

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

THÈSE DE DOCTORAT

PRÉSENTÉE À

L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À CHICOUTIMI

EN VERTU D'UN PROTOCOLE DE COTUTELLE AVEC

L'UNIVERSITÉ DE TECHNOLOGIE DE COMPIÈGNE

SIMULATION PROBABILISTE DU PROBLÈME DE CONTACT

MÉCANIQUE

PAR

HATEM MRAD

JANVIER 2009



Mise en garde/Advice

Afin de rendre accessible au plus grand nombre le résultat des travaux de recherche menés par ses étudiants gradués et dans l'esprit des règles qui régissent le dépôt et la diffusion des mémoires et thèses produits dans cette Institution, **l'Université du Québec à Chicoutimi (UQAC)** est fière de rendre accessible une version complète et gratuite de cette œuvre.

Motivated by a desire to make the results of its graduate students' research accessible to all, and in accordance with the rules governing the acceptance and diffusion of dissertations and theses in this Institution, the **Université du Québec à Chicoutimi (UQAC)** is proud to make a complete version of this work available at no cost to the reader.

L'auteur conserve néanmoins la propriété du droit d'auteur qui protège ce mémoire ou cette thèse. Ni le mémoire ou la thèse ni des extraits substantiels de ceux-ci ne peuvent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

The author retains ownership of the copyright of this dissertation or thesis. Neither the dissertation or thesis, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

À toute ma famille

À mon épouse et l'amour de ma vie Aratef.

Résumé

Dans la modélisation des structures par la méthode des éléments finis classique, les propriétés physiques et matérielles ainsi que les conditions aux limites sont considérées généralement déterministes au sens statistique. De ce constat, il est permis de s'interroger sur la validité de la solution issue d'une telle modélisation. Les interrogations se multiplient lorsqu'on admet que les lois physiques qui régissent le comportement de la matière évoluent de manière aléatoire. Pour apporter des éléments de réponses à ces interrogations, nous avons étudié dans le cadre de ce projet par des méthodes probabilistes et stochastiques un certain nombre d'applications académiques et industrielles mettant en évidence l'effet des variations aléatoires des paramètres constituant ces lois sur la solution. Dans le cadre de ces méthodes, l'échantillonnage et la discrétisation constituent des étapes primordiales qui contribuent à la construction, respectivement, du spectre de la solution et du système matriciel. Ce dernier, une fois conditionné, permet de construire la réponse éléments finis après résolution. Si on associe la probabilité et l'aléa à certains paramètres qui constituent ce système, alors la discrétisation de type éléments finis seule devient insuffisante pour produire le nouveau système matriciel qui, *a priori*, admet un caractère aléatoire ou stochastique absent du système d'équations. La méthode de Monte Carlo offre l'avantage de pallier aux difficultés rencontrées lors du processus de discrétisation. Les travaux de cette thèse se basent principalement sur l'exploitation des avantages de cette méthode voire son efficacité et la simplicité de sa mise en œuvre. Deux exemples de contact de Hertz ainsi que des problèmes de contact multiphysiques académiques et industriels feront l'objet d'une analyse fiabiliste par cette méthode.

Abstract

In a classical finite element model, physical and material properties as well as the boundary conditions are generally considered as being deterministic and constant in a statistical sense. With this observation in mind, the validity of the solution obtained from such a model could be questionable. However, accepting that the laws of physics evolve randomly raises many questions. To address them, this research project will use the stochastic finite element method to study some academic and industrial applications to analyze the effect of random variation of the parameters of these laws on the solution. The discretization is a key step of this method which contributes to the construction of the matrix system. After applying conditioning technique, it's possible to build the finite element response after resolution. When the probability is associated with some parameters which constitute this system, then only the finite element discretization is no longer sufficient to produce the new matrix system which has random or stochastic process not already included in the equations. The use of the stochastic finite element method provides the way to include adequate probabilistic technique to makes an efficient reliability and a probabilistic study of the mechanical contact problem.

Remerciements

Ce projet a été réalisé conjointement au sein du Centre universitaire de recherche sur l'aluminium (CURAL) de l'Université du Québec à Chicoutimi et du Laboratoire Roberval de l'Université de Technologie de Compiègne dans le cadre d'une thèse en cotutelle sous la direction des professeurs Daniel Marceau et Mohamed Rachik. La codirection a été assurée par le professeur Mario Fafard de l'Université Laval. La réalisation de ce projet a été rendue possible grâce au financement du Conseil de Recherches en Sciences Naturelles et en Génie du Canada "CRSNG".

Je tiens tout d'abord à remercier mes directeurs pour la confiance qu'ils m'ont témoignée et d'avoir accepté de diriger cette thèse. Je les remercie d'avantage pour m'avoir fait confiance malgré les connaissances plutôt légères que j'avais en début 2004 sur la méthode des éléments finis stochastiques.

Je remercie M. Mohamed Bouazara et M. Eric Hug d'avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse et pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail. Leurs commentaires et leurs questions m'ont permis de clarifier ma rédaction et m'ont donné de nouvelles pistes de réflexion. J'exprime ma profonde reconnaissance à M. Gérard Moulin qui accepter d'évaluer mes travaux, d'avoir produit un rapport de grande qualité et pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail. Mes remerciements s'adressent aux membres du Jury et tout particulièrement M. Mohand Ouhrouche qui m'a fait l'honneur de présider le jury de ma soutenance.

Je remercie également Mme Madeleine Potvin pour l'esprit amical qu'on a eu, pour son soutien et pour ses encouragements durant tout mon séjour à l'UQAC.

J'adresse mes remerciements, pour la sympathie qu'ils m'ont témoignés, à Mesdames Brigitte Duch, Muriel Petitalot, Manon Coté ainsi qu'à Messieurs Jean-Marc Roelandt, Hakim Naceur et Jerome Antoni. Je tiens également à remercier Patrice Goulet pour ses aides précieux.

Enfin, je remercie tous mes chers amis Amara, Anis, Aymen, Daly, Ehab, Hamid, Sadok, Sana, Slim, Oualid.

Table des matières

Résumé	ii
Abstract.....	iii
Remerciements.....	iv
Table des matières.....	v
Liste des figures	vii
Liste des tableaux.....	xi
1 Introduction.....	14
1.1 Généralités	14
1.2 Problématique.....	17
1.3 Objectifs.....	20
1.4 États des connaissances	20
1.4.1 Problème général du contact mécanique.....	21
1.4.2 Problème général de la mécanique probabiliste	22
1.4.3 Notations et définitions	23
1.4.4 Discrétisation des variables aléatoires	26
1.4.5 Méthodes de résolution	36
1.5 Méthodologie adoptée.....	37
1.6 Originalité de la thèse	38
1.7 Contenu de la thèse.....	39
2 Approche déterministe du problème de contact mécanique	42
2.1 Généralités	42
2.2 Notations et définitions.....	45
2.3 Équation d'équilibre d'un milieu déformable	46
2.4 Principe des travaux virtuels	47
2.5 Formulation du problème de contact	49
2.5.1 Loi de contact unilatéral avec frottement.....	49
2.5.2 Méthode de régularisation.....	53
3 Application des méthodes probabilistes au problème de contact mécanique	57
3.1 Généralités	57
3.2 La méthode de Monte Carlo.....	60
3.2.1 Définitions	63
3.2.2 Hypothèses simplificatrices.....	64
3.2.3 Approche de fiabilité en mécanique	66
3.2.4 Mise en œuvre informatique.....	70
3.3 Méthode des éléments finis stochastiques	72
3.3.1 Discrétisation des variables aléatoires	75
3.3.2 Expansion de Neumann.....	92
3.3.3 Mise en œuvre informatique.....	98
3.4 Conclusion	105
4 Validation de l'approche stochastique	107
4.1 Généralités	107

4.2	Variables aléatoires.....	109
4.3	Problèmes du contact de Hertz.....	109
4.3.1	Caractéristiques statistiques des variables aléatoires	110
4.3.2	Contact de Hertz, version cylindre-cylindre.....	112
4.3.3	Contact de Hertz, version cylindre-massif	119
4.3.4	Analyse fiabiliste et de sensibilité	125
4.4	Problèmes de contact multiphysiques.....	133
4.4.1	Glissement d'un bloc sur une plaque	134
4.4.2	Problème de contact d'une poutre courbe sur un bloc droit.....	148
4.4.3	Sensibilité des paramètres et indice de fiabilité.....	157
4.5	Conclusion	158
5	Applications industrielles	161
5.1	Généralités	161
5.2	Emboutissage d'une tôle mince, phénomène de retour élastique.....	162
5.2.1	Variables aléatoires	163
5.2.2	Caractéristiques statistiques des variables aléatoires	164
5.2.3	Solution Monte Carlo	167
5.2.4	Analyse fiabiliste	176
5.3	Étude de préchauffage d'une cuve d'électrolyse.....	180
5.3.1	Description du modèle	182
5.3.2	Variables aléatoires	184
5.3.3	Caractéristiques statistiques des variables aléatoires	185
5.3.4	Solution Monte Carlo	186
5.3.5	Analyse fiabiliste	187
5.4	Conclusion	190
6	Conclusion générale et recommandations	192
6.1	Conclusion générale	192
6.2	Recommandations	194
	Références	196

Liste des figures

Figure 1.1- Schéma de la topologie d'une surface mécanique [Institut d'optique - Orsay].	18
Figure 1.2- Variation du coefficient de frottement en fonction de vitesse de glissement, tirée de Laliberté 2004 [LAL04].	19
Figure 2.1- Schéma de contact entre deux points.	46
Figure 2.2- Définition des repères liés aux points de contact.	46
Figure 2.3 - Définition de la fonction pénétration $g(x)$.	50
Figure 2.4- Lois de contact, illustration graphique.	51
Figure 2.5- Lois de frottement avec \dot{g}_{T_a} représente la vitesse de glissement.	53
Figure 2.6- Loi de contact régularisée.	55
Figure 3.1- Schéma de l'approche probabiliste adoptée.	59
Figure 3.2 - Espace physique.	64
Figure 3.3- Représentation du domaine de défaillance dans l'espace de deux variables aléatoires [LEM05].	65
Figure 3.4 – Représentation de l'indice de Cornell.	68
Figure 3.5 - Espace standard.	69
Figure 3.6 - Analyse de sensibilité fiabiliste.	70
Figure 3.7 - Structure de la mise en œuvre informatique de l'analyse par Monte Carlo.	71
Figure 3.8- Caractéristiques de la fonction d'autocorrélation ($\sigma=0.1$).	78
Figure 3.9- Distribution des 3 et 6 premières fonctions propres.	79
Figure 3.10 - Distribution de la matrice de corrélation en fonction du coefficient de corrélation ($R = I_c$).	80
Figure 3.11- Produit des 5 premiers valeurs et vecteurs propres.	81
Figure 3.12 - Structure des objets constituants une formulation éléments finis stochastiques dans FESh++.	101
Figure 3.13 - Structure des classes pour la discrétisation des v.a. dans FESh++.	103
Figure 3.14 - Structure de la classe FEShKLDiscrete.	104
Figure 4.1 - Distributions gaussiennes des variables aléatoires.	110
Figure 4.2 - Critère de sélection des variables aléatoires, (a) module de Young; (b) coefficient de frottement.	112
Figure 4.3 – Schéma du contact de Hertz, version cylindre-cylindre.	112
Figure 4.4 – Schéma de contact de Hertz symétrique, cylindre-plan.	113
Figure 4.5 - Modèle éléments finis.	114
Figure 4.6 - Distribution de la pression de contact.	114
Figure 4.7 - État des déplacements par rapport aux axes X et Y.	115
Figure 4.8 – Évolution de la courbe de pression de contact pour le cas de variation du module de Young.	116
Figure 4.9 – Évolution de la courbe de pression de contact pour le cas de variation du coefficient de frottement.	117
Figure 4.10- Évolution de la courbe de pression de contact pour le cas de la variation combinée du coefficient de frottement et du module de Young.	118

Figure 4.11- Schéma de contact de Hertz.....	119
Figure 4.12- Modèle éléments finis.....	120
Figure 4.13- État de distribution de la pression de contact.....	121
Figure 4.14 - État des déplacements suivant les axes X et Y.....	122
Figure 4.15- Évolution de la courbe de pression de contact pour le cas de la variation du module de Young.....	123
Figure 4.16- Évolution de la courbe de pression de contact en fonction du coefficient de frottement.....	124
Figure 4.17- Évolution de la courbe de pression de contact en fonction de la variation combinée du coefficient de frottement et du module de Young.....	124
Figure 4.18 - Les fenêtres d'admissibilité, cas cylindre/cylindre, dans les espaces physique (a) et standard (b) des variables aléatoires module de Young/coefficient de frottement.....	127
Figure 4.19 - Les fenêtres d'admissibilité, cas cylindre/massif, dans les espaces physique (a) et standard (b) des variables aléatoires module de Young/coefficient de frottement.....	128
Figure 4.20 - Schéma du principe de calcul de sensibilité.....	130
Figure 4.21 - Maillage éléments finis du bloc et de la plaque.....	135
Figure 4.22 - Modèle éléments finis, déplacements imposés.....	135
Figure 4.23 - Échantillonnage des variables aléatoires, (a) coefficient de frottement; (b)module de Young.....	137
Figure 4.24 - Choix des nœuds 1 et 2 pour l'analyse statistique.....	138
Figure 4.25 - Variation des contraintes S_{yy} et S_{zz} aux Nœuds 1 et 2, problème mécanique.....	139
Figure 4.26 - Spectre de variation des contraintes S_{yy} et S_{zz} aux nœuds 1 et 2, problème mécanique.....	139
Figure 4.27 - Les fenêtres d'admissibilité des contraintes S_{zz} , (a) nœud 1 (pas 6) ; (b)nœud 2 (pas 3), dans l'espace physique du coefficient de frottement/module de Young.....	141
Figure 4.28 - Les fenêtres d'admissibilité des contraintes S_{zz} , (a) nœud 1 (pas 6) ; (b)nœud 2 (pas 3), dans l'espace standard du coefficient de frottement/module de Young.....	142
Figure 4.29 - Échantillonnage des variables aléatoires, (a) coefficient de convection; (b)coefficient de frottement; (c) coefficient d'expansion thermique.....	144
Figure 4.30 - Variation des contraintes S_{yy} et S_{zz} aux nœuds 1 et 2, problème thermomécanique.....	145
Figure 4.31 - Spectre de la variation des contraintes S_{yy} et S_{zz} aux nœuds 1 et 2, problème thermomécanique.....	145
Figure 4.32 - Fenêtre d'admissibilité des contraintes S_{zz} au nœud 1 (3 ^{eme} pas de temps), dans les espaces physiques (a) et standards (b) du coefficient d'expansion/coefficient de convection.....	146
Figure 4.33 - Fenêtres d'admissibilité des contraintes S_{zz} au nœud 1, dans les espaces physiques (a) et standards (b) du coefficient de frottement/coefficient d'expansion.	147

Figure 4.34 - Modèle éléments finis, (a) maillage ; (b) conditions aux limites.....	149
Figure 4.35 - Échantillonnage des coefficients de convection du carbone (a) et de l'acier(b).....	151
Figure 4.36 - Échantillonnage des modules de Young du carbone (a) et de l'acier (b). ...	152
Figure 4.37 - Ensemble de 10 nœuds sur la frontière du bloc formant un chemin A.	153
Figure 4.38 - Variation de la contrainte S_{xx} le long du chemin A.	154
Figure 4.39 - Variation de la contrainte S_{zz} le long du chemin A.	154
Figure 4.40 - Fenêtres d'admissibilité des contraintes S_{xx} au nœud 1, espace module de Young (carbone)/coefficient de convection (carbone).	155
Figure 4.41 - Fenêtres d'admissibilité des contraintes S_{xx} au nœud 1, dans les espaces physiques (a) et standards (b) du coefficient de convection (acier)/module de Young (carbone).....	156
Figure 5.1 - Emboutissage d'une tôle en U, données de l'application	162
Figure 5.2 - Forme géométrique de la tôle après retrait des outils.	163
Figure 5.3 - Distributions gaussiennes des variables aléatoires.	164
Figure 5.4 - Critère de sélection des variables aléatoires, (a) force de serrage; (b) coefficient de frottement; (d) exposant d'écrouissage.	166
Figure 5.5- Quantification du retour élastique.	167
Figure 5.6 - Courbes de retour élastique, cas de la variation de l'exposant d'écrouissage.	168
Figure 5.7 - Distributions probabilistes des paramètres de retour élastique, cas de la variation de l'exposant d'écrouissage, (a) distribution de l'angle θ_1 ; (b) distribution de l'angle θ_2 ; (c) distribution du rayon R.	169
Figure 5.8 - Courbes de retour élastique, cas de la variation du coefficient de frottement.	170
Figure 5.9- Distributions probabilistes des paramètres de retour élastique, cas de la variation du coefficient de frottement, (a) distribution de l'angle θ_1 ; (b) distribution de l'angle θ_2 ; (c) distribution du rayon R.	171
Figure 5.10 - Courbes de retour élastique, cas de la variation de la force de serrage.	172
Figure 5.11- Distributions probabilistes des paramètres de retour élastique, cas de la variation de la force de serrage, (a) distribution de l'angle θ_1 ; (b) distribution de l'angle θ_2 ; (c) distribution du rayon R.	173
Figure 5.12 - Courbes de retour élastique, côté serre-flan.	175
Figure 5.13 - Courbes de retour élastique, côté poinçon.	175
Figure 5.14 - Distributions probabilistes des paramètres de retour élastique, (a) distribution de l'angle θ_1 ; (b) distribution de l'angle θ_2 ; (c) distribution du rayon R.	176
Figure 5.15 - Fenêtres d'admissibilité, cas du retour élastique, dans les espaces physiques (a) et standards (b) des variables aléatoires force de serrage/exposant d'écrouissage.	178

<i>Figure 5.16 – Schéma d'une cuve de Hall Héroult à anodes précuites en préchauffage électrique, tirée de [RIC04].</i>	180
<i>Figure 5.17 – Bloc cathodique, images tirées de Goulet 2004 [GOU04].</i>	181
<i>Figure 5.18 – Maillage éléments finis du bloc cathodique, tiré de Goulet 2004, [GOU04].</i>	182
<i>Figure 5.19 – Courbe de montée en température sur le dessus du bloc, tirée de [GOU04].</i>	184
<i>Figure 5.20 - Fenêtres d'admissibilité, valeurs admissibles en fonction des limitations combinées en compression et en traction.</i>	188

Liste des tableaux

Tableau 3.2 - <i>Analogie de discréétisation par éléments finis et par Karhunen Loeve.....</i>	90
Tableau 4.1- <i>Analogie entre les concepts probabiliste et statistique.....</i>	109
Tableau 4.2 - <i>Caractéristiques statistiques des variables aléatoires.</i>	110
Tableau 4.3 - <i>Distribution et concentration des variables aléatoires.....</i>	111
Tableau 4.4 – <i>Principales caractéristiques de la pression de contact.....</i>	119
Tableau 4.5- <i>Propriétés géométriques et mécaniques du modèle.</i>	120
Tableau 4.6 – <i>Principales caractéristiques statistiques de la pression de contact.</i>	125
Tableau 4.7 – <i>Valeurs des sensibilités et des indices de fiabilités de Hasofer et Lind.</i>	133
Tableau 4.8 - <i>Caractéristiques statistiques des variables aléatoires.</i>	136
Tableau 4.9 – <i>Propriétés statistiques, problème thermo-électro-mécanique.</i>	150
Tableau 4.10 - <i>Calcul des indices de fiabilité de Hasofer et Lind</i>	157
Tableau 5.1 - <i>Caractéristiques statistiques des variables aléatoires.</i>	165
Tableau 5.2 - <i>Distribution et concentration des variables aléatoires.....</i>	165
Tableau 5.4 – <i>Valeurs des sensibilités et des indices de fiabilité de Hasofer et Lind.</i>	179
Tableau 5.7 – <i>Valeurs des sensibilités et de l'indice de fiabilité de Hasofer et Lind.</i>	189

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

1 Introduction

1.1 Généralités

Dans le cadre de ce projet de thèse, nous nous sommes intéressés très particulièrement à la modélisation et simulation probabiliste du problème de contact mécanique. On note, dans le cas de ce problème, la présence de plusieurs paramètres à caractères aléatoires et qui présentent souvent une grande variabilité. On entend par grandes variabilités, des variations excédant 10 % de la valeur moyenne. Des valeurs de variabilité supérieures à cette limite mènent inévitablement à une perte de précision importante. Ce caractère aléatoire est particulièrement dû à la complexité des différents phénomènes physiques (thermo-électro-mécaniques) et/ou géométriques intervenant dans le problème de contact. Une meilleure maîtrise de ces paramètres est ainsi basée sur l'utilisation des méthodes stochastiques dont l'objectif principal est d'améliorer la qualité ainsi que l'interprétation des résultats issus des simulations. Pour ce faire, une bonne compréhension et une formulation des principaux phénomènes intervenant dans le problème du contact sont nécessaires.

Différentes approches ont été proposées dans la littérature pour prendre en compte le dit caractère aléatoire. Parmi ces méthodes, la plus populaire est celle de Monte Carlo. Cependant, l'inconvénient principal de cette méthode est son coût en terme de temps de calcul, vue qu'elle se base sur un grand nombre de simulations répétitives du problème

déterministe. D'autres méthodes plus efficaces existent et la plupart d'entre elles nécessitent la résolution d'équations différentielles stochastiques tel le cas de la méthode de perturbation ; des méthodes qui nécessitent la résolution de problème aux vecteurs/fonctions propres le cas de l'expansion de Karhunen Loeve ; enfin, des méthodes basées sur un développement en séries le cas d'une expansion de Neumann.

Les méthodes précitées nécessitent une connaissance des lois d'évolution des variables ou des champs stochastiques. De plus, dans un cas réel, les variables sont souvent bornées, et on ne connaît pas la loi de probabilité associée. Il semble alors judicieux d'utiliser l'arithmétique des intervalles [HAN92] dans le cadre de la résolution des problèmes mécaniques. Nous allons donc appliquer celle-ci sur des problèmes discrets modélisés par éléments finis [ZIE91]. La formulation originelle de la méthode des éléments finis stochastiques concerne les problèmes mécaniques linéaires. Ces derniers se ramènent à la résolution d'un système d'équations classique de type :

$$[K]\{U\} = \{F\} \quad (1.1)$$

où $[K]$ est la matrice de rigidité, $\{U\}$ et $\{F\}$ sont respectivement le vecteur des déplacements et le vecteur des sollicitations. Au cours des dernières années, la méthode des éléments finis stochastiques a fait l'objet de nombreux développements. Elle commence à être utilisée pour résoudre une large gamme de problèmes mécaniques statiques et dynamiques. D'un point de vue probabiliste, la variabilité des paramètres est décrite par des distributions de probabilité. Il est alors approprié d'établir soigneusement la relation qui relie ces distributions et la solution du problème afin de garantir une meilleure prédition

du comportement d'un modèle mécanique donné. On définit alors le problème, dans le cas général, par un modèle éléments finis déterministe auquel on associe des distributions de probabilité des paramètres dans le but de construire la surface de réponse et déterminer ses caractéristiques statistiques.

Il existe plusieurs approches stochastiques qui permettent de quantifier l'influence de la variabilité des paramètres d'entrée sur la réponse. Les méthodes les plus développées sont :

- i- La méthode de perturbation applicable aux problèmes généraux non linéaires qui permet la prise en compte de faibles variabilités des paramètres où l'approximation de la réponse est limitée au deuxième ordre.
- ii- Une approche basée sur l'expansion de Neumann est utilisée comme un processus particulier de résolution du système d'équations stochastique. Ce système est le résultat d'un couplage entre deux types de discrétisations dont la première est celle de la méthode des éléments finis déterministe tandis que la seconde correspond à la discrétisation de variables aléatoires. Cette dernière constitue une approche stochastique indispensable dans la formulation de la méthode des éléments finis stochastiques. Elle rassemble différentes techniques et la majorité d'entre elles sont basées sur une expansion orthogonale dans l'espace algébrique. On évoque ici la méthode de Karhunen Loeve (KL) et la méthode d'estimation linéaire optimale (OLE).

iii- Finalement une approche connue sous le nom d'approche directe qui utilise la technique de Monte Carlo. Cette approche sert généralement comme référence pour les approches stochastiques citées précédemment.

1.2 Problématique

Le problème de contact mécanique est généralement défini comme étant le contact entre des corps interagissant selon les principes de la mécanique des milieux continus. Les difficultés principales associées à ce problème proviennent de la non connaissance *a priori* des conditions de contact à l'interface. Celles-ci sont donc qualifiées de conditions évolutives. De plus, les non-linéarités provenant des inéquations de contact s'ajoutent aux non-linéarités géométriques et matérielles, augmentant ainsi la complexité du problème à résoudre.

On distingue généralement deux grandes classes de contact mécanique selon la présence ou non de frottement à l'interface. L'hypothèse de contact sans frottement simplifie grandement le problème puisque l'interaction entre les conditions de contact et l'évolution des conditions de frottement n'a plus à être prise en compte dans la formulation mathématique. Dans ce contexte bien particulier, la composante tangentielle de la contrainte nominale à l'interface est nulle, ceci réduit l'étude au calcul de la composante normale.

L'hypothèse simplificatrice évoquée précédemment n'est pas toujours valable. En effet, la grande majorité des interfaces de contact nécessite la prise en compte du frottement. De plus, la topologie des surfaces (Figure 1.1) influe de manière importante et continue sur la nature du contact mécanique. La rugosité, qui est aléatoirement distribuée

sur les surfaces de contact agit directement sur le comportement à l'interface. Ainsi, il est naturel que certaines grandeurs caractéristiques du comportement de l'interface aient un caractère aléatoire.

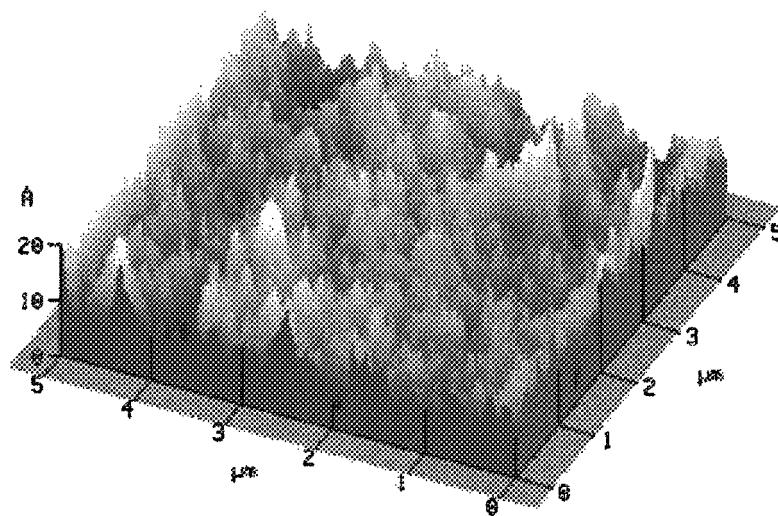


Figure 1.1- Schéma de la topologie d'une surface mécanique [Institut d'optique - Orsay].

Le meilleur exemple à citer est le coefficient de frottement μ . Ce coefficient est généralement affecté par la rugosité des surfaces, la vitesse de glissement (Figure 1.2), les conditions de lubrification, la température moyenne à l'interface ainsi que la pression de contact. A ce titre, il constitue un paramètre de grand intérêt dans l'établissement d'un modèle probabiliste de contact avec frottement.

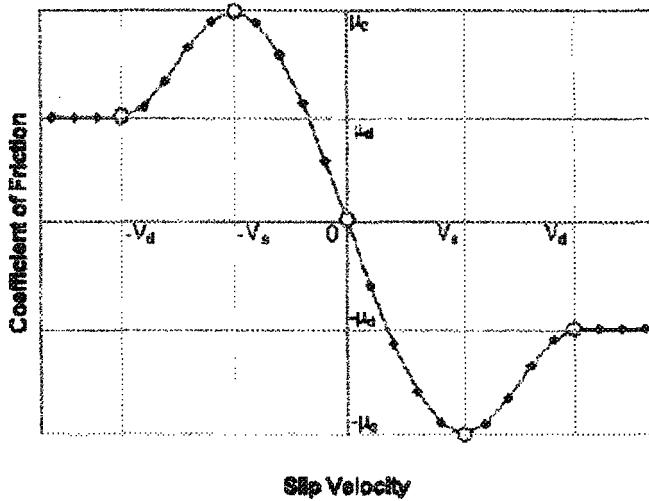


Figure 1.2- Variation du coefficient de frottement en fonction de vitesse de glissement, tirée de Laliberté 2004 [LAL04].

Étant donné que les variations citées précédemment sont souvent bornées et leurs lois de distribution sont souvent inconnues. Il semble alors judicieux de prévoir des méthodes de discrétisation adaptées. Ces méthodes doivent permettre de considérer plusieurs paramètres fluctuants avec des taux de dispersion qui excèdent les 10% car au-delà de cette limite, les fluctuations des paramètres d'entrée engendrent une dégradation importante de la qualité de la solution déterministe.

La non différentiabilité des inéquations de contact et de frottement à l'interface, la méconnaissance *a priori* des points de contact et par conséquent, des intensités de contraintes, font de ce type de problème l'un des plus complexes à modéliser et à résoudre dans le cadre de la mécanique des solides. De plus, le caractère fluctuant des paramètres ainsi que les difficultés qu'on rencontre pour le maîtriser nécessitent une prise en compte

des variabilités dans la formulation du problème de contact mécanique avec frottement et l'utilisation de méthodes spécifiques telles que la méthode des éléments finis stochastiques.

1.3 Objectifs

Ce travail de recherche s'attache à trois objectifs principaux. Le premier consiste à mener une étude du problème de contact mécanique avec frottement. Cette étude a la particularité de prendre en considération l'aspect aléatoire des paramètres qui interviennent dans les lois et les équations régissant le problème de contact. Un couplage fiable entre les méthodes stochastiques et la méthode des éléments finis classique, en vue d'une modélisation de ce problème, sera non seulement l'un des objectifs supplémentaires de notre travail, mais aussi une étape indispensable.

L'élaboration d'un outil informatique générique, qui traduit nos développements, sera notre deuxième objectif. Cette tâche consiste à intégrer cet outil dans le noyau de calcul par éléments finis FESh++ [MAR05], [GOU04] et [RIC04].

Quant au troisième objectif, il vise l'analyse de la fiabilité et la robustesse des méthodes utilisées. Plus particulièrement, il consiste à quantifier l'influence de l'incertitude des variables aléatoires sur les prédictions des résultats sélectionnés.

1.4 États des connaissances

Dans cette section, on s'intéresse à la présentation des principaux travaux de recherches effectués dans le but d'étudier le problème général de contact mécanique. Par la suite, un résumé des principales méthodes probabilistes et stochastiques est établi.

1.4.1 Problème général du contact mécanique

L'étude et la résolution analytique du problème de contact mécanique datent de 1882 avec les travaux de Hertz [HER82]. En utilisant une démarche analytique et en s'appuyant sur l'élasticité linéaire pour les cas de contacts linéaires ou ponctuelles, ces travaux auront permis d'évaluer originellement les phénomènes d'écrasement, les surfaces de contact ainsi que les pression de contact. La plupart des solutions analytiques proposées supposent un contact sans frottement, des zones de contact connues *a priori* et des formes géométriques simples. En effet, le problème général de l'équilibre d'un solide élastique linéaire en contact sans frottement contre une fondation rigide est posé par Signorini [HAS83]. Se basant sur ce problème, les travaux de Duvaut et Lions [DUV76] ont permis de prendre en compte les lois de frottements dans l'écriture des formes variationnelles pour que, quelques années plus tard, la question liée à l'existence et à l'unicité de la solution du problème de contact mécanique puisse être définitivement établie [ODE83], [ODE83a]. En effet, le calcul des formes variationnelles et le développement de techniques de résolution numérique avancées ont permis de traiter des problèmes de contact de plus en plus complexes. A titre d'exemple, la méthode des éléments finis permet la discrétisation de surfaces de formes quelconques et la prise en compte aisée des diverses conditions aux limites. Elle offre ainsi un outil de calcul puissant pour l'étude des problèmes de contact. Ces techniques s'appuient sur une modélisation simplifiée du contact et s'inspirent bien souvent des méthodes employées en dynamique des structures. Cependant, d'une façon générale, elles se heurtent à des difficultés qui sont, d'une part le traitement des conditions

de contact de façons simples, et d'autre part la détection efficace des zones de contact. Les positions de ces dernières doivent en effet être évaluées à chaque pas de temps [TOU00].

1.4.2 Problème général de la mécanique probabiliste

Pour le traitement des problèmes mécanique avec incertitudes, qu'ils soient expérimentaux ou numériques, l'approche qui a naturellement été utilisée en premier lieu est basée sur le principe de l'échantillonnage. La méthode de Monte Carlo [LEM05], qui est presque systématiquement retenue en tant que référence, est la plus simple mais aussi la plus coûteuse, puisqu'il s'agit de choisir aléatoirement des échantillons, en nombre suffisamment important pour obtenir des distributions significatives des caractéristiques statistiques des paramètres de sortie. Le nombre d'échantillons est donc généralement très élevé, et celui-ci augmente avec le nombre de paramètres fluctuants [GHA99].

Pour gagner en efficacité, la mise en œuvre de cette méthode, nécessite des techniques d'échantillonnage numériques des processus et des champs stochastiques, stationnaires ou non (en temps), homogènes ou non (en espace), gaussien et non gaussien [MOR02]. Il est donc intéressant de réfléchir à un choix judicieux de l'une de ces techniques, afin d'obtenir une convergence rapide et un spectre de solution représentatif.

Une grande part des recherches actuellement en cours pour traiter les problèmes de structure ayant des paramètres incertains sont occupées par l'intégration de méthodes statistiques dans des méthodes numériques existantes. Parmi celles-ci la méthode des éléments finis stochastiques est évidemment privilégiée, puisqu'elle commence à être reconnue et utilisée à la fois par le monde de la recherche et le monde industriel. L'objectif le plus répandu, qui est en accord avec l'aspect prévisionnel des codes éléments finis, est de

trouver, en se basant sur des variations connues des valeurs des paramètres d'entrées, les dispersions des paramètres de sortie.

Ghanem et Kruger [GHA96] ont reporté les bases et le principe des éléments finis stochastiques. En plus de la discrétisation de la structure qui est identique à celle réalisée pour le traitement du problème déterministe, on utilise une décomposition en série des champs stochastiques, tronquée à un certain ordre suivant la précision désirée. Il y a deux niveaux de description de l'aspect stochastique du problème. Le premier, consiste à considérer les caractéristiques de la structure comme étant des champs stochastiques connus. Dans ce cas, on utilise généralement une décomposition de Karhunen Loeve, qui est analogue à la superposition modale utilisée en calcul des structures, puisque cette décomposition a des propriétés remarquables d'orthogonalité et de convergence. Le second niveau concerne le champ stochastique formé par la solution aux nœuds de la structure. Dans ce cas, la décomposition dite de Chaos polynomial est utilisée. Ainsi, pour l'étude d'une structure possédant n degrés de liberté associée à une décomposition de Chaos polynomial d'ordre p , on obtient un système linéaire d'ordre $n.p$. Le choix des algorithmes de résolution et de stockage appropriés constitue le point clé du développement de cette méthode.

1.4.3 Notations et définitions

Dans un modèle mécanique de type éléments finis en déplacements, la variabilité des données apparaît dans le vecteur sollicitation et la matrice de rigidité pour les entrées et dans le vecteur solution (déplacements nodaux) pour les sorties.

Si le fonctionnement d'un système mécanique est représenté par un ensemble fini de paramètres, le vecteur des variables aléatoires H_i est inclus dans celui. Cependant, la méthode des éléments finis est une méthode de discrétisation d'un milieu continu et la variabilité existe aussi bien au niveau du milieu continu qu'à celui du milieu discrétisé. Il se pose donc une question de représentation d'un champ aléatoire et de sa discrétisation qui est différente de la discrétisation spatiale. La discrétisation stochastique consiste alors en la construction d'un vecteur H_i de variables aléatoires corrélées. Considérons une fonction $H(x, t, \omega)$ de l'espace x , du temps t et de l'aléa ω . Ce champ aléatoire est représenté par un vecteur $\{H(\omega)\}$; dont les composantes, corrélées ou non sont :

$$\{H(\omega)\} = \begin{Bmatrix} h_1(\omega) \\ h_2(\omega) \\ \vdots \\ \vdots \\ h_n(\omega) \end{Bmatrix} \quad (1.2)$$

Les coefficients de corrélation correspondant à chaque combinaison de variables aléatoires sont représentés par la matrice carrée symétrique suivante :

$$[\rho] = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \dots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \dots & \dots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

ρ est le coefficient de corrélation défini dans le cas général par l'expression:

$$\rho(h_i, h_{i+1}) = \frac{\text{cov}(h_i, h_{i+1})}{\sigma_{h_i} \sigma_{h_{i+1}}} \quad (1.4)$$

où $\text{cov}(H_1, H_2)$ est définie par :

$$\begin{aligned} \text{cov}(H_1, H_2) &= E(H_1 H_2) - E(H_1)E(H_2) \\ &= E[(H_1 - E(H_1))(H_2 - E(H_2))] \\ &= \mu_{1,1} \end{aligned} \quad (1.5)$$

- **Espérance, variance, covariance et écart type**

i- On définit l'espérance mathématique par :

$$E(H) = \sum_{i=1}^n h_i P(h_i) \quad (1.6)$$

où P est la probabilité de la valeur h_i

ii- La variance traduit la dispersion de la distribution de la variable aléatoire autour de sa valeur moyenne. Étant un carré, la dimension de la variance n'est pas celle de la moyenne. C'est pourquoi on utilise plus souvent l'écart type, noté σ , qui est la racine carrée de la variance. Elle est définie par :

$$V(H) = E((H - E(H))^2) = E(H^2) - E(H)^2 = \sigma^2 \quad (1.7)$$

iii- La covariance peut être vue comme le moment centré conjoint d'ordre un de deux variables aléatoires. Si ces dernières sont indépendantes, alors leur variance est nulle (mais la réciproque n'est pas vraie en général).

1.4.4 Discrétisation des variables aléatoires

La discrétisation stochastique des variables aléatoires constitue un ingrédient important de la méthode des éléments finis stochastiques. Elle concerne tous les champs : les propriétés du matériau, la géométrie, les chargements. Elle peut être effectuée sur une base de discrétisation géométrique en choisissant des valeurs nodales physiques $h_{i(\omega)}$ en des noeuds. Mais elle peut également être effectuée à l'aide de développements en série sur la base de fonctions bien choisies.

Un processus aléatoire (ou stochastique), représentant un champ aléatoire, est également une famille de variables aléatoires $H(x)$. Une description simple du processus est obtenue à partir des deux premiers moments, quand ils existent, et qui sont donnés par :

La valeur moyenne : $\bar{H}(x) = E[H(x)]$

La covariance : $C_H(x_1, x_2) = \text{cov}[H(x_1), H(x_2)]$

La covariance traduit la dépendance spatiale du processus entre deux points x_1 et x_2 . Elle porte, dans ce cas, le nom de fonction d'autocovariance dite aussi d'autocorrélation. Une telle fonction est symétrique, définie positive et est définie par :

$$\begin{aligned} R_H(x_1, x_2) &= E[H(x_1)H(x_2)] \\ &= C_H(x_1, x_2) + E[H(x_1)]E[H(x_2)] \end{aligned} \tag{1.8}$$

Soit $H(x, \omega) \in D$, un champ aléatoire multidimensionnel défini dans le domaine D .

On considère que le champ est complètement décrit par sa moyenne \bar{H} , par sa variance

$\sigma^2(x)$ et par sa fonction d'autocorrélation $C(x_1, x_2)$. Soit $\{H\}$, le vecteur des variables aléatoires qui décrivent le champ aléatoire. Toutes les méthodes de discréétisation utilisées relient H à $\{H\}$ moyennant une transformation linéaire. Pour un champ aléatoire gaussien, $\{H\}$ est aussi gaussien et, par conséquent, complètement défini par sa moyenne $\{\bar{H}\}$ et sa matrice de covariance $[C_H]$.

On distingue, par la suite, trois grandes familles de méthode de discréétisation qui se limitent généralement à des champs gaussiens.

1.4.4.1 Méthodes basées sur les points de discréétisation

Ces méthodes consistent à construire une nouvelle variable $\{\chi_i\}$ à partir d'un nombre q de points donnés de $H(x) : \{\chi_i\} = \{H(x_1), \dots, H(x_q)\}$.

Méthode d'estimation linéaire optimale

L'approximation du champ $\hat{H}(x)$ est définie par une fonction linéaire des valeurs nodales $\{\chi_i\} = \{H(x_1), \dots, H(x_q)\}$ comme suit :

$$\hat{H}(x) = a(x) + \sum_{i=1}^q b_i(x) \chi_i = a(x) + b^T(x) \chi \quad (1.9)$$

où les fonctions $a(x)$ et $b_i(x)$ sont déterminées par la minimisation de la variance de l'erreur en chaque point x tel que :

$$Var[H(x) - \hat{H}(x)] \quad (1.10)$$

Cette condition peut être écrite sous la forme :

$\forall x \in \Omega$, minimiser :

$$\text{Var}[H(x) - \hat{H}(x)] \quad (1.11)$$

avec

$$E[H(x) - \hat{H}(x)] = 0 \quad (1.12)$$

Cette dernière équation implique :

$$a(x) + b^T(x)E[\chi] = a(x) + b^T(x)\bar{\chi} \quad (1.13)$$

L'erreur de variance est donnée par :

$$\text{Var}[H(x) - \hat{H}(x)] = E[(H(x) - \hat{H}(x))^2] \quad (1.14)$$

Ce qui implique que :

$$\begin{aligned} \text{Var}[H(x) - \hat{H}(x)] &= \sigma^2(x) - 2 \sum_{i=1}^q b_i(x) \text{Cov}[H(x), \chi_i] \\ &\quad + \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q b_i(x) b_j(x) \text{Cov}[\chi_i, \chi_j] \end{aligned} \quad (1.15)$$

La condition de stationnarité de la dernière équation s'écrit sous la forme :

$$-\text{Cov}[H(x), \chi_i] + \sum_{j=1}^q b_j(x) \text{Cov}[\chi_i, \chi_j] = 0 \quad \forall i = 1,..,q \quad (1.16)$$

Cette équation peut être écrite sous la forme matricielle suivante :

$$-C_{H(x)\chi} + C_{\chi\chi} b(x) = 0$$

où $C_{\chi\chi}$ est la matrice de covariance de χ .

Enfin, l'estimation linéaire optimale est donnée par :

$$\hat{H}(x) = \mu(x) + C_{H,x}^T C_{x,x}^{-1} (x - \bar{x}) \quad (1.17)$$

Point milieu

C'est la méthode la plus simple car elle consiste à approcher le champ dans un élément Ω_e par sa valeur au centre x_c de l'élément :

$$\hat{H}(x) = H(x_c), \quad x \in \Omega_e \quad (1.18)$$

Le champ $\hat{H}(x)$ est entièrement défini par le vecteur aléatoire $\chi = \{H(x_c^1), \dots, H(x_c^{N_e})\}$

où N_e représente le nombre total d'éléments du maillage. Sa valeur moyenne et sa matrice de covariance sont obtenues de la moyenne de $H(x)$, de sa variance et du coefficient d'autocorrection. La réalisation de $\hat{H}(x)$ sera constante sur chaque élément et la discontinuité sera localisée aux éléments de frontière.

Méthode de la fonction de forme

Cette méthode consiste à construire une approximation de $H(x)$ dans chaque élément en utilisant ses valeurs nodales aux coordonnées x_i et des fonctions de forme :

$$\hat{H}(x) = \sum_{i=1}^q N_i(x) H(x_i) \quad x \in \Omega_e \quad (1.19)$$

où x_i sont les coordonnées du nœud i et N_i , la fonction de forme correspondante. Le champ approximé $\hat{H}(x)$ sera obtenu alors à partir de $\chi = \{H(x_1), \dots, H(x_N)\}$, où $\{x_i, i = 1, \dots, N\}$ et de l'ensemble des coordonnées nodales du maillage.

La valeur moyenne et la covariance de l'approximation $\hat{H}(x)$ sont déterminées par:

$$E[\hat{H}(x)] = \sum_{i=1}^q N_i(x) H(x_i) \quad (1.20)$$

$$\text{Cov}[\hat{H}(x_1), \hat{H}(x_2)] = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q N_i(x_1) N_j(x_2) \text{Cov}[H(x_i), H(x_j)] \quad (1.21)$$

Chaque réalisation de $\hat{H}(x)$ représente une fonction continue, ce qui constitue un avantage par rapport à la méthode du point milieu.

1.4.4.2 Méthodes basées sur le calcul de la moyenne

Moyenne spatiale

Dans cette technique, la variation du champ dans un élément est approchée par sa moyenne spatiale :

$$H(x \in D_e, \omega) \Rightarrow \hat{H}(x \in D_e, \omega) = \frac{1}{\text{vol}(D_e)} \int_{D_e} H(x, \omega) dv \quad (1.22)$$

Cette approche introduit des discontinuités inter éléments et tend à sous-estimer la variabilité à l'intérieur de l'élément. Dans le cas unidimensionnel et pour le cas d'une variable aléatoire H décomposée en valeur moyenne \bar{H} et en partie fluctuante $\Delta H(x)$, la partie fluctuante locale sur un élément centré en x_i de longueur L est définie par:

$$\Delta \bar{H}(x_i) = \frac{1}{L} \int_{x_i - \frac{L}{2}}^{x_i + \frac{L}{2}} \Delta H(x) dx \quad (1.23)$$

L'inconvénient de cette méthode est qu'il nous est impossible d'obtenir la fonction de distribution de la variable aléatoire $\Delta H(x)$ sauf pour le cas d'un champ gaussien. Mais elle a l'avantage d'être relativement précise même pour un maillage grossier.

Méthode des intégrales pondérées

Cette technique est utilisée pour construire la matrice de rigidité élémentaire stochastique K^e . Elle ne requiert pas la discrétisation des variables aléatoires et la précision de la solution ne dépend pas du maillage choisi. Elle permet ainsi de s'affranchir des inconvénients majeurs des méthodes de discrétisation et de perturbation.

Il convient de noter, puisque les intégrales pondérées sont des variables aléatoires, que cette méthode implique un genre de discrétisation caché. En effet, pour les problèmes éléments finis, la matrice de comportement qui tient compte des fluctuations des paramètres matériau s'écrit sous la forme suivante:

$$[D(x, y, z)] = [\bar{D}] (1 + \Delta H(x, y, z)) \quad (1.24)$$

où \bar{D} est la matrice construite à l'aide des valeurs moyennes $\bar{H}(x, y, z)$ et $\Delta H(x, y, z)$ la partie fluctuante du champ stochastique.

La matrice de rigidité dans ce cas s'écrit sous la forme :

$$[K] = [\bar{K}] + [\Delta K] \quad (1.25)$$

avec

$$[\bar{K}] = \int_{\Omega} [B]^T [\bar{D}] [B] d\Omega$$

$$[\Delta K] = \int_{\Omega} \Delta H(x, y, z) [B]^T [\bar{D}] [B] d\Omega$$

Or, la matrice $[B]$ est obtenue après dérivation des fonctions de forme, par conséquent elle prend la forme d'un polynôme en fonction des coordonnées (x, y, z) . Donc la matrice $[\Delta K]$ peut être écrite sous la forme polynomiale :

$$[\Delta K_i] = \int_{\Omega^e} P_{ij}(x, y, z) H(x, y, z) d\Omega^e \quad (1.26)$$

où les coefficients du polynôme P_{ij} sont obtenus à partir du produit de $[B]$ par \bar{D} .

Ce polynôme P_{ij} peut alors s'écrire sous la forme :

$$P_{ij}(x, y, z) = \sum_{l=1}^{NWI} a_{ij}^l x^{\alpha_l} y^{\beta_l} z^{\gamma_l} \quad (1.27)$$

où

NWI représente le nombre de monômes dans P_{ij} , auquel on fait correspondre les exposants $\{\alpha_l, \beta_l, \gamma_l\}$. En insérant (1.27) dans (1.26), on obtient l'intégrale pondérée suivante :

$$\chi_l = \int_{\Omega} x^{\alpha_l} y^{\beta_l} z^{\gamma_l} H(x, y, z) d\Omega \quad (1.28)$$

Ce qui implique :

$$[\Delta K_i] = \sum_{l=1}^{NWI} a_{ij}^l \chi_l \approx [\Delta K_i] \quad (1.29)$$

En rassemblant les coefficients a_{ij}^l dans une matrice $[\Delta K_i]$, on peut réécrire la matrice de rigidité stochastique globale sous la forme :

$$[K] = [\bar{K}] + \sum_{l=1}^{NWI} [\Delta K_i] \chi_l \quad (1.30)$$

1.4.4.3 Méthodes basées sur les séries d'expansion

Cette classe de méthodes consiste à représenter le champ stochastique par une série orthogonale impliquant des variables aléatoires et des fonctions déterministes.

Développement de Karhunen Loeve

Ce développement concerne les paramètres aléatoires qui obéissent à un processus gaussien. Un champ aléatoire $H(x, \omega)$ est séparé en une partie constante (sa moyenne \bar{H}) et une partie aléatoire à moyenne nulle décomposée sur la base de N valeurs propres λ_i et fonctions propres $\varphi_i(x)$ de la fonction de covariance :

$$H(x, \omega) \approx \hat{H}(x, \omega) = \bar{H} + \sum_{i=1}^N \sqrt{\lambda_i} \xi_i(\omega) \varphi_i(x) \quad (1.31)$$

où $\xi_i(\omega)$ est un ensemble de variables aléatoires à valeur moyenne nulle et à écart type égale à un ($E[\xi_i(\omega)] = 0$, $E[\xi_i(\omega)\xi_j(\omega)] = \delta_{ij}$).

Les valeurs et fonctions propres sont solutions de l'intégrale homogène de Fredholm de seconde espèce :

$$\int_D C_H(x_1, x_2) \varphi_i(x_2) dx_2 = \lambda_i \varphi_i(x_1) \quad (1.32)$$

Plusieurs tentatives ont été menées pour la résolution analytique de cette intégrale dans les cas 1D et 2D [MAC99] [ANT02] dont une illustration est donnée dans le cas unidimensionnel pour la fonction d'autocovariance [LEM05] :

$C_H(x_1, x_2) = \exp(-c|x_2 - x_1|)$, définie sur l'intervalle $[-a, a]$, où $c = \frac{1}{a}$:

$$\lambda_i = \frac{2c}{\omega_i^2 + c^2} \quad (1.33)$$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{\cos(\omega_i x)}{\sqrt{a + \frac{2\omega_i}{\sin(2\omega_i a)}}} & \text{pour } i \text{ impair} \\ \frac{\sin(\omega_i x)}{\sqrt{a - \frac{\sin(2\omega_i x)}{2\omega_i}}} & \text{pour } i \text{ pair} \end{cases} \quad (1.34)$$

où les ω_i sont les solutions de :

$$\begin{aligned} c - \omega_i \tan(\omega_i a) &= 0 && \text{pour } i \text{ impair} \\ \omega_i + c \tan(\omega_i a) &= 0 && \text{pour } i \text{ pair} \end{aligned} \quad (1.35)$$

La difficulté principale de cette décomposition est la résolution de (1.32), particulièrement si le champ aléatoire n'est pas unidimensionnel. Dans ce cas, une résolution numérique peut être envisagée.

Séries d'expansion orthogonale

L'expansion de Karhunen Loeve a permis de présenter, dans le paragraphe précédent, une représentation efficace des champs aléatoires. Cependant, elle exige la résolution d'un problème intégral de valeur propre pour déterminer l'ensemble des valeurs propres λ_i et des fonctions propres $\varphi_i(x)$ de (1.32). Quand aucune solution analytique n'est disponible, ces fonctions doivent être calculées numériquement par la méthode de série d'expansion orthogonale proposée par Zhang et Ellingwood [ZHA94]. Cette méthode évite le calcul des

valeurs et des fonctions propres en construisant un ensemble complet de fonctions orthogonales sur la base d'une approche utilisée par Lawrence [LAW87].

Supposons que $\{h_i\}$ avec $i=1..\infty$ forme une base de fonctions orthogonale. Pour des raisons de simplicité, on suppose que cette base est orthonormale :

$$\int_{\Omega} h_i h_j d\Omega = \delta_{ij} \quad (1.36)$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker

Le champ aléatoire $H(x)$ est décrit par sa moyenne $\bar{H}(x)$ et sa fonction d'autocovariance C_{HH} . N'importe quelle réalisation du champ peut être décomposée sur la base $\{h_i\}_{i=1}^{\infty}$ sous la forme :

$$H(x) = \bar{H}(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \chi_i h_i(x) \quad (1.37)$$

où χ_i sont des variables aléatoires à moyenne nulle.

En utilisant les propriétés d'orthogonalité de H , on peut montrer que:

$$\chi_i = \int_{\Omega} [H(x) - \bar{H}(x)] h_i(x) d\Omega \quad (1.38)$$

$$(C_{xx})_{kl} = H(\chi_k \chi_l) = \iint_{\Omega} C_{HH}(x) h_k h_l d\Omega d\Omega \quad (1.39)$$

Si le champ H est gaussien, alors (1.38) montre que les χ_i sont des variables aléatoires gaussiennes à moyenne nulle. Le procédé de discréétisation utilisé dans cette approche peut être récapitulé comme suit:

- i- Choix d'un ensemble complet de fonctions orthogonales et du nombre de termes retenus pour l'approximation.
- ii- Calcul de la matrice de covariance par (1.39). Ceci caractérise entièrement χ_i .
- iii- Calcul du champ aléatoire approximé à partir de:

$$\hat{H}(x) = \bar{H}(x) + \sum \chi_i h_i(x) \quad (1.40)$$

1.4.5 Méthodes de résolution

La majorité des problèmes stochastiques introduit des équations différentielles linéaires possédant des coefficients aléatoires, ces coefficients représentent les propriétés du système à l'étude. Le problème peut être formulé en aboutissant à une équation différentielle stochastique (EDS) après avoir représenté les variables aléatoires par leurs formes discrétisées en utilisant l'une des méthodes de discréétisation décrites dans le paragraphe précédent. Selon la manière dont cette variable a été discrétisée plusieurs méthodes se présentent pour résoudre cette EDS. L'analyse de l'état de connaissance nous a permis de distinguer deux classes de méthodes. La première correspond aux développements des méthodes exactes ou approchées de types analytiques telles que la méthode de perturbation qui est basée sur la méthode FOSM "First Order Second Moment"

([COR71] [BOL88] [LIN83]) et la décomposition en série de Neumann ([IBR87] [YAM88] [SHI88] [LEI00]).

L'utilisation de cette dernière méthode repose sur la recherche de l'inverse de l'opérateur du problème en le décomposant en série de Neumann, ce qui limite son application à certains types d'équations différentielles, alors que la méthode de perturbations n'a pas ce type de limitation, puisqu'elle correspond à une décomposition (de type Taylor) du champ de sortie, généralement au premier ou second ordre. La seconde classe correspond aux méthodes dites directes où la technique de simulation numérique de Monte Carlo ([DIT96] [SHR66] [BER87] [BUC88]) est la plus connue et la plus utilisée.

1.5 Méthodologie adoptée

Dans ce paragraphe nous allons présenter les différentes méthodes retenues pour réaliser les objectifs fixés. Nos choix ont été basés sur une large revue bibliographique de la méthode des éléments finis stochastiques. L'analyse de cette dernière nous a permis de distinguer, principalement, deux approches distinctes. La première exploite la technique de résolution de Monte Carlo dite approche directe. La structure de la mise en œuvre informatique est présentée en détails dans le chapitre trois. Les analyses de type Monte Carlo vont être suivies par une étude fiabiliste de quelques problèmes de contact académiques et industriels. Cette étude consiste plus particulièrement à construire les fenêtres de deux variables admissibles de chacun de ces problèmes. La construction de ces fenêtres passe par la définition d'une fonction d'état limite en exploitant la technique de surface de réponse physique. Enfin, les analyses par Monte Carlo se terminent par des

mesures de l'influence de l'incertitude des variables d'entrées sur les prévisions de variables de sorties. Ceci se traduit par des calculs de sensibilité et d'indice de fiabilité.

Pour ce qui est de la seconde approche, elle est basée sur la formulation théorique et la proposition d'une structure informatique de la méthode stochastique de discréétisation spatiale Karhunen Loeve. Cette dernière est largement répondue dans les approches basées sur la MEFS ce qui fait d'elle une des méthodes les plus adaptées pour une mise en œuvre informatique [GHA91], [SUD00]. De plus, cette méthode peut être mise en œuvre dans des codes éléments finis classiques tout en préservant sa structure d'origine. En effet, discréétiser une variable par la méthode de Karhunen Loeve passe par la construction et la résolution d'un système propre en utilisant une discréétisation qui peut être celle d'un maillage éléments finis. Par conséquent, la méthode peut bénéficier des avantages qu'offre la méthode des éléments finis classique.

1.6 Originalité de la thèse

L'originalité des travaux présentés dans cette thèse réside principalement dans la réalisation des analyses à caractère fiabiliste (et non de simples études de sensibilités) basées sur la technique performante et précise de surface de réponse physique. En effet, il a été possible de mettre en place une structure informatique suffisamment générique traduisant l'approche directe proposée. Grâce à cette structure, il était possible de ressortir des résultats d'une grande importance pour des problèmes à échelle industrielle de grande taille. Ces problèmes ont la particularité d'être complexes en présence de plusieurs états physiques et de problème de contact. L'aspect générique de l'approche proposée permet, quand il est nécessaire, d'augmenter le nombre de paramètres aléatoires du problème. En

effet, le cadre théorique général de l'approche est adapté pour toute élévation de niveau de perturbation sur les variables aléatoires.

1.7 Contenu de la thèse

La thèse est composée de cinq chapitres. Après ce premier chapitre d'introduction générale, qui vise à présenter globalement les différentes méthodes dans la littérature nécessaires pour l'analyse probabiliste des problèmes mécaniques en général et à situer la thèse dans son contexte scientifique, le chapitre 2 est consacré à la présentation sommaire d'une formulation déterministe du problème de contact mécanique avec frottement.

Le chapitre 3 est consacré à la présentation détaillée de la méthodologie adoptée. Ce chapitre est subdivisé en deux parties distinctes. La première concerne la technique de simulation de Monte Carlo suivie par une approche de probabilité à caractère fiabiliste. La seconde partie s'intéresse à la formulation théorique et à la mise en place informatique de la méthode stochastique de discrétisation spatiale celle de Karhunen Loeve et de la méthode de résolution de Neumann.

Dans le chapitre 4 sont présentés les résultats de l'analyse probabiliste des simulations à l'aide de la méthode de Monte Carlo de quelques exemples de validation. Deux modèles de contact de Hertz ainsi que deux exemples multiphysiques sont alors étudiés en utilisant les codes par éléments finis ABAQUS et FESh++ pour la résolution du problème déterministe.

Enfin, le chapitre 5 est consacré à l'étude probabiliste (statistique et fiabiliste) de deux applications industrielles avec une attention particulière pour le cas d'un problème de mise en forme d'une tôle en U dans le but de quantifier le phénomène du retour élastique.

La seconde application concerne l'étude des interfaces du bloc cathodique lors de préchauffage d'une cuve d'électrolyse.

Notre travail se finalise par une conclusion générale qui récapitule les principaux points développés dans cette thèse. Nous indiquons également les éventuelles perspectives.

CHAPITRE 2

APPROCHE DÉTERMINISTE DU PROBLÈME DE CONTACT MÉCANIQUE

2 Approche déterministe du problème de contact mécanique

2.1 Généralités

Nous proposons, dans ce chapitre, de présenter de façon succincte une formulation générale du problème de contact. On présentera en particulier les aspects liés à la modélisation d'un problème de contact mécanique avec frottement entre corps élastiques. La discréétisation spatiale utilise la méthode des éléments finis basée sur une formulation variationnelle en déplacement pour résoudre les équations aux dérivées partielles régissant l'équilibre du système. La méthode de résolution du contact est basée sur différents schémas numériques qui seront présentés ci-après. La revue et la formulation du problème sont inspirées des travaux de [MAR01], [TAY88], [PAR97], [WRI99] et [WRI90].

Le contact mécanique est généralement traité comme un problème à deux corps qui interagissent entre eux selon les lois de la mécanique des milieux continus. Dans la formulation éléments finis du problème, on est amené à respecter certaines conditions d'équilibres et d'impénétrabilités entre les deux corps. Cela nécessite l'utilisation d'une approche numérique pour prendre en compte ces conditions. Pour maîtriser la condition d'impénétrabilité, des conditions de contact au niveau de l'interface de contact sont appliquées. Cela se traduit par la mise en place d'un concept de nœuds esclaves et de segment maître. Le principe général de ce concept consiste à désigner des points nodaux appartenant à un segment extérieur du maillage d'un objet comme des nœuds esclaves,

tandis que des segments maîtres sont choisis parmi les segments extérieurs du maillage du second corps (ou du même corps dans le cas d'auto-contact). Si un nœud esclave pénètre un segment maître, une force de contact est alors appliquée pour repousser le nœud vers l'extérieur de cet segment.

D'une façon générale, dans les algorithmes de calcul de contact les plus rigoureux, la contrainte d'impénétrabilité est construite pour chaque paire maître-esclave. Pour chaque itération de résolution, la nouvelle géométrie extérieure est obtenue et l'ensemble de contraintes est mis à jour selon la nouvelle géométrie modifiée. Le processus est reproduit jusqu'à ce que l'ensemble de contraintes devienne stable [TAL94], [BON97].

Benson et al. [BEN90] ont proposé le “*single surface algorithm*” qui est une méthode maître esclave qui peut également traiter le cas d'auto-contact. Au sein de cet algorithme, l'affectation des fonctions maître et esclave s'effectue dynamiquement en se basant sur le résultat d'une recherche des nœuds en contact au voisinage du contact [BEN90], [LIN98] et [REI01].

La tâche la plus difficile dans ce genre d'algorithme est de trouver les paires maîtres esclaves. Cette tâche s'appelle souvent *la détection de contact*. Un nœud esclave n'est presque jamais exactement sur le segment maître. L'algorithme correspondant emploie la stratégie du nœud proche; pour chaque nœud esclave, le nœud le plus éloigné est trouvé, et le segment extérieur auquel il appartient est considéré comme le segment maître. Cette stratégie échoue souvent quand un auto-contact se produit. L'algorithme essaye de détecter la situation défavorable en examinant les normales des segments, mais il ne peut pas manipuler des cas géométriquement complexes [HIR02].

Le module Contacta [MAR01], interfacé avec le code par éléments finis FESh++, permet actuellement de résoudre des problèmes de contact multiphysiques dans un cas déterministe. Les approches qu'on propose dans le cadre de cette thèse doivent permettre la prise en compte des variations aléatoires de certains paramètres intervenant dans les algorithmes de résolution du contact. Ces paramètres seront les résultats soit d'un échantillonnage soit d'une discrétisation spatiale. Dans le cadre de ce projet, deux méthodes indépendantes sont étudiées à cet effet à savoir la méthode de Monte Carlo et la méthode de discrétisation de Karhunen Loeve.

Il est à noter que l'algorithme général de résolution numérique du problème mécanique demeure transparent par rapport à la manière adoptée pour discrétiser la variable aléatoire. Par conséquent, le système d'équations issu de la discrétisation par éléments finis garde toujours la même structure.

2.2 Notations et définitions

Soient deux corps élastiques représentés par des domaines internes Ω^1 , Ω^2 de frontière $\Gamma = \Gamma^1 \cup \Gamma^2$. Soit \vec{n} la normale extérieure à Γ . Chaque frontière est divisée en trois parties disjointes Γ_u , Γ_f et Γ_c . Sur la partie Γ_u , on impose un champ de déplacement \vec{U} , sur Γ_f on impose des forces surfaciques \vec{f}_s . La frontière Γ_c est candidate au contact, on note alors \vec{f}_c les forces surfaciques de contact telles que :

$$\Gamma^i = \Gamma_u^i \cup \Gamma_f^i \cup \Gamma_c^i \quad \text{et} \quad \Gamma = \Gamma^1 \cup \Gamma^2 \quad (2.1)$$

Le domaine global d'un corps donné est représenté par l'union de son domaine interne et de sa frontière :

$$\overline{\Omega}^i = \Omega^i \cup \Gamma^i \quad i=1..2 \quad (2.2)$$

où Γ^i est la frontière de corps i .

La description d'une coordonnée actuelle \vec{x} de chacune des particules, appartenant au domaine $\overline{\Omega}^i$, $i=1..2$, en fonction de sa coordonnée de référence \vec{X} sera donnée par :

$$\vec{x} = \vec{\varphi}(X, t) \quad (2.3)$$

où φ est une application bijective définie par :

$$\vec{\varphi}(X, t) = \vec{X} + \vec{u}(X, t) \quad (2.4)$$

où $\vec{u}(X, t)$ représente le champ de déplacement associé à chaque particule sur l'intervalle $[0, t]$.

La Figure 2.1 représente le schéma de contact entre deux points \vec{x}^1 et \vec{x}^2 appartenant respectivement aux frontières de contact Γ_c^1 et Γ_c^2 .

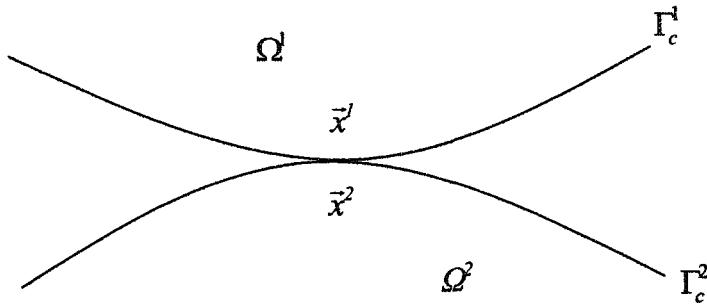


Figure 2.1- Schéma de contact entre deux points.

On définit dans la Figure 2.2, au niveau du point de contact, le repère $R_2 : (\vec{n}, \vec{\tau}^1 \text{ et } \vec{\tau}^2)$ lié à la frontière de contact Γ_c^2 .

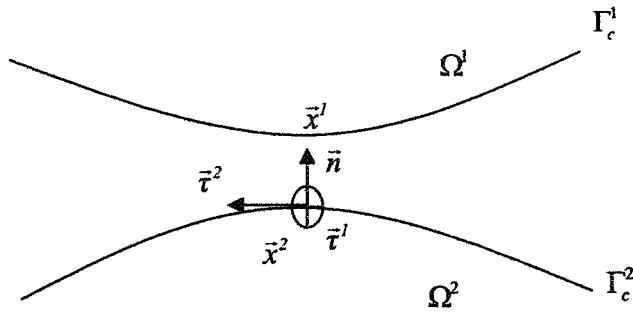


Figure 2.2- Définition des repères liés aux points de contact.

2.3 Équation d'équilibre d'un milieu déformable

Considérons, dans la configuration C_i , un solide dans R^3 , de domaine intérieur Ω et de surface extérieure Γ . Le solide est soumis à diverses sollicitations extérieures telles que des déplacements \bar{u} imposés sur une partie du contour Γ_u , des forces volumiques \vec{f}_v et des forces surfaciques \vec{f}_s , appliquées sur une partie du contour Γ_s qui est le complémentaire de Γ_u . Les forces surfaciques peuvent provenir de chargements imposés \vec{f}_σ ou d'efforts de contact \vec{f}_c . On désigne par Γ_σ la partie du contour sur laquelle est appliquée \vec{f}_σ et par Γ_c la partie du contour sur laquelle est appliquée \vec{f}_c . L'ensemble de ces sollicitations génère un champ de contrainte dans le solide dont l'équilibre est régi par les équations :

$$\left. \begin{array}{ll} a. & \operatorname{div} \sigma + \vec{f}_v = 0 & \text{dans } \Omega \\ b. & \sigma \cdot \vec{n} = \vec{f}_s & \text{sur } \Gamma_s \\ c. & \bar{u} = \bar{\bar{u}} & \text{sur } \Gamma_u \end{array} \right\} \quad (2.5)$$

où σ est le tenseur de contraintes de Cauchy.

2.4 Principe des travaux virtuels

Sur la configuration déformée : on suppose qu'il y a conservation de volume ($v_0 \approx v$) et de masse volumique ($\rho_0 \approx \rho$) entre les deux configurations initiale C_0 et déformée C_t . L'expression du principe des travaux virtuels peut être écrite après avoir intégré par partie la forme forte à partir de (2.5 a.).

$$W = \int_{\Omega} \delta \varepsilon : \sigma \, dv - \int_{\Omega} \delta \bar{\varphi} \cdot \vec{f}_v \, dv - \int_{\Gamma_s} \delta \bar{\varphi} \cdot \vec{f}_s \, d\Gamma_s - \int_{\Gamma_c} \delta \bar{\varphi} \cdot \vec{f}_c \, d\Gamma_c = 0 \quad (2.6)$$

$$W_i - W_e - W_c = 0 \quad (2.7)$$

où

$$W_i = \int_{\Omega} \delta \varepsilon : \sigma \, dv \quad \text{représente le travail des forces internes} \quad (2.8)$$

$$W_e = \int_{\Omega} \delta \bar{\varphi} \cdot \vec{f}_v \, dv + \int_{\Gamma_s} \delta \bar{\varphi} \cdot \vec{f}_s \, d\Gamma_s \quad \text{représente le travail des forces externes} \quad (2.9)$$

$$W_c = \int_{\Gamma_c} \delta \bar{\varphi} \cdot \vec{f}_c \, d\Gamma_c \quad \text{représente le travail des forces de contact} \quad (2.10)$$

On s'intéresse, par la suite, à la détermination de cette dernière expression. On suppose que les deux points \vec{x}' et \vec{x}^2 admettent les mêmes coordonnées à un instant t donné ainsi que les efforts de contact \vec{f}_{c1} et \vec{f}_{c2} respectivement en \vec{x}' et \vec{x}^2 .

Le principe d'action réaction permet d'écrire l'égalité :

$$\vec{f}_{c1} \, d\Gamma_c^1 = -\vec{f}_{c2} \, d\Gamma_c^2 \quad (2.11)$$

La contribution du contact s'écrit :

$$W_c = \int_{\Gamma_c^1} (\delta \vec{\varphi}_c^1 - \delta \vec{\varphi}_c^2) \cdot \vec{f}_c d\Gamma_c^1 \quad (2.12)$$

où

$\delta \vec{\varphi}_c^i$ la composante de $\delta \vec{u}_c^i$ portée par la normale $N_j^i \quad i = 1, 2 \quad j = 1..3$

avec

$$\delta \vec{\varphi}_c^i = \delta \vec{\varphi} \Big|_{\Gamma_c^i} \quad (2.13)$$

2.5 Formulation du problème de contact

2.5.1 Loi de contact unilatéral avec frottement

Pour prendre en compte le contact avec frottement, il est nécessaire de dissocier les efforts de contact dans la direction normale et dans la direction tangentielle. Pour ce faire, on décompose l'effort de contact \vec{f}_c dans un repère local construit autour de la normale \vec{n} :

$$\vec{f}_c = f_{cN} \vec{n} + f_{cT_\alpha} \vec{\tau}^\alpha \quad (2.14)$$

avec

$f_{cT_\alpha} \quad \alpha = 1, 2$ la composante tangentielle de \vec{f}_c dans le plan de normal \vec{n} selon les vecteurs $\vec{\tau}^1$ et $\vec{\tau}^2$ de la base duale.

f_{cN} la composante normale de \vec{f}_c selon la normale \vec{n} .

Donc la contribution au contact (2.12) peut-être réécrite :

$$W_c = \int_{\Gamma_c^1} (\delta\bar{\varphi}_c^1 - \delta\bar{\varphi}_c^2) [f_{cN}\bar{n} + f_{cT_a}\bar{\tau}^\alpha] d\Gamma_c^1 \quad (2.15)$$

Pour reformuler le dernier terme de l'expression 2.15 dans un contexte de contact qui permet de suivre l'évolution du mouvement à l'interface de contact dans la direction normale, on doit définir une fonction écart $g(\bar{X}^1, t)$, en tout point. Pour ce faire, considérant un point noté P^1 candidat au contact de coordonnée spatiale $\varphi(\bar{X}^1, t)$ et le point \bar{P}^2 de coordonnée $\varphi(\bar{X}^2, t)$ qui est sa projection orthogonale sur le corps cible. La pénétration $g(\bar{X}^1, t)$ associée au point \bar{P}^1 à l'instant t est défini par :

$$|g(\bar{X}^1, t)| = \min_{P^2 \in \Gamma_c^2} \|\varphi(\bar{X}^1, t) - \varphi(\bar{X}^2, t)\| \quad (2.16)$$

Dans le cas bidimensionnel et pour des contours discrétisés à l'aide de segments à deux nœuds, les quantités définies précédemment sont illustrées par la Figure 2.3.

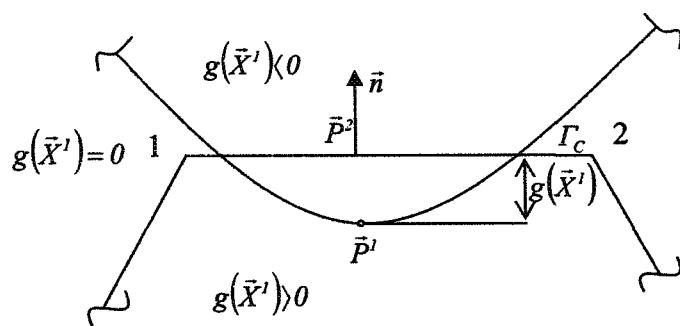


Figure 2.3 - Définition de la fonction pénétration $g(x)$.

En utilisant la définition de cette fonction de pénétration on obtient une version compacte du P.T.V. (voir les travaux de Marceau [MAR01]) telle que :

$$\sum_{k=1}^2 \left(\int_{\Omega_k} \delta \mathcal{E}_k : S_k \, dv - \int_{\Omega_k} \delta \bar{\varphi}_k \, \vec{f}_{v_k} \, dv - \int_{\Gamma_{s_k}} \delta \bar{\varphi}_k \, \vec{f}_{s_k} \, d\Gamma_s \right) + \int_{\Gamma_c^1} [\delta \bar{g} \, \vec{f}_{cN} + \delta \bar{u}_{T_a} \vec{f}_{cT_a}] \, d\Gamma_c^1 = 0 \quad (2.17)$$

Le problème général de l'équilibre d'un corps élastique en contact sans frottement sur une fondation rigide est posé par Signorini en 1933. Ainsi, lors du contact entre deux corps, les conditions de contact unilatéral de type Signorini doivent être satisfaites sur l'ensemble de la frontière de contact Γ_c . Ces conditions se traduisent par l'expression des trois ingrédients suivants :

- i* - la non-pénétrabilité des corps en contact ;
- ii* - leur réaction répulsive pendant le contact ;
- iii* - la condition de surface libre en absence de contact.

Plusieurs formulations équivalentes des conditions de Signorini existent [LIN05]. Nous présentons ici une formulation de type Kuhn-Tucker. Une illustration graphique de ces relations est donnée à la Figure 2.4.

- a.* $g(x) \leq 0$
 - b.* $f_{cN}(x) \geq 0$
 - c.* $f_{cN}(x)g(x)=0$
 - d.* $f_{cN}(x)\dot{g}(x)=0$
- (2.18)

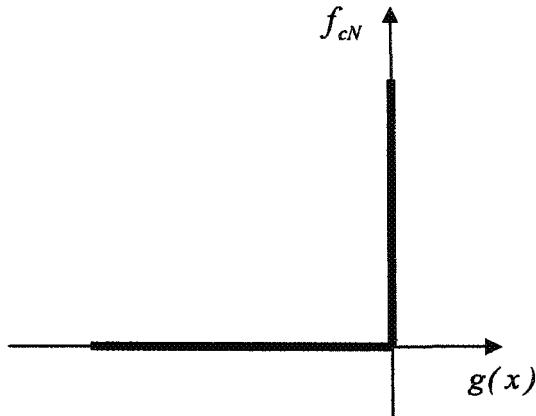


Figure 2.4- Lois de contact, illustration graphique.

Dans la direction tangentielle, les relations de contact sont régies par la loi de frottement. Plusieurs modèles ont été proposés pour rendre compte du frottement entre solides. Le modèle le plus largement utilisé dans les applications faisant intervenir du contact avec frottement est le modèle de Coulomb en raison de sa simplicité. Les lois de frottement sont l'expression des ingrédients suivants :

- i - l'effort tangentiel résultant f_{cT} doit vaincre un seuil de résistance pour déclencher le glissement ;
- ii - cette résistance est proportionnelle à l'effort normal, f_{cN} , via un coefficient de frottement μ .

Dans le cas du modèle de Coulomb, l'effort tangentiel est lié à l'effort normal par les relations :

$$\begin{cases} \|f_{cT}\| \leq \mu f_{cN} & \text{contact adhérent} \\ f_{cT} = \mu f_{cN} \frac{\vec{V}_t}{\|\vec{V}_t\|} & \text{contact glissant} \end{cases} \quad (2.19)$$

où

μ désigne le coefficient de frottement ;

\vec{V}_t désigne la vitesse tangentielle relative des corps en contact.

Une illustration graphique de ces relations est donnée à la Figure 2.5

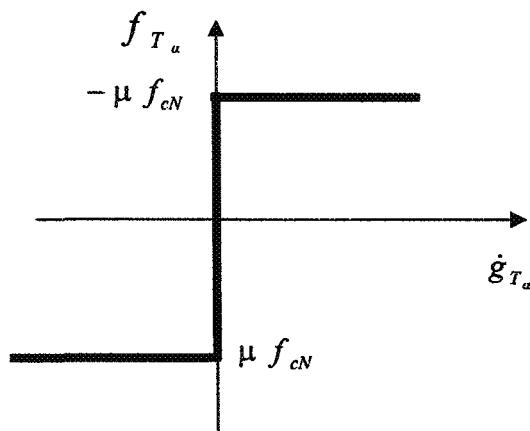


Figure 2.5- Lois de frottement avec \dot{g}_{T_a} représente la vitesse de glissement.

2.5.2 Méthode de régularisation

Différentes techniques de régularisation ont été développées pour les problèmes de contact. Dans ce qui suit, nous exposons sommairement la méthode de pénalisation. Il s'agit de la méthode la plus utilisée encore aujourd'hui en raison de sa simplicité d'implémentation. En effet, cette technique autorise une certaine interpénétration entre les corps en contact. Ceci représente un de ces avantages supplémentaires puisque qu'elle

permet par l'intermédiaire de cette interpénétration de représenter indirectement les phénomènes physiques tels que la présence d'aspérités et l'amorce du glissement.

Les lois précédentes (1.19) contribuent à l'écriture de l'expression de P.T.V. (2.17) sous une nouvelle forme pour l'ensemble des deux corps Ω^1 et Ω^2 :

$$W = \sum_{k=1}^2 \left(\int_{\Omega_k} \delta \varepsilon_k : S_k \, dv - \int_{\Omega_k} \delta \varphi_k \cdot f_{v_k} \, dv - \int_{\Gamma_{s_k}} \delta \varphi_k \cdot f_{s_k} \, d\Gamma_{s_k} \right) + \\ \int_{\Gamma_c^1} (\delta \varphi_c^1 - \delta \varphi_c^2) [f_{cN} + f_{cT_a}] \, d\Gamma_c^1 = 0 \quad (2.20)$$

La méthode de pénalisation consiste à écrire l'effort normal de contact f_{cN} sous la forme :

$$f_{cN} = k_N \langle g \rangle \quad (2.21)$$

où k_N est le paramètre de pénalisation dans la direction normale et $\langle \cdot \rangle$ l'opérateur définissant la partie positive de toute quantité A ($\langle A \rangle = \frac{1}{2} [A + |A|]$).

En utilisant la nouvelle représentation de la force de contact normale (2.21) l'expression (2.20) peut alors être réécrite sous la forme :

$$W = \sum_{k=1}^2 \left(\int_{\Omega_k} \delta \varepsilon_k : S_k \, dv - \int_{\Omega_k} \delta \varphi_k \cdot f_{v_k} \, dv - \int_{\Gamma_{s_k}} \delta \varphi_k \cdot f_{s_k} \, d\Gamma_s \right) + \\ \int_{\Gamma_c^1} [\delta g k_N \langle g \rangle + \delta u_{T_a} f_{cT_a}] \, d\Gamma_c^1 = 0 \quad (2.22)$$

Une représentation graphique de la loi de contact régularisée se trouve à la Figure 2.6 :

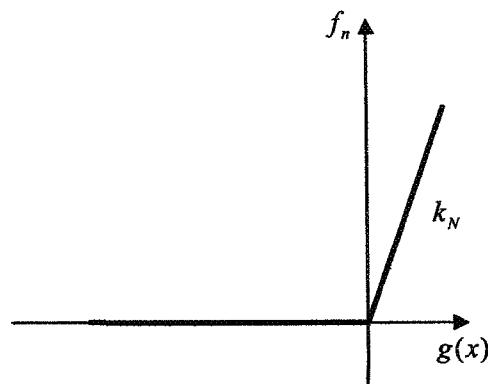


Figure 2.6- Loi de contact régularisée.

L'utilisation de valeurs élevées des coefficients de pénalisation permet de satisfaire la condition de contact (2.18-a.) mais peut provoquer des oscillations numériques. En contre partie, l'utilisation d'une pénalisation trop faible affecte fortement la qualité de la solution (pénétration résiduelle trop élevée).

CHAPITRE 3

APPLICATION DES METHODES PROBABILISTES AU PROBLEME DE CONTACT MECANIQUE

3 Application des méthodes probabilistes au problème de contact mécanique

3.1 Généralités

Dans le chapitre précédent une formulation déterministe sommaire du problème de contact mécanique a été présentée. Les difficultés d'ordres numériques ou analytiques liées à ce type de problème font de lui un domaine de recherche qui reste ouvert. Ce chapitre a pour objectif d'étudier ce même problème en utilisant une approche stochastique. S'appuyant sur la méthode des éléments finis classique et la théorie des probabilités, la méthode des éléments finis stochastiques constitue actuellement une voie de grand intérêt pour l'étude de l'aspect stochastique de certains problèmes physiques complexes. Depuis une dizaine d'années, des travaux de recherches ont été menés pour étudier le problème probabiliste de contact mécanique en particulier. En raison du manque de maturité du sujet, de nombreux travaux ont été publiés. On distingue deux grands axes de recherches. Le premier s'intéresse à l'analyse probabiliste du contact, à l'échelle microscopique, en évaluant l'effet de la rugosité sur le comportement de l'interface. Dans ce domaine, plusieurs méthodes sont utilisées pour inclure l'influence de la rugosité sur la distribution de la pression de contact et des glissements au niveau de l'interface de contact [NAY71], [WHI70]. Les travaux de Kleiber [KLE99] représentent l'une des références de base dans l'étude du microcontact. Ces derniers consistent à prendre en compte la distribution

aléatoire des rugosités au niveau de la zone de contact. En se basant sur la théorie de Hertz couplé avec la théorie du frottement de Mindlin, un modèle élastoplastique est élaboré. Ce modèle est combiné avec une description mécanique des pics de rugosité. Pour calculer les paramètres et les coefficients d'interfaces les auteurs ont fait appel aux travaux de Greenwood, Williamson [GRE66] et McCool [MCC86].

Le second axe de recherche de cette thématique s'intéresse à la modélisation et à la simulation probabiliste du problème de contact. La majorité des travaux concerne l'étude de l'aspect dynamique et expérimental du problème. Oden et Martins [ODE85] ont mené une étude sur le frottement dynamique et développé un modèle continu pour le comportement de l'interface et des algorithmes appropriés pour l'analyse du problème de contact dynamique avec frottement. Des simulations du type Monte Carlo ont également été menées par Yinnon, Buch et Devlin [YIN04] afin d'étudier le même type de problème.

Pour mettre en œuvre une approche probabiliste pour le problème de contact, il faut opérer des choix à deux niveaux. Le premier concerne le schéma de résolution des équations issues de la discrétisation spatiale avec prise en compte des variabilités. Le second concerne l'approche probabiliste proprement dite. A ce niveau, on distingue également deux approches. La première est la méthode de Monte Carlo dite aussi méthode directe tandis que la seconde est dédiée au couplage entre la méthode des éléments finis déterministe et la méthode de discrétisation de Karhunen Loeve couplé elle-même avec la technique de développement en série de Neumann. Compte tenu des objectifs retenus et de la méthodologie adoptée, on distingue dans ce qui suit les étapes de base de la présente étude. Ces étapes dépendent de la démarche retenue pour la simulation probabiliste et aussi

de la manière de la programmation de l'approche dans un contexte orienté objet. Avant d'entrer dans les détails relatifs à la formulation du problème probabiliste du contact mécanique, la Figure 3.1 résume les étapes qui constituent une telle approche.

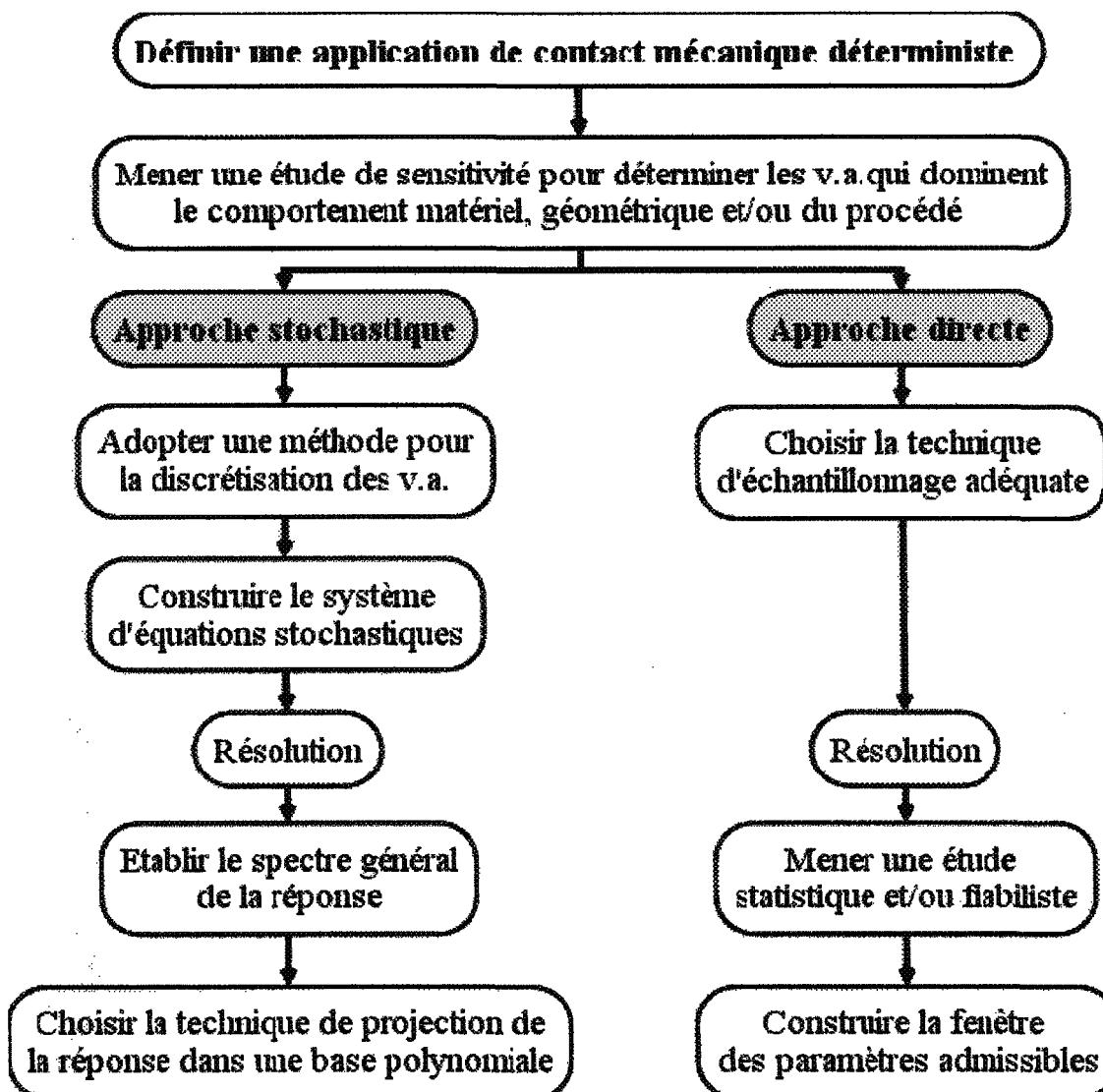


Figure 3.1- Schéma de l'approche probabiliste adoptée.

3.2 La méthode de Monte Carlo

On présente ici les différentes étapes pour l'étude du problème de contact utilisant la méthode de Monte Carlo. Telle qu'elle est décrite au premier chapitre, cette méthode nécessite pour sa mise en œuvre d'importantes ressources informatiques. Nous présentons les notions nécessaires à une telle analyse par Monte Carlo suivie d'une étude fiabiliste du problème. On s'attarde plus particulièrement sur la définition de la fonction de performance, appelée aussi fonction d'état limite. Définir soigneusement cette fonction est d'une grande importance, car elle permet de définir efficacement les fenêtres d'admissibilité dans l'espace des variables aléatoires du problème.

La démarche développée dans le cadre de ce travail est une méthode numérique permettant d'une part de dégager l'influence des paramètres et leurs interactions par l'utilisation de la technique de simulation de Monte Carlo et d'autre part, de construire une fenêtre de faisabilité. L'Algorithme 3-A présente les étapes de la technique de résolution telle qu'elle est utilisée dans les codes de calcul par éléments finis :

Algorithme 3-A : algorithme de simulation utilisant la technique de Monte Carlo.

Boucle sur les N_{MC} valeurs de champ de v. a. $H(H_1, \dots, H_{N_{MC}})$

Boucle sur les pas de chargement

$$F = F + \Delta F$$

$$\{\Delta U_P\} = 0$$

Boucle sur les itérations d'équilibre : $R = F ; [K] = 0$

Boucle sur les éléments $(e) \in (\Omega^1 \cup \Omega^2)$, $r = 0$, $r_c = 0$

Calcul du $[K^e]$

Assemblage

$$[K] = [K] + [K^e]$$

$$R = R + r$$

Fin de boucle sur les éléments

Boucle sur les éléments $(e) \in \Gamma_C^1$

Calcul de la matrice de contact $[K_C^e]$

Assemblage

$$[K] \leftarrow [K] = [K] + [K_C^e]$$

$$R = R + r_c$$

Fin de boucle sur les éléments

Résolution du système

$$[K]\{\Delta U_i\} = R$$

Actualisation de : $\{\Delta U_P\} = \{\Delta U_P\} + \{\Delta U_i\}$

Test de convergence : $\frac{\|\{\Delta U_i\}\|}{\|\{\Delta U_P\}\|} < \varepsilon$

Fin de boucle sur les itérations d'équilibres

Actualisation de : $\{U\} = \{U\} + \{\Delta U_P\}$

Fin de boucle sur les pas de chargement

Spectre de la solution : $\{U\}_n = \{U\}_n + \{U\}; \quad n = 1..N_{MC}$

Fin de boucle sur les N_{MC} valeurs de Monte Carlo

La méthode utilisée consiste à générer des échantillons de variables aléatoires gaussiennes permettant une représentation stochastique des paramètres matériaux et de procédés. Chacune des combinaisons de paramètres a fait l'objet d'analyses à l'aide d'un logiciel par éléments finis. Un module de gestion de scénarios assure le couplage entre l'algorithme de Monte Carlo et ces codes. En raison de la quantité importante des résolutions nécessaires, une procédure pertinente de récupération et de stockage des résultats a été élaborée. Les résultats des simulations sont ensuite analysés en fonction des critères de qualité traduisant le succès du procédé ou la faisabilité de la pièce. En résumé, les principales étapes de la démarche sont :

- 1- Générer un nombre N_{MC} de valeurs de chaque variable aléatoire indépendante.

Pour chaque combinaison de variables aléatoires H_i , $i = 1, \dots, N_{MC}$, on lance une simulation numérique déterministe du problème.

- 2- Appliquer la fonction d'état limite G à tous les échantillons $H^{(p)}$. $G(H^{(p)})$ est une réalisation de la variable aléatoire $G(H)$ dont on vérifiera le signe pour chaque échantillon p .

Appliquer la fonction indicatrice I à toutes les réalisations sachant que :

$$\begin{cases} I[G(H^p)] = 1 & \text{si } G(H^p) \leq 0 \\ I[G(H^p)] = 0 & \text{si } G(H^p) \geq 0 \end{cases}$$

- 3- La probabilité de défaillance pour les N_{MC} simulations est donnée par :

$$P_f = \frac{1}{N} \sum_{p=1}^N I[G(H^p)]$$

3.2.1 Définitions

Les paramètres, qui gouvernent et caractérisent le comportement du problème mécanique, sont regroupés dans des classes de familles. Ce regroupement tient compte des paramètres géométriques, matériaux ou de procédé. On distingue, dans notre cas, trois classes principales de paramètres et variables d'entrées-sorties et d'état qui sont les suivantes :

$F_i(\omega)$: paramètres d'entrée (chargements et déplacements imposés ...);

$A_j(\omega)$: paramètres d'état (caractéristiques géométriques, matériaux ...);

U_k : variables de sortie (déplacement ...).

La fonction permettant de relier ces différents paramètres sera formulée de manière à obtenir une équation de la forme :

$$F(\omega, F_i, A_j, U_k) = 0 \quad (3.1)$$

À chaque réalisation de sortie (associée à l'indice k) correspond un événement appelé scénario. Cet événement sera caractérisé par une fonction de performance G qui permet de relier les variables de sortie et d'entrée telle que le montre la Figure 3.2. Le succès d'une configuration sera traduit par la vérification d'une inégalité de type :

$$G_k(F_i(\omega), A_j(\omega), U_k(\omega)) \geq 0, \quad \forall \omega \quad (3.2)$$

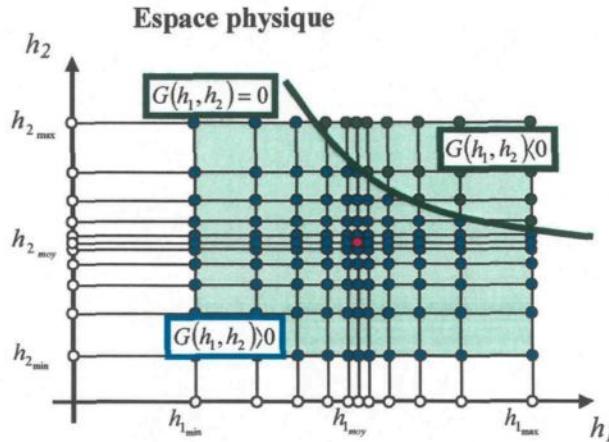


Figure 3.2 - Espace physique.

3.2.2 Hypothèses simplificatrices

L'inégalité représentée par 3.2 rassemble les principales variables aléatoires susceptibles de caractériser et de dominer le comportement d'un produit final. Il est alors important de vérifier l'existence d'une éventuelle relation entre les variables sujettes à des fluctuations, ceci est indispensable pour pouvoir introduire des corrélations. Dans le cas général, une étude analytique ou expérimentale doit être menée afin de mettre en place correctement cette corrélation. Dans le cadre de cette étude, nous nous sommes limités à des variables aléatoires *a priori* non corrélées ce qui nous amène à adopter, entre autres, les hypothèses simplificatrices suivantes :

H1- Utilisation de variables aléatoires indépendantes.

H2- Utilisation des lois de variation gaussienne pour chaque variable aléatoire H_i de moyenne \bar{H}_i et d'écart type σ_{H_i} .

Nous définissons le vecteur aléatoire H qui rassemble n variables aléatoires par :

$$H = (H_1, H_2, \dots, H_n) \quad (3.3)$$

Une illustration simple est faite dans la Figure 3.3 pour définir la notion de domaine de défaillance délimité par deux fonctions d'état limite G_1 et G_2 et contrôlé par deux variables aléatoires H_1 et H_2 .

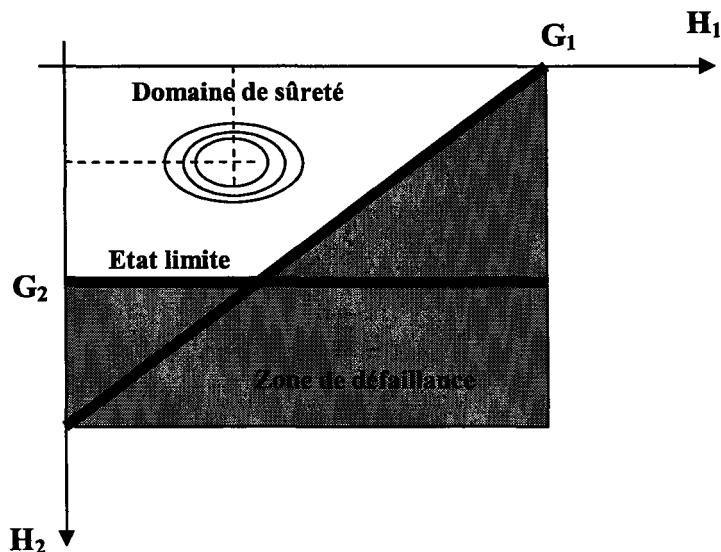


Figure 3.3- Représentation du domaine de défaillance dans l'espace de deux variables aléatoires [LEM05].

où

$G_k(H_n) > 0 \quad n, k = 1, 2$ définit le domaine de sûreté D_s .

$G_k(H_n) \leq 0 \quad n, k = 1, 2$ définit le domaine de défaillance D_f .

$G_k(H_n) = 0 \quad n, k = 1, 2$ définit la surface limite.

La probabilité de défaillance est associée à l'événement $G_k(H_n) \leq 0$ et sera mesurée par :

$$P_D = Prob(G_k(H_n)) \leq 0 \quad (3.4)$$

La fiabilité est définie alors comme le complément de la probabilité de défaillance ($Fiabilité = 1 - P_D$) et est associée à l'événement $G_k(H_n) \gg 0$. Elle sera mesurée par :

$$P_F = P(G_k(H_n) \gg 0) \quad (3.5)$$

3.2.3 Approche de fiabilité en mécanique

L'approche de fiabilité utilisée en mécanique consiste à mettre en œuvre des méthodes largement répandues dans la littérature. Le choix de ses méthodes nécessite la précision de quel contexte se situe l'approche proposée. Il s'agit, plus particulièrement, de faire bénéficier la mécanique de bien des acquis de, la théorie des probabilités, des techniques statistiques du contrôle de fabrication ainsi que de nouvelles méthodes de défaillance et d'évaluation du risque.

En adoptant une approche par les probabilités, les méthodes de fiabilité en mécanique permettant de calculer des estimateurs de la fiabilité tels que :

- indice de fiabilité ;
- sensibilité de la défaillance à la description stochastique des données.

3.2.3.1 Notion d'indice de fiabilité

L'indice de fiabilité est un nombre sans dimension qui nous permet, dans un espace admissible de variables, de se prononcer sur la satisfaction d'une conception donnée. Cet indice sera associé à un choix de données, à un scénario de défaillance et à une règle de dimensionnement. Autrement, le calcul de l'indice de fiabilité nécessite, en général, la recherche du point de défaillance le plus probable appelé aussi point de conception quand il représente un référence pour un dimensionnement.

La première proposition d'un indice de fiabilité est due à Rjanitzyne [RZH49], [RJA59], dans les années 1950. Cependant, c'est Cornell [BEC70] qui a généralisée cette idée. Par la suite, plusieurs autres indices [RAC78] ont été proposés, mais la forme la plus complète est due à Hasofer et Lind [HAL74].

❖ Indice de Rjanitzyne-Cornell

Cet indice, noté β_C est obtenu à partir d'une moyenne m_z et d'un écart type σ_z de la variable de marge notée par :

$$Z = R - S \quad (3.6)$$

$$\beta_C = \frac{m_z}{\sigma_z} \quad (3.7)$$

$$m_z = m_R - m_S \quad \text{et} \quad \sigma_z = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \Rightarrow \beta_C = \frac{m_R - m_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (3.8)$$

où

R résultat aléatoire de sortie.

S variable aléatoire d'entrée.

Graphiquement (Figure 3.4), β_C représente le nombre d'écart types entre le point moyen m_z et l'état limite ($z = 0$). En ingénierie, ceci pourrait se traduire par le décalage de quelques écart types par rapport à la moyenne pour rechercher un état de sûreté. Les valeurs usuelles d'un indice de fiabilité sont de l'ordre de quelques unités.

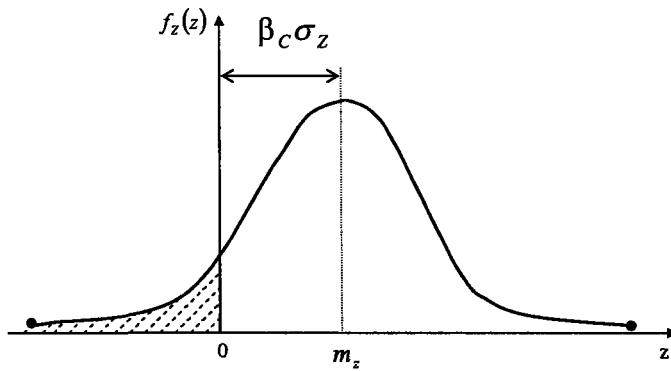


Figure 3.4 – Représentation de l'indice de Cornell.

❖ **Indice de Hasofer et Lind, transformation isoprobabiliste :**

Le calcul de l'indice β_c dans un espace physique de variables aléatoires permet d'avoir un nombre variable et sensible aux caractéristiques statistiques des entrées. Pour pallier à cette variabilité, Hasofer et Lind [HAL74] ont proposé de se placer non pas dans l'espace des variables physiques, mais dans l'espace standard des variables gaussiennes statistiquement indépendantes, de moyennes nulles et d'écart types égales à l'Unité. Ceci, passe par un changement de variables utilisant :

$$u = \frac{h - m_h}{\sigma_h} \quad (\text{Variables réduites gaussiennes}) \quad (3.9)$$

La linéarité de la fonction d'état limite G étant conservée et sera noté par H dans un espace normé.

La Figure 3.5 représente la transformation immédiate de l'espace physique vers l'espace normé (ou espace standard) dans le cas de variables gaussiennes indépendantes :

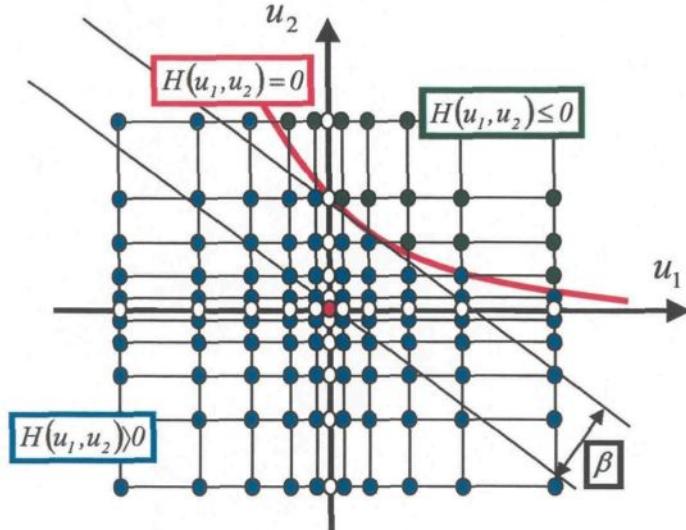


Figure 3.5 - Espace standard.

3.2.3.2 Couplage mécano fiabiliste

Un couplage mécano fiabiliste consiste à associer une procédure de calcul mécanique et une procédure de calcul fiabiliste. C'est un modèle qui repose sur une étude de sensibilité et une analyse fiabiliste d'admissibilité des variables par rapport à une fonction d'état limite donnée. La procédure mécanique de calcul est appliquée à un modèle qui permet d'établir la ou les relations entre des données d'entrée et des variables de sortie (Figure 3.6). Par la suite, cette procédure de calcul est imbriquée dans un algorithme structurée dans le but de prendre en considération des aspects stochastiques par la recherche des paramètres statistiques des variables de sortie. Ceci, passe par une analyse de la sensibilité fiabiliste de la réponse à la variabilité des variables d'entrées. Au premier ordre, une analyse de sensibilité déterministe consiste en un calcul de gradient autour d'un

point alors qu'une analyse de sensibilité fiabiliste a pour but de déterminer le rapport entre les coefficients de variation d'une variable de sortie et ceux d'une variable d'entrée [LEM05], [MML94].

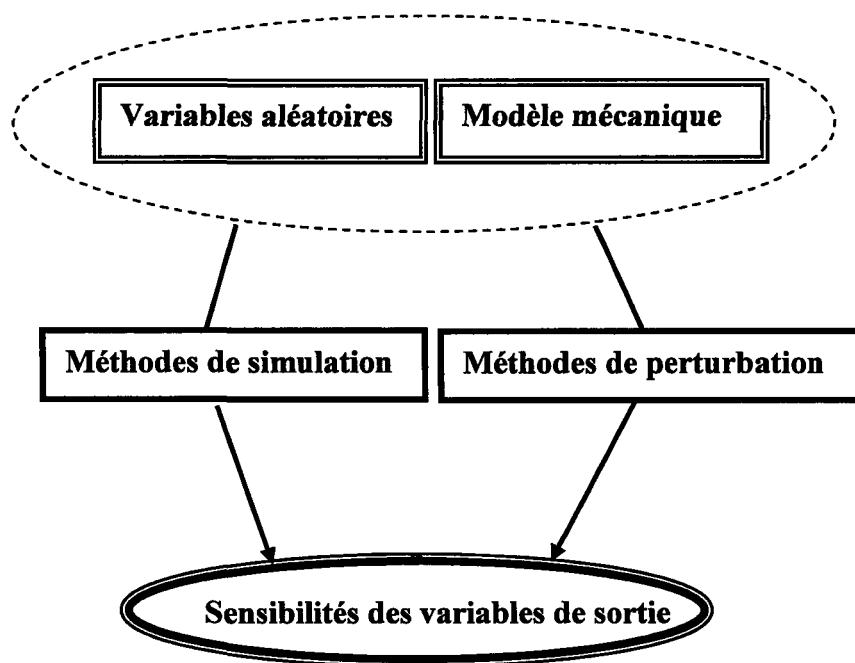


Figure 3.6 - Analyse de sensibilité fiabiliste.

3.2.4 Mise en œuvre informatique

La mise en œuvre informatique de la méthode de Monte Carlo est basée sur une structure, représentée à la Figure 3.7, qui relie d'une façon interactive trois principaux processus. Le premier consiste à la génération des échantillons de variables aléatoires gaussiennes à l'aide d'un outil tel que Matlab. Le deuxième processus consiste à mener une simulation déterministe pour chaque combinaison de paramètres en utilisant des codes éléments finis. Ici il s'agit du code commercial Abaqus Explicit/Standard et du code

maison FESh++. Enfin la troisième étape assure le couplage entre l'algorithme de Monte Carlo avec ces codes ainsi que la récupération et le stockage des résultats dans une base de données. Cette base permet, par la suite, de mener l'analyse fiabiliste de problème traité en fonction des critères de qualités préétablies qui forment des fonctions d'état limite.

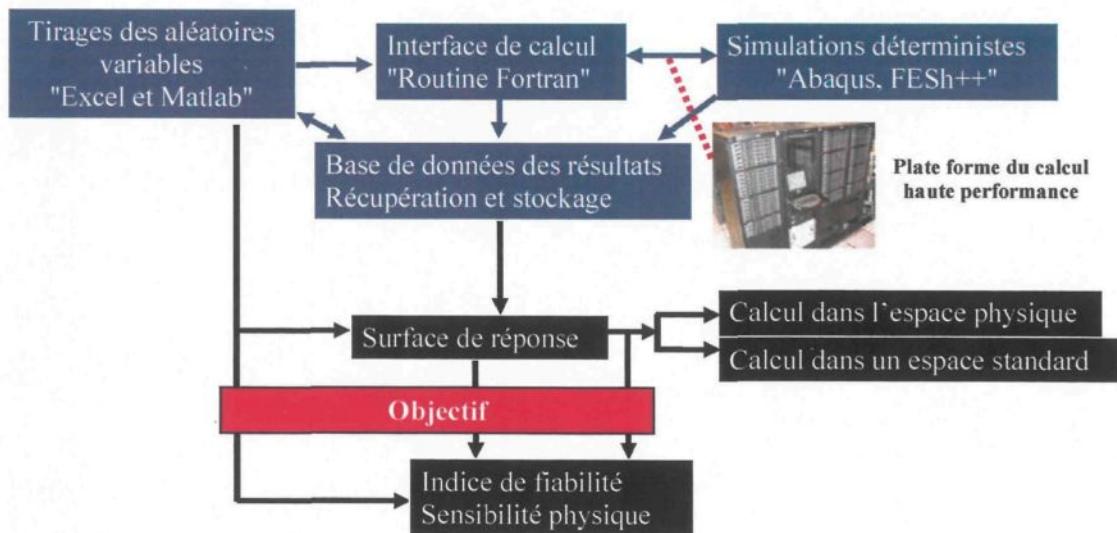


Figure 3.7 - Structure de la mise en œuvre informatique de l'analyse par Monte Carlo.

3.3 Méthode des éléments finis stochastiques

Sous l'effet d'une grande variabilité des paramètres aléatoires, les méthodes conventionnelles d'analyses telle que la méthode de Monte Carlo [LEM05], atteignent rapidement leurs limites. Dans cette section, nous proposons de développer une approche générique permettant de donner quelques éléments utiles à la résolution des problèmes particuliers de contact de nature probabiliste dans un code de calcul par éléments finis classique.

Pour ce faire, nous avons adopté la méthode de Karhunen Loeve [MRA03], [PHO02] comme méthode principale pour la discréétisation des variables aléatoires, ce qui va permettre la prise en compte des grandes variabilités potentielles. En effet, cette méthode présente l'avantage de décomposer le spectre de la réponse en ses parties moyennes et fluctuantes, contrairement à la méthode de Monte Carlo qui permet d'avoir la somme de ces deux parties sans pouvoir les dissocier au cours des résolutions. Le système d'équations obtenu suite à cette discréétisation présente un caractère stochastique. De ce fait, sa résolution nécessite une technique particulière. La méthode de résolution associée à ce type de système (qui utilise la méthode de Karhunen Loeve comme une étape principale pour sa construction) est celle de l'expansion de Neumann [GHA91], [LEM05].

Compte tenu de l'approche retenue qui consiste à exploiter la combinaison de la méthode de Neumann et celle de Karhunen Loeve, cela permet, *a priori*, d'effectuer une projection de la réponse du système en utilisant le polynôme de Chaos (Chaos Polynomial). Cette projection ne peut pas être soigneusement réalisée sauf si on établit

efficacement la relation qui lie la réponse du système (déplacement, déformation, contrainte ...) aux paramètres d'entrées. En effet, si on fait abstraction du fait que le problème étudié soit linéaire ou pas, on pourra éventuellement construire cette relation. Il s'agit donc, dans la plupart des cas, de projeter la réponse sur une base polynomiale ce qui permet d'obtenir un développement en série exact de la réponse du problème. L'approche s'apparente dès lors à une surface de réponse.

On considère maintenant un modèle de contact mécanique qui est décrit par le modèle éléments finis dans le chapitre 2, dont certains paramètres scalaires h_1, \dots, h_N regroupés dans un vecteur $h \in IR^N$, $N \in IN^*$ sont aléatoires. Nous nous intéressons à une observation scalaire de la réponse du système u liée à h par l'intermédiaire de la MEFS. Le problème peut être posé comme suit :

$$\text{Problème 1 : } \left. \begin{array}{c} h \\ + \\ \text{MEFS} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Technique de la surface de réponse}} u : \text{Réponse du système}$$

où MEFS prendra la forme d'une fonction mesurable donnée, définie sur IR^N , à valeurs dans IR , soigneusement déterminée par le modèle éléments finis stochastiques considéré.

La méthode consiste alors à quantifier l'effet de l'incertitude affectant h sur u . Pour ce faire, nous supposons que h peut être convenablement modélisée par une variable aléatoire $H = (H_1, \dots, H_N)$, connue nécessairement par une loi de probabilité P_H .

Dans ces conditions, la MEFS étant toujours mesurable et à valeurs dans \mathbb{IR} . On définit alors une nouvelle variable aléatoire U qui sera le résultat du problème défini par :

$$\overbrace{\begin{array}{c} H \\ \text{Problème 2 : } + \\ \text{MEFS} \end{array}}^{\text{Technique de la surface de réponse}} \Rightarrow U : \text{Réponse du système}$$

Nous s'attardons ensuite à la caractérisation de la variable aléatoire U tout en connaissant le couple (MEFS, H) , tandis que H reste toujours définie par la loi P_H et la MEFS par le modèle éléments finis stochastiques considéré. Caractériser U correctement par une fonction analytique ou une loi de variation, est fortement lié à la complexité du problème et dépend plus particulièrement des contraintes qui lui sont liées telles que :

- MEFS non définie par une expression analytique explicite;
- N non nécessairement petit;
- H suit une loi arbitraire *a priori*.

Finalement, l'approche consiste à projeter la MEFS sur une base de polynôme d'Hermite afin de construire des approximations des premiers moments de U dans le but de quantifier sa dispersion induite par la variabilité de H . La méthode de projection choisie doit garantir un nombre limité d'appels à la MEFS dans le but de minimiser le coût de calcul.

3.3.1 Discrétisation des variables aléatoires

Dans la méthode des éléments finis déterministe classique, la discrétisation constitue une étape primordiale qui contribue à la construction du système matriciel. Ce dernier, une fois conditionné, permet de construire la réponse éléments finis après résolution. Si on associe la probabilité et l'aléa à certains paramètres qui constituent ce système, alors la discrétisation éléments finis seule devient insuffisante pour produire le nouveau système matriciel qui, *a priori*, admet un caractère aléatoire ou stochastique absent du système des équations. Des questions se posent alors sur la manière qu'on doit adopter pour faire intervenir ce caractère stochastique et construire notre système matriciel en fonction de ce dernier. C'est à ce niveau que la discrétisation des variables aléatoires devient utile. En effet, le principe général des méthodes de discrétisation telle que l'approximation de Galerkin sera conservé tandis que les représentations des champs seront traitées différemment.

3.3.1.1 Méthode de Karhunen Loeve

Telle qu'elle a été introduite dans le premier chapitre cette méthode est un cas spécial de Séries d'Expansion Optimal [SUD00], [MRA03], où les fonctions d'interpolation sont représentées par les fonctions propres d'une équation de Fredholm qui admet comme noyau la fonction de covariance. Le but de cette expansion est d'établir une évolution spatiale de la variable aléatoire. On représente ainsi la variable par une expansion en séries impliquant un ensemble de fonctions déterministes construites à partir des coefficients aléatoires correspondants. L'emploi de l'expansion de Karhunen Loeve avec des fonctions déterministes, dans une base orthogonale et des coefficients aléatoires non corrélés, est

d'un grand intérêt en raison de sa propriété bi-orthogonale, c'est à dire, la base des fonctions déterministes et les coefficients aléatoires correspondants sont orthogonaux. D'une part, cela permet de garder, d'une façon optimale, l'information contenue dans la variable stochastique. D'autre part, on estime que la décomposition spectrale des variables stochastiques reproduit fidèlement la variabilité spatiale de ces dernières.

La discréétisation de la variable aléatoire par Karhunen Loeve permet, entre autres, d'établir une dépendance spatiale entre une composante de la variable et sa coordonnée. Cette dépendance sera assurée par la construction d'une nouvelle fonction qui traduira la covariance ou la corrélation mutuelle entre chaque couple composant la variable aléatoire. Un choix judicieux de cette fonction permet de reproduire fidèlement la distribution donnée, tout en tenant compte des aspects distance et corrélation entre deux composantes de la variable aléatoire de coordonnées respectives x_1 et x_2 . Le choix de cette fonction est une question délicate d'identification et il faut souvent se contenter de formes classiques. Par exemple, le processus aléatoire généralement utilisé est un processus de Markov de premier ordre qui admet une fonction de covariance spatiale exponentielle de la forme :

$$C(x_1, x_2) = \sigma^2 \exp\left(-\frac{|dx|}{l_c}\right) \quad (3.10)$$

où

$|dx| = x_2 - x_1$: distance entre deux points de mesure.

σ : écart type.

l_c : coefficient de corrélation compris entre -1 et 1. Ce coefficient dépend de l'ordre de grandeur de la longueur de la structure sur laquelle l'échantillonnage est prélevé. Dans notre cas, il s'agit d'un treillis unidimensionnel donc le choix de coefficient de corrélation est fortement lié à la distribution spatiale de la variable aléatoire le long de la structure.

Étude de la fonction d'autocorrélation

$$C(x_i, x_j) = \sigma^2 \exp\left(-\frac{|x_j - x_i|}{l_c}\right) \quad (3.11)$$

$$\begin{bmatrix} C(x_i, x_j) \end{bmatrix} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \dots & \exp\left(-\frac{|x_j - x_i|}{l_c}\right) \\ \dots & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ sym & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad i, j = 1, \dots, N \quad (3.12)$$

$\forall x = |x_j - x_i| \in \Re, \text{ si } x > 0 \text{ on a :}$

$$0 < \exp(-X) < 1 \quad (3.13)$$

Puisque la fonction exponentielle est croissante pour tout $x_i < x_j$ alors on peut écrire :

$$\exp(-X) < \exp(0) \quad (3.14)$$

Ce qui permet d'écrire pour le couple de points de coordonnée x_i :

$$\begin{aligned} C(x_i, x_i) &= \sigma^2 \exp\left(-\frac{|x_i - x_i|}{l_c}\right) \\ &= \sigma^2 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Donc si $x_i \neq x_j$ on obtient l'inégalité suivante :

$$\sigma^2 \exp\left(-\frac{|x_j - x_i|}{l_c}\right) \langle \sigma^2 \rangle \quad (3.16)$$

$$C(x_i, x_j) \propto C(x_i, x_i) \quad (3.17)$$

La Figure 3.8-a représente la forme que peut avoir la matrice de covariance pour un écart type égale à 0.1 et une longueur de corrélation l_c égale à 100. Tandis que la Figure 3.8-b représente la courbe de variation de la grande diagonale des valeurs propres. Une représentation graphique des vecteurs (fonctions) propres est donnée par la Figure 3.9 :

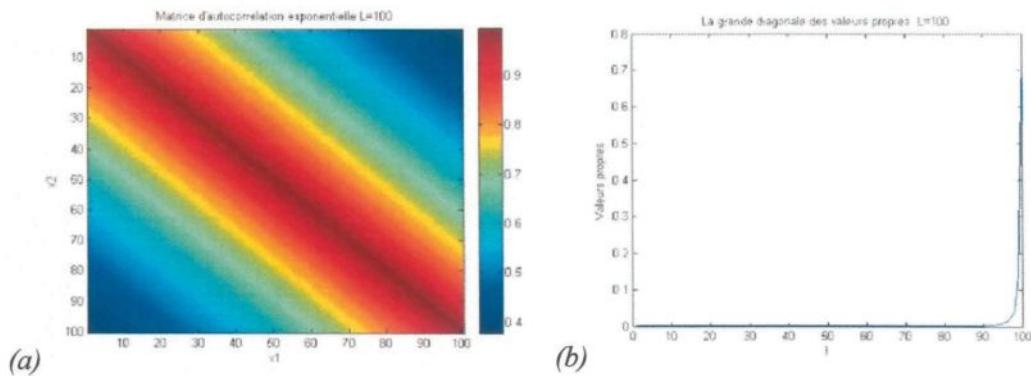


Figure 3.8- Caractéristiques de la fonction d'autocorrélation ($\sigma=0.1$).

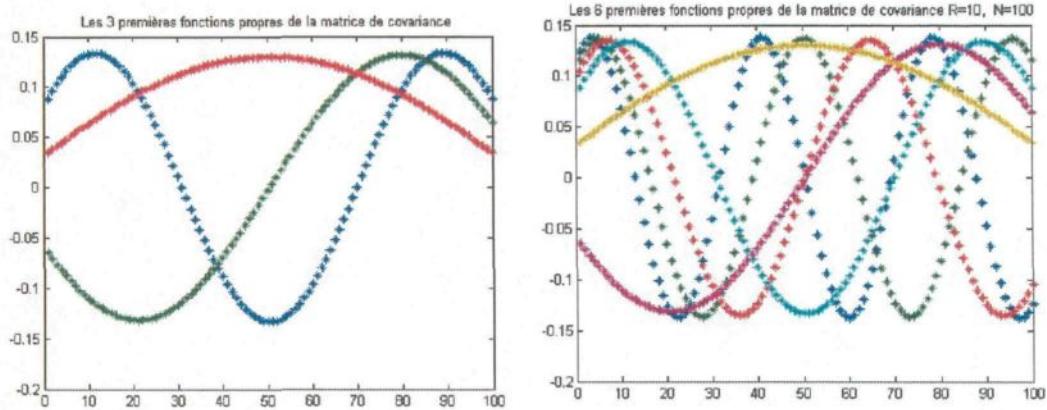


Figure 3.9- Distribution des 3 et 6 premières fonctions propres.

La distribution de la matrice d'autocorrélation est représentée par la Figure 3.10, on analyse l'influence et l'effet de variation du coefficient de corrélation. La Figure 3.11 représente le produit des 5 premières valeurs et vecteurs propres.

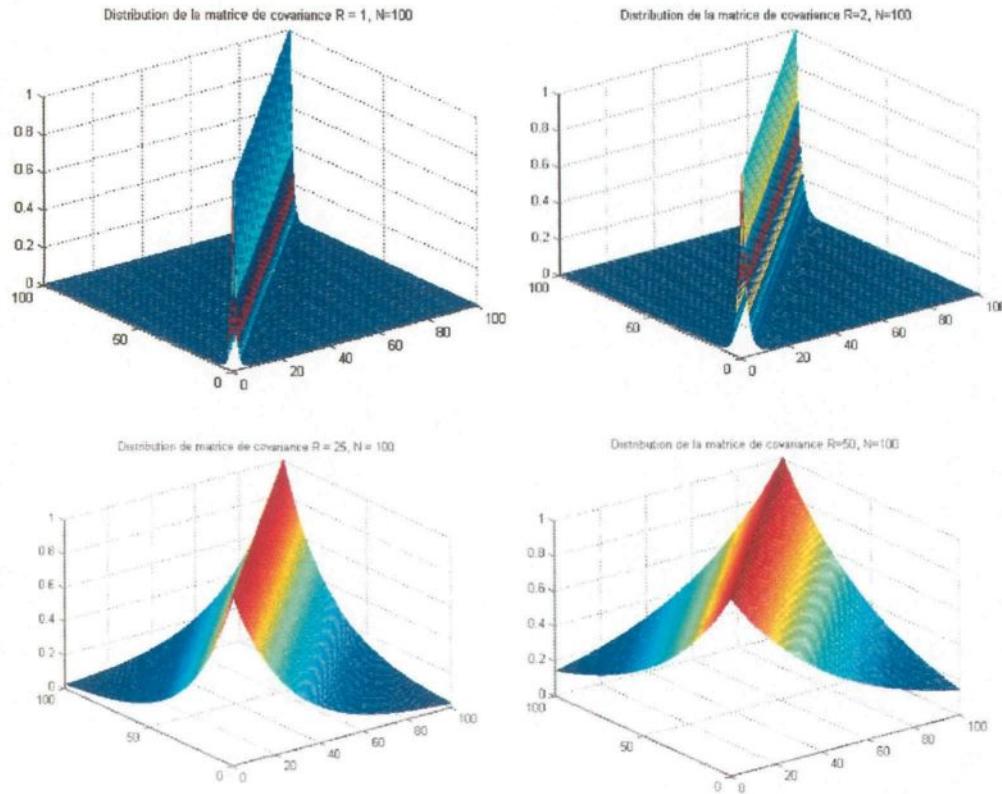


Figure 3.10 - Distribution de la matrice de corrélation en fonction du coefficient de corrélation ($R = l_c$).

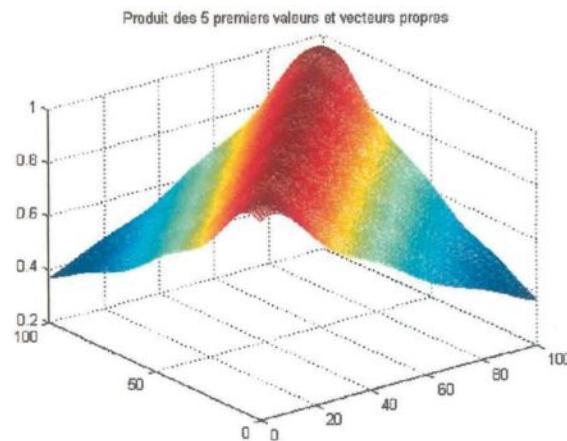


Figure 3.11- Produit des 5 premiers valeurs et vecteurs propres.

Le défi principal, ici, est de calculer efficacement des fonctions et des valeurs propres déterministes. En principe, ces fonctions peuvent être obtenues à partir d'une décomposition spectrale de la fonction de covariance après résolution de l'équation intégrale homogène de Fredholm donnée par :

$$\int_D C(x_1, x_2) \varphi_i(x_1) dx_1 = \lambda_i \varphi_i(x_2) \quad (3.18)$$

L'équation précédente résulte du fait que les fonctions propres forment un ensemble orthogonal satisfaisant l'équation :

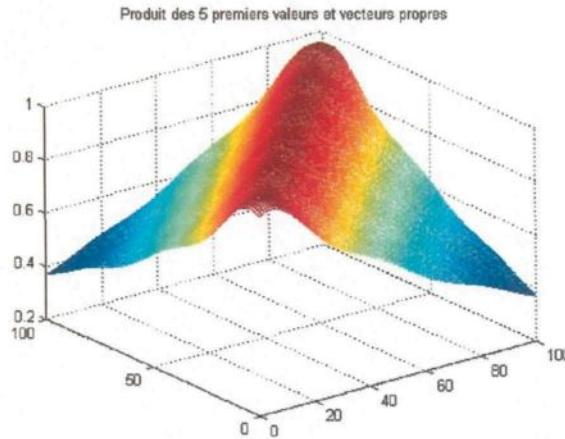


Figure 3.11- Produit des 5 premiers valeurs et vecteurs propres.

Le défi principal, ici, est de calculer efficacement des fonctions et des valeurs propres déterministes. En principe, ces fonctions peuvent être obtenues à partir d'une décomposition spectrale de la fonction de covariance après résolution de l'équation intégrale homogène de Fredholm donnée par :

$$\int_D C(x_1, x_2) \phi_i(x_1) dx_1 = \lambda_i \phi_i(x_2) \quad (3.18)$$

L'équation précédente résulte du fait que les fonctions propres forment un ensemble orthogonal satisfaisant l'équation :

$$\int_D \varphi_i(x) \varphi_j(x) d\nu = \delta_{ij} \quad (3.19)$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

L'idée de base consiste à écrire une variable aléatoire $H(x)$ sous la forme :

$$H(x) = \bar{H} + \Delta H(x) \quad (3.20)$$

où $\Delta H(x)$ et la partie fluctuante de $H(x)$ qui peut être exprimé selon l'expansion de Karhunen Loeve par :

$$\Delta H(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} \xi_k \varphi_k(x) \quad (3.21)$$

$H(x)$ est alors décomposé sur la base des valeurs propres λ_k et fonctions propres $\varphi_k(x)$ de la fonction d'autocorrélation $C(x_1, x_2)$. Par définition, $C(x_1, x_2)$ est symétrique et définie positive. D'après le théorème de Mercer la décomposition spectrale de cette dernière en valeurs et fonctions propres peut être traduite par :

$$C(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varphi_k(x_1) \varphi_k(x_2) \quad (3.22)$$

3.3.1.2 Construction des paramètres aléatoires

Les propriétés mathématiques et statistiques des paramètres ξ_k , apparaissant dans (3.21), sont essentielles à la bonne compréhension de l'utilité de ce développement. Dans le cas général, ces paramètres forment un ensemble de variables stochastiques non

corrélées qui peuvent être construites à partir de diverses formules usuelles [PHO02] telles que :

$$\begin{aligned} a. \quad \xi_k &= \int_D [H(x) - \bar{H}] \varphi_k(x) d\nu \\ b. \quad \xi_k &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_D [H(x) - \bar{H}] \varphi_k(x) d\nu \end{aligned} \quad (3.23)$$

Dans notre cas, $\Delta H(x)$ est un processus gaussien de valeur moyenne nulle. Dans ce cas, le choix approprié de $\{\xi_1, \dots, \xi_\infty\}$ est un vecteur de variables aléatoires, gaussiennes, non corrélées, de valeur moyenne nulle et d'écart type égal à l'unité. Ces variables peuvent être générées à partir d'un programme (MATLAB) et seront caractérisées par :

$$\begin{aligned} E(\xi_k) &= 0 \quad k = 1.. \infty \\ E(\xi_i \times \xi_j) &= \delta_{ij} \quad i, j = 1.. \infty \end{aligned} \quad (3.24)$$

3.3.1.3 Aspects numériques de l'expansion de KL

L'expansion de KL caractérise un processus aléatoire en termes de fonctions orthogonales déterministes et des variables aléatoires non corrélées. En tronquant l'expansion à l'ordre N_{KL} , on obtient la nouvelle approximation du champ :

$$\hat{H}(x, \omega) = \bar{H} + \sum_{k=1}^{N_{KL}} \sqrt{\lambda_k} \xi_k(\omega) \varphi_k(x) \quad (3.25)$$

L'expansion KL de la variable est construite sur la base d'une approximation qui traduit la dépendance du champ aléatoire vis-à-vis des différents coefficients de corrélation (l_c) et du

maillage choisi. Deux principales étapes permettent d'établir cette expansion. La première consiste à résoudre le problème de valeurs et fonctions propres à partir de l'équation intégrale de Fredholm (3.18). Tandis que la seconde consiste à construire une variable aléatoire ζ_k non corrélée telle que l'expansion produit par la distribution marginale de la variable d'entrée.

La première étape de résolution du système propre paraît la plus compliquée. Après résolution, on dispose normalement de l'espace propre sur lequel l'expansion de Karhunen Loeve sera développée. Plusieurs méthodes permettent la résolution d'une telle intégrale de Fredholm. Des illustrations analytiques sont ainsi présentées dans la littérature pour les cas 1D et 2D. Mais dans la majorité des cas, des techniques numériques sont utilisées. Munie de sa base naturelle, la méthode d'Ondelettes-Galerkin (Wavelet-Galerkin) fournit une technique numérique performante pour la résolution des équations intégrales et en particulier celle de Fredholm. Cette méthode implique l'approximation de chaque fonction propre par une combinaison linéaire d'un nombre fini de fonctions de bases orthogonales (celle des polynômes de Legendre ou Tchebychev par exemple). Par la suite, l'erreur de l'approximation sera minimisée dans l'intégrale de Fredholm de telle sorte qu'à la fin on obtient un système d'ordre fini et d'équations algébriques linéaires. De plus, chaque fonction de base de ce système doit être orthogonale. Pour implémenter numériquement cette méthode, un choix judicieux des dites fonctions de bases est important. La représentation du champ peut être ensuite raffinée soit en augmentant l'ordre de la troncature de développement de KL, soit en augmentant l'ordre de la base de polynôme.

- Résolution numérique de l'équation intégrale de Fredholm

Dans ce paragraphe, nous présentons la résolution de l'équation (3.18) par l'utilisation de l'approximation de Galerkin proposée par Ghanem et Spanos [GHA91]. On distingue trois principales étapes dans cette méthode de résolution :

1. Sélection de N fonctions de bases $\psi_i(x)$ $i=0,..,N-1$

Deux catégories de fonctions de base peuvent être utilisées dans ce cas :

- i- Une fonction de base polynomiale sous une forme de polynôme de Legendre de degré $p = (N-1)$ définie dans l'intervalle $[-1,1]$ par :

$$\Phi_0 = 1, \quad \Phi_1 = x, \quad \dots \quad \Phi_i = \frac{2i-1}{i} x \Phi_{i-1} - \frac{i-1}{i} \Phi_{i-2} \quad i = 2,..,P \quad (3.26)$$

Ce polynôme de Legendre sera normalisé et transformé pour l'étendre à un intervalle de taille $[-a,a]$:

$$\psi_i(x) = \sqrt{\frac{2i+1}{2a}} \Phi_i\left(\frac{x}{a}\right) \quad (3.27)$$

- ii- Une fonction de base trigonométrique qui admet $T = \frac{(N-1)}{2}$ harmoniques et qui est définie dans l'intervalle $[-a,a]$ par :

$$\psi_0 = 1, \quad \psi_1 = \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right), \quad \psi_2 = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right), \dots, \quad \psi_{2i-1} = \cos\left(\frac{i\pi x}{a}\right), \quad \psi_{2i} = \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right), \quad i = 2,..,T \quad (3.28)$$

2. Décomposer chaque fonction propre par une combinaison linéaire dans la base de fonction $\psi_i(x) \quad i = 0..N-1$:

$$\varphi_k(x) = \sum_{i=0}^{N-1} d_i^{(k)} \psi_i(x) = \psi^T(x) D^{(k)} \quad (3.29)$$

avec

$D^{(k)}$ est le vecteur contenant les $d_i^{(k)}$ coefficients d'ondelettes de dimension $N \times 1$.

$\psi(x)$ le vecteur des fonctions de base.

La forme matricielle de l'équation (3.29) peut être représentée par :

$$[\varphi(x)] = \underbrace{\begin{bmatrix} d_0^{(0)} & d_1^{(0)} & \dots & \dots & d_{N-1}^{(0)} \\ d_0^{(1)} & d_1^{(1)} & \dots & \dots & d_{N-1}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ d_0^{(N-1)} & d_1^{(N-1)} & \dots & \dots & d_{N-1}^{(N-1)} \\ d_0^{(N)} & d_1^{(N)} & \dots & \dots & d_{N-1}^{(N)} \\ d_0^{(N+1)} & d_1^{(N+1)} & \dots & \dots & d_{N-1}^{(N+1)} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ d_0^{(nelt-1)} & d_1^{(nelt-1)} & \dots & \dots & d_{N-1}^{(nelt-1)} \end{bmatrix}}_{nelt \times N} \times \underbrace{\begin{bmatrix} \psi_0(x) \\ \psi_1(x) \\ \vdots \\ \vdots \\ \psi_{N-1}(x) \end{bmatrix}}_{N \times 1} \quad (3.30)$$

3. En remplaçant (3.29) dans (3.18), on obtient :

$$\int_D C(x_1, x_2) \sum_{i=0}^{N-1} d_i^{(k)} \psi_i(x_1) dx_1 = \lambda_k \sum_{i=0}^{N-1} d_i^{(k)} \psi_i(x_2) \quad (3.31)$$

En permutant maintenant l'ordre d'intégration avec la sommation, on obtient l'expression suivante :

$$\sum_{i=0}^{N-1} d_i^{(k)} \left[\int_D C(x_1, x_2) \psi_i(x_1) dx_1 \right] = \lambda_k \sum_{i=0}^{N-1} d_i^{(k)} \psi_i(x_2) \quad (3.32)$$

La condition sur l'orthogonalité de chaque fonction de base se traduit par l'intégration en x_2 de la dernière équation :

$$\sum_{i=0}^{N-1} d_i^{(k)} \left[\int_D \int_D C(x_1, x_2) \psi_i(x_1) \psi_j(x_2) dx_1 dx_2 \right] = \lambda_k \sum_{i=0}^{N-1} d_i^{(k)} \left[\int_D \psi_i(x_2) \psi_j(x_2) dx_2 \right] \quad (3.33)$$

enfin l'équation (3.33) permet de calculer la $k^{\text{ème}}$ fonction et la $k^{\text{ème}}$ valeur propre. Elle sera ensuite écrite sous une forme matricielle globale après la définition des matrices [A] et [B] :

$$A_{ij} = \int_D \left[\int_D C(x_1, x_2) \psi_i(x_1) dx_1 \right] \psi_j(x_2) dx_2 \quad (3.34)$$

$$B_{ij} = \int_D \psi_i(x_2) \psi_j(x_2) dx_2 \quad (3.35)$$

$$AV^{(k)} = \Lambda BV^{(k)} \quad (3.36)$$

où

$$V^{(k)} = d_i^{(k)}$$

$$\Lambda = \delta_{ij} \lambda_k \quad k = 1.. \infty \quad i, j = 0..N - 1 \quad (\delta_{ij} \text{ symbole de Kronecker})$$

Pour le $k^{\text{ème}}$ mode, (3.36) peut être écrite sous la forme matricielle globale suivante :

$$[B] \{d^{(k)}\} - \frac{1}{\lambda_k} [A] \{d^{(k)}\} = 0 \quad (3.37)$$

Cette équation est similaire à celle décrivant un problème dynamique dans le cadre de la méthode de calcul par éléments finis. De ce fait, la résolution de cette équation sera semblable à celle de ce même problème dynamique tout en exploitant le même principe et algorithme de résolution déjà fonctionnels dans les codes de calculs par éléments finis existants. Le Tableau 3.1 permet de mettre en évidence cette similarité. En effet, dans un système possédant une matrice de rigidité $[K]$ et une matrice de masse $[M]$, la $k^{\text{ème}}$ pulsation (valeur propre) et le $k^{\text{ème}}$ vecteur propre seront déterminés par la résolution de l'équation :

$$[K] \{U^{(k)}\} - \omega_k^2 [M] \{U^{(k)}\} = 0 \quad (3.38)$$

Dans notre cas, il suffit d'inclure dans le code le calcul des matrices $[A]$ et $[B]$ pour enfin résoudre complètement l'équation de Fredholm.

Tableau 3.1- Analogie entre un problème de dynamique/Équation de Fredholm.

Équation d'un problème dynamique	Équation de Fredholm
Matrice de rigidité $[K]$	Matrice $[B]$
Matrice masse $[M]$	Matrice $[A]$
Conditions aux limites	Aucune condition aux limites imposées
$K^{\text{ème}}$ pulsation propre ω_k	$K^{\text{ème}}$ valeur propre $\lambda_k = \frac{1}{\omega_k^2}$
Vecteur propre $\{U^{(k)}\}$	Vecteur propre $\{d^{(k)}\}$

Suite à ce calcul, le vecteur propre $\{d^{(k)}\}$ nous donne les valeurs nodales de la fonction propre $\varphi_k(x) = \sum_{i=0}^{N-1} d_i^{(k)} \psi_i(x)$ interpolée par le polynôme de Legendre définit précédemment par (3.27) ou par une base trigonométrique définit par (3.28).

- *Maillage stochastique*

Dans le cadre général de la méthode des éléments finis stochastiques, un premier type de discréétisation est mené. Ceci constitue le volet déterministe de la méthode et consiste à mailler une structure par des éléments finis de formes géométriques régulières. La qualité et la taille de ce maillage sont influencées principalement par le gradient de déformation. Quant au volet stochastique de la méthode, la discréétisation consiste à représenter la variable aléatoire par des méthodes d'expansion et d'approximation. Le maillage stochastique dépend alors de la taille et des caractéristiques du problème qui sont :

i- Le coefficient de corrélation qui traduit le taux de variation du champ aléatoire.

Dans ce cas il est préférable de minimiser la distance entre deux points de discrétisation stochastique, généralement de l'ordre de moitié de coefficient de corrélation [LEM05].

ii- La dimension de la variable aléatoire à discrétiser. Il faut tenir compte d'une v.a. de grande taille dans le but d'assurer une meilleure approximation de cette même variable aléatoire sans oublier que cela augmente le temps de calcul.

Il paraît important d'établir l'analogie qui existe entre les deux manières de discrétisation déterministe et stochastique. On établit dans le Tableau 3.2 une brève analogie entre la discrétisation par éléments finis et celle des champs de variables aléatoires.

Tableau 3.2 - Analogie de discrétisation par éléments finis et par Karhunen Loeve.

Espace déterministe	Espace des variables aléatoires
Discrétisation par éléments finis	Discrétisation des variables aléatoires
Données ➤ Maillage éléments finis Nombre de Nœuds Nombre d'éléments Connectivités Coordonnées	Données ➤ Matrice de covariance spatiale $C(x_1, x_2) = \sigma^2 \exp\left(-\frac{ x }{l_c}\right)$ Écart type Coefficient de corrélation Coordonnées des points de mesure
Représentation des champs dans la base polynomiale des fonctions de formes.	Représentation de la v.a. dans l'espace propre formé de valeurs et fonctions propres.
Sortie Approximation polynomiale $x = \sum_{i=0}^n N_i(x) x_i, \quad u = \sum_{i=0}^n N_i(x) u_i$	Sortie Expansion en séries (K.L.) $AH(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} \zeta_k \varphi_k(x)$

- Calcul numérique du système matriciel propre

Dans ce paragraphe, on rappel brièvement la méthode des trapèzes utilisée pour le calcul des matrices $[A]$ et $[B]$ constituants (3.37) et définies respectivement par (3.34) et (3.35). Pour ce faire, partons de (3.34) pour calculer le premier niveau d'intégration en x_1 :

$$I_1(x_2) = \int_D C(x_1, x_2) \psi_i(x_1) dx_1 \quad (3.39)$$

La base orthogonale est composée de fonctions de base à support compact. Par consequent, le domaine d'intégration peut être limité au nombre N de monômes du polynôme de Legendre qui forme cette base, tandis que D_e représente le domaine d'intégration 1D, 2D ou 3D.

$$I_1(x_2) = \sum_{i=0}^{N-1} \left(\int_{D_e} C(x_1, x_2) \psi_i(x_1) dx_1 \right) \quad (3.40)$$

Par la suite, nous allons proposer une méthode d'intégration numérique dans le cas 1-D. Cette méthode utilise N_g points de Gauss de coordonnées x_{ig} répartis régulièrement sur l'intervalle d'intégration ($[-1, 1]$), et des poids ω_{ig} .

En général on peut écrire :

$$\begin{aligned} I_1(x_2) &= \sum_{element=1}^{nelt} \left(\int_{-1}^1 C(x_1, x_2) \psi_i(x_1) dx_1 \right) \\ &= \sum_{element=1}^{nelt} \left(\sum_{ig=1}^{N_g} (\omega_{ig} [C(x_{ig}, x_2) \psi_i(x_{ig})]) \det([J_{element}]) \right) \end{aligned} \quad (3.41)$$

Les points x_{ig} sont réels, distincts choisis conformément au domaine d'intégration.

L'expression générale de la matrice A_{ji} (3.37) peut être réécrite alors selon :

$$A_{ji} = \int_D [I_i(x_2)] \psi_j(x_2) dx_2 \quad (3.42)$$

De même, l'intégration de Gauss de A_{ji} selon x_2 s'écrit :

$$\begin{aligned} A_{ji} &= \int_D [I_i(x_2)] \psi_j(x_2) dx_2 \\ &= \sum_{element=1}^{nelt} \left(\sum_{ig=1}^{N_g} (\omega_{ig} [I_i(x_{ig})] \psi_j(x_{ig})) \det([J_{element}]) \right) \end{aligned} \quad (3.43)$$

Le calcul de la matrice $[B]$ correspond au calcul général de la matrice de masse d'un système de densité unitaire.

3.3.2 Expansion de Neumann

La méthode de simulation de Monte Carlo présentée au paragraphe 3.2 nécessite un temps de calcul important. Ceci est principalement dû à la résolution du système global à chaque prise de valeur aléatoire. Pour remédier à cet inconvénient, un certain nombre de méthodes stochastiques sont proposées dans la littérature. Ces méthodes possèdent l'avantage de pouvoir effectuer un seul calcul éléments finis stochastiques complet à la différence des méthodes dites directes qui nécessitent pour leurs mises en œuvre des calculs répétitifs de la MEFS. Le résultat de ce calcul doit nous permettre de nous rendre compte de l'état de distribution du spectre de la réponse. Dans ce cas, la technique de résolution de Neumann [SHI87], [YAM88] respecte ces exigences et par conséquent elle

permet d'éviter les résolutions répétitives du système global. Le principe général de cette méthode repose sur un seul calcul de l'inverse de l'opérateur tangent noté $[K]$, suivant une démarche particulière.

Cette démarche consiste à décomposer l'opérateur tangent en une partie moyenne $[\bar{K}]$ indépendante de l'aléa lié aux variables et une partie fluctuante $[\Delta K]$ qui dépend de l'aléa. Largement utilisée en couplage avec la méthode de discréétisation de Karhunen Loeve, la technique de Neumann bénéficie de la décomposition d'une variable aléatoire $h(\omega)$ sous la forme :

$$h(\omega) = \bar{h} + \Delta h \quad (3.44)$$

où

\bar{h} représente la partie moyenne de la variable aléatoire et Δh sa partie fluctuante.

Ceci permet de décomposer l'opérateur tangent sous :

$$\begin{aligned} [K(h)] &= [K(\bar{h})] + [K(\Delta h)] \\ &= [\bar{K}] + [\Delta K] \end{aligned} \quad (3.45)$$

Pour calculer l'inverse de cette matrice, on utilise un développement limité en séries de Taylor généralisé aux calculs matriciels. Dans ce qui suit, on rappel le développement en série d'une fonction f à l'ordre n au voisinage d'un point x_0 :

$$\begin{aligned}
 f(x_0+h) &= f(x_0) + f'(x_0)h + f''(x_0)\frac{h^2}{2} + f'''(x_0)\frac{h^3}{3!} \dots \\
 &= \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0^2}h + \frac{h^2}{x_0^3} - \frac{h^3}{x_0^4} \\
 &= \left[1 - \frac{1}{x_0}h + \frac{1}{x_0^2}h^2 - \frac{1}{x_0^3}h^3 \right] \frac{1}{x_0} \\
 &= \left[1 - P + P^2 - P^3 \right] \frac{1}{x_0}, \quad \text{avec } P = \frac{h}{x_0}
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

On utilise ce résultat pour chercher l'inverse de cette matrice comme suit :

$$[K(h)] = [\bar{K}] + [\Delta K] \tag{3.47}$$

$$\begin{aligned}
 [K(h)]^{-1} &= [[\bar{K}]] + [[\Delta K]]^{-1} \\
 &= [I + P]^{-1} [\bar{K}]^{-1} \quad \text{où } [P] = [\bar{K}]^{-1} [\Delta K] \\
 &= [[I]] - [[P]] + [[P]]^2 - [[P]]^3 + \dots [[\bar{K}]]^{-1} \\
 &= \left[\sum_{n=0}^N (-[[P]])^n \right] [[\bar{K}]]^{-1}
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

Le système d'équations résultant admet alors un caractère stochastique et sa résolution suit les étapes principales suivantes :

$$[K(h)]\{U\} = \{F\} \tag{3.49}$$

$$\begin{aligned}
 \{U\} &= [K(h)]^{-1} \{F\} \\
 &= \left[\sum_{n=0}^N (-[P])^n \right] [\bar{K}]^{-1} \{F\} \\
 &= [[I] - [P] + [P]^2 - [P]^3 + \dots] \{\bar{U}\} \\
 &= \{\bar{U}\} - \{U_1\} + \{U_2\} - \{U_3\}
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

où : $\{\bar{U}\} = [\bar{K}]^{-1} \{F\}$, $\{U_1\} = [P]\{\bar{U}\}$, $\{U_2\} = [P]^2\{\bar{U}\}$, $\{U_3\} = [P]^3\{\bar{U}\}$, $\{U_N\} = [P]^N\{\bar{U}\}$

Les termes successifs $\{U_i\}$ sont obtenus par la relation :

$$[\bar{K}] \{U_i^r\} = [\Delta K] \{U_{i-1}^r\} \tag{3.51}$$

La convergence de la série de Neumann est assurée si les valeurs absolues de toutes les valeurs propres de la matrice $[P]$ sont plus petites que l'unité, ce qui nécessite des adaptations particulières [SHI88]. La caractéristique la plus marquante de cette méthode, à la différence de la technique de Monte Carlo [YAM88], est la factorisation de $[\bar{K}]$ qui se fait une seule fois pour tous les échantillons, car les tirages aléatoires modifient uniquement le terme $[\Delta K]$. Le critère d'arrêt utilisé est donné par :

$$\frac{\|\{U_i\}\|}{\left\| \sum_{k=0}^i (-1)^k \{U_k\} \right\|} < \varepsilon \quad \text{avec} \quad \|\{U\}\| = \sqrt{\{U\}^T \{U\}} \tag{3.52}$$

Illustration pour le cas d'un système linéarisé, le cas de contact :

Dans cette section on développe l'utilisation de la méthode de Neumann dans le cas des problèmes non linéaire après une discréétisation par Karhunen Loeve d'un paramètre matériau, par exemple le cas de module de Young de la forme :

$$E(x) = \bar{E} + \Delta E(x) \quad (3.53)$$

où $\Delta E(x)$ représente la partie fluctuante qui est définie par :

$$\Delta E(x) = \sum_{i=1}^{N_{Kt}} \sqrt{\lambda_i} \xi_i \varphi_i(x) \quad (3.54)$$

La décomposition de module de Young selon deux parties permet d'avoir un système d'équation stochastique décrit par :

$$([\bar{K}] + [\Delta K])\{dU\} = \{R\} \quad (3.55)$$

où

$[\bar{K}]$ la partie moyenne de la matrice tangente.

$[\Delta K]$ la partie de la matrice tangente contenant l'effet de l'aléa.

$\{R\}$ le résidu.

Dans cette formulation stochastique la valeur de résidu $\{R\}$ est décomposable en deux parties soit une partie des valeurs moyennes et une autre contenant l'effet de l'aléa lié aux paramètres matériau de problèmes ou aux sollicitations externes :

$$([\bar{K}] + [\Delta K])\{dU\} = \{\bar{R}\} + \{\Delta R\} \quad (3.56)$$

avec

$\{\bar{R}\}$ la partie moyenne de résidu.

$\{\Delta R\}$ la partie de résidu contenant l'effet de l'aléa.

Afin de résoudre le système d'équation précédent par l'expansion de Neumann, on commence par chercher l'inverse de la partie déterministe $[\bar{K}]$ puis effectuer un développement en série de Neumann. Le système à résoudre devient :

$$\{U\} = (\bar{K} + \Delta K)^{-1} (\bar{R} + \{\Delta R\}) \quad (3.57)$$

Recherche de l'inverse de la matrice tangente :

$$\begin{aligned} (\bar{K} + \Delta K)^{-1} &= (I + \bar{K}^{-1} \Delta K)^{-1} \bar{K}^{-1} \\ &= (I - P + P^2 - P^3 + \dots) \bar{K}^{-1} \end{aligned} \quad (3.58)$$

avec

$$P = \bar{K}^{-1} \Delta K$$

L'expression de la réponse $\{U\}$ s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \{U\} &= (\bar{K} + \Delta K)^{-1} (\bar{R} + \{\Delta R\}) \\ &= (I - P + P^2 + \dots) \bar{K}^{-1} (\bar{R} + \{\Delta R\}) \\ &= \{\bar{u}_0\} - P\{\bar{u}_0\} + P^2\{\bar{u}_0\} + \dots + \{\Delta u_0\} - P\{\Delta u_0\} + P^2\{\Delta u_0\} - P^3\{\Delta u_0\} \dots \\ \{U\} &= \sum_{r=0}^{N_N} (-1)^r P^r (\{\bar{u}_0\} + \{\Delta u_0\}) \end{aligned}$$

avec

$$\{\bar{u}_0\} = \bar{K}^{-1} \bar{R}$$

$$\{\Delta u_0\} = \bar{K}^{-1} \{\Delta R\}$$

3.3.3 Mise en œuvre informatique

L'approche retenue est implémentée dans le noyau de calcul par éléments finis multiphysique orienté objet FESh++ (**F**inite **E**lement **S**hell in **C++**). Tel qu'elle est implémentée, cette approche se divise en trois principales parties. La première est essentiellement dédiée à la discrétisation et au stockage des variables aléatoires tandis que la deuxième partie concerne la prise en compte des termes stochastiques présents dans la formulation variationnelle qui sont nécessaires à la construction du système d'équations stochastiques et la requête des contributions élémentaires de chacun de ces termes. La troisième partie couvre la stratégie de résolution de ce système.

3.3.3.1 Contexte général de l'approche orientée objet

Exploiter une approche orientée objet pour mettre en œuvre numériquement une formulation éléments finis stochastiques, est une pratique de plus en plus utilisée. Ceci est motivé par les diverses possibilités et facilités qu'offre cette approche quant à l'implémentation informatique des équations et des algorithmes qui constituent la MEFS. Il s'avère essentiel de mettre le point sur les particularités d'une formulation éléments finis stochastiques afin de pouvoir repérer ces difficultés et ces complexités. Ceci permet de tirer les éventuels profits de l'exploitation de la dite approche. On résume dans la suite les principales particularités spécifiques à une formulation éléments finis stochastiques :

- Des champs aléatoires régis par des lois de variations standard ou non.
- Une variabilité importante des champs et des variables aléatoires.
- Une matrice de rigidité qui dépend d'une ou de plusieurs variables aléatoires.

- Un second membre (vecteur de chargement) qui dépend éventuellement d'un aléa donné.
- Un mode de résolution particulier à chacun des types de formulation éléments finis stochastiques.
- La combinaison de plusieurs théories et méthodologies : probabilité, statistique, éléments finis, échantillonnage, discréétisation ...

Ces particularités sont souvent considérées en pratique (mise en œuvre informatique) comme des difficultés qui rendent l'exploitation d'une telle formulation limitée à des utilisations académiques plus ou moins simples. En conséquence, traiter une application mécanique de grande taille utilisant la MEFS nécessite des ressources informatiques très importantes et surtout un temps de calcul substantiels. Cependant, l'approche orientée objet, offre des moyens informatiques et algorithmiques très efficaces.

En raison de son caractère modulaire, cette approche permet de structurer efficacement la conception d'une application mécanique donnée en modules qui peuvent être développés indépendamment. Par la suite, la modification d'un module reste généralement transparente pour les autres et n'affecte pas des modifications récursives.

3.3.3.2 Karhunen Loeve

Dans le paragraphe suivant, on présente les principaux aspects de programmation liés à la discréétisation par *KL*. Ces aspects seront définis avec un intérêt particulier pour la manière de les implémenter dans le code FESh++.

- **Les principales étapes de la méthode:**

1- Choix de la matrice d'autocorrélation.

2- Calcul des valeurs/fonctions propres par la résolution du système propre correspondant à l'équation de Fredholm.

3- Génération d'une distribution de N valeurs aléatoires ξ_i à partir d'une distribution aléatoire χ_i de valeur moyenne nulle et d'écart type égal à l'unité :

$$\xi_i = \int_D \chi_i \varphi_i(x) dx \quad i = 1..N \quad (3.59)$$

4- Construction de l'expansion KL

$$E_a = \underbrace{\sum_{i=1}^{N_K} \sqrt{\lambda_i^E} \xi_i^E \varphi_i^E}_{\text{FEShKLDiscrrete::evalRandDiscrete}} \xrightarrow{\text{FEShFTStochasticBar::evalTangentIntegral}} \overline{\Delta K^e}$$

$$E_0 \xrightarrow{\text{FEShFTStochasticBar::evalTangentIntegral}} \overline{K_0^e}$$

La Figure 3.12 représente la structure générale de la mise en œuvre de la méthode telle qu'elle est implémentée au sein de code FESh++.

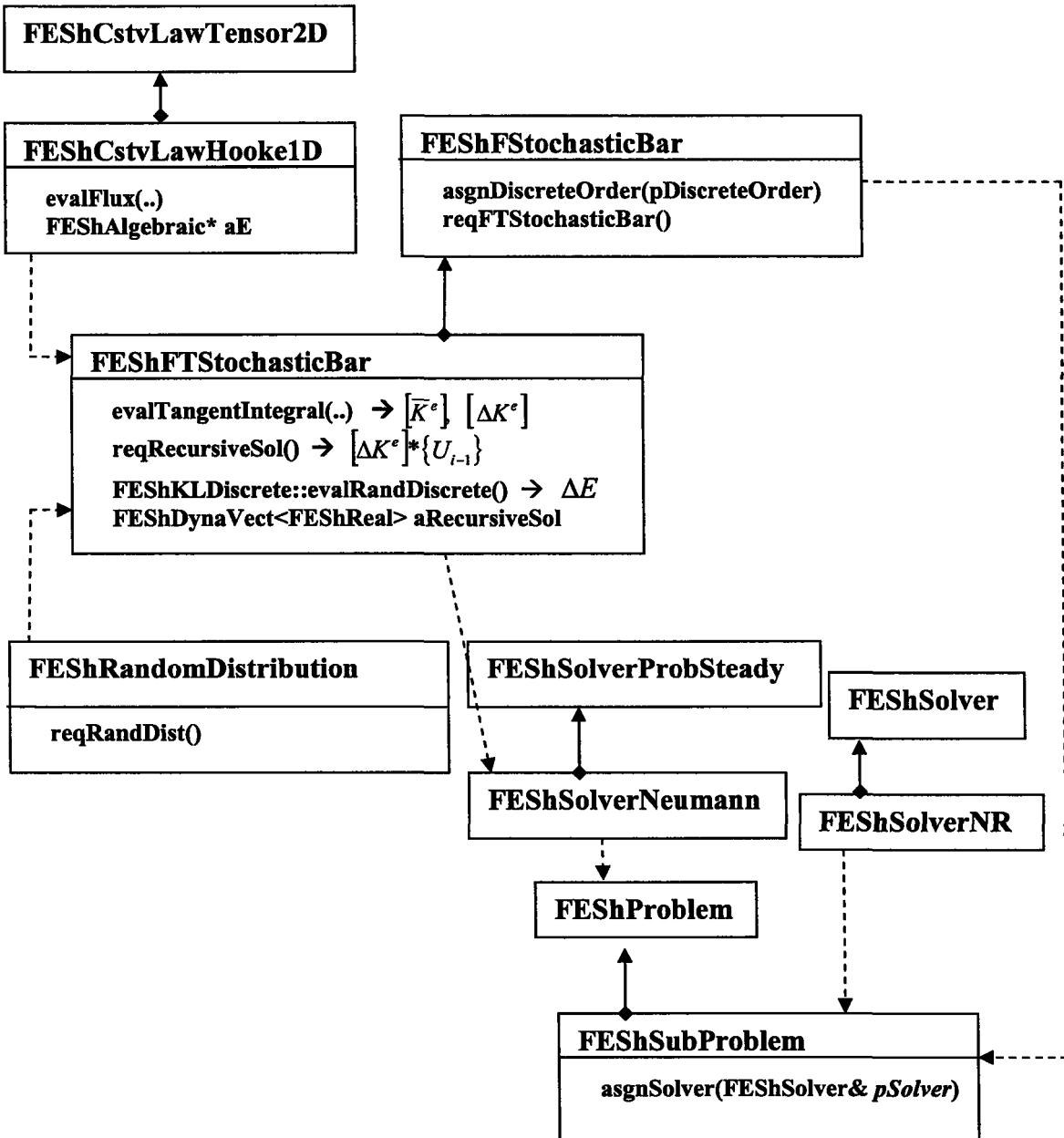


Figure 3.12 - Structure des objets constitutants une formulation éléments finis stochastiques dans FESh++.

Description de la classe *FEShRandomDistribution*

Cette classe permet d'importer à partir d'un fichier la liste des valeurs distribuées selon une loi de variation donnée qui est le résultat d'un processus d'échantillonnage donné. Le format de fichier utilisé est décrit ci-après :

Distribution.stat

```

 $\chi_1$ 
 $\chi_2$ 
•
•
 $\chi_\infty$ 
end

```

3.3.3.3 Projet de classe

Dans le code *FESh++*, la structure des classes doit tenir compte de diverses possibilités d'héritage et de réutilisation. De ce constat, on envisage de mettre en place une structure générique permettant une implémentation facile des nouvelles méthodes de discréétisation, soient la méthode de Karhunen Loeve, d'Estimation Linéaire Optimale (ELO) [MRA03] et de Séries d'Expansion Optimal. On s'intéresse, par la suite, en particulier à la mise en œuvre de la méthode de *KL*. La Figure 3.13 montre la structure générique des classes telles qu'elles seront implémentées dans le code *FESh++*. Une classe nommée ***FEShRandomDiscrete*** à partir de laquelle hérite toute nouvelle classe qui permet la discréétisation des variables aléatoires selon l'une des méthodes suivantes :

- Karhunen Loeve ***FEShKLDiscrete*** (Figure 3.14)
- Estimation linéaire optimale ***FEShELODiscrete***
- Séries d'expansion orthogonale ***FEShSEODiscrete***

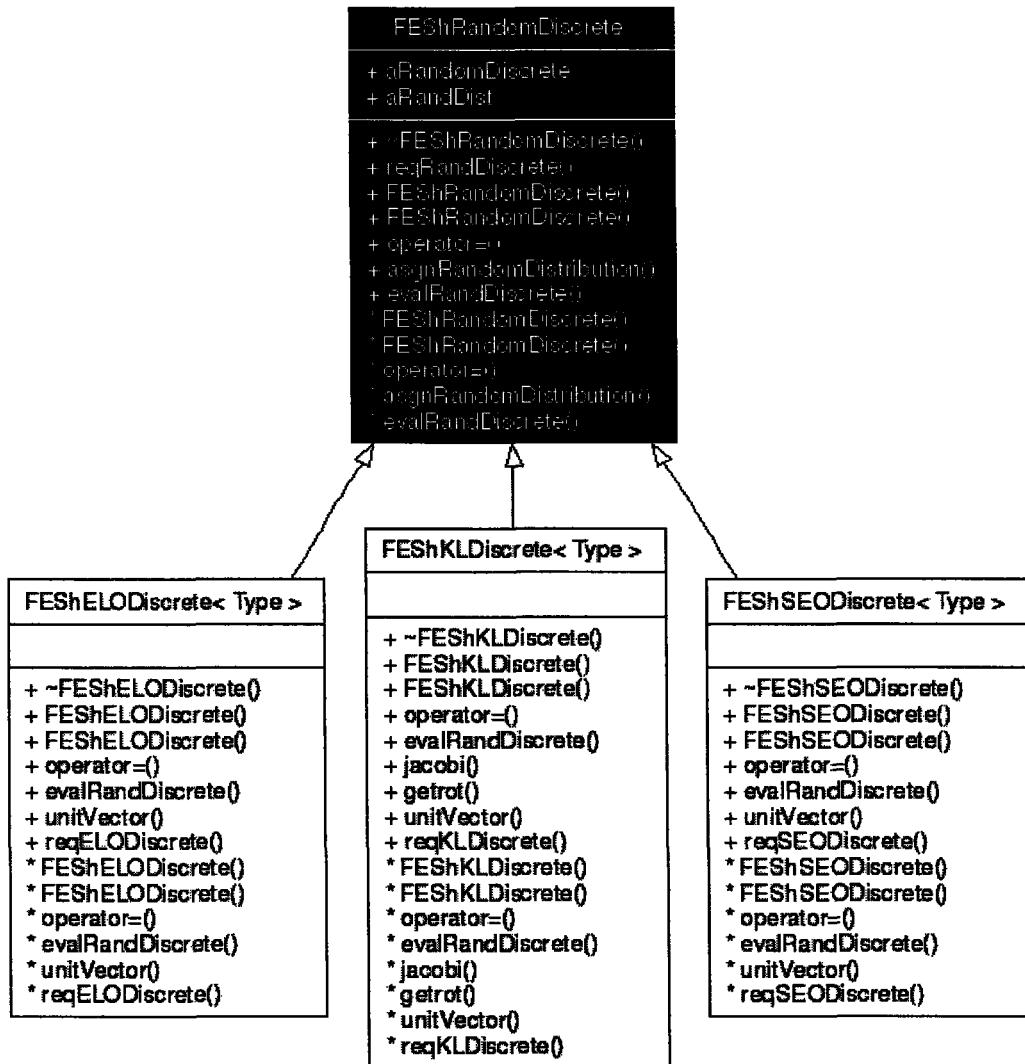


Figure 3.13 - Structure des classes pour la discréétisation des v.a. dans FESh++.

La méthode des éléments finis stochastiques nécessite, pour sa mise en œuvre, une structure et une architecture bien adaptées à la construction du système matriciel stochastique. La classe **FEShRandomDiscrete** est la classe de premier niveau de discréétisation des variables aléatoires, dans laquelle deux fonctions de base seront définies. La première correspondra à la fonction **evalRandDiscrete()** qui permet l'évaluation de la

valeur discrétisée, selon l'une des méthodes de discréttisation choisies. Tandis que la seconde fonction est *reqRandDiscrete()* qui permet le renvoi de la valeur discrétisée vers tous termes de formulation là où le système matriciel stochastique sera construit.

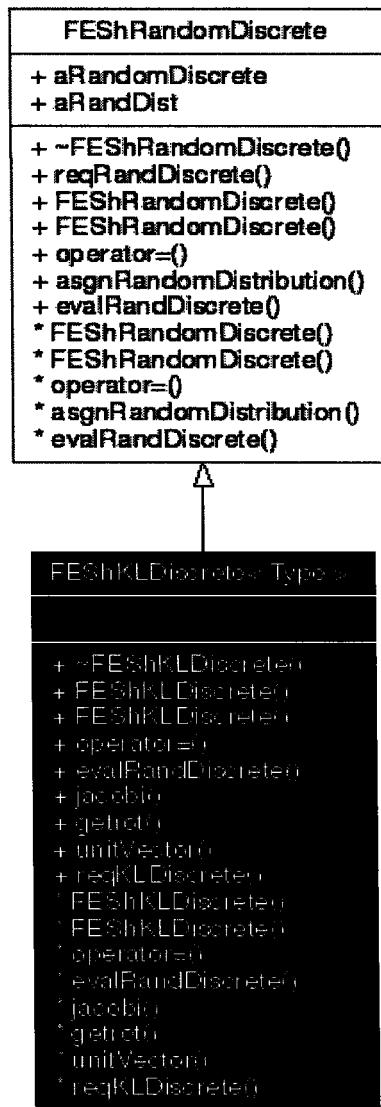


Figure 3.14 - Structure de la classe *FEShKLDiscete*.

3.4 Conclusion

Deux approches probabilistes de bases distinctes ont été développées dans ce chapitre. La première est la technique directe de simulations (la méthode de Monte Carlo) appliquée aux différents cas de problèmes de contact multiphysiques. La deuxième approche a été dédiée à la méthode des éléments finis stochastiques. On s'est attardé, plus particulièrement, sur la présentation de la méthode de discrétisation spatiale Karhunen Loeve et la méthode de résolution de Neumann. Une structure de mise en forme informatique associée à la formulation de ces méthodes a été présentée.

CHAPITRE 4

VALIDATION DE L'APPROCHE STOCHASTIQUE

4 Validation de l'approche stochastique

4.1 Généralités

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la validation de l'approche directe proposée dans le chapitre précédent. Cette validation consiste à reprendre l'étude déterministe en la couplant avec une approche probabiliste de quelques problèmes de contact mécanique et multiphysiques, dont ceux du contact de Hertz. En effet, l'application d'une telle approche est d'un grand intérêt, surtout que les problèmes liés à la modélisation et à la simulation, dans le cas déterministe, ne cessent de croître. Cela est dû principalement à l'évolution des différents procédés de fabrication qui font intervenir de plus en plus de paramètres à la fois matériau, géométriques et d'interfaces. Par conséquent, le comportement et la structure finale des pièces mécaniques seront fortement conditionnés par la variation d'un ou de plusieurs de ces paramètres.

Dans le cas de problème de contact de Hertz, on s'intéresse plus particulièrement à l'étude de deux de ses versions :

- contact entre deux cylindres;
- contact entre un cylindre et un massif semi-fini.

Enfin, on étudie le cas de deux types de problèmes :

- thermomécanique de glissement d'un bloc sur une plaque;
- thermo-électro-mécanique d'une poutre courbe sur un bloc droit.

Le logiciel Abaqus est utilisé comme le solveur déterministe des trois premiers problèmes tandis que le code par éléments finis FESh++ est utilisé pour les deux derniers problèmes multiphysiques.

L'étude probabiliste de ces problèmes consiste, dans un premier temps, à mettre en place une technique de simulation basée sur la méthode de Monte Carlo puis, dans un deuxième temps, à procéder à une analyse de caractère fiabiliste. Cette technique implique un traitement particulier des variables aléatoires d'entrées/sorties selon l'Algorithme 3-A. Les étapes et les détails de cette technique sont décrits au chapitre 3, tandis que la description complète des caractéristiques statistiques des variables aléatoires des différents problèmes est présentée dans la section suivante. La connaissance de l'ordre de grandeur de ces valeurs permet de bien définir les fonctions d'états limites, surtout que celles-ci se basent principalement sur le comportement mécanique des matériaux. Les différents critères de plasticité, de rupture, d'usure ou de propagation de fissures, etc. constituent des informations essentielles qui permettent la définition de la fonction d'état limite et, par la suite, le calcul des indices de sécurité et de fiabilité. Plus particulièrement, dans les applications traitées dans cette thèse, on a gardé une démarche générique pour la détermination des fenêtres d'admissibilité. Cette démarche permet de mettre en place le spectre détaillé d'une sortie aléatoire identifiée par S et calculée dans les zones les plus sensibles et les plus pertinentes.

4.2 Variables aléatoires

Jusqu'à ce niveau d'étude, l'usage des variables aléatoires ne dépasse pas l'exploitation de la probabilité de distribution de ces dernières. Toutefois, pour les approches directes et stochastiques proposées au chapitre 3, on distingue deux concepts généraux liés à la manière dont on manipule ces variables. Le premier correspond à la technique d'échantillonnage discrète associée à l'approche directe, tandis que le second correspond au type de discréttisation associé à l'approche stochastique. Le Tableau 4.1 illustre l'analogie qu'existe entre ces deux concepts.

Tableau 4.1- Analogie entre les concepts probabiliste et statistique.

Approche directe	Approche stochastique
Notions statistiques	Notions probabilistes
Fréquence relative	Probabilités d'un événement
Variable statistique	Variable aléatoire
Distribution statistique	Loi de la probabilité
Moyenne arithmétique	Espérance mathématique
Variance d'une variable statistique	Variance d'une variable aléatoire

4.3 Problèmes du contact de Hertz

Nous nous proposons de prendre en considération le caractère aléatoire de deux variables dans l'étude du problème de contact de Hertz. Le module de Young et le coefficient de frottement sont les principales variables aléatoires du problème.

4.3.1 Caractéristiques statistiques des variables aléatoires

Dans cette section, on établit les différentes caractéristiques statistiques propres à chacune des variables aléatoires. La Figure 4.1 représente alors les distributions gaussiennes des variables aléatoires d'entrées. Le Tableau 4.2 résume leurs valeurs moyennes (m) et leurs écarts types (σ) à la fois théoriques et calculés. Quant au Tableau 4.3, il montre la distribution et la concentration de ces variables traduites par les pourcentages de leur appartenance aux intervalles $[m - \sigma, m + \sigma]$, $[m - 2\sigma, m + 2\sigma]$ et $[m - 3\sigma, m + 3\sigma]$.

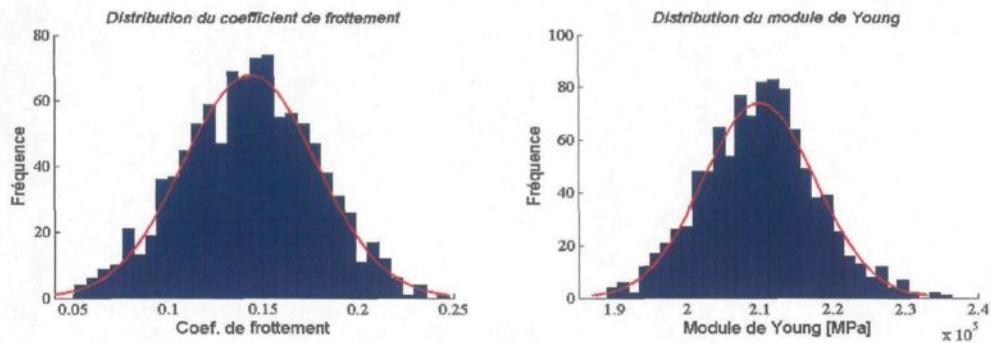


Figure 4.1 - Distributions gaussiennes des variables aléatoires.

Tableau 4.2 - Caractéristiques statistiques des variables aléatoires.

	Coefficient de frottement	Module de Young [MPa]
Moyenne théorique	0.144	210000
Moyenne calculée (m)	0.141	209235.377
Écart type théorique	0.035	8000
Écart type calculé (σ)	0.035	7508.8
Écart type en pourcentage	62.94 %	10.08 %

Tableau 4.3 - Distribution et concentration des variables aléatoires.

Total	Pourcentages calculés	Pourcentages théoriques
Module de Young		
[$m - \sigma, m + \sigma]$	348	69.6 %
[$m - 2\sigma, m + 2\sigma]$	471	94.2 %
[$m - 3\sigma, m + 3\sigma]$	500	100 %
Coefficient de frottement		
[$m - \sigma, m + \sigma]$	328	65.6 %
[$m - 2\sigma, m + 2\sigma]$	481	96.2 %
[$m - 3\sigma, m + 3\sigma]$	500	100 %

Les variables aléatoires prennent $\approx 70\%$ de leurs valeurs dans l'intervalle 1 : $[m - \sigma, m + \sigma]$ et $\approx 95\%$ dans l'intervalle 2 : $[m - 2\sigma, m + 2\sigma]$. Une illustration graphique de ces valeurs est donnée à la Figure 4.2, qui traduit l'appartenance (couleur verte) ou non (couleur rouge) de chaque tirage de chacune des variables à l'intervalle 1.

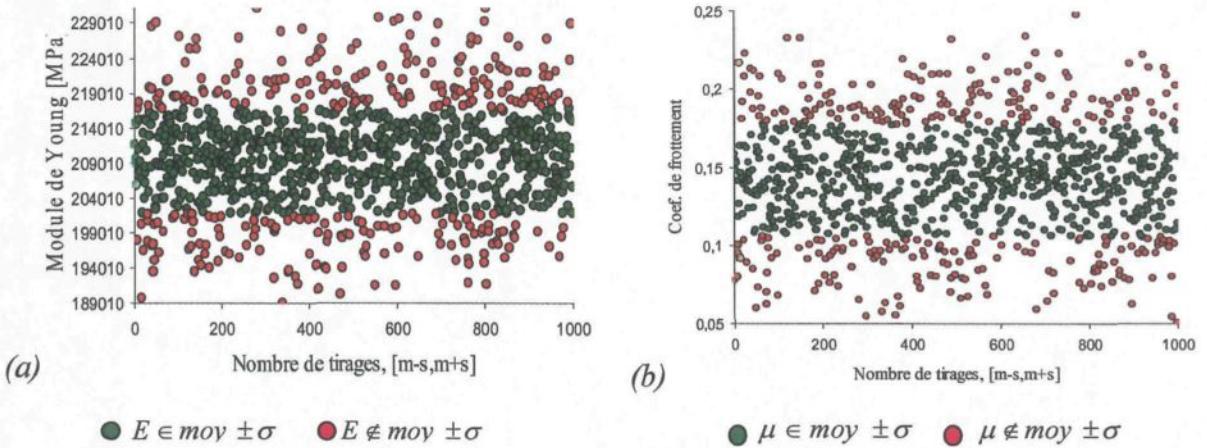


Figure 4.2 - Critère de sélection des variables aléatoires, (a) module de Young; (b) coefficient de frottement.

4.3.2 Contact de Hertz, version cylindre-cylindre

On procède à des simulations de la première version du contact de Hertz, soit celle de deux cylindres identiques déformables (Figure 4.3). Le cylindre, dans cet exemple, possède un rayon de 254 mm, un module de Young de 2.1e5 MPa et un coefficient de Poisson de 0.3. Pour des raisons de symétrie, le modèle se limite à l'étude d'un cylindre en contact avec un plan rigide (Figure 4.4). Les simulations sont menées avec Abaqus/Standard, utilisant un quart de cylindre en deux dimensions maillé avec des éléments triangulaires en déformation plane.

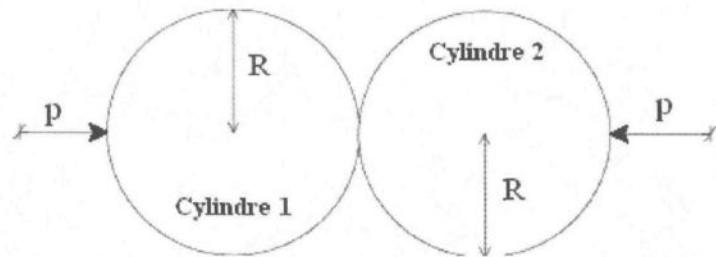


Figure 4.3 – Schéma du contact de Hertz, version cylindre-cylindre.

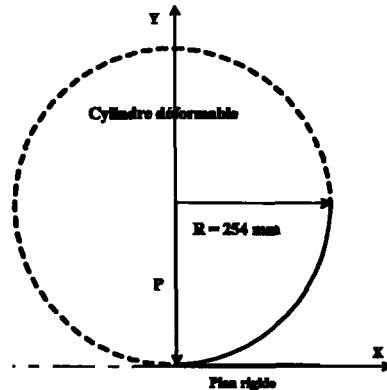


Figure 4.4 – Schéma de contact de Hertz symétrique, cylindre-plan.

Les Figure 4.5 et Figure 4.6 représentent respectivement le modèle éléments finis de l’application et la distribution de la pression de contact identifiée par $CPRESS \equiv P_c$. L’axe de cylindre effectue une pénétration de 5 mm. L’état des déplacements dans les directions x et y est représenté dans les Figure 4.7-a et Figure 4.7-b. Ces premiers résultats sont issus d’un calcul déterministe dont on utilise les valeurs moyennes des variables aléatoires du problème (le module de Young et le coefficient de frottement). Ces résultats ont permis de constater l’ordre de grandeur de certaines valeurs de sorties (tel est le cas pour la pression de contact ou les déplacements). En effet, ce calcul déterministe préliminaire est d’une grande importance puisque c’est à partir de ce calcul qu’il sera possible de définir les fonctions d’état limite. Ces dernières permettent donc de construire les fenêtres des paramètres admissibles en fonction des intervalles bornés définis par rapport à chaque sortie.

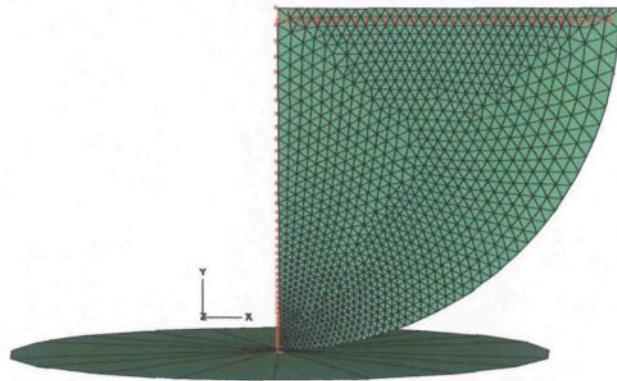


Figure 4.5 - Modèle éléments finis.

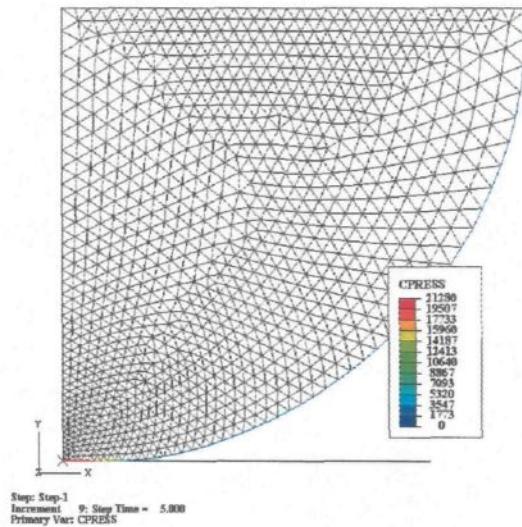


Figure 4.6 - Distribution de la pression de contact.

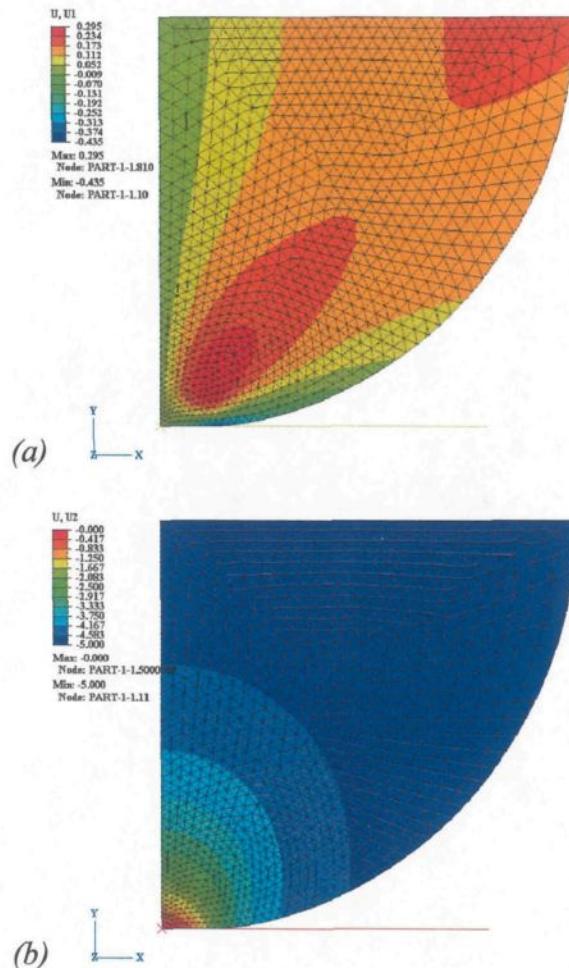


Figure 4.7 - *État des déplacements par rapport aux axes X et Y.*

4.3.2.1 Effet de la variation des variables aléatoires

Cet exemple a pour objectif d'étudier statistiquement le spectre de la pression de contact. Les Figure 4.8 et Figure 4.9 illustrent la variation de cette pression de contact en fonction des points de contact pour les 1000 tirages du module de Young et du coefficient de frottement.

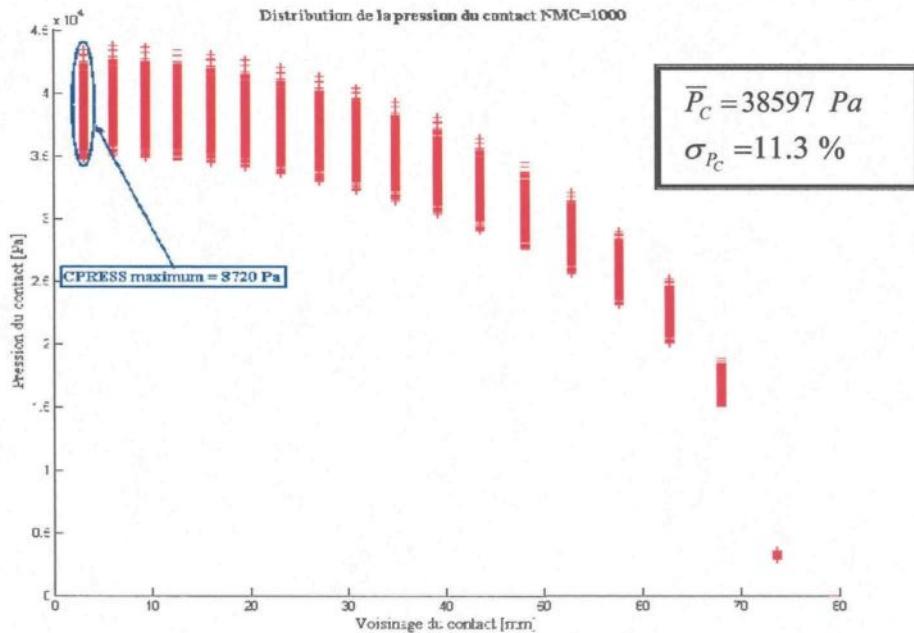


Figure 4.8 – Évolution de la courbe de pression de contact pour le cas de variation du module de Young.

On remarque que pour une valeur moyenne du module de Young de $\bar{E} = 209235.37 \text{ MPa}$ et un pourcentage de variation égal à $\sigma_E = 10.08 \%$, on obtient un écart de variation maximale de la pression de contact au point le plus sollicité ($x = y = z = 0$) de $P_{C_{\max}} = 8720 \text{ Pa}$ avec une valeur moyenne de $\bar{P}_c = 38597 \text{ Pa}$, ce qui donne une variation en pourcentage de $\sigma_{P_c} = 11.3\%$.

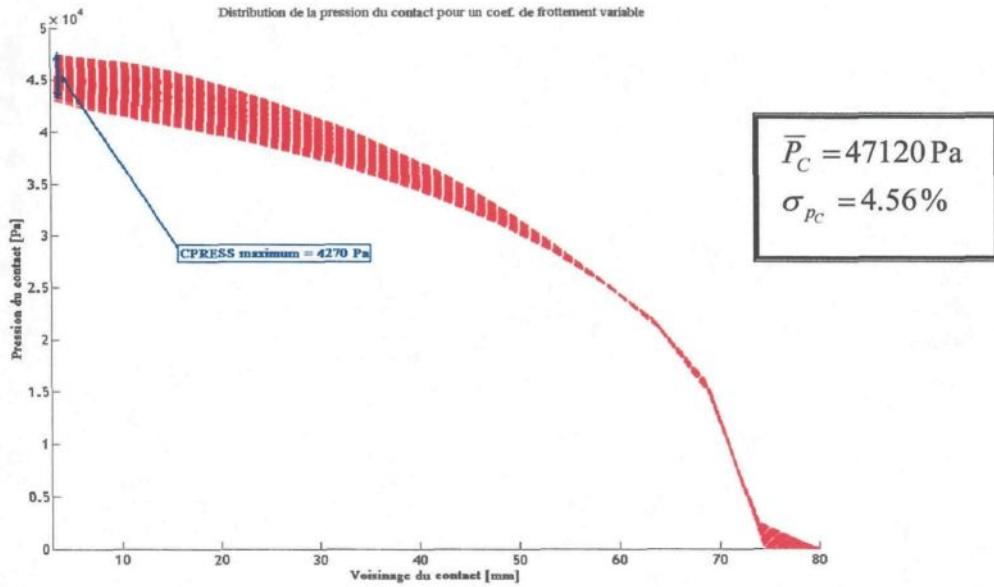


Figure 4.9 – Évolution de la courbe de pression de contact pour le cas de variation du coefficient de frottement.

De même, pour le coefficient de frottement, on remarque que pour une valeur moyenne de $\bar{\mu} = 0.141$ et un pourcentage de variation égal à $\sigma_\mu = 62.94\%$, on obtient un écart de la variation maximale de la pression de contact au point le plus sollicité ($x = y = z = 0$) de $P_{C_{\max}} = 4270 \text{ Pa}$ avec une valeur moyenne de $\bar{P}_c = 47120 \text{ Pa}$, ce qui donne une variation en pourcentage égale à $\sigma_{P_c} = 4.56\%$.

4.3.2.2 Effet de la variation combinée des variables aléatoires

Des simulations sont maintenant menées pour chaque couple de tirages de $(E_i, \mu_i)_{i=1,1000}$ et la variation de la pression de contact est reportée pour chaque événement.

La Figure 4.10 illustre toutes ces variations; on en déduit alors l'écart maximal de pression

de contact au niveau du point de coordonnée ($x = y = 0$). Cet écart prend la valeur de 12560 Pa pour un écart type en pourcentage de $\sigma_{p_c} = 13.46\%$ et une valeur moyenne de $\bar{P}_c = 46746 \text{ Pa}$.

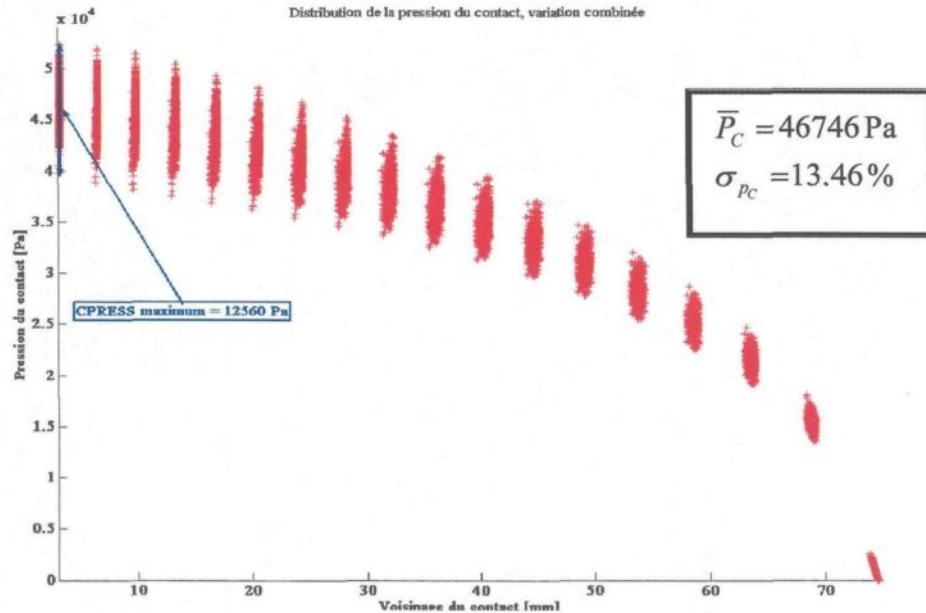


Figure 4.10- Évolution de la courbe de pression de contact pour le cas de la variation combinée du coefficient de frottement et du module de Young.

Quant au Tableau 4.4 il résume les principales caractéristiques statistiques de la pression de contact pour les trois derniers cas de variations.

Tableau 4.4 – Principales caractéristiques de la pression de contact.

	\bar{P}_c [Pa]	Écart max P_c	σ_{p_c} %
$E_{(\sigma=10.08\%)}$	38597	8720	11.3
$\mu_{(\mu=62.99\%)}$	47120	47120	4.56
$E_{(\sigma=10.08\%)}$ et $\mu_{(\mu=62.99\%)}$	46746	12560	13.46

4.3.3 Contact de Hertz, version cylindre-massif

La seconde version du contact de Hertz est celle d'un cylindre rigide contre un massif semi-fin (Figure 4.11). Les valeurs des propriétés mécaniques et géométriques du modèle sont reportées dans le Tableau 4.5.

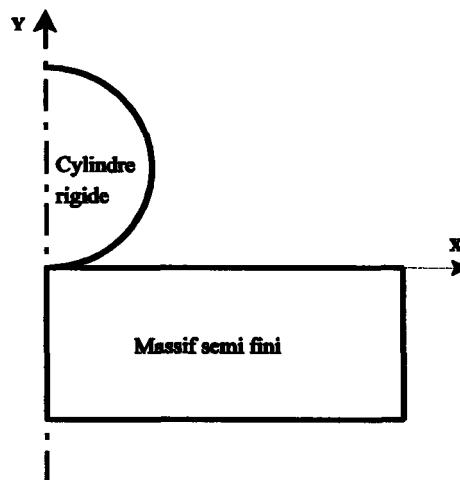
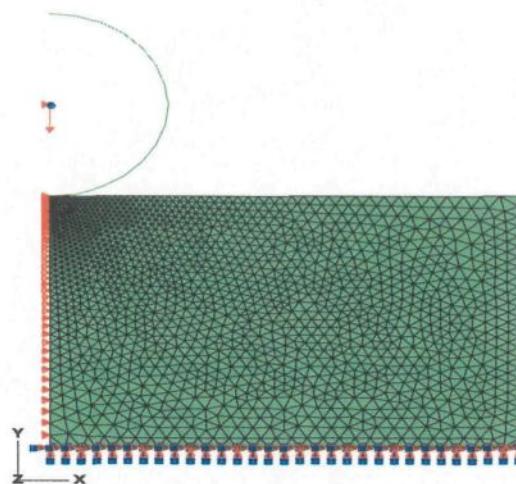
**Figure 4.11- Schéma de contact de Hertz.**

Tableau 4.5- Propriétés géométriques et mécaniques du modèle.

Cylindre rigide	$R = 254 \text{ mm}$ Pénétration = 5 mm
Massif	Dimension = 700x1000 mm $\bar{E} = 210000 \text{ MPa}$ $\bar{\mu} = 0.144$

Les Figure 4.12 et Figure 4.13 illustrent respectivement le modèle éléments finis et l'état de la pression de contact pour une simulation déterministe utilisant les valeurs moyennes des variables aléatoires. De même que pour le cas de contact cylindre/cylindre, on cherche l'état des déplacements dans le massif suivant la direction X (Figure 4.14-a) et la direction Y (Figure 4.14-b).

**Figure 4.12-** Modèle éléments finis.

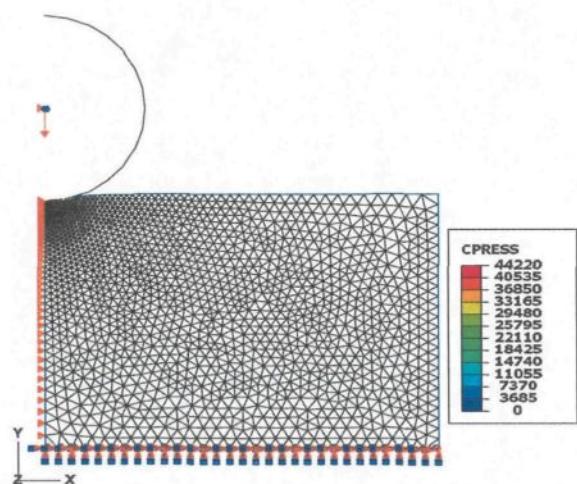


Figure 4.13- État de distribution de la pression de contact.

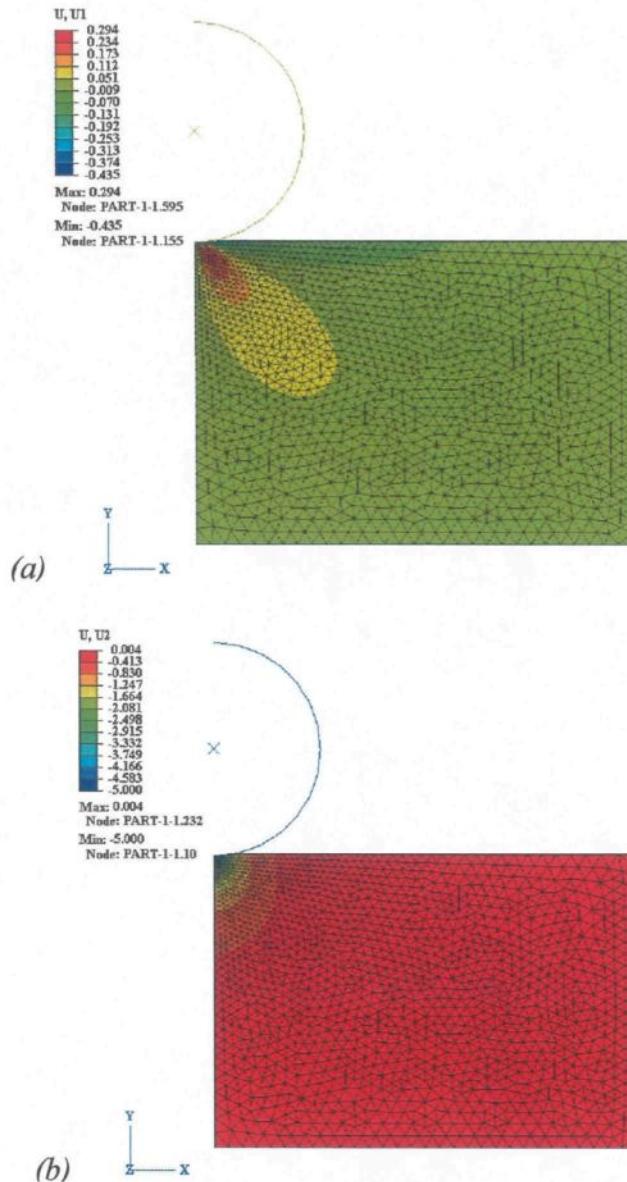


Figure 4.14 - État des déplacements suivant les axes X et Y .

4.3.3.1 Effet de la variation des variables aléatoires

Dans ce paragraphe, on évalue l'effet d'une variation du module de Young sur la distribution de la pression de contact. On représente à la Figure 4.15 l'évolution de la

pression de contact le long de la zone de contact pour une descente verticale du cylindre de 5 mm.

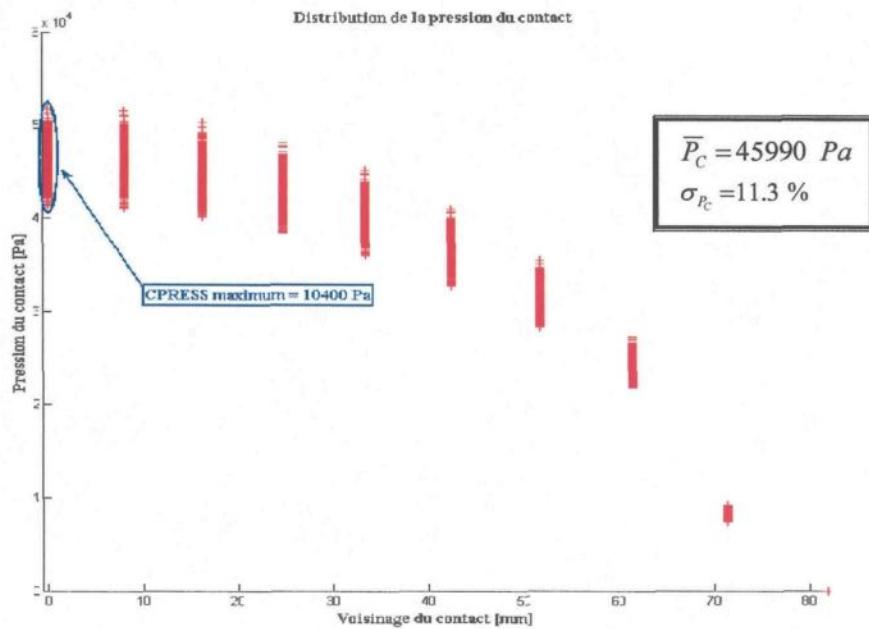


Figure 4.15- Évolution de la courbe de pression de contact pour le cas de la variation du module de Young.

Ensuite, on évalue l'effet de la variation du coefficient de frottement sur la pression de contact le long du chemin de pénétration et au voisinage du contact (nœud d'abscisse $x=y=0$) tel que montré à la Figure 4.16.

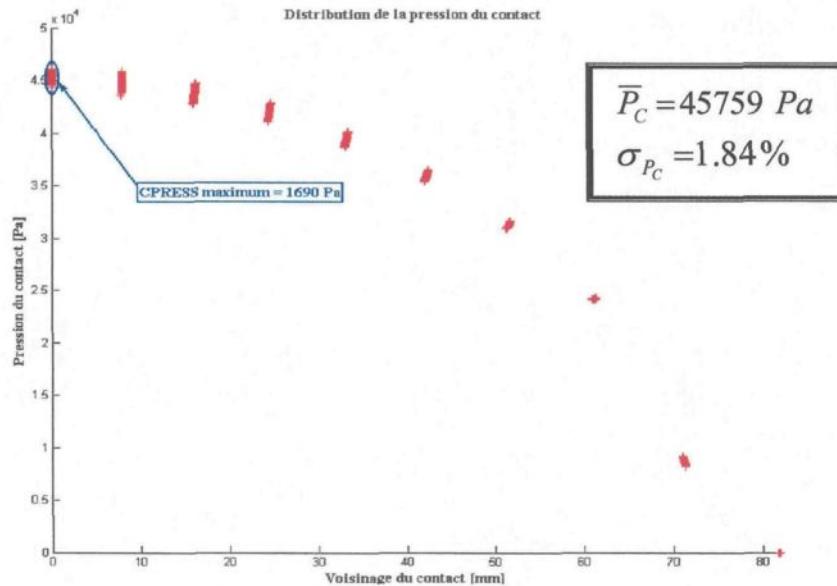


Figure 4.16- Évolution de la courbe de pression de contact en fonction du coefficient de frottement.

4.3.3.2 Effet de la variation combinée des variables aléatoires

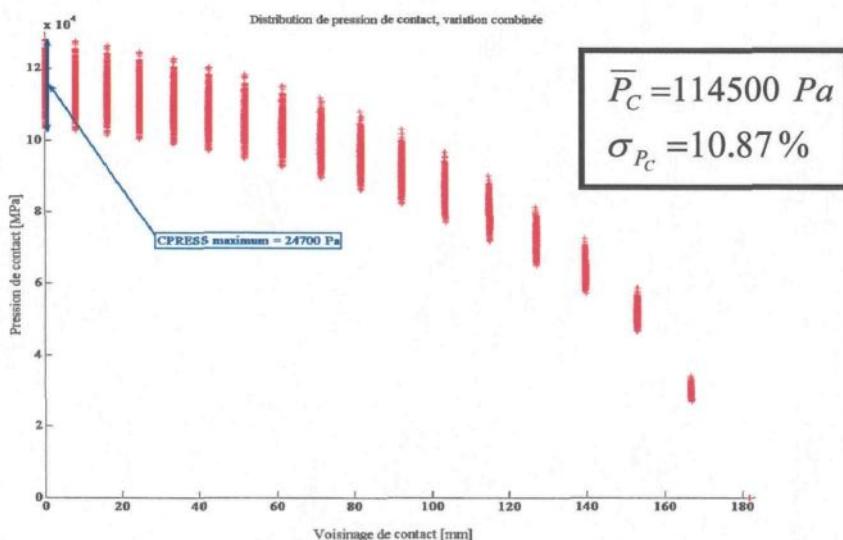


Figure 4.17- Évolution de la courbe de pression de contact en fonction de la variation combinée du coefficient de frottement et du module de Young.

Après avoir analysé l'effet individuel et l'effet combiné des différentes variables aléatoires, on résume dans le Tableau 4.6 les valeurs moyennes, les écarts maximaux et les écarts types en pourcentage de la pression de contact à l'origine (point de coordonnée $x = y = 0$).

Tableau 4.6 – Principales caractéristiques statistiques de la pression de contact.

	\bar{P}_C [Pa]	Écartmax P_C	σ_{P_C} %
$E_{(\sigma=10.08\%)}$	45990	10400	11.3
$\mu_{(\mu=62.99\%)}$	45759	1690	1.84
$E_{(\sigma=10.08\%)}$ et $\mu_{(\mu=62.99\%)}$	114500	24700	10.87

4.3.4 Analyse fiabiliste et de sensibilité

L'analyse fiabiliste menée se limite à deux variables aléatoires par application. On distingue le succès d'un tirage donné par son appartenance à un intervalle $[m - \sigma, m + \sigma]$. Cependant, la définition de la fonction d'état limite est reliée à l'appartenance d'une sortie à un intervalle jugé admissible. Pour les deux cas de contact de Hertz, trois intervalles définissent cette fonction d'état limite et forment successivement les zones comprenant les valeurs de la solution S appartenant aux intervalles 1 : $[S_{\max} - \sigma, S_{\max}]$, 2 : $[S_{\min} + \sigma]$ et 3 : $[S_{\min} - \sigma, S_{\max} + \sigma]$. Ces intervalles regroupent les valeurs dites de confiance ou de défaillance selon les conditions d'admissibilité choisies. Pour le cas des deux problèmes de Hertz, c'est la pression de contact CPRESS qui représente la réponse à analyser.

4.3.4.1 Problème de contact cylindre/cylindre

Pour le problème de contact de Hertz dans sa version deux cylindres déformables, ce sont les deux variables module de Young et coefficient de frottement qui conditionnent un scénario de succès. Ce scénario se traduit par l'appartenance de la pression de contact, calculée à l'origine ($x = y = 0$), à chacun des intervalles 1, 2 ou 3 dits de confiance ou de défaillance définis au paragraphe précédent. La Figure 4.18 montre, dans l'espace de ces deux variables, que l'effet du coefficient de frottement sur la taille et la forme de la fenêtre de faisabilité est léger. Par contre, sa forme est remarquablement sensible à une variation du module de Young.

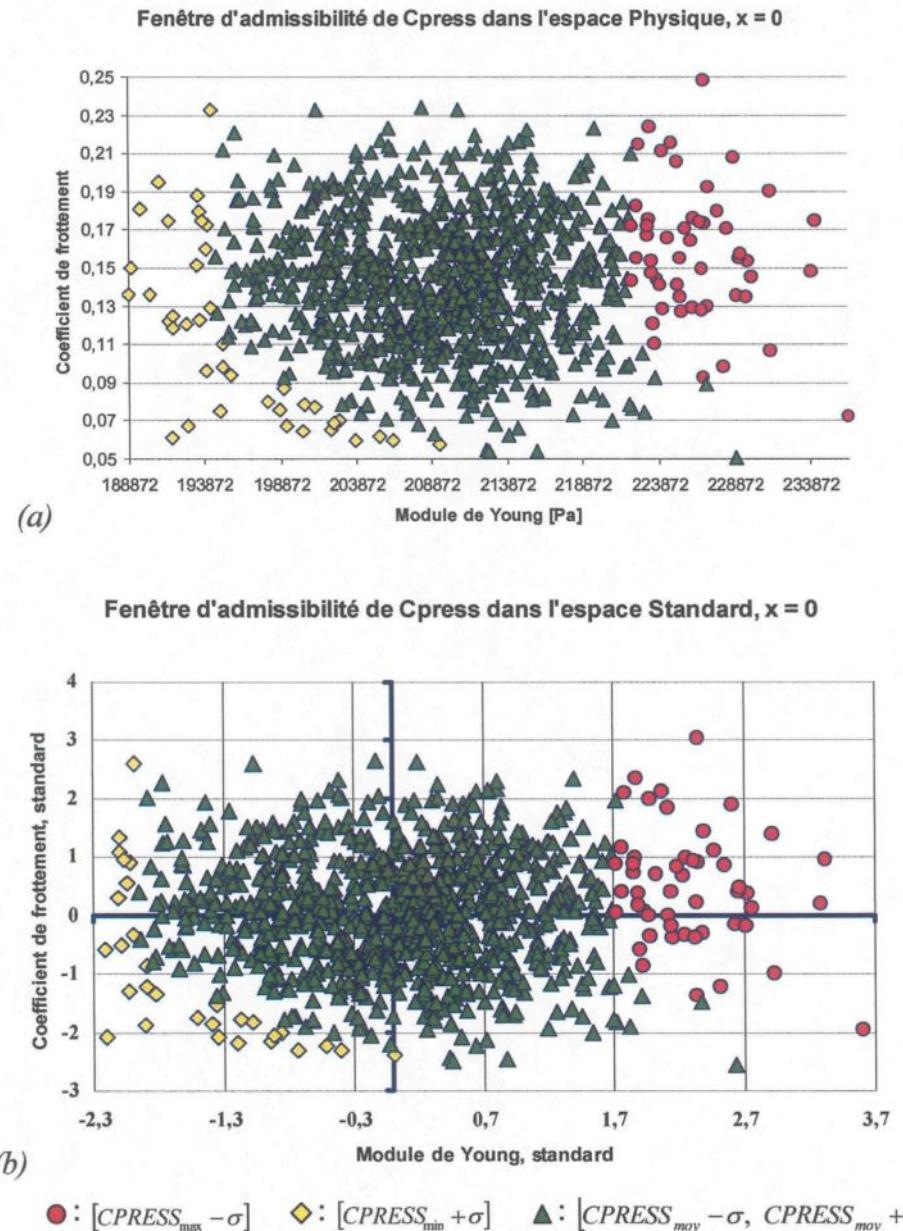


Figure 4.18 - Les fenêtres d'admissibilité, cas cylindre/cylindre, dans les espaces physique (a) et standard (b) des variables aléatoires module de Young/coefficient de frottement.

4.3.4.2 Problème de contact cylindre/massif

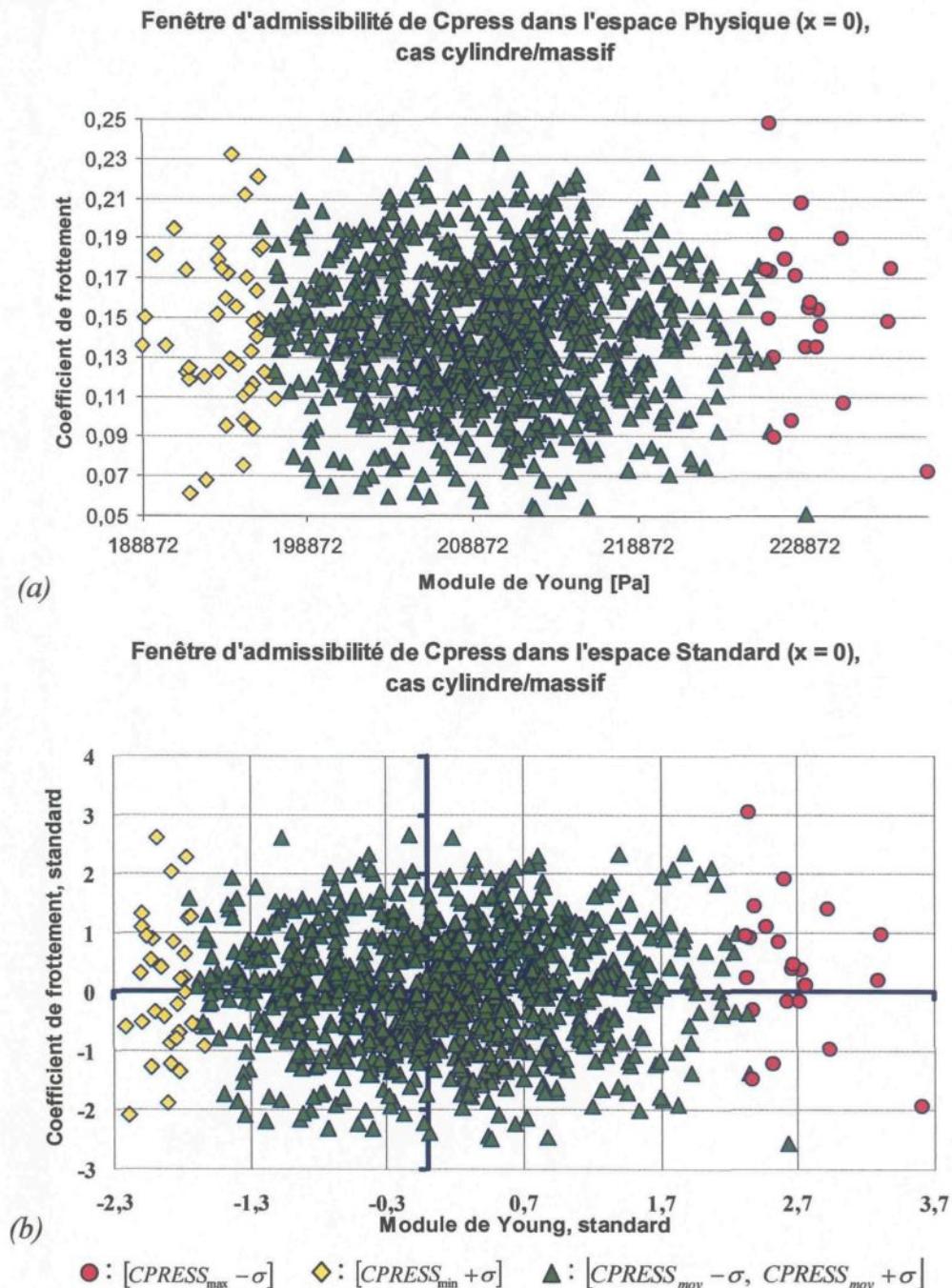


Figure 4.19 - Les fenêtres d'admissibilité, cas cylindre/massif, dans les espaces physique (a) et standard (b) des variables aléatoires module de Young/coefficient de frottement.

4.3.4.3 Sensibilité des paramètres et indice de fiabilité

Notre objectif dans ce paragraphe est de mesurer les degrés de sensibilité d'une réponse du problème, notée S , aux paramètres liés au matériau, l'interface ou le procédé. Pour cela, nous nous sommes intéressés en particulier à calculer la sensibilité et la sensibilité réduite (adimensionnée) de chaque paramètre, puis à calculer l'indice de fiabilité de type Hasofer et Lind β_{HL} (voir [FLO94], [TAN00] et [ELH97]).

❖ *Sensibilité des paramètres*

La sensibilité représente une mesure de l'influence de l'incertitude des paramètres sur les prévisions des calculs :

$$s(u_2) = \frac{\partial S_{u_1}}{\partial u_1} \Big|_{u_2} \quad (4.1)$$

$$sr(u_2) = \left(\frac{\partial S_{u_1}}{\partial u_1} \Big|_{u_2} \right) \cdot \left(\frac{u_{1moy}|_{u_2}}{S_{u_{1moy}}} \right) \quad (4.2)$$

$$\Delta u_1 = u_{1max: min} - u_{1moy} \quad (4.3)$$

Schématiquement, une identification donnée (minimale, moyenne ou maximale) d'un paramètre aléatoire correspond à la projection dans l'espace physique formé par les variables en question (Figure 4.20).

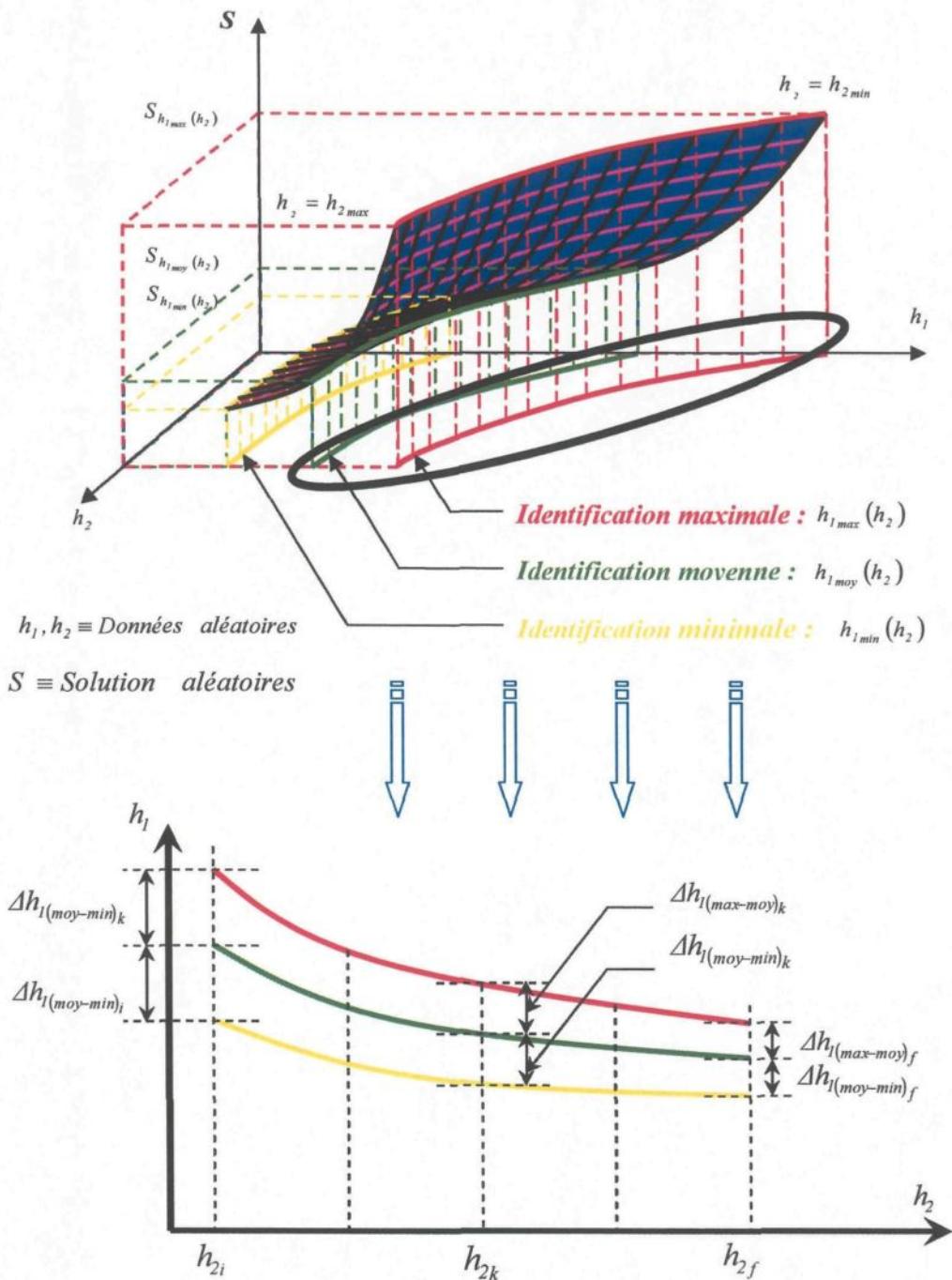


Figure 4.20 - Schéma du principe de calcul de sensibilité.

Le calcul de sensibilité a permis de constater que la pression de contact est plus sensible à la variation du module de Young (voir le Tableau 4.7) qu'à une variation du coefficient de frottement, même si ce dernier atteint les 60% de sa valeur moyenne.

Dans le cas où les paramètres aléatoires sont dépendants, il est utile de savoir quel sens aurait l'incertitude et la sensibilité de l'un des paramètres et comment procéder pour calculer ces sensibilités. Dans un tel cas, la non-constance d'un paramètre ne dépend plus d'un seul aléa (incertitude) puisque la non-uniformité par rapport aux autres paramètres doit être prise en considération, d'où la nécessité d'élargir le concept de sensibilité et de sensibilité adimensionnée. Il est utile, par contre, de rappeler que parmi les hypothèses soulevées dans cette étude, c'est l'indépendance des paramètres les uns par rapport aux autres. En effet, il n'est pas facile d'établir une telle dépendance entre les variables aléatoires, et il semble que cette tâche nécessite la plupart du temps une étude expérimentale suivie d'un calcul probabiliste basé sur une fonction de densité de probabilité conjointe d'un couple de variables aléatoires (h_1, h_2).

❖ *Calcul de l'indice de fiabilité de Hasofer et Lind*

Le calcul fiabiliste utilisant la méthode directe de Monte Carlo fait appel généralement à des indices de fiabilité. L'indice de Hasofer et Lind β_{HL} est le plus couramment utilisé et est à la base des méthodes les plus performantes.

Cet indice est calculé (voir le Tableau 4.7) pour chaque cas de contact de Hertz. Il s'agit alors de calculer la plus petite distance de l'origine à la frontière des nuages de points représentant la fonction d'état limite définie par l'inéquation :

$$G : S_i \geq S_{max} - \sigma_S \quad i = 1..1000 \quad (4.4)$$

On calcule par la suite la probabilité de défaillance associée à la réalisation de l'ensemble des événements validant l'inéquation précédente :

$$P_f = \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} I[G(h^i)] \quad \text{avec} \quad I[G(u^i)] = \begin{cases} 0 & \text{si } G(h^i) \leq 0 \Rightarrow \text{succès} \\ 1 & \text{si } G(h^i) \geq 0 \Rightarrow \text{échec} \end{cases} \quad (4.5)$$

Tableau 4.7 – Valeurs des sensibilités et des indices de fiabilités de Hasofer et Lind.

Applications	Variables aléatoires	Sensibilité réduite	β_{HL}	$S \geq (S_{\max} - \sigma_s)$	P_f
Cylindre-cylindre	<i>Module de Young</i>	0.99	1.67	51	0.051
	<i>Coefficient de frottement</i>	0.03			
Cylindre-massif	<i>Module de Young</i>	0.99	2.45	22	0.022
	<i>Coefficient de frottement</i>	0.03			

4.4 Problèmes de contact multiphysiques

La section précédente a été consacrée à l'étude de deux problèmes de contact de Hertz utilisant le logiciel Abaqus, ce qui nous a permis de vérifier et de s'assurer de la stabilité de l'algorithme de Monte Carlo. De plus, on a pu relever les limites d'un tel algorithme face à ces problèmes. Ces limites sont liées principalement aux divergences de certains problèmes suite à des choix non appropriés des écarts types des variables aléatoires de problème. Plusieurs simulations dans le cas déterministe ont été nécessaires afin de pallier au problème de divergence. Aussi, le logiciel Abaqus muni de ses interfaces de résolution (Standard, Implicit et Explicit) permet une certaine flexibilité quant à la possibilité de le coupler avec des routines externes telle que l'algorithme de Monte Carlo.

Dans cette section, un exemple thermomécanique, celui de glissement d'un bloc sur une plaque et un autre thermo-électro-mécanique, celui de contact d'une poutre courbe sur

un bloc droit vont être étudiés. Le logiciel FESh++ sera le solveur déterministe pour ces deux exemples.

4.4.1 Glissement d'un bloc sur une plaque

Dans cet exemple, on considère le problème thermomécanique de glissement d'un bloc sur une plaque (Figure 4.21, Figure 4.22). Le couplage thermique/mécanique, est faible, c'est-à-dire que les résolutions du sous-problème mécanique et du sous-problème thermique se font successivement pour chaque pas de temps. On résout le problème mécanique en premier, puisque la sollicitation externe provient de la pression appliquée [GOU04].

Le matériau constitutif est le même pour le bloc et la plaque. Le comportement mécanique est supposé élastique linéaire et est défini par le module de Young de $200 GPa$ et un coefficient de Poisson nul. Le comportement thermique est défini par une conductivité $55 W / m^{\circ}C$. Les blocs sont en contact parfait au départ et les conditions aux limites sont :

- Les déplacements $u = v = w = 0$ pour les nœuds inférieurs du bloc du bas ;
- Conditions de symétrie :
 - $u = 0$ pour les nœuds en $y = 0$;
 - $v = 0$ pour les nœuds en $x = 0$;
- Pression mécanique de $10 MPa$ sur la face supérieure du bloc du haut ;
- $T = 300^{\circ}C$ sur les nœuds supérieurs du bloc du haut ;
- Convection avec $h_{conv} = 65 W / m^2 \cdot ^{\circ}C$ et température à l'infini $T_{\infty} = 25^{\circ}C$ sur la face inférieure du bloc du bas.

La propriété de contact thermique est donnée par l'expression suivante (voir [GOU04]):

$$h_c = 1.77810 - 4P + 222.222 + 100(T/300)$$

où P représente la pression normale à l'interface et T , la température moyenne des surfaces en contact. Ainsi, la conductance croît linéairement avec l'augmentation de la pression et permet de prendre en considération l'amélioration du transfert avec la température. Pour le contact mécanique, des coefficients de pénalisation normale et tangentielle respectivement de 10^{12} et de 10^{10} sont utilisés pour avoir une bonne mise en compte des contraintes et éviter l'interpénétration des frontières.

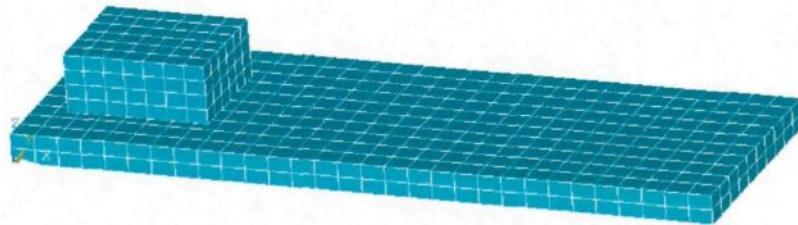


Figure 4.21 - Maillage éléments finis du bloc et de la plaque.

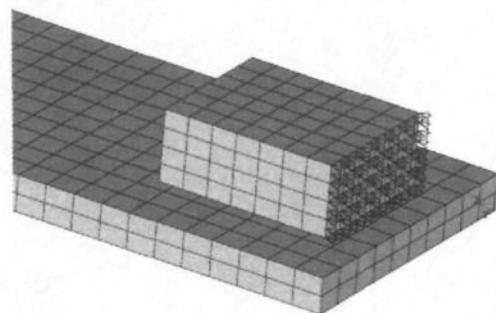


Figure 4.22 - Modèle éléments finis, déplacements imposés.

4.4.1.1 Choix et caractéristiques statistiques des variables aléatoires

Dans le but d'analyser la stabilité du problème face à des variations aléatoires de certains paramètres matériaux et d'interfaces, le problème précédent est étudié en premier lieu dans le cas mécanique, sans tenir compte de l'aspect thermique. Le module de Young (E) et le coefficient de frottement sont les variables aléatoires de ce problème. En second lieu, le problème sera étudié dans le cas thermomécanique en tenant compte du coefficient d'expansion thermique, du coefficient de frottement (μ) et du coefficient de convection thermique (h_{conv}) comme étant les variables aléatoires du problème. Le Tableau 4.8 résume les principales caractéristiques statistiques de ces variables aléatoires.

Tableau 4.8 - Caractéristiques statistiques des variables aléatoires.

Propriétés mécaniques		Propriétés thermomécaniques			
μ	$E[\text{Pa}]$	$h_{\text{conv}} [\text{W} / \text{m}^2 \text{C}]$	Coef. d'expansion [C^{-1}]	μ	
m_t	0.3	2.0 E11	5	1.121 E-5	0.3
m_c	0.286	2.012 E11	5.23	1.141 E-5	0.3
σ_t	0.04	2.0 E10	0.9	1.0 E-6	0.06
σ_c	0.042	1.95 E10	0.922	9.04 E-7	0.05
$\sigma\%$	32 %	20.5 %	40.3 %	19.99 %	40.1 %

m_t : moyenne théorique m_c : moyenne calculée
 σ_t : écart type théorique σ_c : écart type calculé $\sigma\%$: écart type en pourcentage

4.4.1.2 Problème mécanique - cas 1

La Figure 4.23 représente la distribution des variables aléatoires du module de Young et du coefficient de frottement pour un tirage de 50 valeurs selon une loi de variation gaussienne.

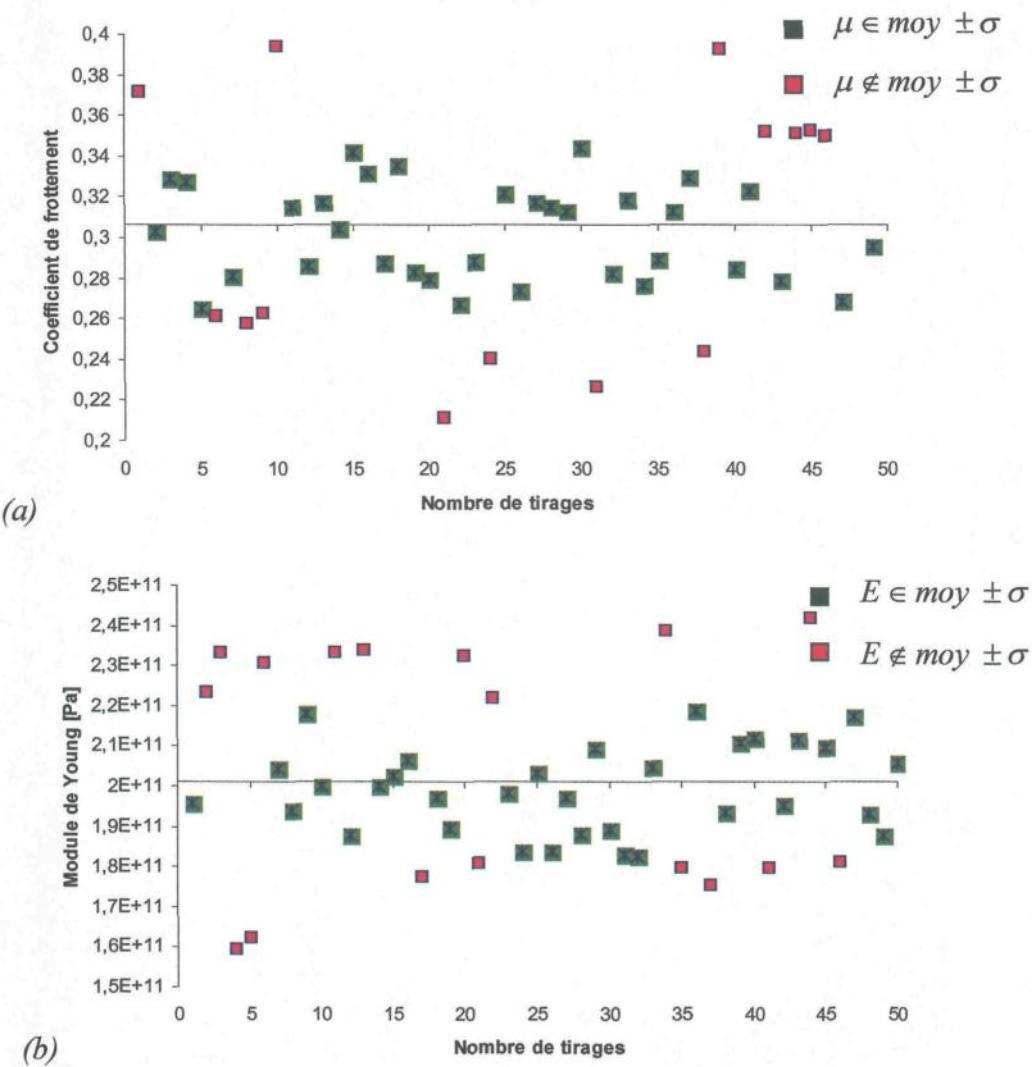


Figure 4.23 - Échantillonnage des variables aléatoires, (a) coefficient de frottement; (b)modèle de Young.

❖ Solution Monte Carlo

Pour analyser les résultats, on doit se placer à des points judicieusement choisis. Les points retenus sont situés à des endroits où on a de forts gradients. Un nombre suffisant de simulations déterministes permet donc de nous renseigner clairement sur l'évolution de certains résultats tels que les contraintes principales $\sigma_{yy} \equiv S_{yy}$ et $\sigma_{zz} \equiv S_{zz}$. Cela a permis de choisir les nœuds 1 (Figure 4.24-a) et 2 (Figure 4.24-b) pour l'analyse de tels résultats (voir les Figure 4.25 et Figure 4.26).

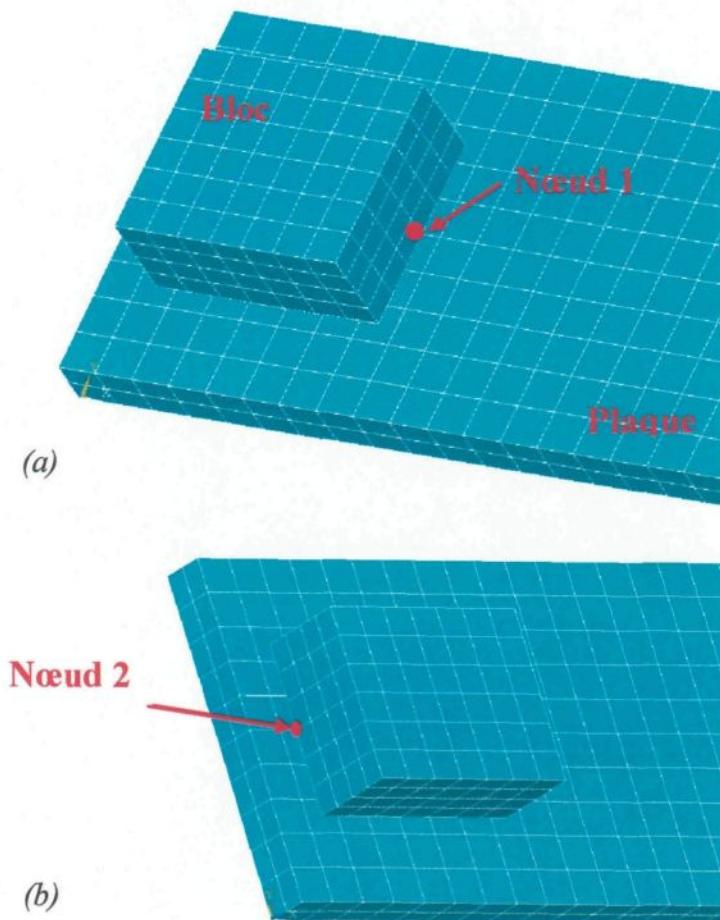


Figure 4.24 - Choix des nœuds 1 et 2 pour l'analyse statistique.

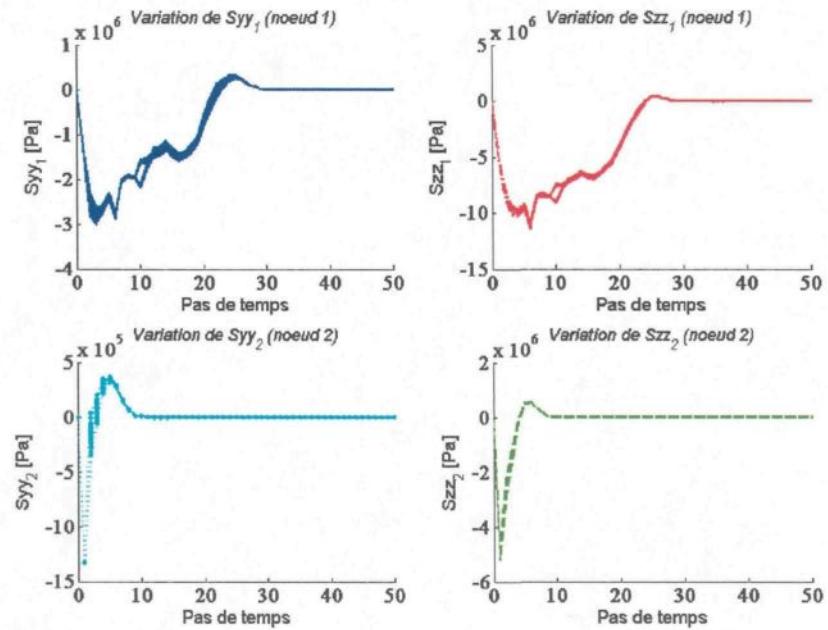


Figure 4.25 - Variation des contraintes S_{yy} et S_{zz} aux Nœuds 1 et 2, problème mécanique.

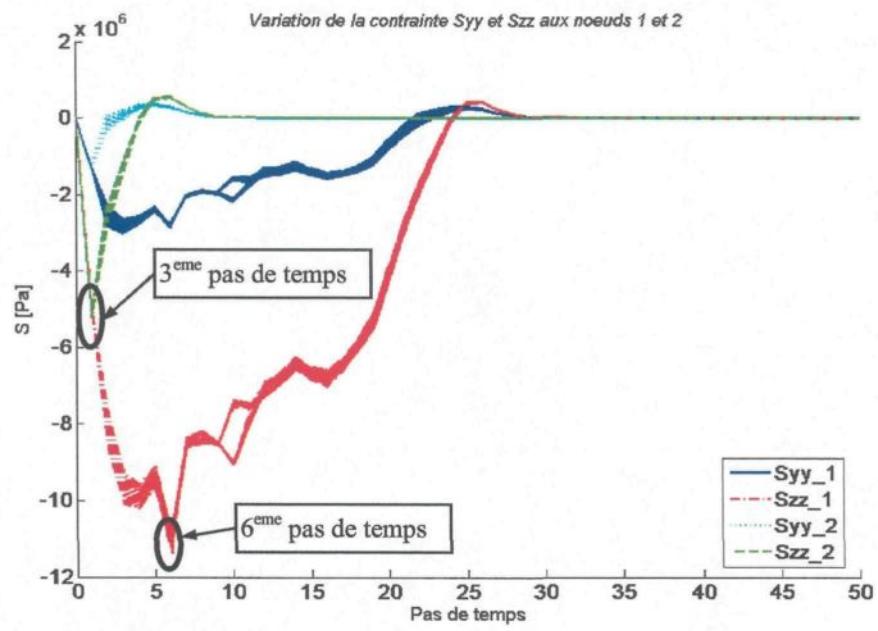


Figure 4.26 - Spectre de variation des contraintes S_{yy} et S_{zz} aux nœuds 1 et 2, problème mécanique.

Les Figure 4.27 et Figure 4.28 représentent les fenêtres d'admissibilité des contraintes S_z aux nœuds 1 et 2 respectivement dans les espaces physiques et standards des deux variables aléatoires du module de Young et du coefficient de frottement. En effet, les valeurs maximales de la contrainte S_z ont été obtenues à 18 mm (6^{eme} pas) et 9 mm (3^{eme} pas) de glissement respectivement pour les nœuds 1 et 2.

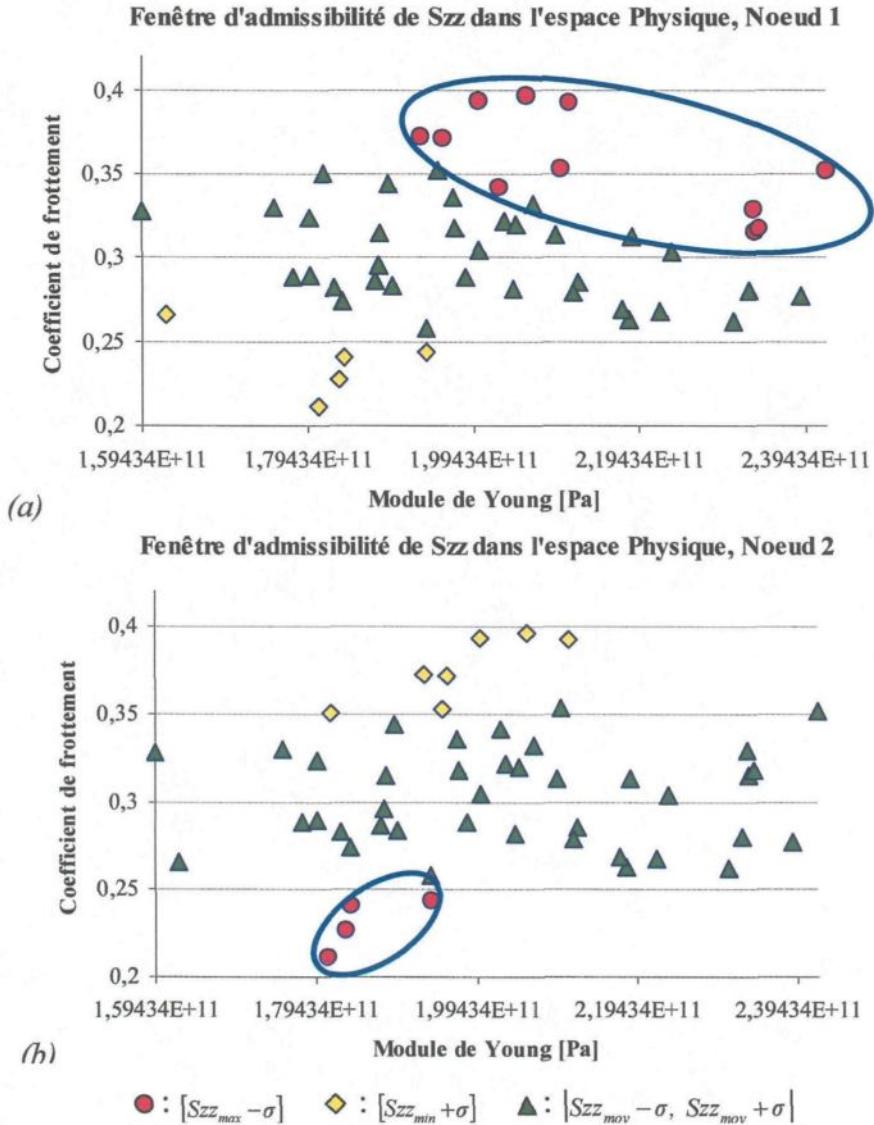


Figure 4.27 - Les fenêtres d'admissibilité des contraintes S_{zz} , (a) noeud 1 (pas 6) ; (b) noeud 2 (pas 3), dans l'espace physique du coefficient de frottement/module de Young.

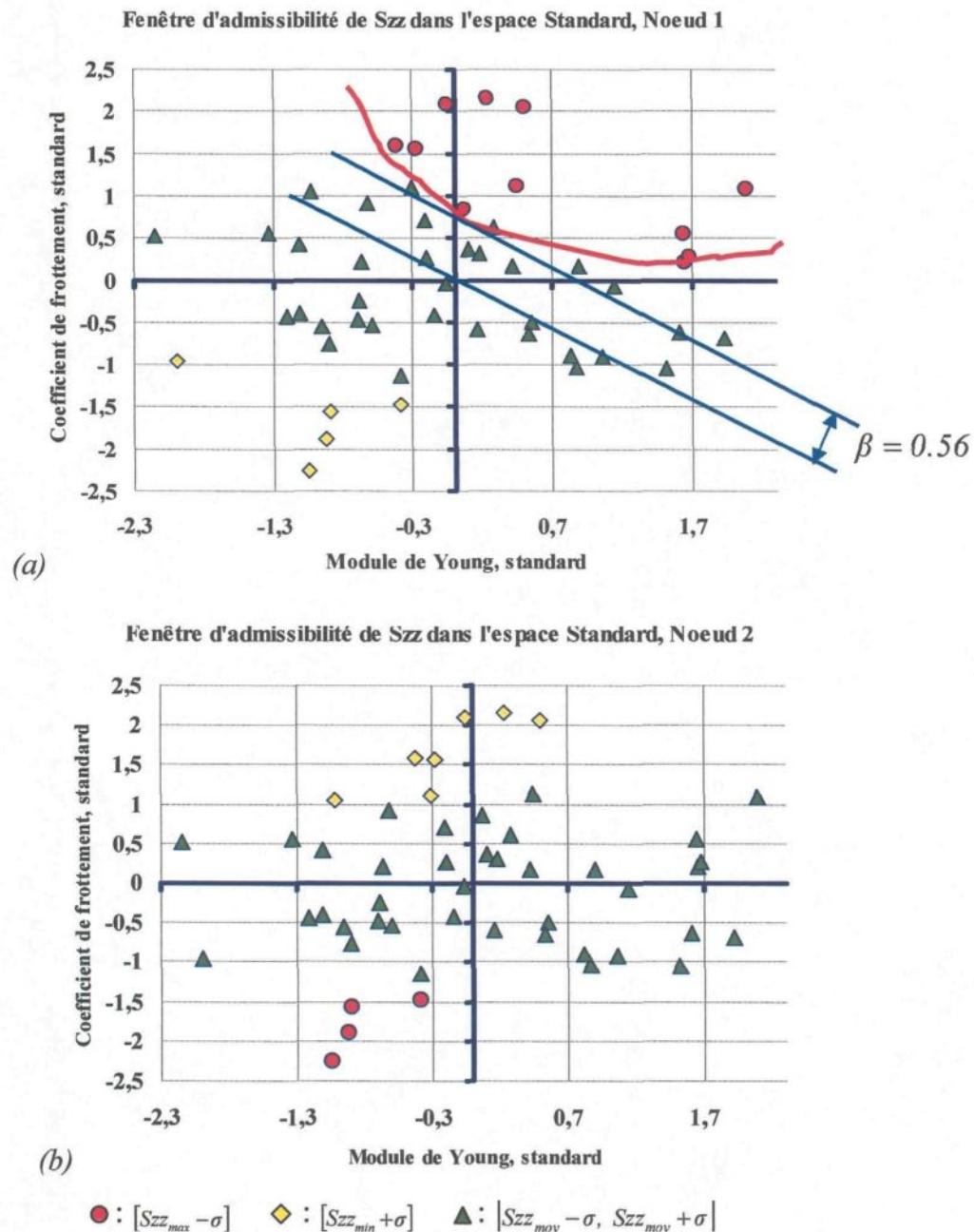


Figure 4.28 - Les fenêtres d'admissibilité des contraintes S_{zz} , (a) noeud 1 (pas 6) ; (b) noeud 2 (pas 3), dans l'espace standard du coefficient de frottement/module de Young.

Pour les deux cas de surfaces de réponses physiques construites par rapport aux valeurs de la contrainte S_{zz} pour les noeuds 1 et 2, les écarts types en pourcentage du coefficient de frottement et du module de Young sont égaux respectivement à 32 % et à 40.3 %. Compte tenu de ces valeurs, on remarque que pour le noeud 1 les valeurs représentant l'intervalle de la fonction d'état limite $[S_{zz_{max}} - \sigma]$, sont obtenues pour des grandes valeurs des deux variables aléatoires. Le coefficient de frottement affecte remarquablement la distribution de la surface de réponse physique tandis que le module de Young a permis d'élargir la zone des valeurs maximales de S_{zz} .

Par contre, pour le noeud 2 on remarque que les valeurs représentant l'intervalle $[S_{zz_{max}} - \sigma]$ sont obtenues pour les valeurs minimales du coefficient de frottement et du module de Young. Le même effet sur la forme et sur l'étendue de la fenêtre des valeurs admissibles est noté.

4.4.1.3 Problème thermomécanique - cas 2

Le même exemple de glissement d'un bloc sur plaque est étudié dans le cas thermomécanique. Trois variables aléatoires sont alors choisies pour ce fait, deux d'entre elles sont liées à l'état thermique le cas du coefficient de convection et de l'expansion thermique et une dernière liée à l'interface le cas du coefficient de frottement. La Figure 4.29 représente la distribution d'un tirage, selon une loi de distribution gaussienne de ces variables aléatoires.

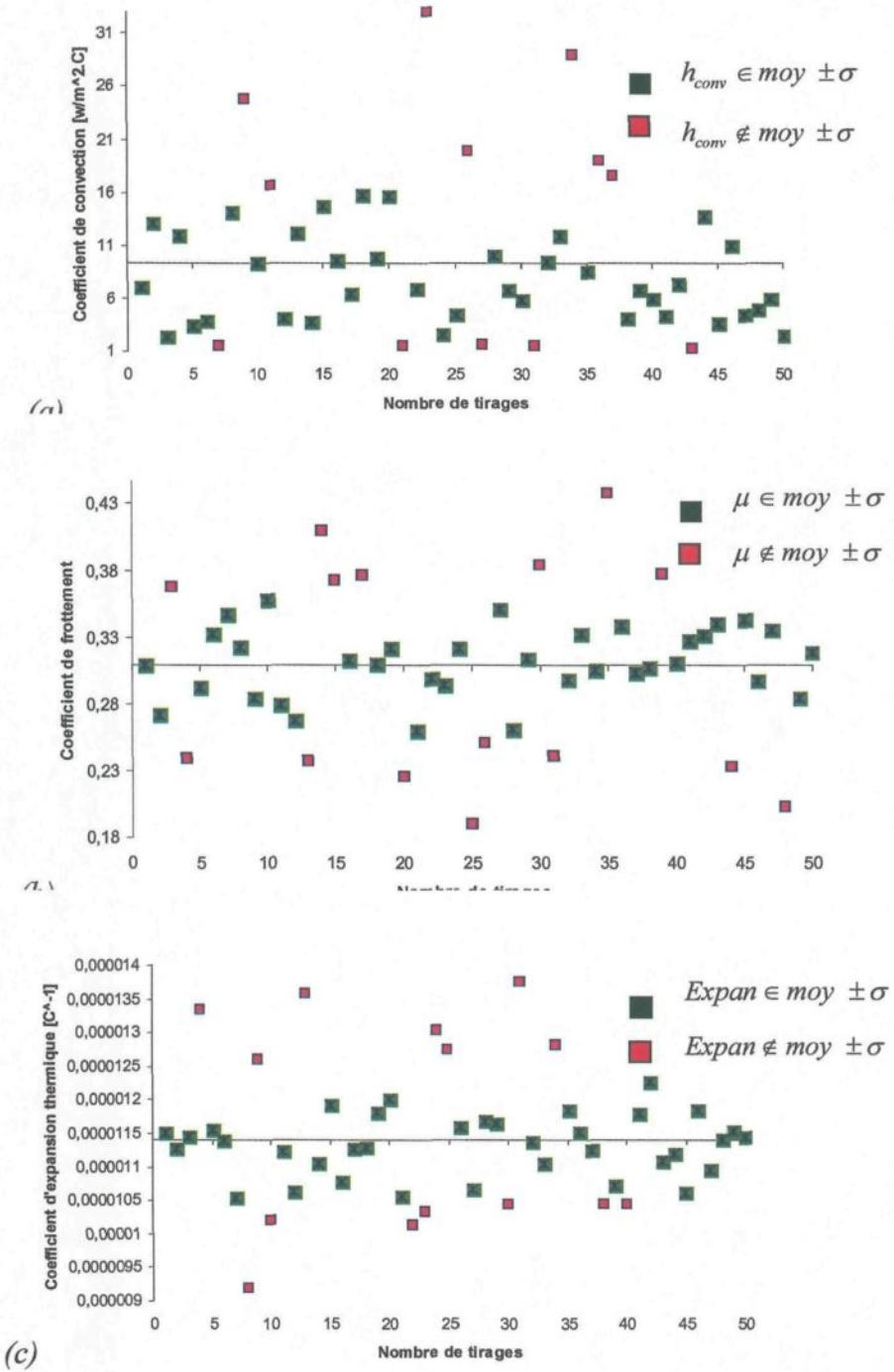


Figure 4.29 - Échantillonnage des variables aléatoires, (a) coefficient de convection; (b) coefficient de frottement; (c) coefficient d'expansion thermique.

❖ Solution Monte Carlo

Comme dans le cas de l'analyse du problème mécanique, les Figure 4.30 et Figure 4.31 représentent la variation des contraintes S_{yy} et S_{zz} aux nœuds 1 et 2 relativement au cas du problème thermomécanique.

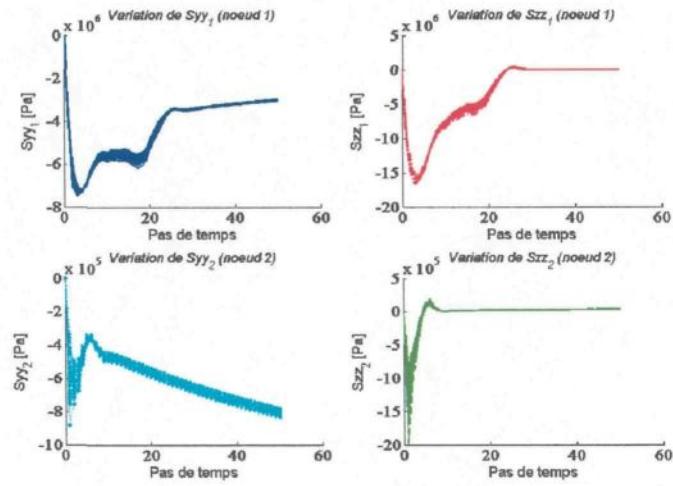


Figure 4.30 - Variation des contraintes S_{yy} et S_{zz} aux nœuds 1 et 2, problème thermomécanique.

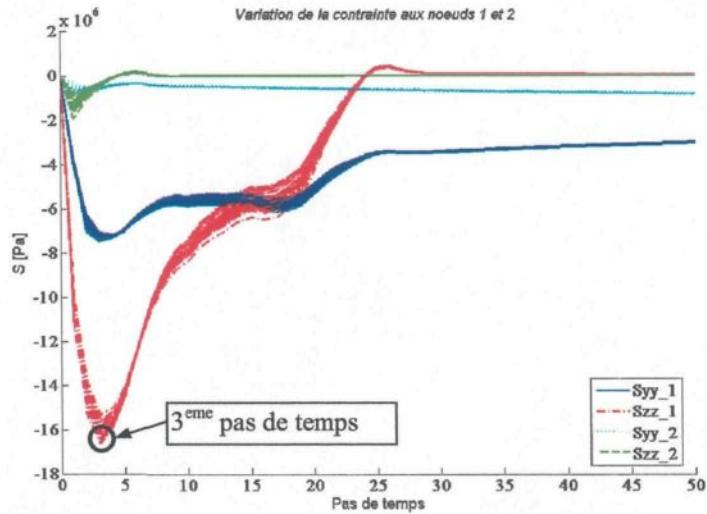


Figure 4.31 - Spectre de la variation des contraintes S_{yy} et S_{zz} aux nœuds 1 et 2, problème thermomécanique.

De même, la Figure 4.32 représente les fenêtres d'admissibilité des contraintes S_{zz} au nœud 1 (pour la plus grande valeur de S_{zz} au 3^{eme} pas de temps) dans l'espace physique et standard des variables aléatoires : coefficient d'expansion/coefficient de convection.

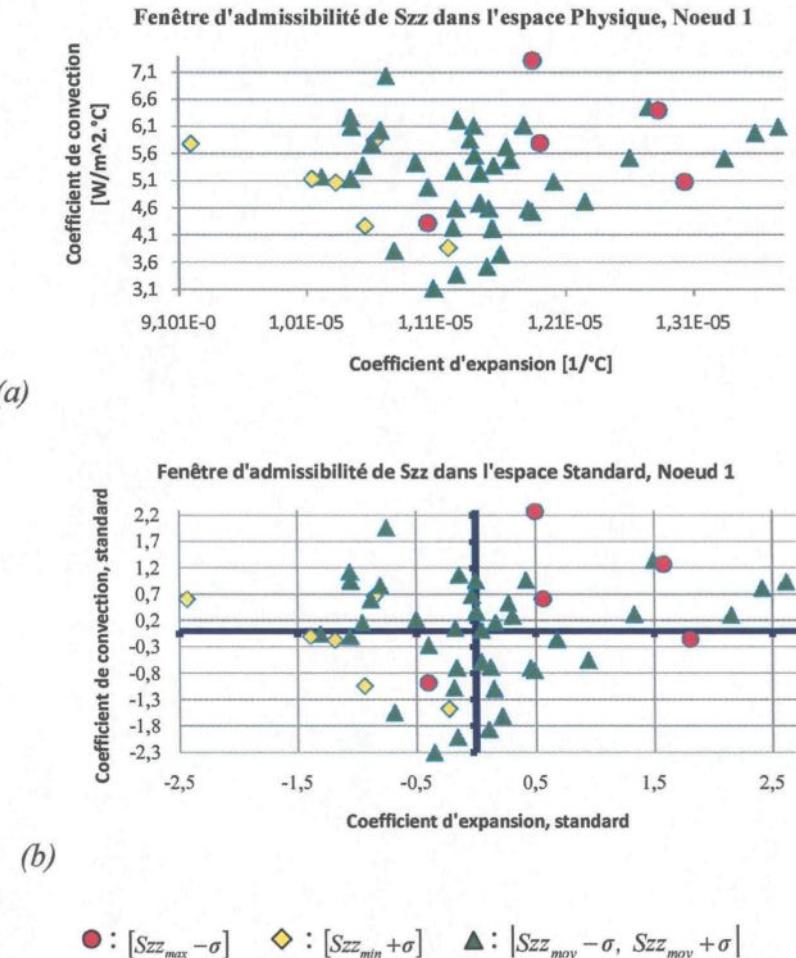


Figure 4.32 - Fenêtre d'admissibilité des contraintes S_{zz} au nœud 1 (3^{eme} pas de temps), dans les espaces physiques (a) et standards (b) du coefficient d'expansion/coefficient de convection.

Les mêmes fenêtres d'admissibilité des contraintes S_{zz} sont représentées ici encore par la Figure 4.33 dans l'espace des variables aléatoires différent de celui du coefficient de frottement/coefficient d'expansion.

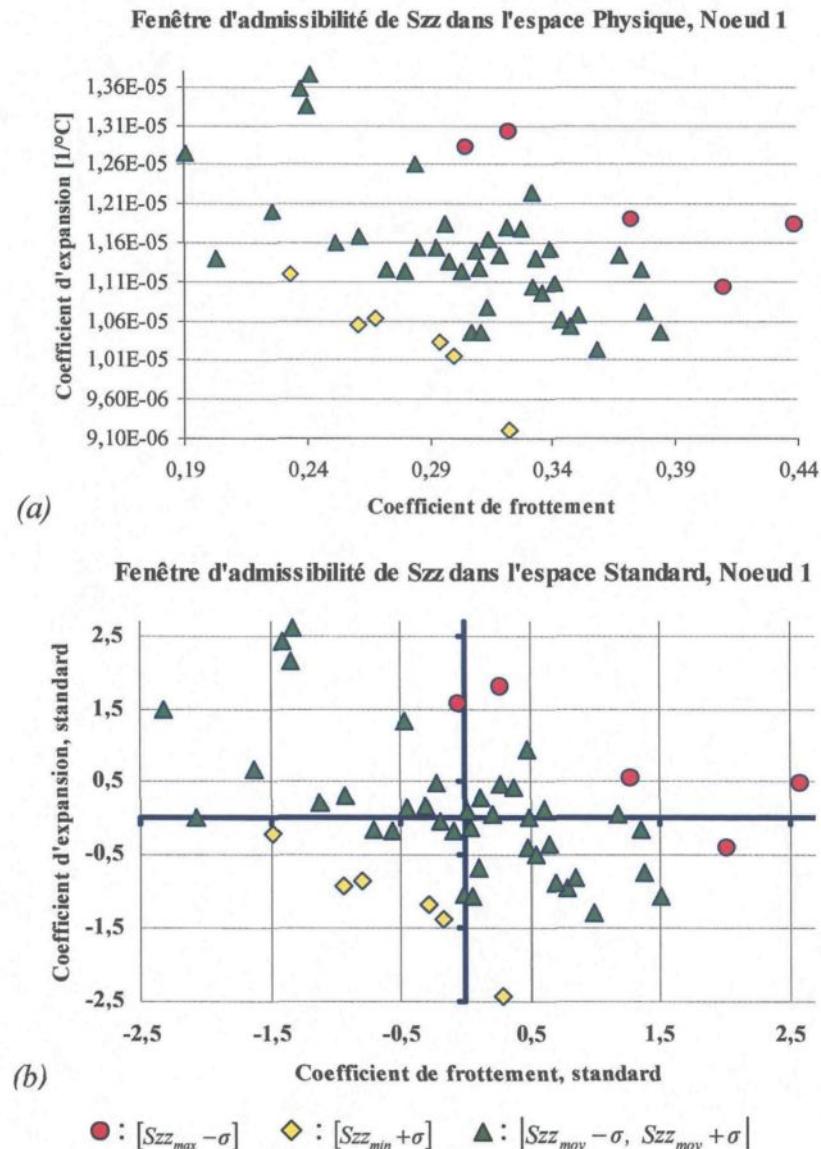


Figure 4.33 - Fenêtres d'admissibilité des contraintes S_{zz} au noeud 1, dans les espaces physiques (a) et standards (b) du coefficient de frottement/coefficient d'expansion.

4.4.2 Problème de contact d'une poutre courbe sur un bloc droit

Dans cet exemple, on étudie le problème thermo-électro-mécanique de contact d'une poutre courbe sur un bloc droit. Le maillage, la géométrie et les conditions aux limites du modèle sont représentés par les Figure 4.34-a et Figure 4.34-b. Le cas déterministe de ce problème est étudié par Goulet [GOU04]. En raison de la symétrie on ne discrétise que la moitié du modèle et on impose des conditions aux limites suivantes :

- Potentiel électrique nul et déplacements u , v et w imposés nuls sous le bloc inférieur en $z=0$;
- Déplacement U imposé nul en $x = 0$;
- Déplacement V imposé nul en $y = 0$ (condition de symétrie) ;
- Température imposée à $T_{\infty} = 40^{\circ}\text{C}$ par convection avec $h_{\text{conv}} = 600 \text{ W/m}^2 \text{ }^{\circ}\text{C}$ sous le bloc du bas ;
- Convection naturelle au bout de la poutre avec $T_{\infty} = 23^{\circ}\text{C}$ et $h_{\text{conv}} = 10 \text{ W/m}^2 \text{ }^{\circ}\text{C}$;
- Densité de courant de 30 KA/m^2 au bout de la poutre (identifiée par I) ;
- Pression verticale uniforme de 10 MPa appliquée.

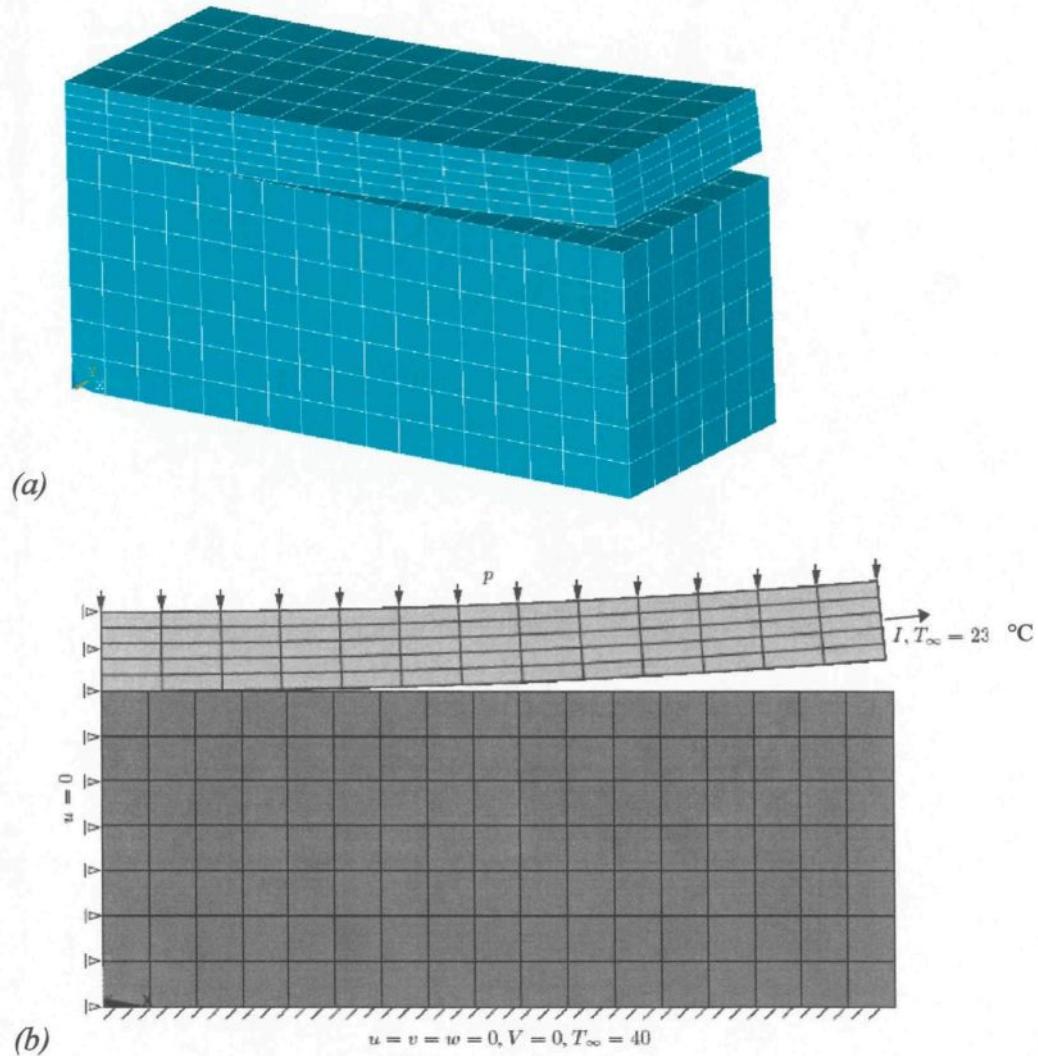


Figure 4.34 - Modèle éléments finis, (a) maillage ; (b) conditions aux limites.

4.4.2.1 Choix et caractéristiques statistiques des variables aléatoires

Les variables aléatoires retenues pour ce cas d'exemple sont les deux modules de Young de l'acier et de carbone ainsi que le coefficient de convection. Le Tableau 4.9 résume les principales caractéristiques statistiques de ces variables. Les Figure 4.35-a et

Figure 4.35-b de même que les Figure 4.36-a et Figure 4.36-b représentent la distribution et la concentration des variables dans l'intervalle $[m - \sigma, m + \sigma]$.

Tableau 4.9 – Propriétés statistiques, problème thermo-électro-mécanique.

Propriétés thermo-électro-mécaniques				
Acier		Carbone		
	$E_1 [Pa]$	$h_{1,conv} [W / m^2 C]$	$E_2 [Pa]$	$h_{2,conv} [W / m^2 C]$
m_t	2.0 e11	5	8.9 e09	10
m_c	2.0e11	5.012	8.88 e09	10.11
σ_t	2.0 e10	1	9.8 e08	1.5
σ_c	2.0309 e10	0.87	1.12 e09	1.62
$\sigma\%$	20 %	40 %	30.33 %	30.67 %

m_t : moyenne théorique m_c : moyenne calculée
 σ_t : écart type théorique σ_c : écart type calculé $\sigma\%$: écart type en pourcentage

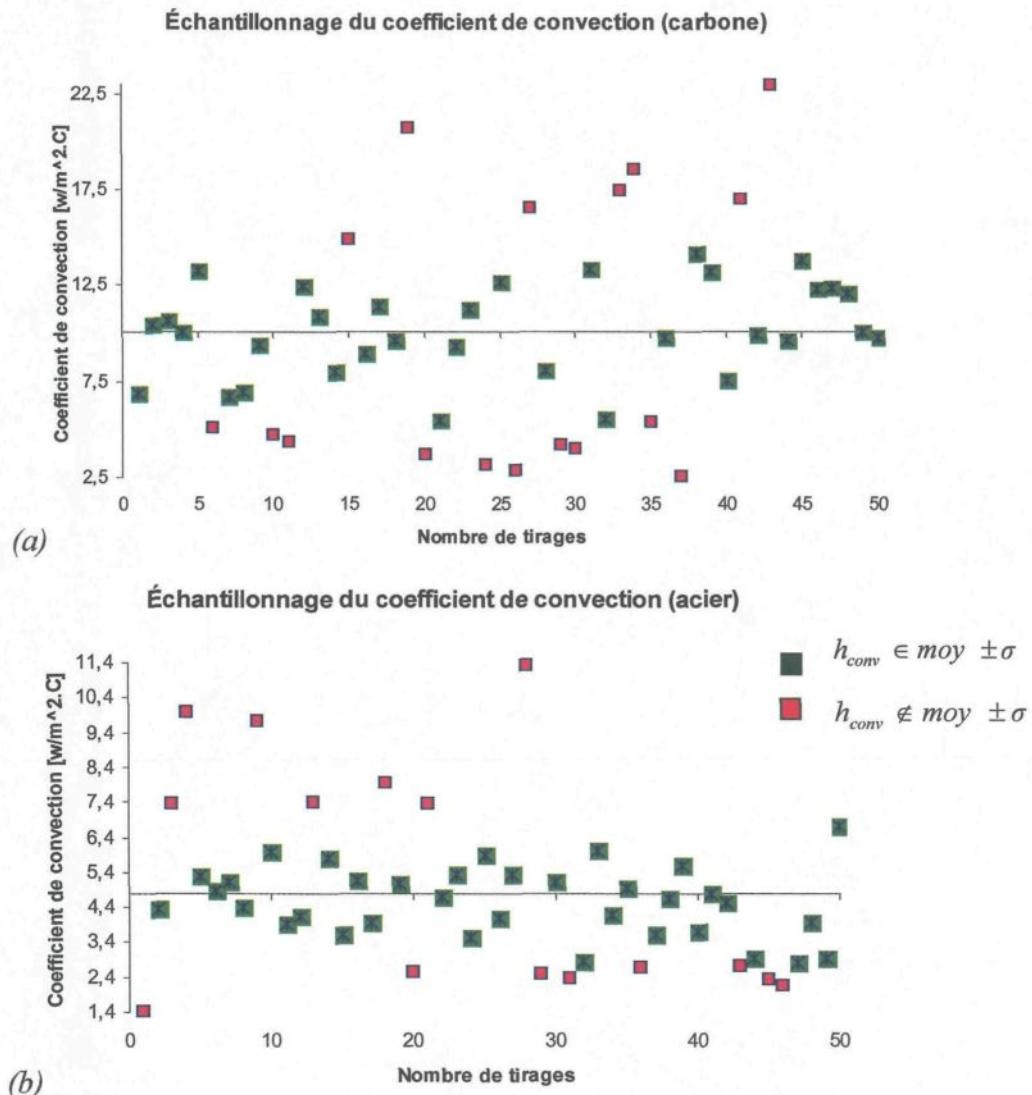


Figure 4.35 - Échantillonnage des coefficients de convection du carbone (a) et de l'acier(b).

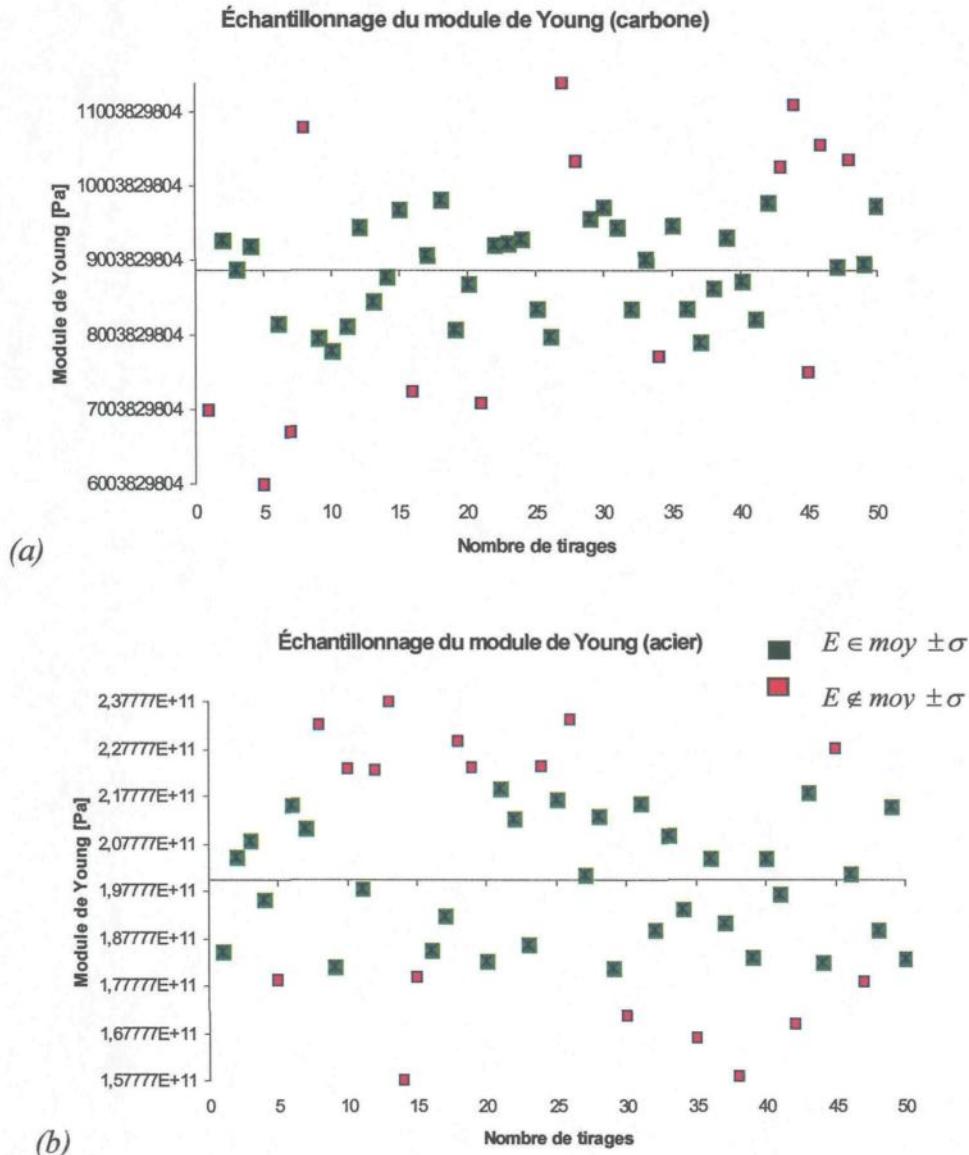


Figure 4.36 - Échantillonage des modules de Young du carbone (a) et de l'acier (b).

❖ Solution Monte Carlo

On étudie l'effet de la variation des variables aléatoires dans un chemin A composé de 10 nœuds numérotés de gauche à droite (Figure 4.37-a et b).

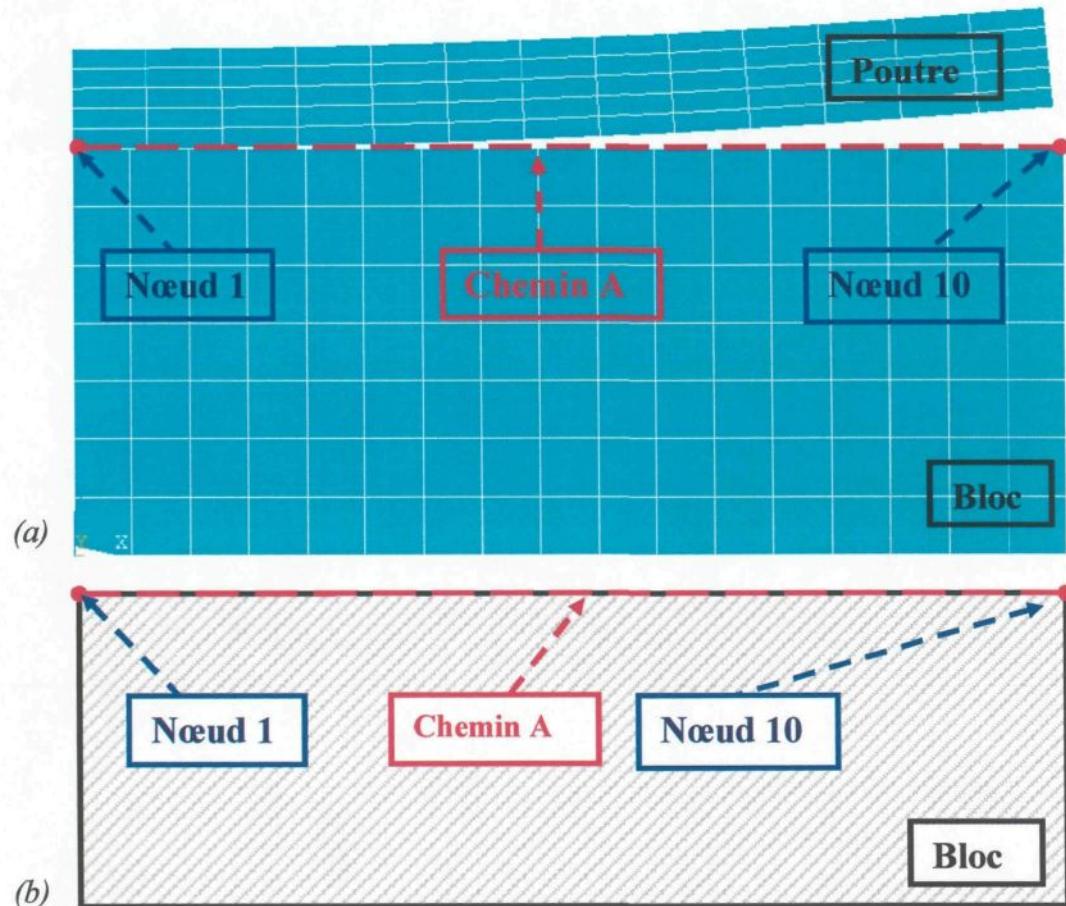


Figure 4.37 - Ensemble de 10 nœuds sur la frontière du bloc formant un chemin A.

- Les variations des contraintes S_{xx} et S_{zz} le long du chemin A , en fonction des variables aléatoires, sont représentées par les Figure 4.38 et Figure 4.39.

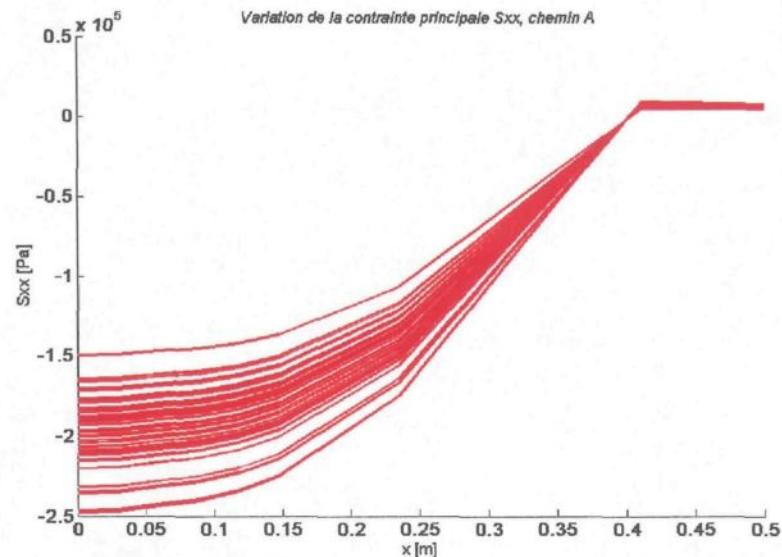


Figure 4.38 - Variation de la contrainte S_{xx} le long du chemin A.

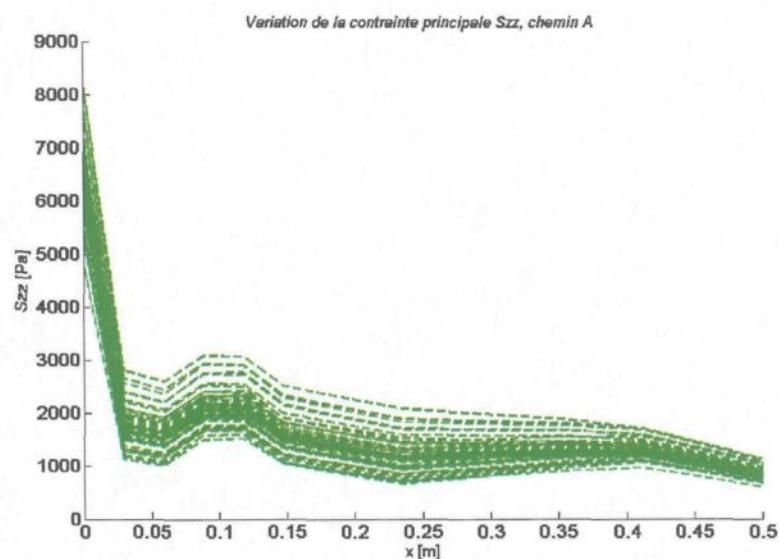


Figure 4.39 - Variation de la contrainte S_{zz} le long du chemin A.

- Fenêtres d'admissibilité des contraintes S_{xx} du nœud 1 (chemin A) dans l'espace physique (Figure 4.40-a) et standard (Figure 4.40-b) des variables aléatoires : module de Young (carbone)/coefficient de convection (carbone).

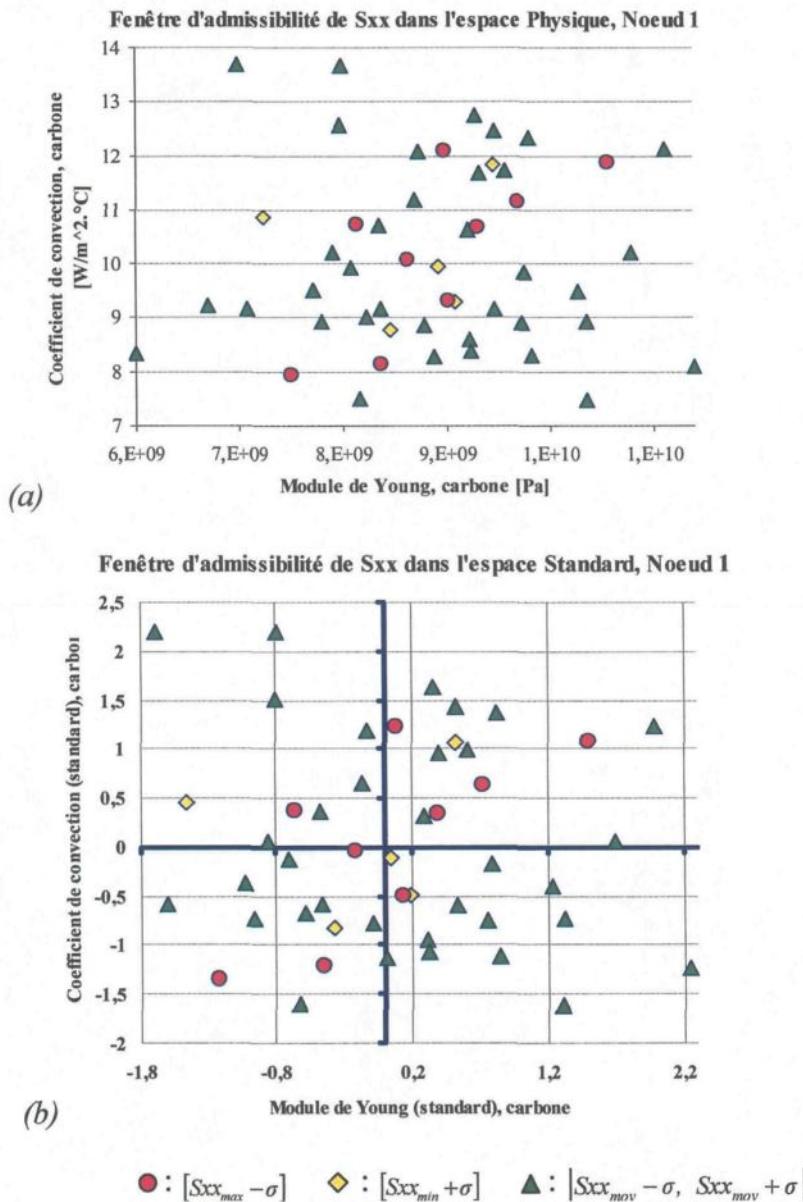


Figure 4.40 - Fenêtres d'admissibilité des contraintes S_{xx} au nœud 1, espace module de Young (carbone)/coefficient de convection (carbone).

- Fenêtres d'admissibilité des contraintes S_{xx} du nœud 1 (chemin A) dans l'espace physique (Figure 4.41-a) et standard (Figure 4.41-b) des variables aléatoires : coefficient de convection (acier)/module de Young (carbone).

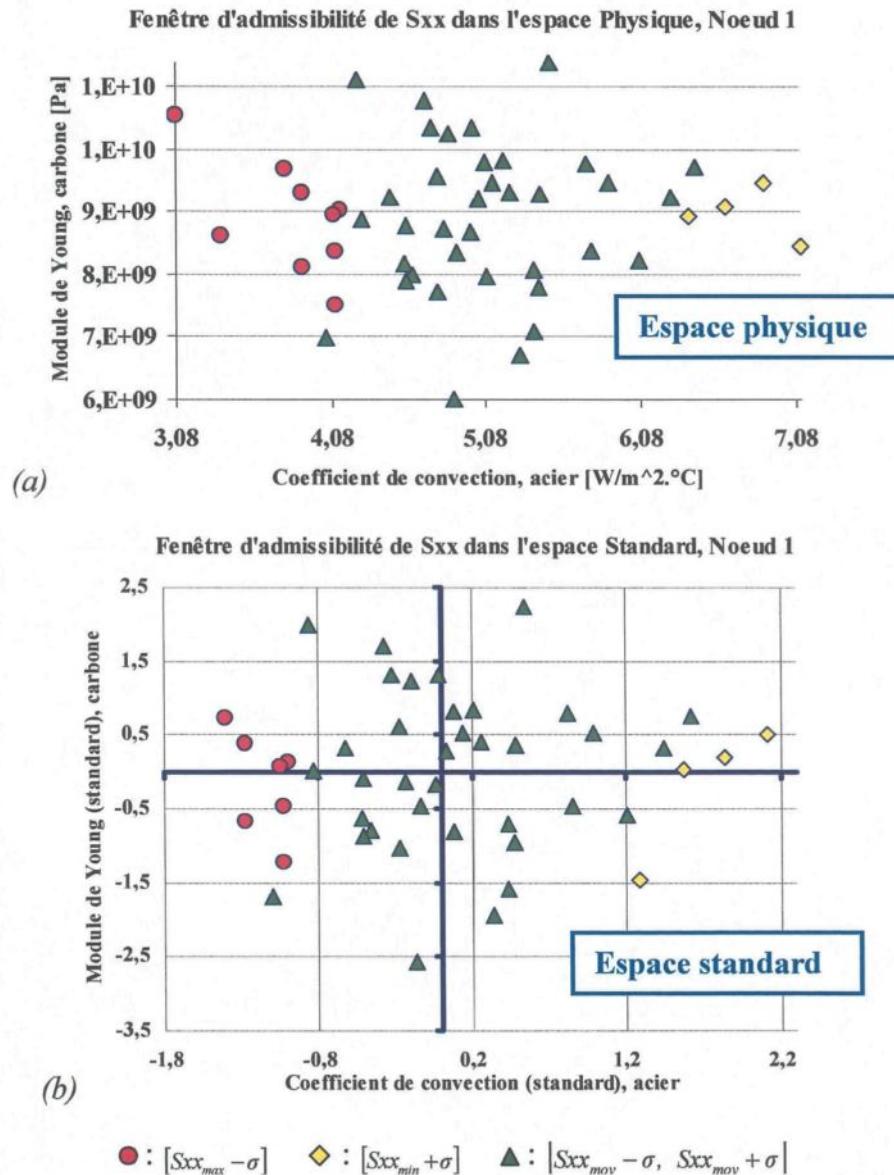


Figure 4.41 - Fenêtres d'admissibilité des contraintes S_{xx} au nœud 1, dans les espaces physiques (a) et standards (b) du coefficient de convection (acier)/module de Young (carbone).

4.4.3 Sensibilité des paramètres et indice de fiabilité

En exploitant les limitations appliquées sur les contraintes S_{xx} à l'interface, les principaux indicateurs de fiabilité sont calculés pour le cas de glissement d'un bloc sur une plaque et pour le cas d'une poutre courbe contre un massif.

Dans le Tableau 4.10, on calcule l'indice de fiabilité de type Hasofer et Lind β_{HL} ainsi que la probabilité de défaillance pour chacun des ces cas de contact.

Tableau 4.10 - Calcul des indices de fiabilité de Hasofer et Lind.

	$S \in [S_{max} - \sigma, S_{max}]$	P_f	β_{HL}
Problème mécanique (nœud 1)	11	0.011	0.56
Problème mécanique (nœud 2)	4	0.004	1.525
Problème thermomécanique (nœud 1), espace frott/expan	5	0.005	1.5
Problème thermo-électro-mécanique (nœud 1)	7	0.007	0.998

Pour le cas du problème mécanique, les écarts types en pourcentage des deux paramètres coefficient de frottement et module de Young sont égaux respectivement à 32% et à 20.5%. Compte tenu de ces valeurs et pour la fonction d'état limite égale à $S \in [S_{max} - \sigma, S_{max}]$, l'indice de fiabilité, calculé dans l'espace standard de ces paramètres au nœud 2, est trois fois supérieur à celui calculé au nœud 1, contrairement à la probabilité de défaillance où sa valeur au nœud 2 est trois fois inférieure à celle du nœud 1.

Dans le cas du problème thermomécanique, les écarts types en pourcentage des paramètres formant l'espace standard de calcul sont égaux à 20% pour le coefficient d'expansion et à 40.1% pour le coefficient de frottement. Avec ces valeurs, une faible probabilité de défaillance de 0.005 et un indice de fiabilité de 1.5 sont obtenus.

Enfin, pour le cas du problème thermo-électro-mécanique, les écarts types en pourcentage de module de Young (carbone) et du coefficient de convection (acier) sont égaux respectivement à 30.33% et à 40%. La contrainte S_{xx} mesurée au nœud 1 (Figure 4.37) est analysée. Les fenêtres d'admissibilité dans les espaces physique et standard de ces deux paramètres sont alors construites. L'indice de fiabilité associé est alors égal à 0.99 pour une probabilité de défaillance de 0.007.

4.5 Conclusion

La validation de l'approche probabiliste utilisant l'algorithme de Monte Carlo a été basée sur l'analyse de quelques problèmes de contact multiphysiques. Dans un premier temps, deux applications de contact de Hertz ont été le sujet d'une première partie de l'étude. Dans un second temps, trois applications de contact mécanique, thermomécanique et thermo-électro-mécanique ont été étudiées. Une étude préalable de sensibilité sur les paramètres matériaux et d'interfaces a été menée afin de relever les paramètres dominant le comportement des matériaux et l'état de contact. Une analyse à caractère fiabiliste fut par la suite menée dans le but de construire un domaine de confiance sur les paramètres d'entrées choisis. Ce domaine est traduit par la construction des intervalles bornés représentant les marges de variabilité de chaque paramètre. Autrement dit, cela implique des limitations sur

les écarts types de ces paramètres. Cette analyse fiabiliste a été fortement conditionnée par le nombre d'hypothèses simplificatrices posées, telles que l'utilisation des variables aléatoires gaussiennes statistiquement indépendantes.

CHAPITRE 5

APPLICATIONS INDUSTRIELLES

5 Applications industrielles

5.1 Généralités

Le chapitre précédent a été consacré à la validation de l'approche directe proposée utilisant différents exemples académiques. On a pu se rendre compte de sa stabilité et de son applicabilité dans le cas de ses exemples. Il est alors important de la confronter à des applications industrielles encore plus complexes pour s'assurer de son aspect générique et de sa fiabilité. Ce cinquième chapitre porte sur l'analyse probabiliste par la méthode de Monte Carlo de deux applications industrielles. Le nombre croissant des paramètres et la complexité des problèmes nécessitent souvent l'utilisation des méthodes d'identification et d'évaluation de paramètres admissibles pour répondre aux caractéristiques des produits finis. Actuellement, la plupart des problèmes d'identification font appel à la simulation numérique pour prédire le comportement et la réponse d'un modèle mécanique. Cette prédiction permet, entre autres, de construire une surface de réponse qui sera caractérisée par des fenêtres des valeurs admissibles. Ces fenêtres peuvent se construire dans l'espace des paramètres aléatoires. D'autre part, selon la méthode d'optimisation employée, l'analyse de ces types de problèmes nécessite un nombre de simulations par éléments finis assez considérable.

La première application industrielle choisie consiste en l'étude du problème de retour élastique dans le cas d'une application de mise en forme d'une tôle. Quant à la seconde, elle consiste à l'étude des interfaces thermo-électro-mécaniques de bloc cathodique lors de

préchauffage électrique d'une cuve d'électrolyse de type Hall Héroult [PEY89], [DUP91].

Il s'agit à essentiellement de modèle thermo-électro-mécaniques étudié dans le cas déterministe par Goulet [GOU04].

5.2 Emboutissage d'une tôle mince, phénomène de retour élastique

On reprend une application d'emboutissage d'une tôle en U qui a été proposé lors de la conférence internationale de Numisheet'93 [MAK93]. Les données de l'application sont reportées à la Figure 5.1.

Courbe d'écrouissage :

$$\bar{\sigma} = 565.32(0.007117 + \varepsilon_p)^{n=0.2} \text{ MPa}$$

Épaisseur initiale : 0.78 mm

Module de Young : 206. E9 MPa

Coefficient de Poisson : 0.3

Densité : 7800 Kg/mm³

Force de serrage : $\bar{F} = -175 \text{ KN}$

Limite élastique : 302 MPa

Coefficient de frottement : $\bar{\mu} = 0.144$

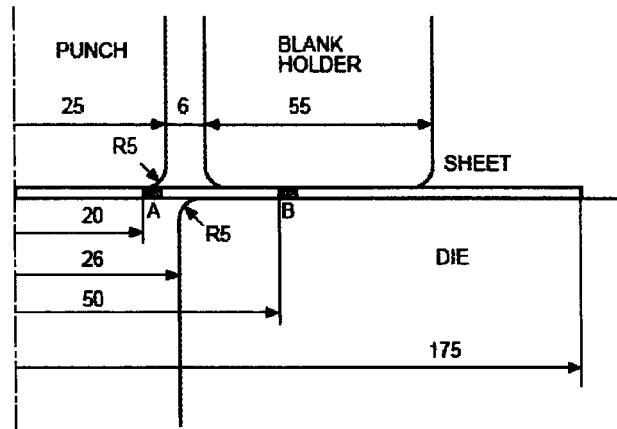


Figure 5.1 - Emboutissage d'une tôle en U, données de l'application.

Le phénomène de retour élastique est présent et fréquent dans les problèmes de mise en forme. Il conditionne fortement la faisabilité d'une pièce donnée. Quantifier théoriquement ce dernier s'avère très compliqué puisqu'il se produit principalement au cours de la phase de décharge. Le grand nombre de paramètres à la fois géométriques, mécaniques et machines que comportent les problèmes de mise en forme fait que ces derniers sont les plus complexes. C'est pour cette raison qu'on doit mener une recherche

sur les différents paramètres qui possèdent des caractères dominateurs sur la forme et les caractéristiques de l'embouti final souhaité (Figure 5.2).

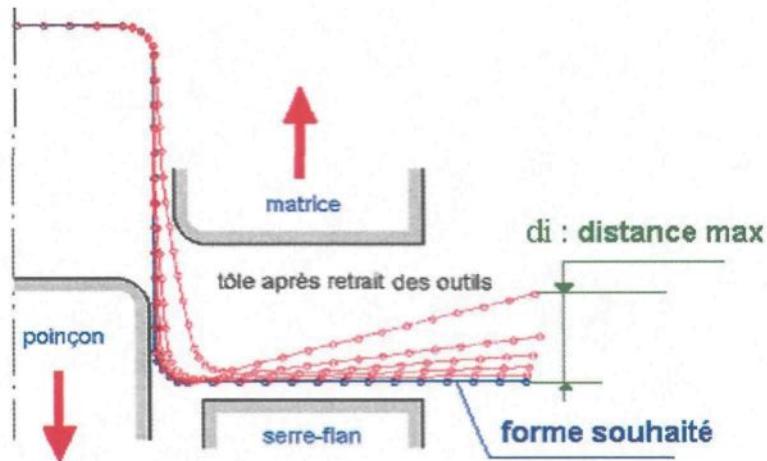


Figure 5.2 - Forme géométrique de la tôle après retrait des outils.

où di représente la distance maximale qui sépare un nœud i de sa position finale avant et après le retrait des outils.

5.2.1 Variables aléatoires

Nous nous proposons de prendre en considération le caractère aléatoire de trois variables dans l'étude de quantification du retour élastique, pour lequel trois variables aléatoires sont retenues et sont liées, principalement :

- au comportement du matériau, le cas de l'exposant d'écrouissage d'une loi de Swift;
- au procédé, le cas de la force de serrage;
- à l'interface, le cas du coefficient de frottement.

5.2.2 Caractéristiques statistiques des variables aléatoires

Dans cette section, on établit les différentes caractéristiques statistiques propres à chacune des variables aléatoires. La Figure 4.1 représente alors les distributions gaussiennes de l'ensemble des variables aléatoires d'entrées tandis que le Tableau 4.2 résume leurs valeurs moyennes (m) et écarts types (σ) à la fois théoriques et calculés. Quant au Tableau 4.3, il montre la distribution et la concentration de ces variables traduites par les pourcentages de leurs appartenances aux intervalles $[m - \sigma, m + \sigma]$, $[m - 2\sigma, m + 2\sigma]$ et $[m - 3\sigma, m + 3\sigma]$.

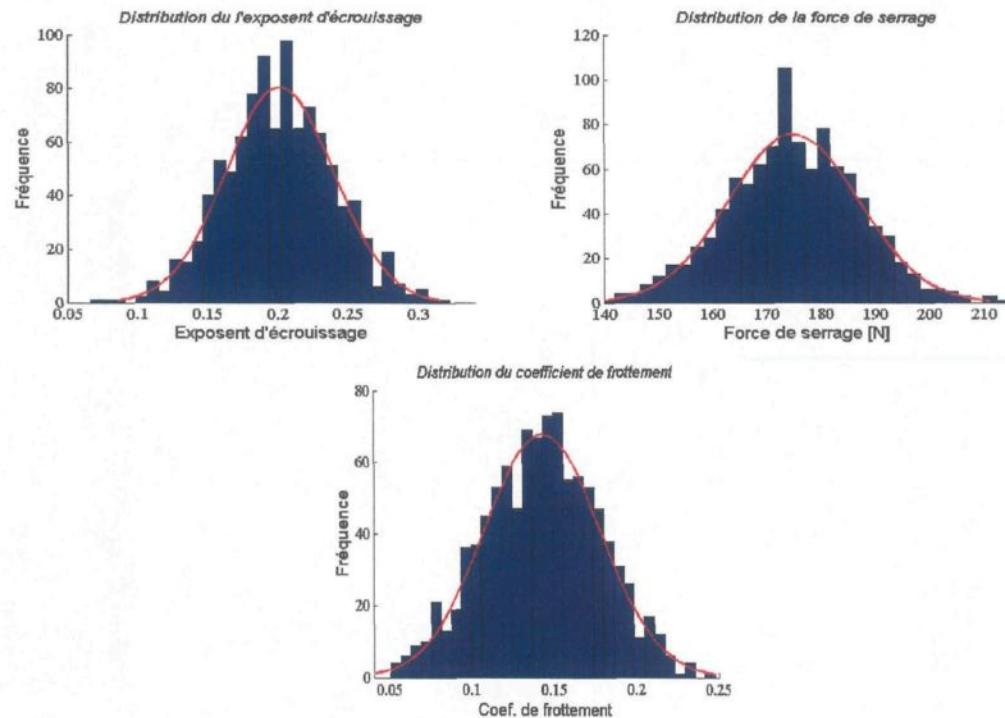


Figure 5.3 - Distributions gaussiennes des variables aléatoires.

Tableau 5.1 - Caractéristiques statistiques des variables aléatoires.

	Coefficient de frottement	Exposant d'écrouissage	Force de serrage [N]
Moyenne théorique	0.144	0.2	175
Moyenne calculée (m)	0.141	0.2028	175.11
Écart type théorique	0.035	0.04	12
Écart type calculé (σ)	0.035	0.0367	11.83
Écart type en pourcentage	62.94 %	60.3 %	20.26 %

Tableau 5.2 - Distribution et concentration des variables aléatoires.

	Total	Pourcentages calculés	Pourcentages théoriques
Force de serrage			
$[m - \sigma, m + \sigma]$	340	68 %	68.27 %
$[m - 2\sigma, m + 2\sigma]$	473	94.6 %	95,449 %
$[m - 3\sigma, m + 3\sigma]$	473	95.45 %	99,73 %
Coefficient de frottement			
$[m - \sigma, m + \sigma]$	328	65.6 %	68.27 %
$[m - 2\sigma, m + 2\sigma]$	481	96.2 %	95.449 %
$[m - 3\sigma, m + 3\sigma]$	500	100 %	99.73 %
Exposant d'écrouissage			
$[m - \sigma, m + \sigma]$	347	69.40 %	68.26 %
$[m - 2\sigma, m + 2\sigma]$	475	95 %	95.449 %
$[m - 3\sigma, m + 3\sigma]$	498	99.60 %	99.73 %

Les variables aléatoires prennent $\approx 70\%$ de leurs valeurs dans l'intervalle 1 :

$[m - \sigma, m + \sigma]$ et $\approx 95\%$ dans l'intervalle 2 : $[m - 2\sigma, m + 2\sigma]$. Une illustration graphique

de ces valeurs est donnée à la Figure 4.2, qui traduit l'appartenance (couleur verte) ou non (couleur rouge) de chaque tirage de chacune des variables à l'intervalle 1.

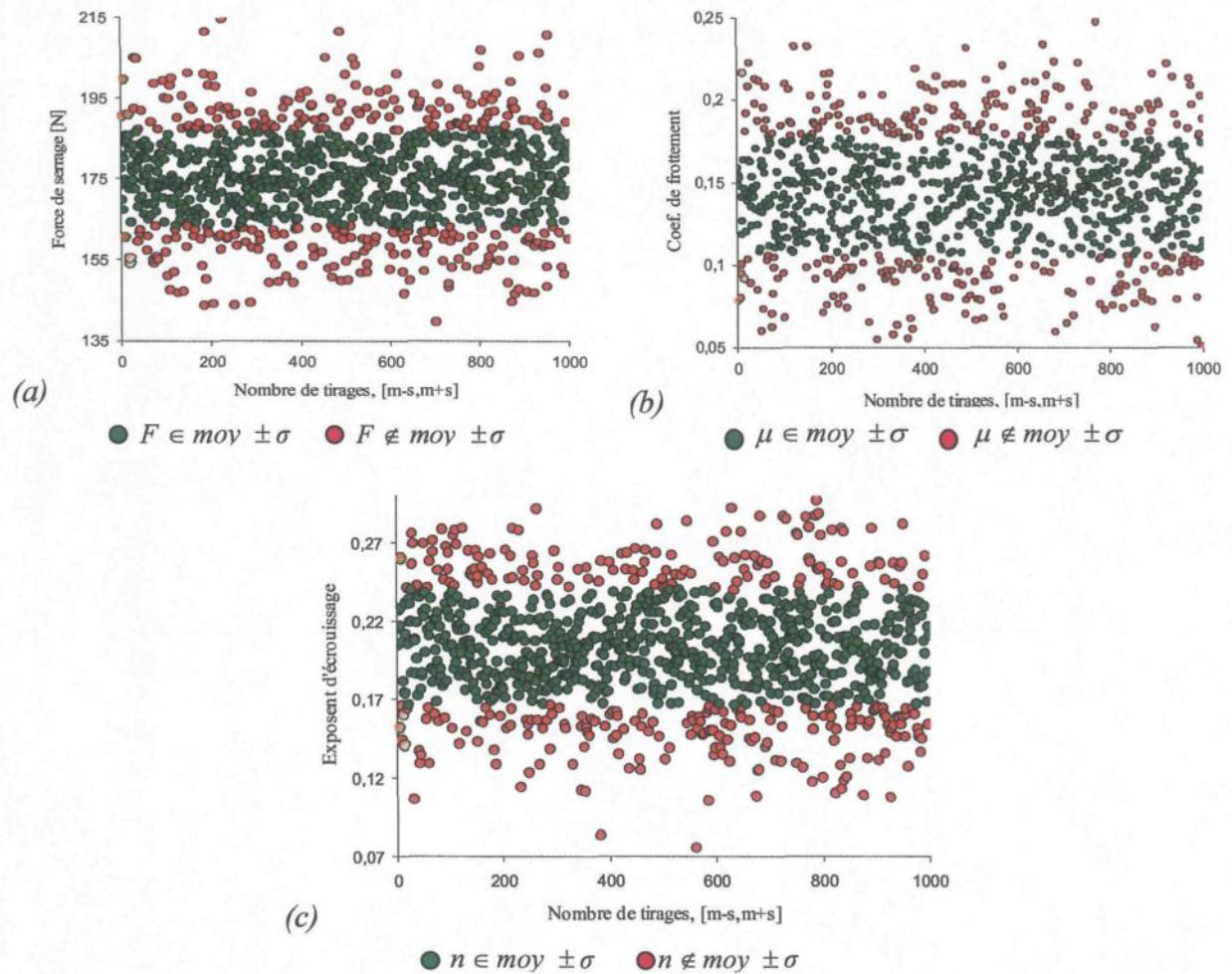


Figure 5.4 - Critère de sélection des variables aléatoires, (a) force de serrage; (b) coefficient de frottement; (d) exposant d'écrouissage.

5.2.3 Solution Monte Carlo

Trois paramètres géométriques caractérisent le retour élastique (Figure 5.5) :

- i. θ_2 : Angle formé par les droites passant par les points *E* et *F* de la partie haute du flan et celui de sa partie logée entre le poinçon et la matrice (droite *AB*).
- ii. θ_1 : Angle formé par la droite *AB* et la droite horizontale passant par le point *O*.
- iii. *R* : Le rayon du cercle passant par les points *A*, *B* et *C* de la partie presque verticale du flan.

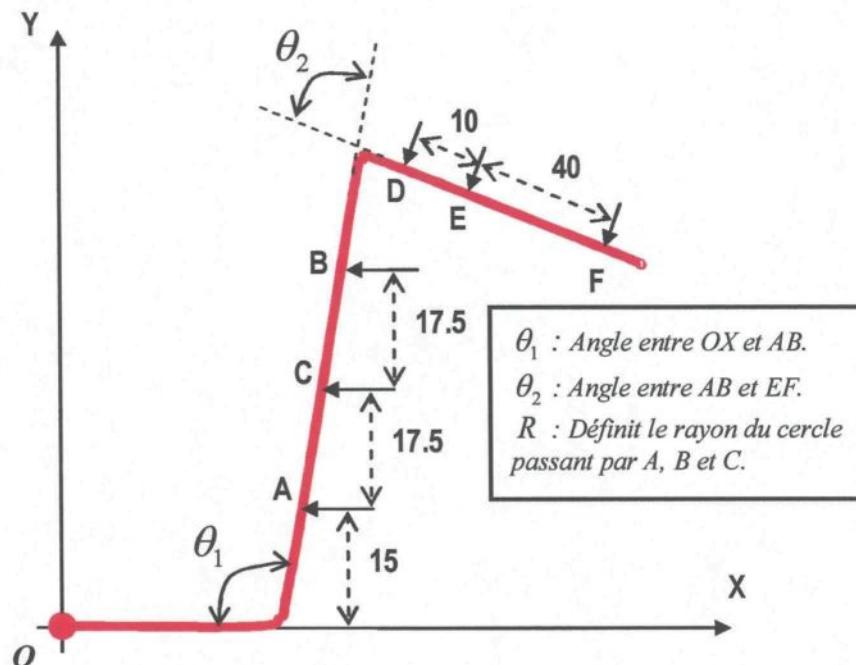


Figure 5.5- Quantification du retour élastique.

❖ *Effet de la variation du coefficient d'écrouissage*

La Figure 5.6 représente l'état de variation de retour élastique en fonction de l'exposant d'écrouissage n .

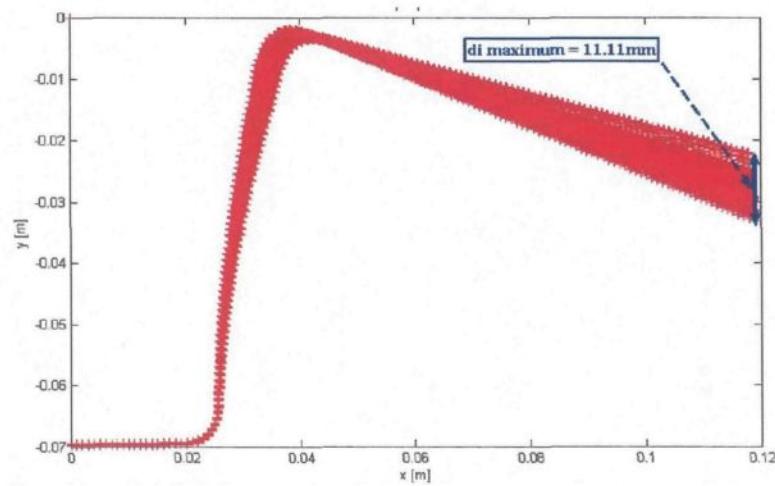


Figure 5.6 - Courbes de retour élastique, cas de la variation de l'exposant d'écrouissage.

La Figure 5.7 représente les différentes distributions probabilistes des paramètres caractérisant le retour élastique.

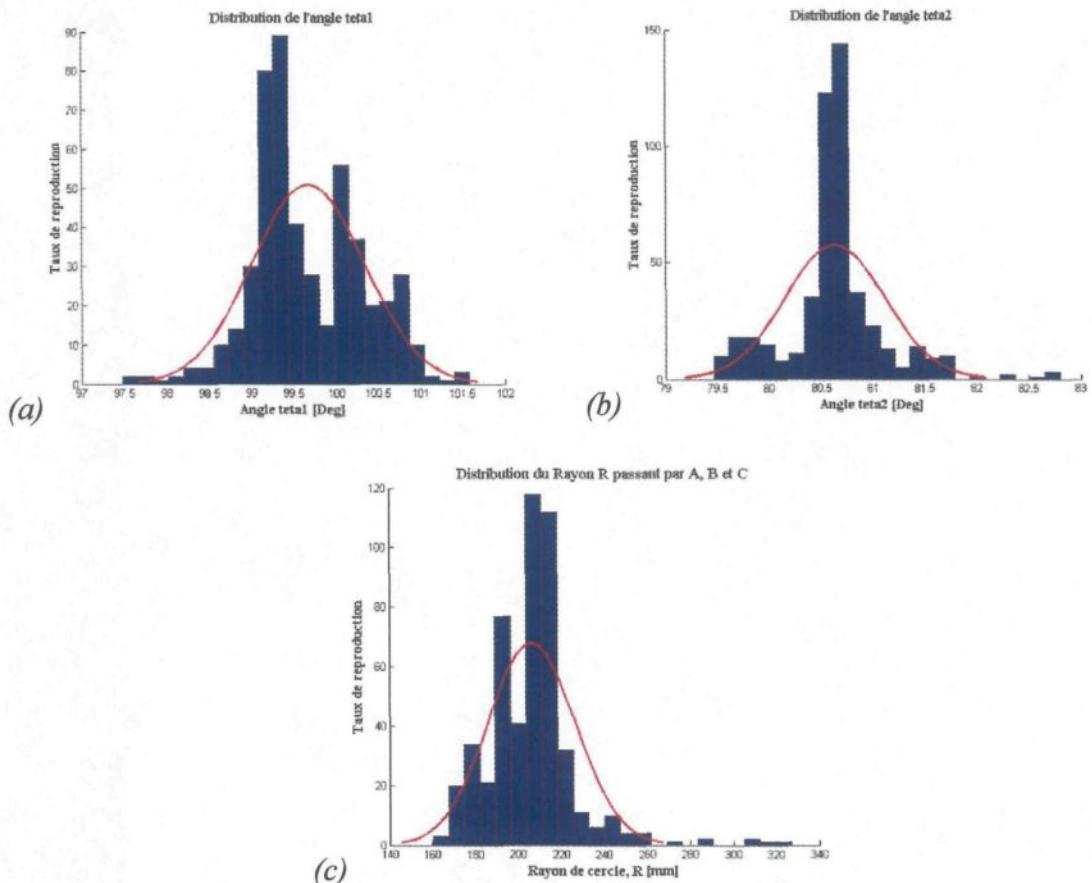


Figure 5.7 - Distributions probabilistes des paramètres de retour élastique, cas de la variation de l'exposant d'écrouissage, (a) distribution de l'angle θ_1 ; (b) distribution de l'angle θ_2 ; (c) distribution du rayon R.

❖ *Effet de la variation du coefficient de frottement*

La Figure 5.8 représente l'état de variation de retour élastique pour $N_{MC} = 1000$ valeurs du coefficient de frottement.

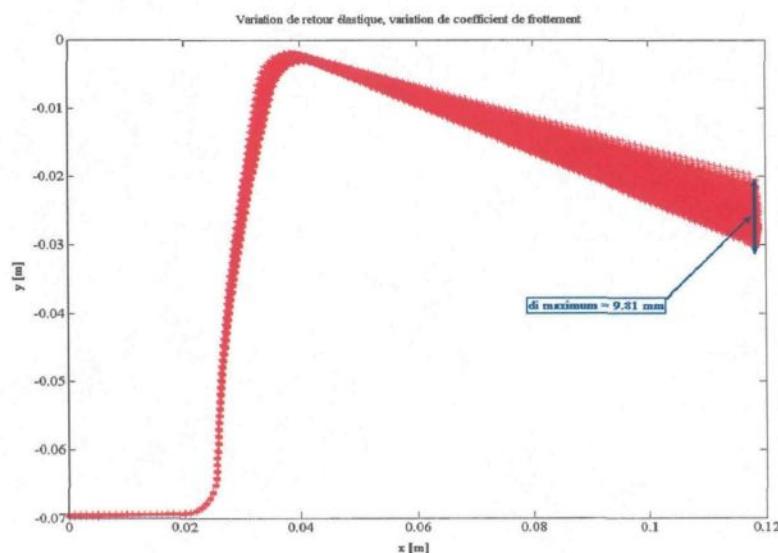


Figure 5.8 - Courbes de retour élastique, cas de la variation du coefficient de frottement.

La Figure 5.9 représente les distributions probabilistes des trois paramètres caractérisant le retour élastique.

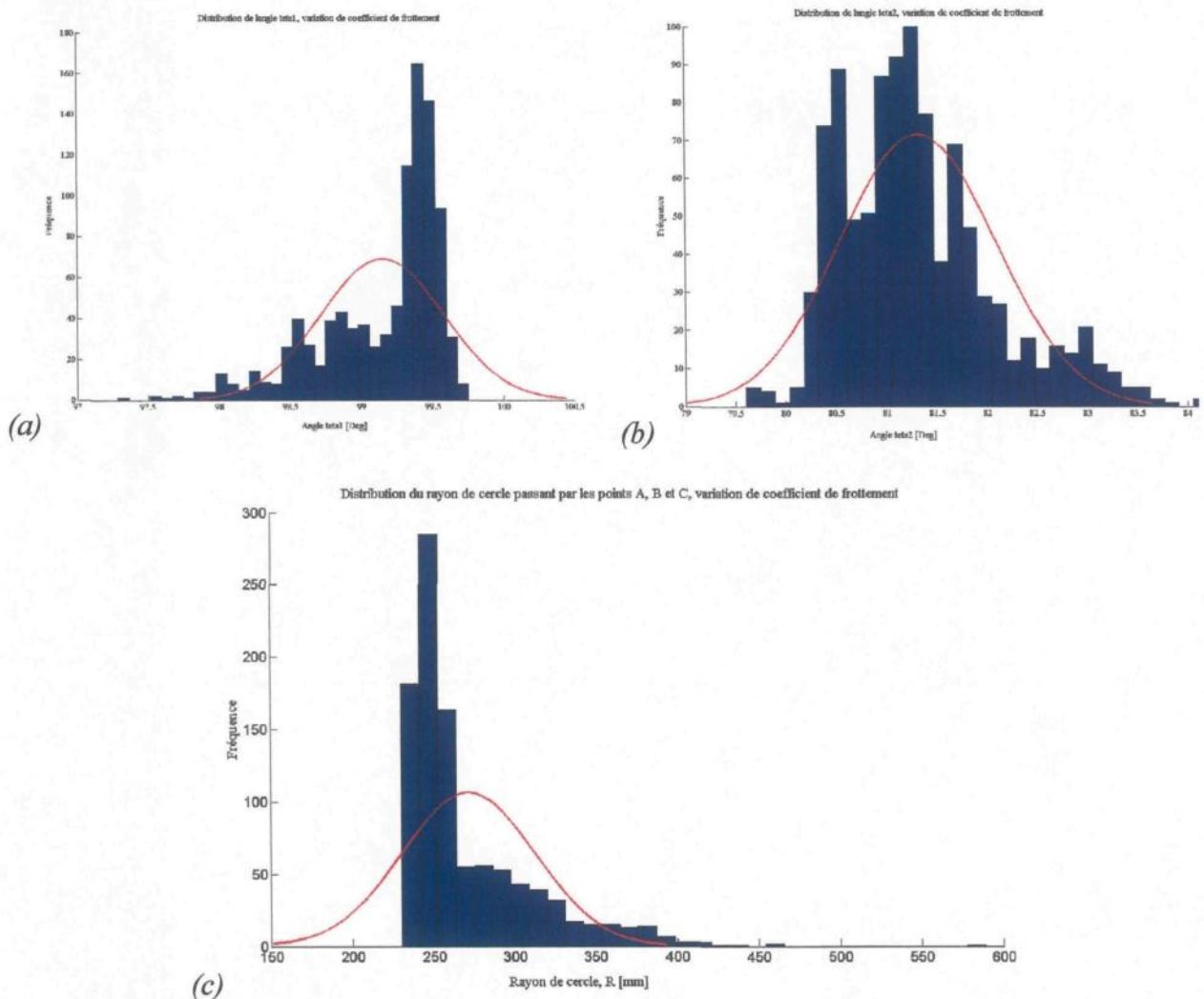


Figure 5.9- Distributions probabilistes des paramètres de retour élastique, cas de la variation du coefficient de frottement, (a) distribution de l'angle θ_1 ; (b) distribution de l'angle θ_2 ; (c) distribution du rayon R .

❖ *Effet de la variation de la force de serrage*

La Figure 5.10 représente l'état de variation de retour élastique pour une variation de la force de serrage.

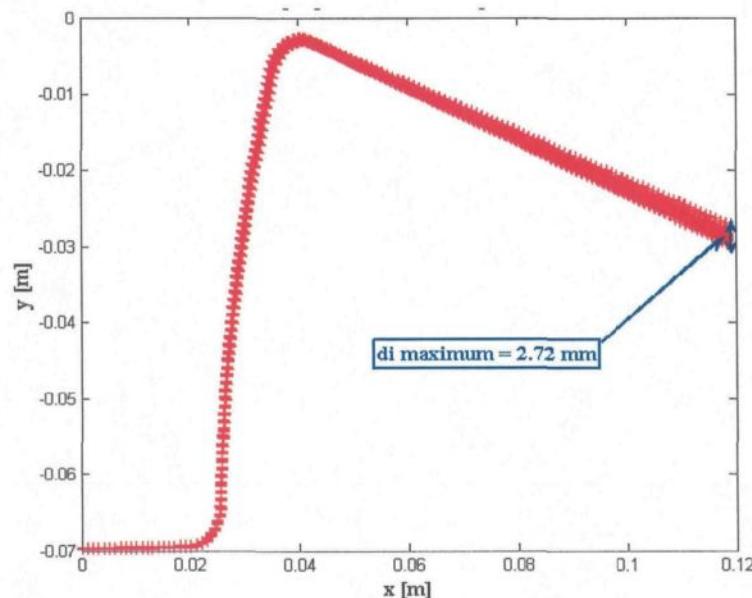


Figure 5.10 - Courbes de retour élastique, cas de la variation de la force de serrage.

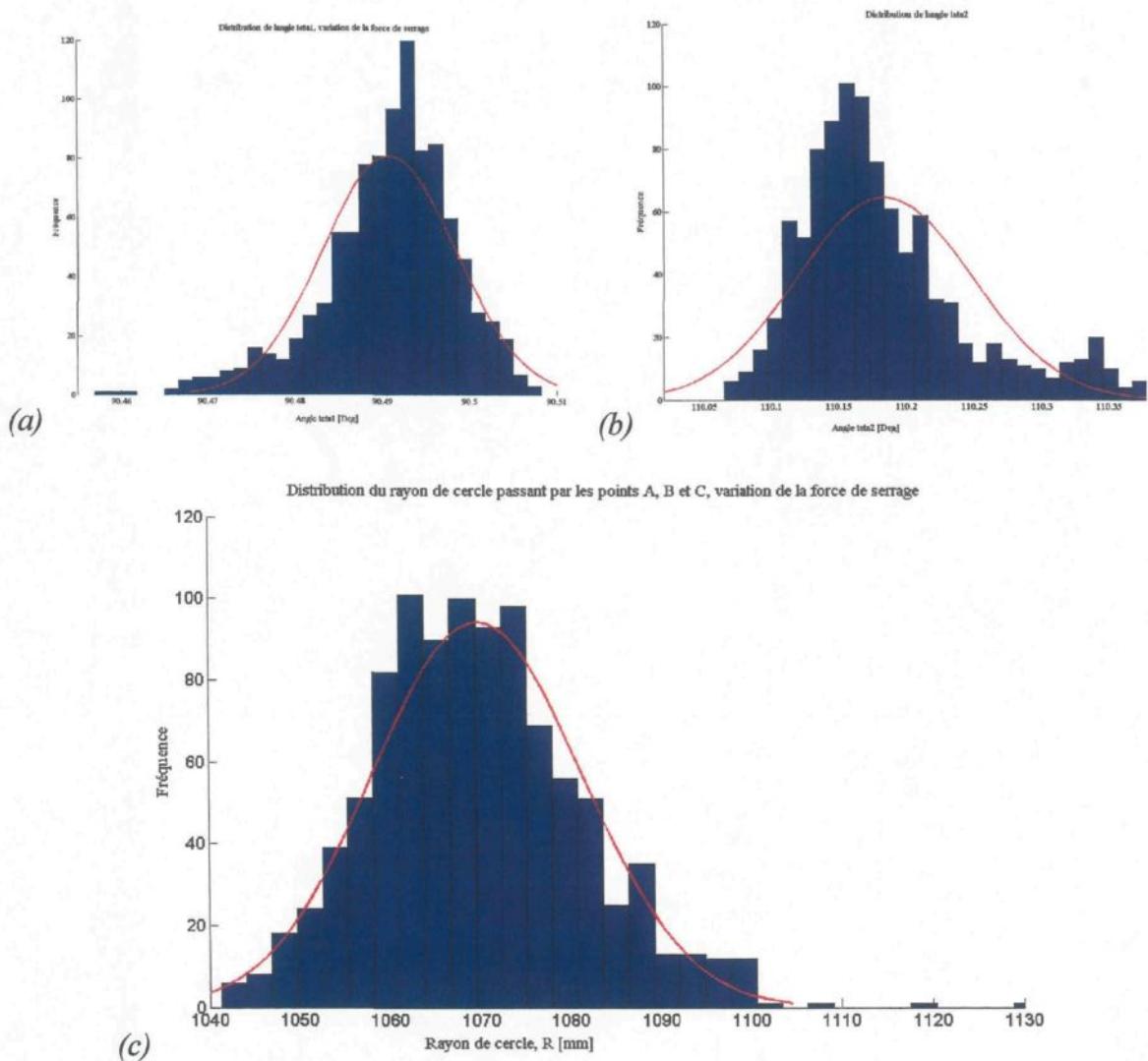


Figure 5.11- Distributions probabilistes des paramètres de retour élastique, cas de la variation de la force de serrage, (a) distribution de l'angle θ_1 ; (b) distribution de l'angle θ_2 ; (c) distribution du rayon R .

La simulation par Monte Carlo du retour élastique nous a permis de calculer la valeur moyenne et l'écart type des paramètres θ_1 , θ_2 et R pour chacune des variations de force de

serrage, coefficient de frottement et de l'exposant d'écrouissage. Ces derniers sont comparés dans le cas déterministe avec certains travaux. Le Tableau 5.3 présente une étude comparative entre nos résultats et ceux de [BEN04], [GAT02] et les moyennes des résultats expérimentaux et de simulations du cas test présenté à la conférence internationale de Numisheet'93 [MAK93]. La Figure 5.14 représente les distributions probabilistes des trois paramètres caractérisant ce phénomène.

Tableau 5.3 - Tableau comparatif des paramètres de retour élastique.

<i>Méthodes de calcul</i>	Paramètres de retour élastique			
	$\theta_1 [^\circ]$	$\theta_2 [^\circ]$	$R [mm]$	$di [mm]$
Monte Carlo (Dynamique explicite+Statique implicite)				
1 - Force de serrage				
<i>Valeur moyenne</i>	90.5	80.58	243.67	2.72
<i>Écart type (%)</i>	0.34	0.68	9.25	
2 - Coefficient de frottement				
<i>Valeur moyenne</i>	99.14	81.31	271.03	9.81
<i>Écart type (%)</i>	1.24	2.82	66.16	
3 - Exposant d'écrouissage				
<i>Valeur moyenne</i>	99.6674	80.6284	206.22	11.11
<i>Écart type (%)</i>	0.66	0.48	20.35	
Simulation déterministe avec les valeurs moyennes				
Ben Elechi	99.94	80.08	233.62	/
Approche inverse (REFORM)				
Gati (A.P.L.)	104	81	154	
Statique implicite (ABAQUS)	99.44	80.59	221.55	
Numisheet'93	Simulation	99	82	240
	Expérience	99.2	82.1	/

❖ *Effet de la variation des valeurs aléatoires combinées*

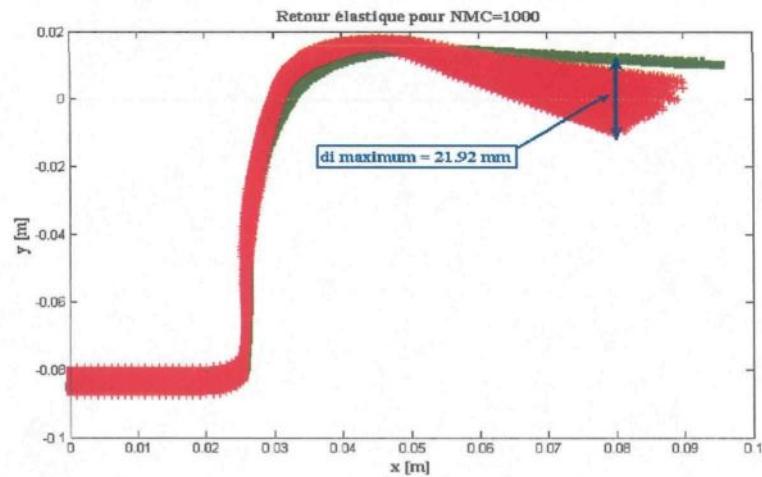


Figure 5.12 - Courbes de retour élastique, côté serre-flan.

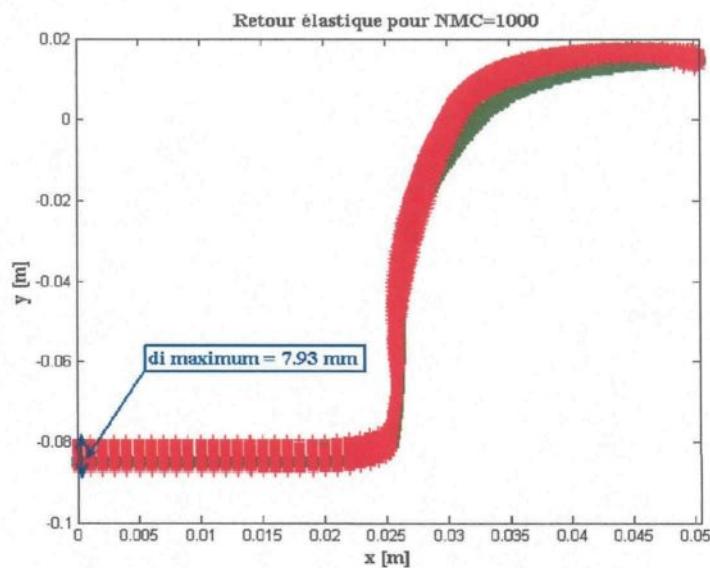


Figure 5.13 - Courbes de retour élastique, côté poinçon.

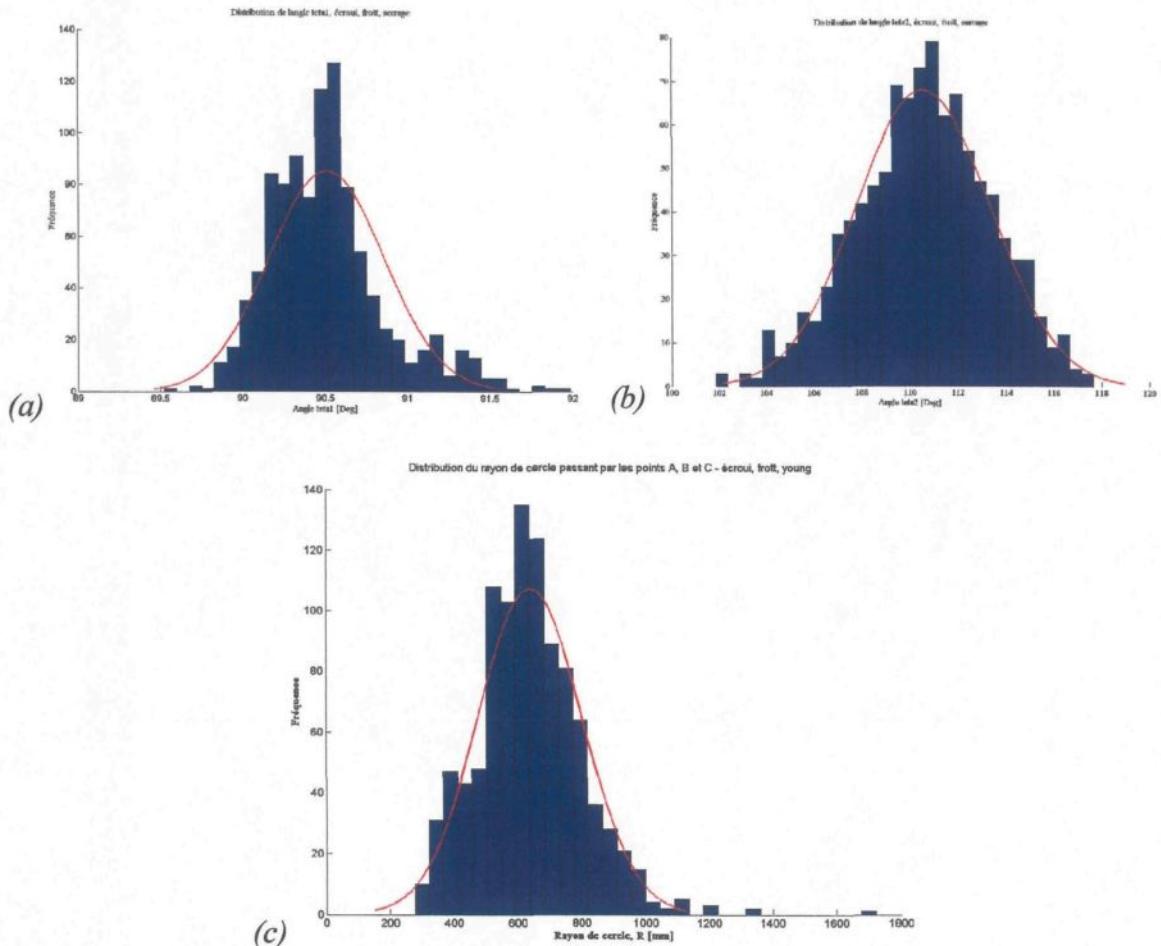


Figure 5.14 - Distributions probabilistes des paramètres de retour élastique, (a) distribution de l'angle θ_1 ; (b) distribution de l'angle θ_2 ; (c) distribution du rayon R .

5.2.4 Analyse fiabiliste

L'analyse fiabiliste menée se limite à deux variables aléatoires. On distingue le succès d'un tirage donné par son appartenance à un intervalle $[m - \sigma, m + \sigma]$. Cependant, la définition de la fonction d'état limite est reliée à l'appartenance de rayon R aux intervalles 1: $[R_{\max} - \sigma]$, 2 : $[R_{\min} + \sigma]$ et 3 : $[R_{\text{moy}} - \sigma, R_{\text{moy}} + \sigma]$. Ces intervalles regroupent les valeurs dites

"de confiance" ou "de défaillance" selon les conditions d'admissibilité choisies. En effet, c'est le rayon R qui est le paramètre géométrique représentant le taux de variabilité le plus grand comparativement aux angles θ_1 et θ_2 .

❖ ***Fenêtres d'admissibilité***

La Figure 5.15 présente, par les nuages rouges (cercles), verts (triangles) et jaunes (losanges), les événements dans l'espace des paramètres admissibles force de serrage et exposant d'écrouissage. En effet, pour ces événements, on remarque que pour chaque combinaison de paramètres on obtient une bande de valeurs qui balayent une zone de forme oblique. Cela signifie que la variation du rayon est linéaire par rapport à ces deux paramètres avec une légère domination de l'exposant d'écrouissage par rapport à la force de serrage. Étant lié à la ductilité et caractérisant l'état plastique du matériau, les variations de l'exposant d'écrouissage influent d'une manière significative sur l'état du retour élastique.

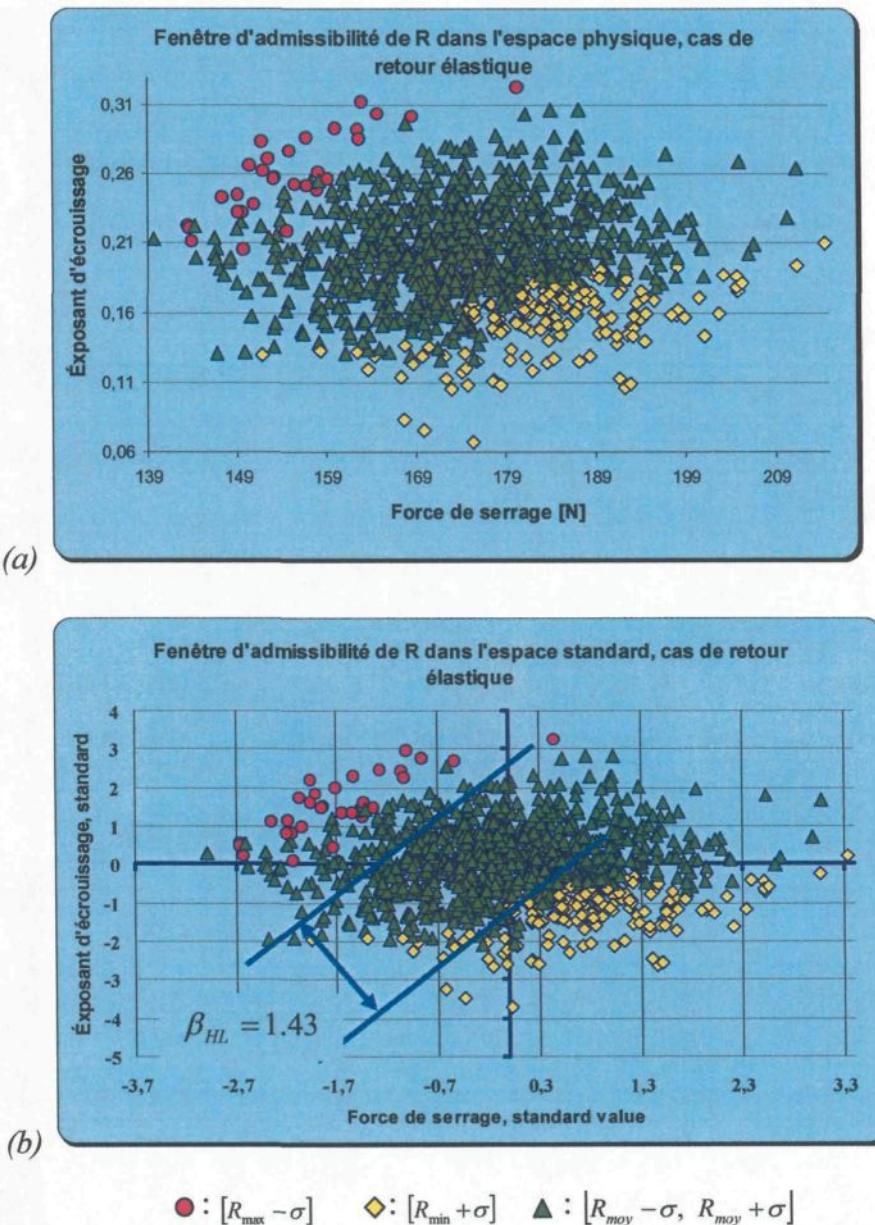


Figure 5.15 - Fenêtres d'admissibilité, cas du retour élastique, dans les espaces physiques (a) et standards (b) des variables aléatoires force de serrage/exposant d'écrouissage.

❖ *Sensibilité des paramètres et indice de fiabilité*

Tels qu'ils sont définis dans la section 4.3.4.3, les degrés de sensibilité et l'indice de fiabilité de Hasofer et Lind de rayon R par rapport aux paramètres aléatoires du matériau, d'interface et du procédé sont mesurés. Les calculs de sensibilité et de sensibilité réduite ont permis de déduire que le rayon R est remarquablement sensible par rapport à la variation mutuelle de la force de serrage ($Sr=0.99$) et de l'exposant d'écrouissage ($Sr=-0.0428$). Par contre, il l'est moins par rapport à la variation du coefficient de frottement (voir le Tableau 4.7). L'indice de Hasofer et Lind est égal à $\beta_{HL} = 1.43$ et est représenté, dans la Figure 5.15-b, par la plus petite distance de l'origine à la frontière des nuages de points représentant la fonction d'état limite définie par l'inéquation $G : R_i \geq R_{\max} - \sigma_R$ $i = 1..1000$. La probabilité de défaillance associée à la réalisation de l'ensemble des événements validant la fonction G précédente est, par la suite, calculée et est égale à 0.03.

Tableau 5.4 – Valeurs des sensibilités et des indices de fiabilité de Hasofer et Lind.

Application	Variables aléatoires	Sensibilité réduite	β_{HL}	$R \geq (R_{\max} - \sigma_s)$	P_f
Retour élastique	<i>Exposant d'écrouissage</i>	-0.0428	1.43	30	0.03
	<i>Coefficient de frottement</i>	-0.0296			
	<i>Force de serrage</i>	0.99			

5.3 Étude de préchauffage d'une cuve d'électrolyse

Le préchauffage des cuves d'électrolyse constituent, encore aujourd'hui, l'une des préoccupations majeures pour les producteurs d'aluminium. En effet, le préchauffage constitue une opération délicate du procédé d'électrolyse. Le préchauffage des cuves (voir Figure 5.16) a fait l'objet de plusieurs travaux de recherche dans le but de mieux comprendre les phénomènes thermiques, électriques et mécaniques survenant lors du préchauffage électrique. Les travaux de [RIC04] et [GOU04] ont été nos références de base à ce sujet.

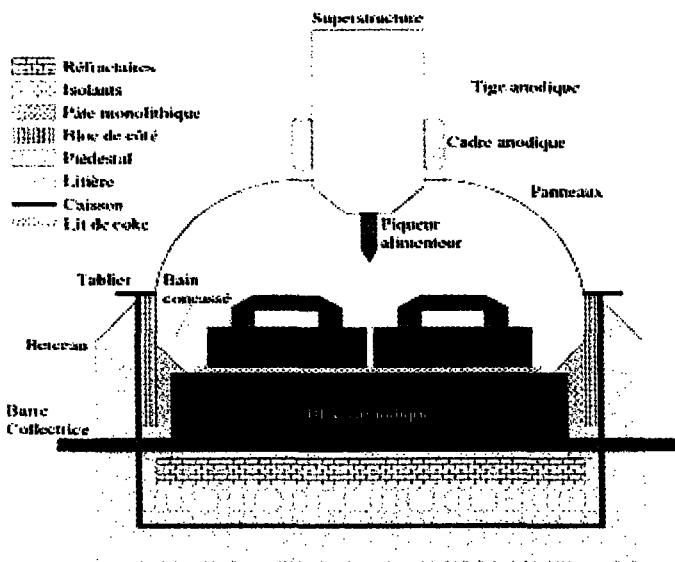
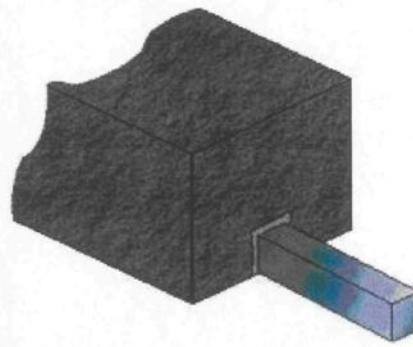


Figure 5.16 – Schéma d'une cuve de Hall Héroult à anodes précuites en préchauffage électrique, tirée de [RIC04].

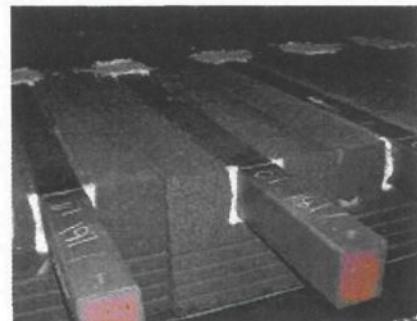
Les interfaces thermo-électro-mécaniques présentes dans la cuve jouent un rôle primordial dans le transfert des efforts entre les matériaux constituant la cuve. La cuve est préchauffée électriquement (effet joule), via un lit de coke ou de graphite constituant

l'élément résistif. Conséquent de la constitution particulière de la cuve (voir Figure 5.16), le courant traverse de multiples interfaces de contact en allant des montées à la sortie des barres collectrices Figure 5.17(a). La présence de ces interfaces a pour effet non seulement d'assurer le transfert d'efforts mécanique entre les composantes mais constituent une barrière au passage du courant et de la chaleur.

Une des interfaces critique de la cuve est celle localisée à l'interface fonte/carbone des systèmes anodique et cathodique. La fonte est utilisée pour assurer le scellement des rondins (anode) ou encore de la barre collectrice (cathode) (voir Figure 5.17(b)). Lors de l'étape de scellement, le refroidissement de la fonte provoque sa contraction et ainsi, un espace d'air non uniforme apparaît entre le carbone et la fonte. Cet espace aura une influence majeure sur la résistance électrique de la cuve.



(a) Schéma d'un bloc cathodique.



(b) Scellement des barres collectrices.

Figure 5.17 – Bloc cathodique, images tirées de Goulet 2004 [GOU04].

5.3.1 Description du modèle

Le modèle éléments finis correspondant à un quart de bloc cathodique a été initialement étudié dans un cadre déterministe par Goulet 2004 [GOU04]. Le maillage éléments finis du modèle est montré à la Figure 5.18.

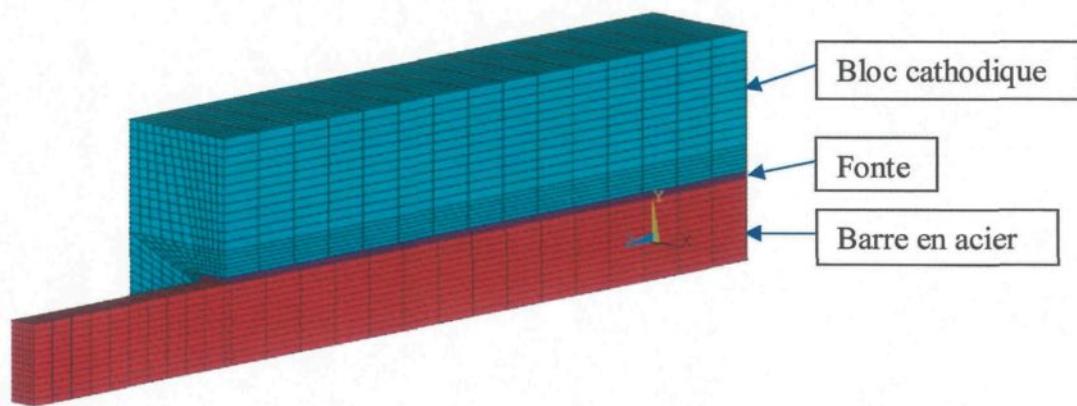


Figure 5.18 – Maillage éléments finis du bloc cathodique, tiré de Goulet 2004, [GOU04].

Les propriétés thermo-électro-mécaniques de ces trois matériaux (fonte, acier et carbone) sont présentées dans le Tableau 5.5 :

Tableau 5.5 – Propriétés des matériaux utilisées.

	Matériaux		
	Fonte	Acier	Carbone
Conductivité thermique isotrope [W/m°C]	48	55	15
Densité [kg/m ³]	7005	7858	1980
Capacité calorifique [J/kg °C]	612	483	700
Résistivité électrique [Ohm m]	$6.39 \cdot 10^{-7}$	$1.53 \cdot 10^{-7}$	$3 \cdot 10^{-5}$
Module de Young [Pa]	$60 \cdot 10^9$	$200 \cdot 10^9$	10^{-10}
Coefficient de Poisson	0.29	0.29	0.29
Expansion thermique [m/m°C ⁻¹]	$1.6 \cdot 10^{-5}$	$1.6 \cdot 10^{-5}$	3.25

La résolution déterministe en mode transitoire est effectuée sur une période couvrant les dix-huit premières heures de la vie d'une cuve. Durant cette période, deux types de chargements sont appliqués. Le premier correspond à une densité de courant de 335 KA/m^2 appliquée sur bout de la barre collectrice avec un voltage égale à zéro sur le plan cathodique permettant une représentation idéalisée du préchauffage électrique. Le second chargement est thermique et provient de la montée en température imposée par convection sur le dessus du bloc avec un coefficient d'échange élevé, soit $h = 650 \text{ W/m}^2 \text{ C}$. Ce chargement est piloté dans le temps selon la courbure présentée à la Figure 5.19. La solution est obtenue en résolvant 18 pas de temps d'une heure.

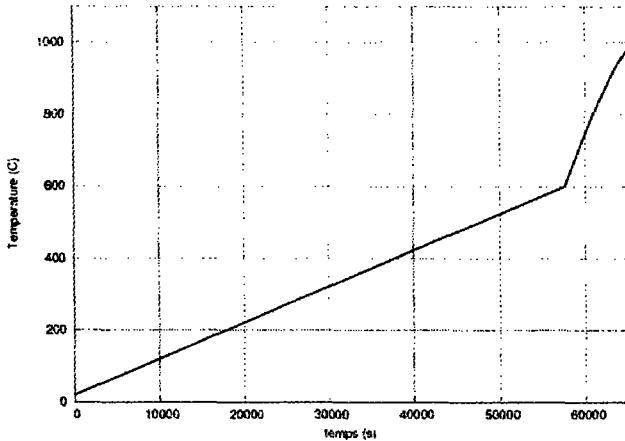


Figure 5.19 – Courbe de montée en température sur le dessus du bloc, tirée de [GOU04].

5.3.2 Variables aléatoires

Le choix des variables aléatoires est fait sur la base de celles présentant une certaine sensibilité lors de préchauffage au niveau des interfaces de contact du bloc cathodique. Plus particulièrement, l'objectif sera d'analyser les risques de fissuration du bloc cathodique.

Conséquent de la nature du procédé de scellement utilisé, la détermination de l'espacement fonte/carbone, demeure difficile à déterminer et peut varier selon le type de fonte utilisé, la température des matériaux lors du scellement et la procédure de coulée de la fonte. Pour être en mesure de simuler adéquatement le préchauffage électrique, il importe qu'il y ait du contact à l'interface fonte/carbone au départ pour que le courant électrique puisse passer.

Un bloc cathodique, lorsqu'il est placé dans une cuve, est entouré de différents matériaux. De chaque côté se trouvent des joints de pâte monolithique, comblant le vide avec les blocs de carbone voisins. Sur le devant du bloc, les matériaux du piédestal

viennent combler l'espace jusqu'au caisson d'acier. Ainsi, le bloc de carbone est confiné par ces matériaux et le caisson. Pour représenter la rigidité équivalente de ces matériaux, une condition de contact mécanique est utilisée entre le bloc cathodique et ces derniers. En effet, ces matériaux apportent une rigidité en compression sur le bloc cathodique. Toutefois, il est possible d'avoir des décollements entre les matériaux. Ainsi, aucune traction ne doit se développer sur les faces en contact avec ces autres matériaux. Une frontière rigide dont tous les degrés de liberté sont bloqués vient donc jouer le rôle de fondation élastique en compression. Idéalement, la rigidité de ces fondations est appliquée à l'aide de coefficients de pénalisation qui devront être représentatifs de la rigidité équivalente des matériaux du mur de coté [GOU04].

Nous nous proposons donc, par la suite, de prendre en considération le caractère aléatoire des paramètres suivants :

- espace qui existe entre le carbone et la fonte.
- rigidité équivalente des fondations.

5.3.3 Caractéristiques statistiques des variables aléatoires

Le choix des écarts type et des moyennes des deux variables aléatoires choisies est fait à partir de plusieurs travaux antérieurs et sur l'avis d'experts du domaine. Les écarts type considérés ont été également ajustés afin de maintenir des plages réalistes des matériaux en cause. Cela nous a amené à ajuster nos choix de valeur, de tirages en prenant en considération ces limitations. Le Tableau 5.6 résume les principales caractéristiques statistiques des valeurs de l'espace fonte/carbone et de rigidité utilisées.

Tableau 5.6 - Caractéristiques statistiques des variables aléatoires.

Rigidité des fondations [N/m ³]	Espace fonte/carbone [m]
1e7	0.002
5e7	0.0017
1e8	0.0013
5e8	0.001
1e9	0.0006
5.2e9	0.0003
7e9	0.0002
Moyenne (m)	1.98e9
Ecart type (s)	2.88e9

5.3.4 Solution Monte Carlo

Les lois de comportement mécaniques utilisées pour la fonte et l'acier sont thermo-élastiques. Pour le carbone, une loi thermo-élasto-plastique avec écrouissage et adoucissement a été utilisée. Cette loi a été proposée par D'Amours [DAM04] pour représenter le comportement mécanique des matériaux carbonés. Les paramètres utilisés dans la présente étude ne sont pas représentatifs du carbone d'une cathode réelle et ce, en raison de la confidentialité des paramètres réels. Cependant, ceux-ci permettent de simuler un matériau qui s'approche du carbone et proviennent de résultats disponibles dans la littérature [MIR03], [ZOL03]. Par conséquent les analyses Monte Carlo sont effectuées en utilisant les valeurs moyennes issues de ces résultats. Les fonctions d'état limite, quant à elles, seront construites, à titre représentatif, sur les états limites de rupture en compression et en traction dans tout le carbone. Une recherche sur les valeurs maximales des contraintes

principales en traction et en compression est alors effectuée. Le résultat de cette recherche sera stocké dans la base de données à la fin de chaque simulation.

5.3.5 Analyse fiabiliste

L'analyse fiabiliste des interfaces du bloc cathodique consiste à construire les fenêtres d'admissibilité de deux variables aléatoires de l'application soient l'espace entre le carbone et la fonte et la rigidité des fondations autour de carbone. Par la suite, une mesure de l'influence de l'incertitude de ces variables sur les prévisions des calculs, soit les limites en traction et en compression de carbone, est effectuée.

❖ Fenêtres d'admissibilité

Les deux fonctions d'état limite sont choisies respectivement par rapport à la limite en traction ($FL1 : \sigma_1 < 4 MPa$) et à la limite en compression ($FL2 : \sigma_3 > -32 MPa$) du carbone permettent de construire la fenêtre d'admissibilité dans l'espace physique des paramètres : la rigidité des fondations et l'espace fonte/carbone(voir Figure 5.20).

Les limitations combinées en traction (FL1) et en compression (FL2) permet de déduire les valeurs admissibles de rigidité des fondations et l'espace fonte/carbone qui valident simultanément FL1 et FL2 et sont les suivantes :

- ✓ Rigidité des fondations : $\approx 10^7 N / m^3$.
- ✓ Espace fonte/carbone : $\approx 0.510^{-3} m$.

Il est à noter que l'analyse de la fenêtre des valeurs admissibles donne, respectivement, par rapport à FL1 17 événements de succès et par rapport à FL2 6 événements de succès. Cette analyse a été influencée par des problèmes de divergences causés principalement par des

valeurs de rigidités trop élevées (à partir de $8 \times 10^9 \text{ N/m}^3$). Par contre, ces problèmes de divergences n'affectent pas directement la sensibilité des variables d'entrées sur les prévisions de calcul.

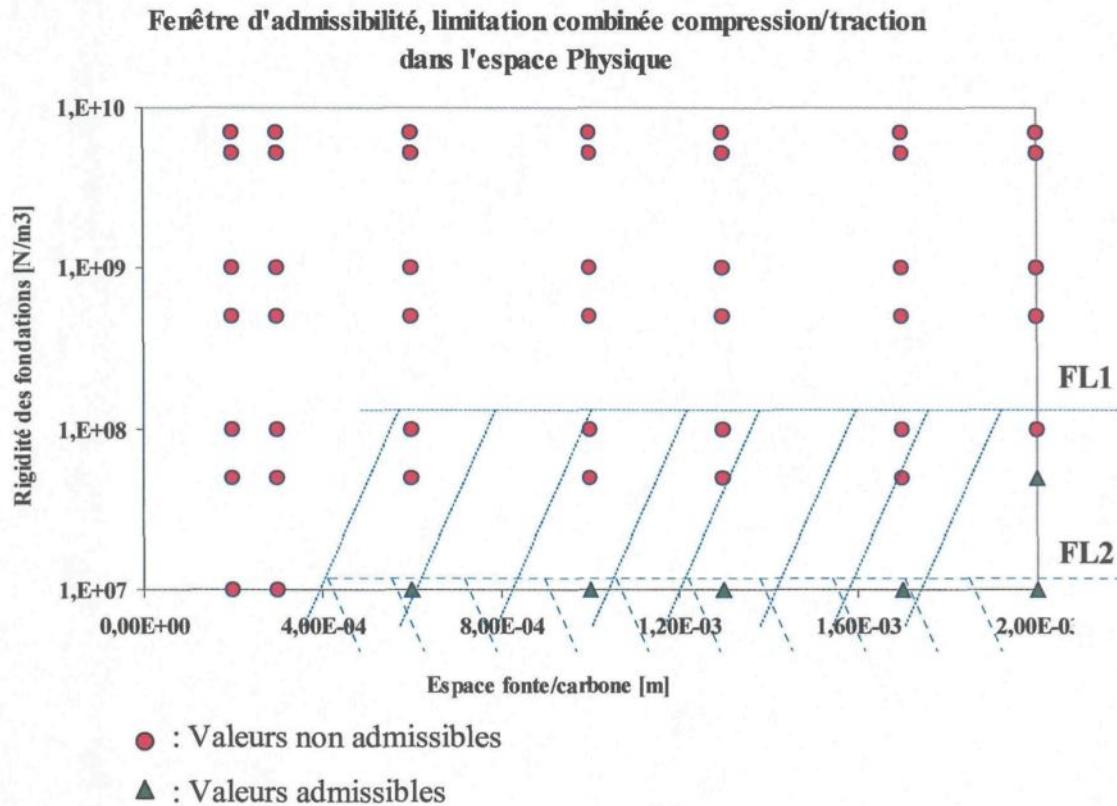


Figure 5.20 - Fenêtres d'admissibilité, valeurs admissibles en fonction des limitations combinées en compression et en traction.

❖ Sensibilité des paramètres

Le Tableau 5.7 résume les sensibilités réduites des variables aléatoires par rapport aux contraintes en traction et en compression. Les indices de fiabilité de Hasofer et Lind calculés pour le cas de limitation en traction et en compression sont égaux à 0.6. Ceux-ci représentent la distance minimale entre l'origine de l'espace standard et le point de

conception le plus probable. Ce point correspond à une limite en traction ou en compression validant les fonctions d'état limite définies respectivement par FL1 et FL2. Le dernier critère de fiabilité est la probabilité de défaillance qui admet une valeur de 0.65 (17 événements de succès, 32 événements d'échecs) pour FL1. Cette valeur est nettement inférieure à une probabilité de défaillance égale à 0.87 pour FL2 (6 événements de succès, 43 événements d'échecs).

Tableau 5.7 – Valeurs des sensibilités et de l'indice de fiabilité de Hasofer et Lind.

Application	Variables aléatoires	Sensibilité réduite	β_{HL}	P_f
Interfaces de bloc cathodique (limite en traction)	<i>Espace fonte/carbone</i>	0.18	0.7	0.65
	<i>Rigidité des fondations</i>	0.9		
Interfaces de bloc cathodique (limite en compression)	<i>Espace fonte/carbone</i>	0.15	0.65	0.87
	<i>Rigidité des fondations</i>	0.99		

5.4 Conclusion

Les résultats obtenus sur les deux applications industrielles de mise en forme avec retour élastique et celle du préchauffage d'une cuve d'électrolyse ont montré une stabilité de la méthode. Le choix des variables aléatoires pour chacune de deux applications a été basé sur des analyses déterministes de ces applications et sur les résultats de travaux antérieurs. Toutefois, il est important de noter que des choix de fonctions d'état limite et de méthode de tirages de variables non appropriés ont rendu complexe l'interprétation de quelques résultats. Ceci a provoqué des problèmes de divergences du problème pour quelques valeurs extrêmes de rigidité ou de l'espace fonte/carbone initiale. Cela pourrait être résolu en testant d'autres générateurs de variables aléatoires (Latin hypercube) et en multipliant les analyses déterministes afin d'avoir des probabilités et des indices de fiabilités encore plus précis et cerner la plage réelle des valeurs aléatoires d'entrées.

CHAPITRE 6

CONCLUSION GENERALE ET RECOMMANDATIONS

6 Conclusion générale et recommandations

6.1 Conclusion générale

Les travaux effectués dans le cadre de cette thèse se sont déroulés au centre universitaire de recherche sur l'aluminium (CURAL) de l'Université du Québec à Chicoutimi et au laboratoire Roberval de l'université de technologie de Compiègne.

La thématique de recherche concernée était centrée sur le développement d'outils numériques et analytiques pour l'analyse probabiliste du problème de contact multiphysique. On s'est attardé, en particulier, à l'exploitation de la technique de simulation de Monte Carlo et à la proposition d'une structure pour l'implémentation informatique de la MEFS. Cette dernière représente une alternative à la méthode de Monte Carlo, notamment pour la résolution stochastique des problèmes à variables aléatoires discrètes spatiales, là où une seule résolution est requise pour obtenir la solution stochastique. Elle a été l'objet d'une mise en œuvre d'une structure informatique basée sur la formulation analytique de discréttisation spatiale de variables aléatoires par la méthode de Karhunen Loeve. Cette formulation fut la base indispensable d'une analyse stochastique utilisant la MEFS. Pour sa part, l'approche basée sur l'algorithme de Monte Carlo a été l'objet d'une mise en œuvre d'un outil informatique générique. Cet outil nous a permis de mener une étude probabiliste et fiabiliste de plusieurs applications multiphysiques académiques (contact de Hertz) et industrielles (problème de retour élastique et préchauffage de cuve d'électrolyse).

Les résultats numériques obtenus pour différents cas d'exemples ont montré la validité des développements proposés et leur aptitude à mettre en évidence une large gamme de problèmes physiques, en particulier ceux liés à des variabilités spatiales de ces variables aléatoires. L'influence de la variabilité spatiale de ces derniers est évaluée par rapport à chaque type de sorties telles que les pressions de contact, les paramètres de quantification de retour élastique, etc. L'amplitude des fluctuations est certes importante (de l'ordre de 10% à 60%), mais reste néanmoins réaliste pour les applications choisies. Les principaux indicateurs de fiabilité et les tendances probabilistes des résultats qui ont fait l'objet de cette analyse probabiliste par la méthode de Monte Carlo sont :

- (i) les sensibilités des résultats aux différentes variables aléatoires d'entrées ;
- (ii) les fenêtres d'admissibilité dans les espaces physique et standard de deux variables statistiquement indépendantes ;
- (iii) l'indice de fiabilité de Hasofer et Lind.

Il a été possible de montrer que la formulation développée permet d'introduire l'aléa comme une dimension supplémentaire du modèle physique. Notamment, la méthode de Karhunen Loeve a pu être mise en œuvre en vue de la discrétisation du problème considéré suivant cette nouvelle dimension. Cette caractéristique essentielle dans la modélisation par la MEFS permet de réduire sensiblement les développements stochastiques additionnels dans les codes de calcul déterministes. Par conséquent, il suffit d'apporter une légère modification aux solveurs déjà utilisés pour pouvoir résoudre le système d'équations stochastique issu de cette discrétisation par la méthode de Karhunen Loeve. Cette dernière

démontre ses limites quand on est en présence d'une grande variabilité des variables aléatoires.

6.2 Recommandations

Comme perspectives de ce travail, nous recommandons, pour la partie d'analyse par la méthode de Monte Carlo:

- (i) Un nombre encore plus grand de variables aléatoires pour chaque application traitée, qui pourrait sans doute améliorer la précision des différents indicateurs de fiabilité. Comme pour l'application de mise en forme des tôles avec retour élastique, il sera pertinent de prendre en considération la forme géométrique de la tôle et son épaisseur. Cela est d'une grande importance, surtout quand on définit une nouvelle fonction d'état limite basée sur de nouveaux critères de formabilité de matériau tels que l'amincissement ou l'épaississement qui représentent de bons indicateurs, respectivement, de rupture et de plissement [BEN05].
- (ii) La prise en considération d'une dépendance statistique qui risque d'en avoir les variables aléatoires de problème. Cela nécessitera la mise en place d'une approche expérimentale ou analytique d'identification permettant à la fin d'établir cette dépendance.
- (iii) La généralisation de la construction des fenêtres de faisabilité à des espaces physiques de trois variables aléatoires, ce qui permettra de mieux constater l'influence de chaque variable sur les sorties de problème.

Concernant l'approche basée sur la méthode des éléments finis stochastique, on recommande d'associer une application mécanique à la formulation déjà mise en place informatiquement. De plus, l'utilisation de l'expansion de Karhunen Loeve pour la discréétisation des variables aléatoires paraît insuffisante pour la construction de la réponse par projection dans des bases polynomiales, par exemple, autrement, la MEFS s'apparente à une méthode de surface de réponse (SR). Il sera donc possible d'obtenir la SR par des expansions polynomiales (Chaos polynomial par exemple). Aussi, les techniques d'approximation hilbertienne basées sur des développements de la réponse mécanique sur une base tronquée de polynômes (Hermite, Legendre) représentent une piste à explorer dans des travaux futurs. Il est à noter que la difficulté principale de ces types d'approches réside dans le choix de la procédure d'interpolation pour le calcul des coefficients des différents polynômes.

Références

- [ANT02] Anthony H., Lemaire M. Eléments finis stochastique: construction de la matrice de rigidité stochastique d'une poutre. IFMA/LaRAMA, 2002.
- [BEC70] Benjamin J. R. and Cornell A. Probability, Statistics and Decision for Civil Engineers. McGraw-Hill Book co., 1970.
- [BEN04] Ben Elechi S. Thèse de doctorat: Analyse et conception rapides de paramètres du procédé d'emboutissage pour le contrôle du retour élastique. UTC, Compiègne, France, 2004.
- [BEN05] Ben Ayed L. Thèse de doctorat: Modélisation numérique de l'emboutissage et optimisation des outils serre-flan. UTC, Compiègne, France, 2005.
- [BEN90] Benson D.J., Hallquist J.O. A single surface contact algorithm for the postbuckling analysis of shell structures. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 78:141-163, NORTH-HOLLAND, 1990.
- [BER87] Bernard P., Fogli M. Une méthode de Monte-Carlo performante pour le calcul de la probabilité de ruine. Revue du CTICM, 4 :23-40, 1987.
- [BOL88] Bolle A. Approche probabiliste en mécanique des sols avec prise en compte de la variabilité spatiale. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 743, 1988.
- [BON97] Bonet, J., Wood R. D. Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis. Cambridge University Press 1997.
- [BUC88] Bucher C.G. Adaptative sampling : an iterative fast Monte-Carlo procedure. Structural Safety, 5 :119-126, 1988.
- [COR71] Cornell A. C. First Order uncertainty analysis of soils deformation and stability. Proceedings, First conference on Applications of Statistics and Probability to Soil and Structural Engineering, Hong Kong, pages 130{144, 1971.
- [DAM04] D'Amours G. Développement de lois constitutives thermomécaniques pour les matériaux à base de carbone lors du préchauffage d'une cuve d'électrolyse, thèse de doctorat, Université Laval, mai 2004.
- [DIT96] Ditlevsen O., Madsen H.O. Structural reliability methods. John Wiley & Sons, 1996.
- [DUV76] Duvaut G., Lions J. L. Inequalities in mechanics and physics. Springer Verlag, Berlin, 1976.
- [ELH97] El Hami A., Finck L., Reliability of a contact between two deformable solids, Clermont Ferrand, Euromech 372, Reliability in Nonlinear Structural Mechanics, 21-24 Octobre1997.
- [FLO94] Flores M. Modèles fiabilistes et mécanique – éléments finis stochastiques. Méthodes de couplage et application, thèse de doctorat, Université Blaise Pascal Clermont – Ferrand II, N°d'ordre 657 \ 15 novembre 1994.
- [GAT02] Gati W. Thèse de doctorat: Approche Pseudo Inverse pour simulations

- rapides du procédé d'emboutissage et de retour élastique des pièces en tôles minces. UTC, Compiègne, France, 2002.
- [GHA91] Ghanem R., Spanos P. D. Stochastic finite elements: a spectral approach. Springer-Verlag New York Inc., New York, 1991.
- [GHA96] Ghanem R., Kruger R. M. Numerical solution of spectral stochastic finite element systems. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering; 129 :289-303, 1996.
- [GHA99] Ghanem R. Stochastic finite elements with multiple random non-Gaussian properties. Journal engineering mechanics; 125 : 1,26-40, 1999c.
- [GOU04] Goulet P. Modélisation du comportement thermo-électro-mécanique des interfaces de contact d'une cuve de Hall Héroult, thèse de doctorat, Université Laval, août 2004.
- [GRE66] Greenwood J.A., Williamson J.B.P. Contact of nominally flat surfaces. Proc. Roy. Soc. Lond, A295 300-319, 1966.
- [HAN92] Hansen E. Global optimization using interval analysis. Marcel Dekker, 1992.
- [HAS83] Haslinger J. Approximation of the signorini problem with friction obeying Coulomb law, Mathematical Methods in the Applied Science, 5, 422.437, 1983.
- [HER82] Hertz H. Über die Berührung fester elastischer Körper. J. reine angewandte Matematik, 92, 156-171, 1882.
- [HIR02] Hirota G. Thesis report : An Improved Finite Element Contact Model for Anatomical Simulations. University of North Carolina at Chapel Hill, 2002.
- [HAL74] Hasofer A. M. and Lind N. C. Exact and invariant second moment code format, Journ. Eng. Mechanics Div., vol 100 :111-121, 1974.
- [IBR87] Ibrahim R. A. Structural dynamics with parameters uncertainties. Applied Mechanics Review. 40:309-328, 1987.
- [KLE99] Buczkowski R., Kleiber M. A stochastic model of rough surfaces for finite element contact analysis, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 169 43-59, 1999.
- [LAL04] Laliberté M. Maîtrise en génie mécanique : Modélisation et simulation d'un véhicule servant à l'étude de l'arrimage direct dans le transport d'équipements hors normes. Université laval 2004.
- [LAW87] Lawrence M. Basis random variables in finite element analysis. International Journal Numeric Methods Engineering. 24 : 1849-1863, 1987.
- [LEI00] Lei Z., Qiu C. Neumann dynamic stochastic finite element method of vibration structures with stochastic parameters to random excitation. Computers and structures, 77 :651-657, 2000.
- [LEM05] Lemaire M. Fiabilité des structures, couplage mécano-fiablestatique. Hermès science publishing LTD, 2005.
- [LIN05] LINCK V. Thèse de doctorat : Modélisation numérique temporelle d'un contact frottant, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2005.
- [LIN83] Lind N. D. Modelling of uncertainty in discrete dynamical systems. Appl. Math. Modelling., 7 :146{152, 1983.

- [LIN98] Lin J.I. DYNA3D: A nonlinear, explicit, three-dimensional finite element code for solid and structural mechanics, User manual, Methods development group, Lawrence Livermore National Laboratory, 1998.
- [MAC99] Maciej A., Muneo H. Stochastic finite element method for elasto-plastic body. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 46, 1897-1916 , 1999.
- [MAK93] Makinouchi A., Nakamachi E., Onate E., Wagoner R. Proceedings of the International Conference NUMISHEET'93. Riken, Tokyo, 1993.
- [MAR01] Marceau D. Thèse de doctorat : Modélisation du contact tridimensionnel avec frottement en grandes transformations et son application à l'étude des dispositifs d'ancrage multitorons, Université LAVAL, 2001.
- [MAR05] Marceau D. FESh++, une nouvelle approche orientée-objet pour la simulation par éléments finis des problèmes multiphysiques. Giens, France, 2005.
- [MCC86] McCool J.I. Comparaison of models for the contact of rough surfaces. *Wear* 107 37-60, 1986.
- [MIR03] Mirchi A. A., Chen W., Tremblay M. Comparative characterisation of graphitized and graphitic cathode blocks. TMS Light Metals, The Minerals, Metals & Materials Society, 617.624, 2003.
- [MML94] Mébarki A., Muzeau J. P., Lemaire M., editors. Applications des Statistiques et des probabilités en Analyse des Matériaux et des ouvrages. Journées Nationales CERRA-ICASP 7, Ecole Normale Supérieure de Cachan, mars, 30-31 1994.
- [MOR02] Morvan O. Dispersions du comportement de structures vibrantes: Analyse et détection. Thèse de doctorat, Institut national des sciences appliquées de Lyon, 2002.
- [MRA03] Mrad H. Mémoire de DEA: Méthode des éléments finis stochastiques : une investigation pour résoudre un problème de contact. Université de Technologie de Compiègne, 2003.
- [NAY71] Nayak P.B. Random process model of rough surfaces. *J. Lubrication Technology Trans. ASME* 93 398-407, 1971.
- [ODE83] Oden J. T., Pires E. B. Nonlocal and nonlinear friction laws and variational principles for contact problems in elasticity. *J. Appl. Mech.*, 50, 67–76, 1983.
- [ODE83a] Oden J. T., Pires E. B. Numerical analysis of certain contact problems in elasticity with non-classical friction laws. *Computers and Structures*, 50, 481–485, 1983.
- [ODE85] Oden J. T., Martins J. A. C. Models and computational methods for dynamic friction phenomena. *comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 52, pp. 527-634, 1985.
- [PAR97] Parisch H., Lubbing C. A formulation of arbitrarily shaped surface elements for three-dimensional large deformation contact with friction. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 40, 3359-3383, 1997.
- [PHO02] Phoon K. K., Huang S. P., Quek S. T. Simulation of second-order processes using Karhunen-Loeve expansion. *Computers and Structures* 80 1049-1060, 2002.
- [RAC78] Rackwitz R., and Fiessler B. Structural reliability under combined random

- [REI01] load sequences. *Computers & Structures*, 9:484-94, 1978.
- [RIC04] Reid J. D., Hargrave M. W., Paulson S. L. LS-DYNA: A computer modeling success story. *Public Roads*, 64, 4 (January/February), Federal Highway Administration, 2001.
- [RIC04] Richard D. Aspects thermomécaniques de la modélisation par éléments finis du préchauffage électrique d'une cuve de Hall Héroult : Lois constitutives, conception orientée-objet et validation, thèse de doctorat, Université Laval, août 2004.
- [RJA59] Rjanitzyn A. R. Calcul de la rupture et plasticité des constructions. Eyrolles, Paris, 1959.
- [ROSS52] Rosenblatt M. Remarks on a multivariate transformation. *The Annals of Mathematical Statistics*, vol. 23 :470-472, 1952.
- [RZH49] Rzhanitzyn R. A. Design of structures with considerations of plastic properties of materials. Stroivoenmorizdat, 1949.
- [SHI87] Shinozuka M. Basic issues in stochastic finite element analysis. In ICASP, editor, 5th International Conference on Applications of Statistics and Probability, 1987.
- [SHI88] Shinozuka M., Yamazaki F. Stochastic finite element analysis: an introduction. In Stochastic Structural Dynamics, Progress in Theory and Application. Ed. Elsevier Applied Science, 241–291, 1988.
- [SHR66] Shreider Y.A. The Monte-Carlo method. Pergamon Press, 1966.
- [SUD00] Sudret B., Der Kiureghian A. Stochastic finite element methods and reliability, A state-of-the-art report. University of California, Berkeley, 2000.
- [TAL94] Le Tallec P. Numerical methods for solids. In CIARLET, P.G., LIONS, J. L. (eds.), Handbook of numerical analysis. North-Holland, 1994.
- [TAN00] Tanguy M. Contribution à l'analyse mécano-fiabiliste des problèmes de contact entre solides déformables. Application aux moteurs piézo-électriques, thèse de doctorat; Université de Franche-Comté, N°d'ordre 815 \ 13 octobre 2000.
- [TAY88] Taylor R. L., Ju J. W. A perturbed Lagrangian formulation for the finite element solution of nonlinear frictional problems. *Journal of theoretical and applied mechanics* 0750-7240, 1988.
- [TOU00] Toukourou M. M. Thèse de doctorat: Modélisation et simulation par la MEF du contact avec frottement dans les procédés de mise en forme des métaux; Université Laval, 2000.
- [WHI70] Whitehouse D.J., Archard J.F. The properties of random surfaces in contact. *Proc. Roy. Soc. Lond. A316* 97-121, 1970.
- [WRI90] Wriggers P., Vu Van T., Stein E. Finite element formulation of large deformation impact-contact problems with friction. *Computers & Structures* vol. 37, No 3, pp 319-331, 1990.
- [WRI99] Wriggers P., Panagiotopoulos P. New developments in contact problems. CISN Courses and lectures no. 384, International Centre for Mechanical Sciences, Springer Wien NewYork, 1999.
- [YAM88] Yamasaki F., Shinozuka M., Dasgupta G. Neumann expansion for stochastic

- [YIN04] finite element analysis. J. of Engrg. Mech., 114(8) :1335-1354, 1988.
Yinnon C. A., Buch V., Devlin J. P. Monte Carlo simulation for the formation of a mixed crystal from two solids in contact. The Journal of Chemical Physics 15 June, V 120, N 23, 2004.
- [ZHA94] Zhang J, Ellingwood B. Orthogonal series expansion of random fields in reliability analysis. Journal engineering Mechanics. 120,12: 2660-2677, 1994.
- [ZIE91] Zienkiewicz O. C., Taylor R. L. La méthode des éléments finis, formulation de base et problèmes linéaire. Paris, AFNOR.; 620, 1991.
- [ZOL03] Zolochevsky, A., Hop, J. G., Servant, G., Foosnaes, T., Øye, H. A. Creep and sodium expansion in a semigraphitic cathode carbon. TMS Light Metals, The Minerals, Metals & Materials Society, 595.602, 2003.