 / (0.44E+07 s^{**2} + 0.46E+04 s + 1)$$

$$H_{41} = 0.53E+00/s$$

$$DELAI = 0.19E+04$$

$$H_{51} = 0.98E+03 / 0.19E+04 s + 1$$

$$DELAI = 0.30E+00$$

$$H_{61} = -0.53E+00/s$$

$$DELAI = 0.19E+04$$

$$H_{71} = 0.58E-01/s$$

$$DELAI = 0.38E+04$$

$$H_{81} = 0$$

$$H_{91} = 0.93E+03 / 0.19E+04 s + 1$$

$$DELAI = 0.12E+03$$

**Nom du fichier:** DMA.FT

$$H_{12} = 0.49660E+03 + 0.1646E-01 /s$$

$$H_{22} = 0.46340E+03 + 0.2083E+00 /s$$

$$H_{32} = (-.70138E-03 / (s + 0.10E-02)) + (0.3507E-03 /s)$$

$$H_{42} = 0.8838E+00/s$$

$$H_{52} = (-0.23503E+00 / (s + 0.40E-03)) + (0.1725E-01 / s)$$

$$H_{62} = 0.14660E-03 / (s^{**2} + 0.4520E-03 s + 0.5107E-07)$$

$$H_{72} = -0.10393E-04 / (s^{**2} + 0.3537E-03 s + 0.3127E-07)$$

$$H_{82} = 0$$

$$H_{92} = (-0.22292E+00 / (s + 0.40E-03)) + (0.1624E-01 / s)$$

**Nom du fichier:** DMATHETA.FT

$$H_{12} = 0.49660E+03 + 0.1646E-01 / s$$

$$H_{22} = 0.46340E+03 + 0.2083E+00 / s$$

$$H_{32} = 0.3507E-03 / s$$

DELAI = 0.19E+04

$$H_{42} = 0.8838E+00 / s$$

DELAI = 0.95E+03

$$H_{52} = (-0.58342E+03 / 0.25E+04 s + 1) + (0.1725E-01 / s)$$

DELAI = 0.20E+03

$$H_{62} = 0.28706E+04 / (0.1958E+08 s^{**2} + 0.8850E+04 s + 1)$$

$$H_{72} = -0.33236E+03 / (0.3198E+08 s^{**2} + 0.1131E+05 s + 1)$$

$$H_{82} = 0$$

$$H_{92} = (-0.55337E+03 / 0.25E+04 s + 1) + (0.1624E-01 / s)$$

DELAI = 0.30E+03

## ANNEXE F

### ENVIRONNEMENT INFORMATIQUE

**Ordinateur:**

- PC 386, 33 MHz

**Langage de programmation et logiciels:**

- NDP Fortran (pour la programmation du simulateur)
- PHARLAP 386/DOS Extender SDK (pour l'utilisation du NDP Fortran)
- SDRIV2 sous-routine Fortran provenant de la librairie Numerical Methods And Software (NMAS) [10]. Elle utilise un certain nombre de sous-routines pour la résolution de systèmes d'équations différentielles ordinaires, choisissant entre la méthode de Gear pour les problèmes à variations brusques et de Adams pour les problèmes à variations douces. Il est à noter que la sous-routine a sélectionné cette dernière option, pour résoudre notre système d'équations différentielles.
- MAT-LAB (pour l'analyse dynamique du modèle linéaire en boucle fermée)
- Windows Microsoft WORD (pour la rédaction du mémoire)
- Windows Microsoft EXCEL (pour les graphiques)

## ANNEXE G

### SPÉCIFICATIONS TECHNIQUES DE LA CUVE D'ÉLECTROLYSE

Cette annexe donne les spécifications techniques de la cuve d'électrolyse utilisée dans le simulateur. On y trouve la configuration géométrique de la cuve et la valeur nominale de certains paramètres d'opérations.

Longueur: 5 m

Largeur: 2,5 m

Profondeur: 43 cm

Surface anodique: 7,5 m<sup>2</sup>

Surface effective du bain: 11,2 m<sup>2</sup>

Courant: 80 kA

Efficacité du courant: 88%

Distance anode-cathode: 4,4 cm

Voltage: 5,2 V

Résistance: 36,6  $\mu\Omega$

Résistance externe: 9  $\mu\Omega$

Masse du bain ( $M_1$ ): 2224 kg

Profondeur du bain: 20 cm

Température du bain ( $T_1$ ): 980,6 °C

Masse de gelée ( $M_2$ ): 1276 kg

Épaisseur de la gelée: 8,8 cm

Température de gelée ( $T_2$ ): 713 °C

Masse de métal ( $M_3$ ): 4200 kg

Profondeur du métal: 16,6 cm

Température du métal ( $T_3$ ): 978,2 °C

Quantité d'alumine injectée toutes les quatre minutes: 2,9 kg

Durée d'une alimentation: 10 s

Alumine dispersée ( $X_1$ ): 6,2 kg

Alumine déposée ( $X_2$ ): 25,1 kg

Concentration en alumine (C): 4 %massique

Concentration en fluorure de calcium ( $\text{CaF}_2$ ): 5%

Rapport cryolithaire  $\text{NaF}/\text{AlF}_3$ : 1,2

Conductivité électrique du bain: 168,54  $\frac{1}{\Omega \cdot \text{m}}$

Fraction de la surface anodique recouverte de bulles: 0,25

Épaisseur de la couche de bulles sous l'anode: 0,015 m

Fraction de gaz dans la couche de bulles: 0,08

Épaisseur de la couche de bulles adhérant à l'anode: 0,005 m

## RÉFÉRENCES

- 1 **Bui, R.T.**, "Notes de cours - Dynamique des systèmes II". Université du Québec à Chicoutimi, 1983
- 2 **DiStefano, J.J., Stubberud, A.R., Williams, I.J.**, "Theory and problems of Feedback and control systems". Schaum's Outline Series - McGraw-Hill Book Company, 1976
- 3 **Dorf, R.C.**, "Modern control systems". Addison-Wesley Publishing Company, 1989
- 4 **Dow, D.W., Goodnow, W.H.**, "Influence of operating variables on reduction cell bath temperature". Light Metals 1972, pp. 3-20
- 5 **Ek. A., Fladmark, G.E.**, "Simulation of thermal, electrical and chemical behaviour of an aluminum cell on a digital computer". Light Metals 1973, pp. 85-103
- 6 **Foosnaes, T., Grjotheim, K., Huglen, R., Kvande, H., Lillebuen, B., Mellerud, T., Naterstad, T.**, "Understanding the Hall-Héroult process for production of aluminium". Aluminium Verlag, 1986
- 7 **Friedland, B.**, "Control system design". McGraw-Hill Book Company, 1986
- 8 **Hashimoto, T., Ikeuchi, H.**, "Computer simulation of dynamic behaviour of an aluminum reduction cell". Light Metals 1981, pp. 273-283
- 9 **Horvath, J.**, "Notes de cours - Process fundamentals and operation of aluminium electrolytic cells". Université du Québec à Chicoutimi, 1991

- 10 **Kahaner, D., Moler, C., Nash, S.**, "Numerical methods and software". Prentice Hall Series in Computational Mathematics, 1989
- 11 **Moen, T., Aalbu, J., Borg, P.**, "Adaptive control of alumina reduction cells with point feeders". Light Metals 1985, pp. 459-469
- 12 **Naslin, P.**, "Technologie et calcul pratique des systèmes asservis". Dunod, 1968
- 13 **Ouellet, R., Bui, R.T., Perron, J.**, "Numerical simulation of a casting furnace". Simulation Volume 54, Numéro 2 1990, pp. 92-100
- 14 **Saksvikroenning, T., Vee, K., Gran, E.**, "Estimation of states in aluminium reduction cells applying extended Kalman filtering algorithm together with a nonlinear dynamic model and discrete measurements". Light Metals 1976, pp. 275-286
- 15 **Seborg, D.E., Edgar, T.F., Mellichamp, D.A.** "Process dynamics and control". John Wiley & Sons, Inc., 1989
- 16 **Sörhein, E.A., Borg, P.**, "Dynamic model and estimator for online supervision of the alumina reduction cell". Light Metals 1989, pp. 379-384
- 17 **Tikasz, L., Bui, R.T., Potocnik, V.**, "Aluminum electrolytic cells: a computer simulator for training and supervision". Engineering with computers, sous presse 1993