



**MÉMOIRE**

**PRÉSENTÉ À**

**L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À CHICOUTIMI**

**COMME EXIGENCE PARTIELLE**

**DE LA MAÎTRISE EN INGENIERIE**

**PAR**

**Mourad ABERKANE**

**IMPLÉMENTATION NUMÉRIQUE ET CALIBRAGE D'UN MODÈLE  
D'ENDOMMAGEMENT DUCTILE POUR LA GLACE ATMOSPHÉRIQUE**

**Mai 2012**

## RÉSUMÉ

L'accumulation de la glace atmosphérique sur le réseau de transport et de distribution de l'énergie électrique est à l'origine de problèmes divers de natures électriques et mécaniques. Le délestage naturel de la glace accumulée peut aussi causer d'énormes perturbations dans le réseau et s'avérer être très dangereux. Les risques encourus ne pouvant pas être totalement éliminés, il est possible de les réduire et améliorer la fiabilité du réseau de distribution de l'énergie électrique en développant des systèmes de déglacage et de prévention du givrage. Pour ce faire, la connaissance des propriétés mécaniques de la glace atmosphérique et de son comportement est primordiale.

L'objectif de cette étude dans le cadre de la problématique du délestage, est le développement d'un outil numérique afin de simuler le comportement mécanique de la glace atmosphérique dans un cadre éléments finis. Le logiciel commercial ABAQUS est utilisé à cette fin, dans lequel, la loi de comportement est fournie par l'utilisateur via une sous-routine VUMAT. Le comportement mécanique de la glace est décrit par une loi de comportement multiaxiale élastoviscoplastique avec endommagement ductile. La déformation totale comporte trois composantes : une déformation élastique instantanée, une déformation viscoélastique et une déformation viscoplastique. L'endommagement qui caractérise la perte de rigidité du matériau est pris en compte par un tenseur d'endommagement du quatrième ordre.

Le modèle étant à l'origine développé et paramétré pour simuler le comportement ductile de la glace d'eau douce ; des expériences sont menées en laboratoire afin de déterminer les paramètres nécessaires au calibrage du modèle afin de pouvoir simuler le comportement de la glace atmosphérique. Le comportement de la glace atmosphérique est similaire à celui de la glace d'eau douce, il est cependant affecté par différents paramètres. Les essais effectués ont permis de mettre en évidence l'influence de la vitesse de déformation sur la résistance en compression ainsi que les différences existantes entre

les comportements en traction et en compression qui caractérisent la classe des matériaux fragiles dont la glace fait partie.

L'implémentation de la sous-routine VUMAT développée a été validée par un certain nombre de simulations comprenant : la compression uniaxiale non-confinée à taux de contrainte et à taux de déformation constants, la compression uniaxiale confinée. Les résultats obtenus sont en accord avec les résultats tirés de la littérature pour la glace d'eau douce.

Finalement, des recommandations sont formulées afin de compléter et améliorer ce travail. Ainsi, l'outil numérique développé permettra de simuler les situations de chargement mécaniques complexes que l'on ne peut reproduire en laboratoire ou en milieu naturel faute de temps ou de moyens.

## REMERCIEMENTS

Effectuer une recherche est un travail de longue haleine nécessitant souvent le concours de plusieurs personnes à qui je dois énormément. La liste des noms est longue. Que ces personnes trouvent dans ces courtes lignes la marque de ma profonde reconnaissance.

Cette liste ne peut commencer que par mon directeur de recherche le Pr. Daniel Marceau, qui est presque arrivé en mission de sauvetage lorsque j'étais noyé dans divers problèmes de définition de projet et d'encadrement. Tous les mots ne suffiraient probablement pas afin de lui témoigner ma gratitude pour ses lectures et relectures critiques et attentives, ses commentaires judicieux et sa constante disponibilité bien que son agenda soit chargé. Il a su avec un immense professionnalisme amener ce projet à bon terme tout en me donnant une autre image de la recherche scientifique que celle que j'avais avant.

Mes vifs remerciements s'adressent aussi au Pr. Mohamed Rachik de l'UTC (Université de Technologie de Compiègne) pour l'aide inestimable apportée au projet, et les remarques pertinentes. Son apport et ses conseils ont été très importants, en particulier, en ce qui concerne les aspects de la modélisation et de l'implémentation de la sous-routine sous ABAQUS.

Je ne peux oublier Pr. Duygu Kocaefe et Mme. Nicole Bouchard, qui ont occupé respectivement, les fonctions de directrice du programme et de doyenne des études de cycles supérieurs pour leurs encouragements et leur soutien moral dans les dures périodes.

Mes remerciements s'adressent aussi aux autres membres du jury d'évaluation, en l'occurrence Pr. Jean Perron et Pr. Marie-Isabelle Farinas pour l'effort consenti à lire ce mémoire et les recommandations émises dans le but de le rendre plus clair et de meilleure qualité.

Ma famille qui fut de tout temps mon meilleur soutien et un allié indéfectible, je pense à ma mère, mon frère et mes deux sœurs. Ils n'ont jamais été avares en matière d'encouragements. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma reconnaissance, car sans eux, je ne serais jamais arrivé où j'en suis maintenant. Merci pour l'amour que vous me portez, merci pour la confiance sans failles que vous m'avez témoigné.

Toute la famille Bouyacoub, en particulier Toufik et Yacine. Mes professeurs Mohamed Makhlouf et Mostefa Brahami. Mes amis, de très bons amis, presque des frères et sœurs pour moi : Saleema Noormohamed, Zahira Ghalmi, Fethi Meghnefi, Abdelghafour Bouaicha, Dilip Sarkar, Carlos Oré-Sanchez (bien qu'il se dit ne pas être mon ami !!!), Maria Deshayes, Marlène Sabbagh et Silviya Mihova. Mes amis de l'Université Laval, je pense à Hicham Chaouki, à Youness Tantaoui et Mihaita Matei. Si j'en ai oublié quelques-uns, je m'en excuse.

Mes collègues qui m'ont accueilli au CURAL, c'est presque une seconde famille pour moi, je pense à Mme Manon Côté, à Dany Racine, à Pierre-Luc Girard, à Anne-Marie Dufour et à Aurore Guglielmetti.

# TABLE DES MATIÈRES

<b>RÉSUMÉ .....</b>	<b>ii</b>
<b>REMERCIEMENTS .....</b>	<b>iv</b>
<b>TABLE DES MATIÈRES .....</b>	<b>v</b>
<b>LISTE DES TABLEAUX.....</b>	<b>viii</b>
<b>LISTE DES FIGURES .....</b>	<b>ix</b>
<b>1 Chapitre 1 : Introduction .....</b>	<b>11</b>
1.1 Contexte général.....	11
1.2 Problématique.....	12
1.3 Objectif de la recherche.....	15
1.4 Méthodologie générale.....	15
1.5 Organisation des chapitres .....	17
<b>2 Chapitre 2 : Revue de la littérature.....</b>	<b>18</b>
2.1 Introduction .....	18
2.2 Structure cristalline de la glace .....	19
2.3 Classification des types de glace.....	21
2.4 Physique de la glace atmosphérique.....	23
2.4.1 Le verglas.....	24
2.4.2 Le givre lourd (dur).....	24
2.4.3 Le givre léger (mou) .....	25
2.5 Propriétés mécaniques et rhéologie de la glace.....	26
2.5.1 Constantes élastiques de la glace .....	26
2.5.2 Fluage de la glace.....	30
2.5.3 Comportements ductile et fragile de la glace.....	31
2.6 Modélisation du comportement mécanique de la glace .....	33
2.6.1 Modèle de Sinha .....	34
2.6.2 Modèle d'Ashby et Duval.....	35
2.6.3 Modèle de Derradji-Aouat .....	36
2.6.4 Modèle de Santaoja.....	37
2.6.5 Modèle de Choi.....	37
2.6.6 Modèle de Pulkkinen .....	38
2.6.7 Modèle de Szyszkowski et Glockner .....	39

2.7	Discussion .....	39
<b>3</b>	<b>Chapitre 3 : Modélisation mathématique du comportement mécanique de la glace .....</b>	<b>41</b>
3.1	Introduction .....	41
3.2	Rappels de la mécanique des milieux continus .....	41
3.2.1	Définitions.....	42
3.2.2	Invariants scalaires des tenseurs de contrainte et de déformation .....	43
3.2.3	Notation de Voigt.....	44
3.3	Présentation du modèle unidimensionnel de Sinha.....	45
3.3.1	Élasticité.....	46
3.3.2	Viscoélasticité .....	46
3.3.3	Viscoplasticité.....	46
3.3.4	Endommagement .....	47
3.4	Présentation du modèle 3D de Choi.....	49
3.4.1	Élasticité polycristalline.....	49
3.4.2	Viscoélasticité .....	50
3.4.3	Viscoplasticité.....	51
3.4.4	Endommagement .....	52
3.4.5	Lois d'évolution de l'endommagement .....	58
<b>4</b>	<b>Chapitre 4 : Procédure expérimentale.....</b>	<b>65</b>
4.1	Introduction .....	65
4.2	Description de la soufflerie réfrigérée.....	66
4.3	Conditions d'accumulation de la glace atmosphérique.....	68
4.4	Procédure d'accumulation de la glace atmosphérique .....	69
4.5	Description du microtome .....	70
4.6	Description des éprouvettes de test .....	71
4.7	Tests de compression uniaxiale et de flexion trois-points .....	72
4.7.1	Test de compression uniaxiale.....	73
4.7.2	Test de flexion trois-points .....	75
4.8	Résultats obtenus et discussion .....	77
4.8.1	Compression uniaxiale.....	77
4.8.2	Flexion trois-points .....	80
<b>5</b>	<b>Chapitre 5 : Mise en œuvre informatique, validation et utilisation du modèle. 83</b>	
5.1	Introduction .....	83
5.2	Intégration et implémentation numérique du modèle .....	84

5.2.1	Intégration numérique et formulation incrémentale .....	84
5.2.2	Stratégie de l'implémentation .....	87
5.3	Validation du développement dans Maple .....	89
5.3.1	Compression uniaxiale .....	89
5.3.2	Test de traction .....	94
5.3.3	Test de compression triaxiale .....	98
5.4	Sous-routine utilisateur VUMAT pour ABAQUS .....	100
5.5	Simulations de tests sur ABAQUS .....	103
5.5.1	Compression uniaxiale .....	104
5.5.2	Compression triaxiale .....	107
5.6	Identification des paramètres (glace atmosphérique) .....	110
5.6.1	Stratégie d'identification .....	111
5.6.2	Élasticité .....	113
5.6.3	Viscoplasticité .....	113
5.6.4	Viscoélasticité .....	114
5.6.5	Endommagement .....	115
<b>6</b>	<b>Chapitre 6 : Conclusion générale et recommandations .....</b>	<b>116</b>
6.1	Conclusion générale .....	116
6.2	Recommandations .....	118
<b>7</b>	<b>Références .....</b>	<b>121</b>

## **LISTE DES TABLEAUX**

Tableau 2.1: Caractéristiques et conditions de formation des différents types de glace atmosphérique.....	25
Tableau 3.1: Paramètres du modèle de Sinha pour la glace d'eau douce .....	49
Tableau 3.2: Paramètres du modèle pour la glace d'eau douce (Choi 1989) .....	64
Tableau 5.1: Liste des variables historiques enregistrées dans ABAQUS .....	102
Tableau 5.2: Paramètres matériels utilisés en entrée dans ABAQUS .....	103



## LISTE DES FIGURES

Figure 1.1: Pylônes électriques ayant cédé sous le poids de la glace accumulée lors de la tempête de 1998 (VPR 2008).....	12
Figure 1.2: Équipe intervenant sur des câbles rompus à cause du poids de la glace accumulée (VPR 2008) .....	12
Figure 1.3: Glace accumulée sur l'aile d'un avion (Jesse 2010) .....	13
Figure 1.4: Impact de blocs de glace détachés sur l'empennage (Jacob 2005) .....	14
Figure 2.1: Diagramme de phase de l'eau (Lobban, Finney et al. 1997).....	19
Figure 2.2: Maille élémentaire hexagonale de la glace $I_h$ .....	20
Figure 2.3: Arrangement spatial des molécules d'eau $H_2O$ .....	20
Figure 2.4: Morphologie et orientation cristallographique de la glace granulaire et colonnaire.....	23
Figure 2.5: Influence des conditions météorologiques sur les types de glace atmosphérique .....	24
Figure 2.6: Constantes élastiques pour la glace granulaire (Comparaison entre les différentes moyennes) .....	29
Figure 2.7: Courbe typique de fluage sous chargement constant (Heinonen 2004) .....	31
Figure 2.8: Modes de déformation pour la glace d'eau douce ( $T=-10^{\circ}C$ , $d=5mm$ ) (Wu and Niu 1995) .....	32
Figure 3.1: Système de microfissures planes et parallèles (Krajcinovic 1985) .....	54
Figure 3.2: Transformation de coordonnées (Choi 1989).....	60
Figure 3.3: Orientation de l'endommagement en compression uniaxiale (Choi 1989) ....	63
Figure 3.4: Orientation de l'endommagement en tension uniaxiale (Choi 1989) .....	63
Figure 4.1: Soufflerie réfrigérée de la CIGELE.....	67
Figure 4.2: Accumulation de glace sur un cylindre en aluminium .....	69
Figure 4.3: Microtome Leitz Wetzlar .....	70
Figure 4.4: Exemple d'éprouvette de test en flexion trois-points .....	76
Figure 4.5: Configuration de tests pour la flexion trois-points.....	76
Figure 4.6: Variation de la résistance en compression en fonction de la vitesse de déformation imposée pour la glace atmosphérique à $T=-10^{\circ}C$ .....	77
Figure 4.7: Comparaison des résultats de la résistance en compression obtenue dans cette étude et des résultats provenant d'autres études pour la glace atmosphérique et la glace d'eau douce .....	78
Figure 4.8: Courbes contraintes-déformations pour les tests de compression uniaxiale à $T=-10^{\circ}C$ .....	79
Figure 4.9: Contrainte en flexion de la glace atmosphérique à $T=-10^{\circ}C$ .....	81

Figure 5.1: Organigramme adopté pour le calcul de la contrainte et des déformations ...	88
Figure 5.2: Courbes contraintes-déformations pour différents taux de déformation imposés.....	90
Figure 5.3 : Comparaison des évolutions de la déformation élastique avec les deux méthodes d'implémentation .....	91
Figure 5.4: Comparaison des évolutions de la déformation viscoélastique avec les deux méthodes d'implémentation .....	91
Figure 5.5: Comparaison des évolutions de la déformation viscoplastique avec les deux méthodes d'implémentation .....	92
Figure 5.6: Évolution des deux mécanismes d'endommagement D11 liés à la déformation viscoélastique et à la déformation totale .....	93
Figure 5.7: Évolution de la déformation volumétrique à différents taux de déformations imposés en compression uniaxiale .....	94
Figure 5.8: Courbes contraintes-déformations pour différents taux de déformation en tension .....	95
Figure 5.9: Courbes contraintes-déformation pour différents taux de déformation imposés en tension ( $\beta_2$ constant) .....	96
Figure 5.10: Courbes contraintes-déformations pour différentes vitesses de déformations (nouvelle formulation) .....	98
Figure 5.11: Courbes contraintes-déformations à différentes pressions de confinement pour une vitesse de déformation $1e-3$ [1/s] .....	99
Figure 5.12: Géométrie et conditions aux limites imposées sur ABAQUS pour les simulations des tests de compression uniaxiale à taux de déformation imposé.....	104
Figure 5.13: Distribution des contraintes $\sigma_{33}$ dans le quart de cylindre .....	105
Figure 5.14: Distribution des contraintes $\sigma_{11}$ dans le quart de cylindre .....	106
Figure 5.15: Profil des déplacements axiaux $U_3$ .....	106
Figure 5.16: Profil des déplacements latéraux $U_1$ .....	107
Figure 5.17: Géométrie et conditions aux limites imposées pour un test de compression uniaxiale confinée .....	108
Figure 5.18: Distribution des contraintes S33 en compression uniaxiale confinée .....	109
Figure 5.19: Distribution des contraintes S11 en compression confinée .....	109
Figure 5.20: Vérification des résultats du VUMAT pour une compression confinée à 5MPa.....	110
Figure 5.21: Essais caractéristiques pour l'identification des paramètres du modèle .....	111
Figure 5.22: Organigramme de l'identification inverse par couplage d'iSight et ABAQUS .....	112

# **Chapitre 1 : Introduction**

## **1.1 Contexte général**

Le Canada comme beaucoup de pays du Nord subit les désagréments du froid en hiver. Au cours des cinq dernières décennies, le Canada a enregistré plusieurs tempêtes de verglas dont les plus importantes sont celles de février 1961 à Montréal, de janvier 1968 en Ontario, de 1968 en Ontario et au Québec, de mars 1983 dans le Manitoba, d'avril 1984 à Terre-Neuve, et bien sûr, la tempête de 1998 qui a touché le Canada et le nord des États-Unis. Cette dernière reste l'une des plus mémorables, mais aussi l'une des plus coûteuses en matière de vies humaines et de dégâts matériels. Les statistiques avancent le chiffre de 28 décès enregistrés au Canada, 17 aux États-Unis et des centaines de millions de dollars de dommages causés aux différentes structures par l'accumulation de la glace. Les dégâts occasionnés au réseau de distribution de l'énergie électrique ont privé d'électricité près de cinq millions de Canadiens et un demi-million d'Américains, et ce, pour plusieurs jours, voire plusieurs semaines pour certains (Lecomte, Pang et al. 1998).

Bien que l'on soit actuellement dans l'impossibilité de prévoir ces événements désastreux à long terme, plusieurs recherches ont été menées afin d'arriver à une meilleure compréhension des conditions d'accumulation de la glace atmosphérique sur les structures, de son comportement mécanique ainsi que des mécanismes de délestage et de déglacage dans le but d'en atténuer les effets néfastes de son accumulation. Ce

mémoire s'inscrit donc dans cette démarche visant à atteindre une meilleure connaissance du comportement mécanique de la glace atmosphérique.

## 1.2 Problématique

L'accumulation de la glace sur les installations est à l'origine de problèmes de natures électriques et mécaniques sur le réseau de transport et de distribution de l'énergie électrique : contournements des isolateurs recouverts de glace, bris mécaniques et chutes de pylônes sous l'effet du poids extrême de la glace accumulée (Figure 1.1), fatigue et rupture des câbles (Figure 1.2) et des pylônes conséquents aux mouvements vibratoires, et notamment le galop, sous l'effet du vent, etc.(Kalman, Farzaneh et al. 2007; Koosheh 2007).



**Figure 1.1: Pylônes électriques ayant cédé sous le poids de la glace accumulée lors de la tempête de 1998 (VPR 2008)**



**Figure 1.2: Équipe intervenant sur des câbles rompus à cause du poids de la glace accumulée (VPR 2008)**

Autre secteur sensible touché par le problème de la glace atmosphérique est celui des transports aériens. Des dépôts de glace se forment sur les parties frontales des

différents composants tels que les ailes, l'empennage ou les entrées d'air des avions tel que montré dans la Figure 1.3. Cette accumulation de glace peut provoquer des modifications conséquentes des profils aérodynamiques des voilures, augmentant ainsi l'effet de traînée et réduisant l'efficacité de la portance. L'obturation totale ou partielle des entrées d'air engendre une perte de puissance, le dérèglement ou coincement des organes de commande, ou encore, la mise hors service de certains instruments de navigation, etc.



**Figure 1.3: Glace accumulée sur l'aile d'un avion (Jesse 2010)**

Si les dangers de l'accumulation de la glace sont incommensurables, son délestage peut s'avérer être tout aussi dangereux. Ce mécanisme qui correspond à la réduction soudaine de la masse de glace accumulée est source de sollicitations dynamiques sur les structures qui peuvent aussi provoquer la rupture des pylônes et des isolateurs, des courts-circuits induits par le contact des câbles en vibration, etc. L'impact des blocs de glace détachés en plein vol peut aussi endommager les hélices ou les empennages des avions tel que montré dans la Figure 1.4. Dans ce contexte, la connaissance étendue des propriétés d'adhésion de la glace atmosphérique et de ses propriétés rhéologiques n'est pas



suffisante. Le développement de solutions pour la prévention de tels problèmes passe aussi par une meilleure compréhension du phénomène de délestage.



**Figure 1.4: Impact de blocs de glace détachés sur l'empennage (Jacob 2005)**

Le processus de délestage peut intervenir selon trois mécanismes qui sont : le délestage par fonte, le délestage par sublimation et le délestage par bris mécanique. Généralement, le délestage ne résulte pas d'un seul mécanisme, mais plutôt de l'association de deux ou de tous les mécanismes précédents. La fonte s'effectue lorsque la température ambiante est positive ( $T > 0^{\circ}\text{C}$ ). Le délestage par sublimation correspond à un passage direct de l'état solide à l'état de vapeur d'eau, il s'opère dans un environnement à température élevée et est caractérisé par une faible décroissance de la charge de glace. Enfin, le délestage par bris mécanique s'effectue à une température négative et se caractérise par une décroissance rapide de la charge de glace (Bernardin 1989).

La combinaison des phénomènes thermiques et mécaniques qui caractérisent le phénomène de délestage de la glace rend son étude quelque peu complexe. Il est alors

nécessaire de décomposer le problème du délestage en plusieurs sous-problèmes qui sont plus simples à résoudre. Le délestage par bris mécanique, qui fait l'objet de cette étude, intervient lorsque le matériau dépasse les limites de ses propriétés rhéologiques (Bernardin 1989). Afin d'aborder adéquatement l'étude d'un tel problème, il est non seulement important de connaître les conditions mécaniques spécifiques au cas de chargement traité, mais aussi, de disposer d'une loi constitutive représentative du comportement du matériau. Nonobstant le fait qu'il existe plusieurs modèles de lois constitutives permettant une bonne représentation du comportement de la glace d'eau douce (Sinha 1982; Choi 1989; Derradji-Aouat 1992), il n'existe, encore aujourd'hui, aucune loi représentative du comportement mécanique de la glace atmosphérique.

### **1.3 Objectif de la recherche**

Dans le cadre de cette maîtrise, l'objectif consiste à développer un outil numérique capable de simuler le comportement ductile de la glace atmosphérique, le terme ductile faisant référence à la déformation plastique à faible vitesse. Plus spécifiquement, à plus long terme, la continuité de ce projet permettrait d'envisager l'aboutissement à un outil prédictif dédié non seulement à une meilleure compréhension du phénomène de délestage, mais aussi, à la conception de nouveaux systèmes de déglacage des structures.

### **1.4 Méthodologie générale**

La réalisation des objectifs précités passe par une approche en 3 volets :

- 1) Le développement d'un outil numérique pour simuler le comportement de la glace d'eau douce : la glace est un matériau polycristallin possédant un comportement fort

complexe, ce dernier dépend à la fois de la vitesse de déformation, de la température, de la taille et de l'orientation des grains constituant l'agrégat. Afin de mieux assimiler son comportement et ses propriétés mécaniques, une revue de littérature couvrant la microstructure et la rhéologie de la glace sera effectuée. Une revue des principaux modèles de loi de comportement que l'on retrouve dans la littérature sera faite en exposant les capacités et les limitations de chaque modèle. Le modèle choisi sera par la suite implémenté dans un outil de simulation par éléments finis afin de simuler le comportement mécanique de la glace d'eau douce.

- 2) Des tests de compression uniaxiale, de flexion trois-points, de compression uniaxiale confinée, de relaxation / fluage seront réalisés sur des éprouvettes prismatiques découpées au microtome ou cylindrique taillées sur un mini-tour à usiner, les échantillons auront été préalablement obtenus par l'accumulation de glace atmosphérique dans une soufflerie réfrigérée en circuit fermé sous des conditions contrôlées de température et de vitesse du vent. Les essais seront menés à différents taux de déformations pour déterminer l'influence de ce paramètre sur l'évolution du comportement mécanique de la glace atmosphérique.
- 3) L'identification inverse des paramètres afin de pouvoir simuler le comportement de la glace atmosphérique. Par opposition au problème direct qui consiste en la détermination du champ de déplacements ou de contraintes en connaissant les propriétés du matériau, la méthode d'identification inverse consiste, elle, à déterminer les propriétés du matériau en s'appuyant sur des données expérimentales provenant d'un ou de plusieurs essais caractéristiques. Le principe est donc de « caler » ces paramètres de façon à ce que les calculs analytiques ou numériques par éléments finis



effectués donnent des résultats s'approchant au mieux des résultats expérimentaux. Pour ce faire, on considère l'optimisation (minimisation) d'une « fonction coût » qui exprime l'écart entre les valeurs mesurées et celles calculées des déplacements ou des forces. Une estimation de la performance du modèle se fera par la prédiction et la comparaison avec des résultats de simulations de différents tests.

## **1.5 Organisation des chapitres**

Ce mémoire est structuré en 6 chapitres, le chapitre 1 comprenant les sections précédentes a été dédié à la présentation du problème de givrage et du délestage, ainsi qu'aux objectifs et la méthodologie générale.

Le chapitre 2 est consacré à la revue de littérature dans laquelle nous ferons une brève introduction des propriétés mécaniques de la glace, ainsi qu'une présentation de quelques modèles phénoménologiques du comportement mécanique de la glace d'eau douce. Le chapitre 3 est quant à lui dédié à la revue de la modélisation mathématique du comportement mécanique de la glace. Dans le chapitre 4, nous décrivons la procédure expérimentale adoptée et les résultats obtenus. Le chapitre 5 comprend la stratégie de mise en œuvre informatique, ainsi que la validation du modèle au moyen de la simulation de plusieurs conditions de chargement. Finalement, le chapitre 6 est consacré à la conclusion générale ainsi qu'aux diverses recommandations formulées afin d'apporter les améliorations nécessaires à ce projet dans le cadre de travaux futurs.

## **Chapitre 2 : Revue de la littérature**

### **2.1 Introduction**

L'eau, sous forme liquide ou solide (glace et neige) est un élément omniprésent sur la surface terrestre, elle recouvre 71% de la surface totale de notre planète la Terre. L'eau contenue dans les lacs, les fleuves, les rivières et la vapeur d'eau présente dans l'atmosphère ne représente qu'une fraction mineure du volume total d'eau. Ainsi, le volume le plus important est formé de glace.

La formation et l'accumulation de glace causent divers désagréments et dégâts sur les structures, ceci se traduit le plus souvent par des pertes économiques, et dans certains cas, par des pertes en vies humaines. Face à ce problème, plusieurs chercheurs se sont penchés sur la question afin d'étudier d'une manière approfondie les mécanismes de formation, le comportement mécanique ainsi que les propriétés de ce matériau. Beaucoup de travaux dans la littérature ont eu pour objet l'étude de la glace d'eau douce et de la glace des mers et des océans. Ceci a permis de constituer une large base de connaissances tant au niveau des propriétés qu'au niveau du comportement mécanique de la glace. Dans ce chapitre, et afin de se familiariser avec le comportement mécanique de ce matériau, une revue de la structure, des propriétés mécaniques et de quelques modèles phénoménologiques de lois de comportement a été effectuée.

## 2.2 Structure cristalline de la glace

D'un point de vue macroscopique, la glace est un matériau polycristallin dont la structure est fortement influencée par le processus de croissance des grains et son historique thermo-mécanique (Michel 1978). Dans les conditions normales de pression, à savoir, la pression atmosphérique, l'eau se présente sous forme liquide pour des températures ambiantes. En dessous de la température normale ( $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ ), l'eau gèle et forme la glace. Cependant, en l'absence de cristal de glace, l'eau peut être maintenue en état liquide à des températures inférieures à la température de fusion ( $T_f$ ), cet état instable est appelé surfusion, néanmoins, toute perturbation mineure est suffisante pour déclencher subitement le processus de solidification. La glace présente plus de onze formes allotropiques montrées dans le diagramme de phases de la Figure 2.1. Chacune possédant une structure cristalline qui lui est propre.

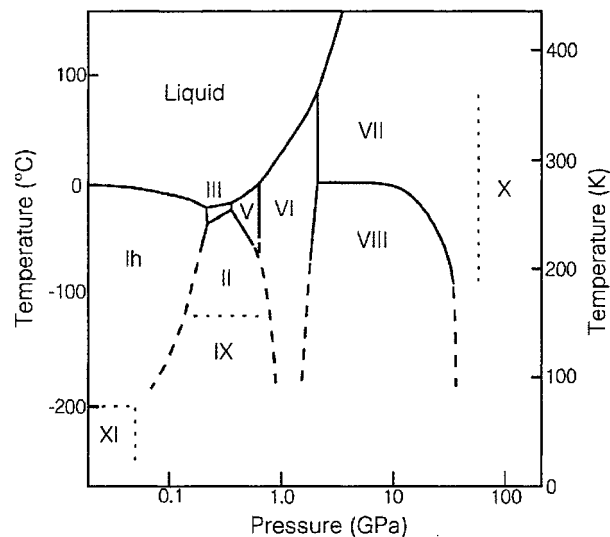
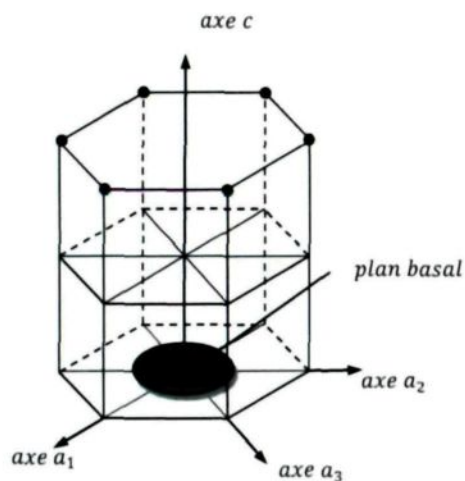
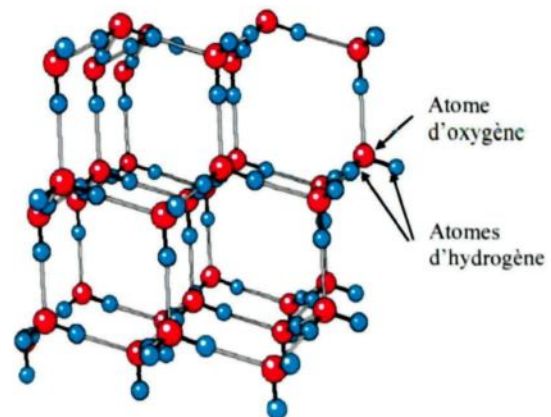


Figure 2.1: Diagramme de phase de l'eau (Lobban, Finney et al. 1997)

La majorité des formes de glaces apparaissent à des pressions très élevées ainsi qu'à des températures très basses. À la pression atmosphérique normale (et jusqu'à une pression d'environ 0,2 GPa), les molécules d'eau de la glace forment une structure cristalline suivant un réseau hexagonal dont la stabilité est assurée par des liaisons hydrogène ; cette variété allotropique est appelée « glace  $I_h$  ». Contrairement à la plupart des matériaux qui se rétractent en se solidifiant, l'eau présente la particularité d'augmenter de volume, la glace possède par conséquent une densité inférieure à celle de l'eau (917 kg/m<sup>3</sup> pour la glace  $I_h$  à 0 °C).



**Figure 2.2: Maille élémentaire hexagonale de la glace  $I_h$**



**Figure 2.3: Arrangement spatial des molécules d'eau  $H_2O$**

Les paramètres de la maille hexagonale sont tels que la base hexagonale a un côté  $a = 4,523 \text{ \AA}$  et une hauteur  $c = 7,367 \text{ \AA}$ . Le rapport entre les deux est égal à  $c/a = 1,628$  ce qui est proche de la valeur de la maille hexagonale compacte, à

savoir  $c/a = 1,633$ . Le monocristal de glace de type  $I_h$  est transversalement isotrope, l'axe de symétrie désigné est l'axe  $c$  (Figure 2.2). Chaque atome d'oxygène dans la molécule d'eau  $H_2O$  est lié à deux atomes d'hydrogène par une liaison covalente (Figure 2.3). Les molécules d'eau quant à elles sont reliées entre elles par des liaisons hydrogènes. Il est utile de rappeler qu'une liaison hydrogène est plus faible qu'une liaison covalente, il est donc plus facile de casser une liaison entre deux molécules d'eau qu'une liaison au sein même de la molécule. Chaque atome d'oxygène de la maille élémentaire de glace  $I_h$  possède quatre atomes d'oxygène voisins arrangés de telle manière à constituer un réseau de forme tétraédrique.

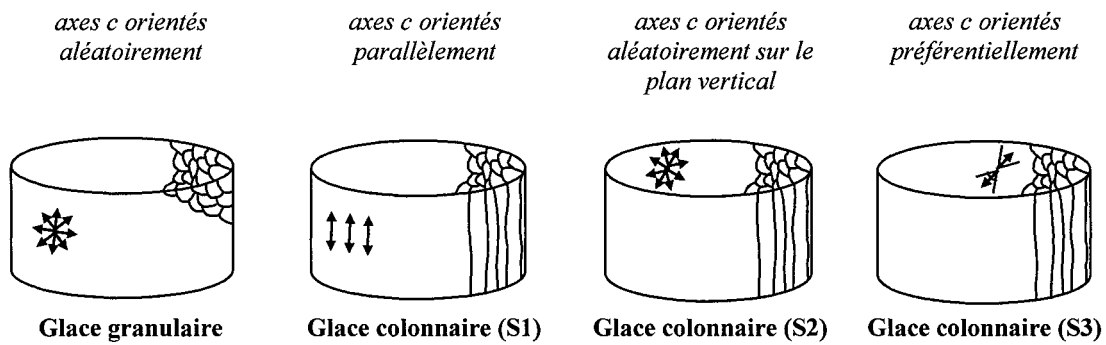
### 2.3 Classification des types de glace

Une classification rigoureuse des types de glace devrait tenir compte aussi bien de l'historique de la formation de glace (conditions météorologique et hydrodynamiques), que de la structure et de la texture des différents types de glace : la taille des grains, leur forme ainsi que l'orientation cristallographique préférentielle de l'axe  $c$  influencent significativement les propriétés mécaniques de la glace et devraient de ce fait être pris en considération dans cette classification (Michel 1978; Cole 2001). Ces données sont fondamentales pour déterminer les propriétés mécaniques et physiques de la glace. Une classification détaillée des différents types de glace des rivières et des lacs est rapportée dans (Michel and Ramseier 1971; Ramseier 1976). Parmi les variétés citées, on s'intéressera tout particulièrement à quatre types, à savoir : la glace granulaire, la glace secondaire S1, la glace secondaire S2 et la glace secondaire S3 qui sont présentés dans la Figure 2.4.

La glace granulaire est constituée de grains ayant une forme plus ou moins arrondie. Elle se caractérise essentiellement par la présence de grains ayant une taille uniforme ainsi que leurs orientations aléatoires. L'absence d'une orientation préférentielle de l'axe  $c$  des cristaux confère à la glace granulaire des propriétés mécaniques isotropes à l'échelle macroscopique. En revanche, dans la glace colonnaire, les grains croissent de façon parallèle à la direction du gradient de température. Au cours de la croissance, seuls les grains dont les plans de base sont orientés parallèlement au gradient thermique ont tendance à subsister.

Dans la glace colonnaire de type S1, les grains possèdent une forme irrégulière et la direction cristallographique préférée de l'axe  $c$  est verticale. Ce type de glace est rencontré dans les lacs, les réservoirs (barrages) ainsi que les rivières où la vitesse d'écoulement est relativement faible. La glace colonnaire de type S2 a des conditions de formation qui sont quasi-similaires à celles de la glace de type S1. Les grains adoptent une orientation aléatoire suivant un plan horizontal (perpendiculaire aux colonnes). Les glaces de types S1 et S2 présentent un comportement transversalement isotrope (orthotrope de révolution).

Le dernier type de glace colonnaire à décrire est la glace de type S3, celle-ci se développe en présence de forts courants. Les grains adoptent une ou plusieurs directions préférentielles de l'axe  $c$  suivant le plan horizontal. Ces directions sont pratiquement parallèles les unes aux autres. La glace de type S3 présente un comportement orthotrope (Michel and Ramseier 1971).



**Figure 2.4: Morphologie et orientation cristallographique de la glace granulaire et colonnaire**

La glace dans la nature se trouve dans un état de mélange d'eau, de bulles (inclusions) d'air et d'impuretés (organiques et non-organiques). Quand l'eau gèle, les éléments étrangers se retrouvent emprisonnés dans la glace. Même si leur présence n'est pas en quantités considérables, elle peut néanmoins influencer les propriétés mécaniques de la glace. La présence de ces impuretés est visible par la couleur de la glace, son opacité, ainsi que sa densité (Michel 1978).

## **2.4 Physique de la glace atmosphérique**

La glace atmosphérique est le terme scientifique utilisé pour désigner un certain nombre de dépôts solides sur les structures. Elle se forme au cours d'averses de pluies verglaçantes ou lors de passages nuageux givrants. Les gouttelettes d'eau surfondues gèlent au contact d'une surface solide. La classification de la glace atmosphérique repose essentiellement sur des critères de transparence et de densité (Kuroiwa 1965). Trois types de glace atmosphérique peuvent alors se former, leur formation est fortement influencée par les conditions météorologiques qui règnent. Deux paramètres importants, à savoir, la température et la vitesse du vent déterminent l'évènement de glace atmosphérique (verglas, givre dur ou mou) qui se produit comme le montre la Figure 2.5.

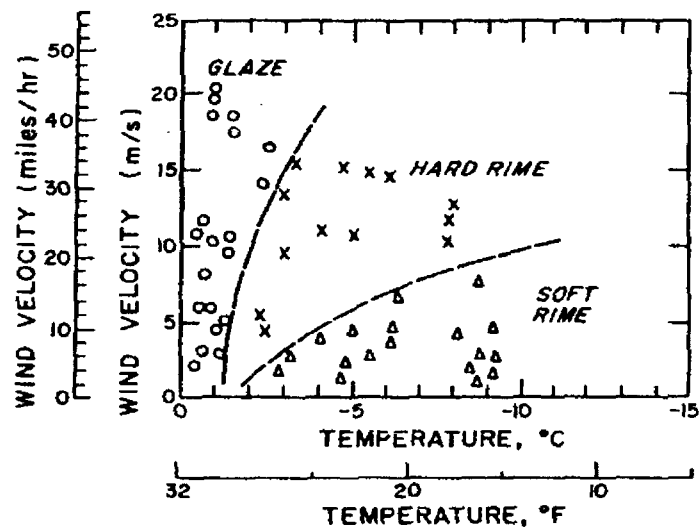


Figure 2.5: Influence des conditions météorologiques sur les types de glace atmosphérique (Kuroiwa 1965)

#### 2.4.1 Le verglas

Le verglas est un dépôt de glace compacte et lisse, transparent ou légèrement opaque, provenant d'une pluie ou d'une bruine verglaçante. Les gouttelettes d'eau surfondues ont un diamètre variant de 0,2 mm à 5 mm. En état de surfusion, l'eau reste à l'état liquide malgré la température négative, elle gèle quasi-instantanément au contact d'une surface solide dont la température est généralement inférieure ou légèrement supérieure à 0 °C. L'eau peut se présenter sous forme surfondue dans un intervalle de température allant de 0 °C à -39 °C. Le verglas contient très peu de bulles d'air emprisonnées et possède une densité de l'ordre de 0,8 à 0,9 g/cm<sup>3</sup>. Ce type de glace se retrouve dans des régions humides où les températures sont douces.

#### 2.4.2 Le givre lourd (dur)

Le givre lourd présente une transparence variable qui peut être de relativement claire jusqu'à opaque, et ce, selon le volume d'air emprisonné dans la structure. Le dépôt



possède une surface lisse, craquelée ou encore légèrement granuleuse qui fait qu'il est moins difficile à supprimer que le verglas. Le givre lourd se forme à des températures entre  $-2^{\circ}\text{C}$  et  $-8^{\circ}\text{C}$ . Sa masse volumique, qui varie principalement en fonction de la température de l'air et de la vitesse du vent, se situe dans l'intervalle entre 0,6 et 0,9 g/cm<sup>3</sup>.

#### 2.4.3 Le givre léger (mou)

Le givre mou possède une apparence blanchâtre et opaque, sa masse volumique n'excède pas 0,6 g/cm<sup>3</sup>. Il se forme lorsqu'un brouillard givrant ou une brume entre en contact avec une surface froide. Le givre mou est d'apparence semblable à celle du givre dur, et se forme à des vitesses de vent relativement réduites.

Le Tableau 2.1 résume les caractéristiques et les conditions de développement de chaque type de glace atmosphérique :

**Tableau 2.1: Caractéristiques et conditions de formation des différents types de glace atmosphérique**

Type de glace atmosphérique	Densité (g/cm <sup>3</sup> )	Température (°C)	Vitesse du vent (m/s)	Aspect	Adhérence
<b>Givre léger</b>	0,4 à 0,6	-20 à -1	$\leq 10$	Blanche	Moyenne
<b>Givre dur</b>	0,7- à 0,9	-10 à -1	$10 \leq$	Opaque à transparente	Forte
<b>Verglas</b>	0,9	-4 à 0	0 à 10	transparente	Forte

## **2.5 Propriétés mécaniques et rhéologie de la glace**

Dans la nature, la température de la glace n'atteint des températures extrêmes en dessous de  $-40\text{ }^{\circ}\text{C}$  que très rarement pour une période prolongée. De ce fait, la glace se trouve dans des conditions où sa température est supérieure à  $0,85T_f$ . Les matériaux polycristallins présentent, à des températures supérieures à  $0,4T_f$ , un comportement de type fluage associé à une fragilisation au niveau des joints de grains qui affectent leurs propriétés et leur comportement mécaniques, les rendant ainsi, dépendants de la température et de l'historique de chargement (Sinha, Timco et al. 1987; Derradji-Aouat 1992). La glace appartenant à cette classe de matériaux, elle ne déroge pas à cette règle.

### **2.5.1 Constantes élastiques de la glace**

La connaissance des constantes élastiques : module de Young, module de cisaillement et le coefficient de Poisson revêt une importance capitale dans l'étude du comportement mécanique de la glace polycristalline. Généralement, les valeurs de ces paramètres sont déterminées par des essais statiques de compression, tension et aussi de flexion. Selon la contrainte appliquée, la température ainsi que le temps nécessaire à l'application de la charge lors du test, les résultats des essais peuvent fortement varier, et ce, en raison de la contribution des effets viscoélastique et viscoplastique possible (Sinha 1978; Derradji-Aouat 1992).

L'utilisation d'un test non-destructif de diffusion d'onde ultrasonique représente une alternative raisonnable pour la mesure des propriétés élastiques dans un monocristal de glace à partir de la vitesse du son et de la densité de ce milieu. Cette méthode est décrite d'une manière plus exhaustive dans (Dantl 1969). Les constantes élastiques

correspondants à l'agrégat polycristallin sont obtenues par la suite en utilisant diverses techniques de moyennage telles que : la moyenne de Voigt (Voigt 1910), la moyenne de Reuss (Reuss 1929), et la moyenne de Hill (Hill 1952). Les essais effectués par Dantl ont montré que les constantes élastiques sont indépendantes de la fréquence de l'onde, mais dépendantes de la température. À ce jour, elles sont considérées comme les mesures les plus précises disponibles dans la littérature (Sinha 1989; Derradji-Aouat 1992).

À l'échelle macroscopique, la glace granulaire possède des propriétés isotropes. Les axes  $c$  des cristaux sont orientés d'une manière aléatoire dans toutes les directions possibles. Les équations pour la glace granulaire ont été formulées par Sinha (Sinha 1989) à partir des mesures de Dantl sur un monocristal de glace en utilisant la moyenne de Reuss, cette méthode est basée sur l'hypothèse d'un état de contrainte uniforme dans tous les cristaux. Les relations ont été établies par Sinha telles que :

$$\begin{aligned} E &= 8,930 + 1,20 \cdot 10^{-2}(T_f - T) \\ G &= 3,410 + 4,50 \cdot 10^{-3}(T_f - T) \\ \nu &= 0,308 + 7,00 \cdot 10^{-5}(T_f - T) \end{aligned} \tag{2.1}$$

où  $E$ ,  $G$  et  $\nu$  représentent respectivement le module de Young, le module de cisaillement et le coefficient de Poisson.

Derradji-Aouat (Derradji-Aouat 1992) a utilisé les moyennes de Voigt et de Hill afin de comparer les deux méthodes à celle de Reuss. La moyenne de Voigt est basée sur l'hypothèse d'un état de déformation uniforme dans tous les cristaux de glace, les relations pour les constantes élastiques obtenues sont telles que :

$$\begin{aligned}
E &= 6,470 + 7,00 \cdot 10^{-3}(T_f - T) \\
G &= 2,400 + 2,44 \cdot 10^{-3}(T_f - T) \\
\nu &= 0,345 + 8,10 \cdot 10^{-5}(T_f - T)
\end{aligned}
\tag{2.2}$$

La moyenne de Hill consiste au calcul d'une moyenne arithmétique des quantités calculées par les deux méthodes précédentes dans les relations (2.1) et (2.2) telles que :

$$\begin{aligned}
E &= 7,710 + 8,80 \cdot 10^{-3}(T_f - T) \\
G &= 2,910 + 3,20 \cdot 10^{-3}(T_f - T) \\
\nu &= 0,327 + 7,00 \cdot 10^{-5}(T_f - T)
\end{aligned}
\tag{2.3}$$

La Figure 2.6 présente les évolutions des constantes élastiques : module de Young, module de cisaillement et le coefficient de Poisson calculées par les bornes de Reuss et de Voigt ainsi que la moyenne arithmétique de Hill, sur un intervalle allant de 213 K à 273 K, soit de  $-60^{\circ}\text{C}$  à  $0^{\circ}\text{C}$ .

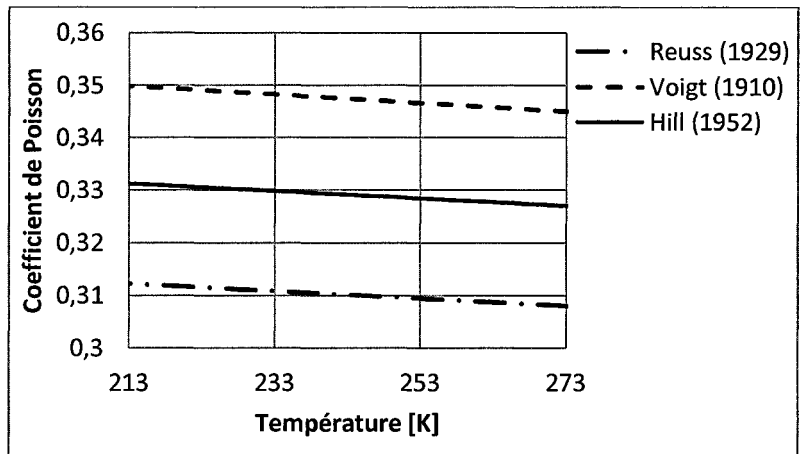
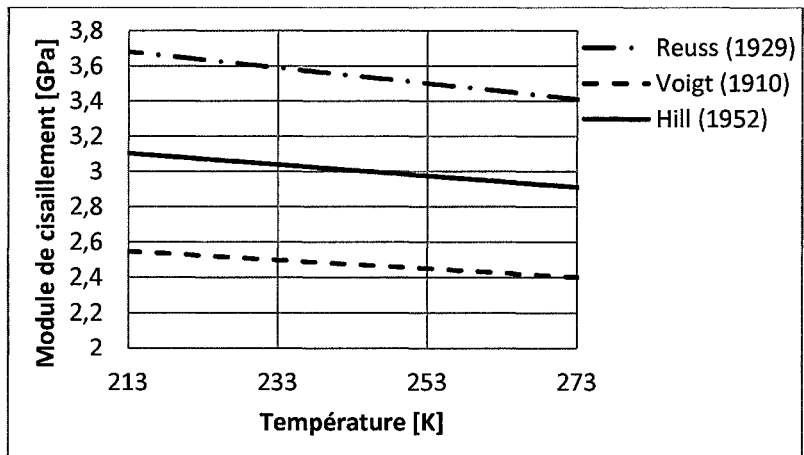
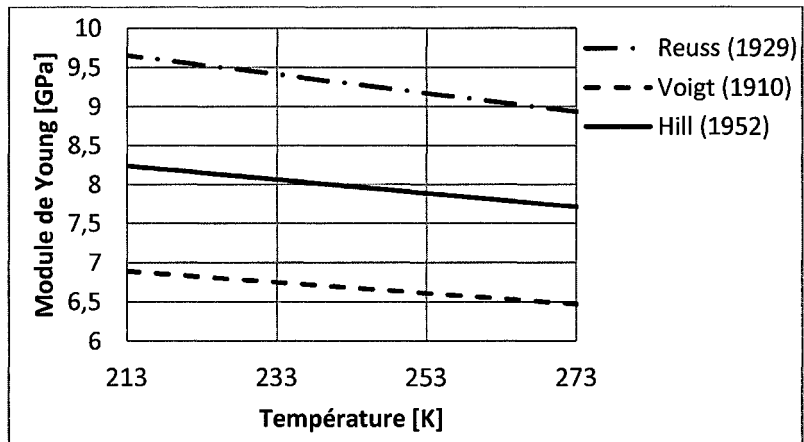


Figure 2.6: Constantes élastiques pour la glace granulaire (Comparaison entre les différentes moyennes)

Les mesures effectuées par Sinha (Sinha 1978) sur la glace colonnaire de type S2 à des températures comprises entre  $-40\text{ }^{\circ}\text{C}$  et  $-45\text{ }^{\circ}\text{C}$  ont indiqué des valeurs pour le module de Young se situant entre 9,1 et 9,8 GPa, avec une moyenne de 9,3 GPa. Ces valeurs sont du même ordre de grandeur que les valeurs indiquées par Yamaji et Kuroiwa (Yamaji and Kuroiwa 1956) déterminées par des émissions soniques à haute fréquence dans l'intervalle de températures allant de  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  à  $-100\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

Des valeurs du coefficient de Poisson entre 0,31 et 0,37 ont été rapportées pour la glace d'eau douce par Gold (Gold 1958). Des valeurs provenant d'essais dynamiques sur de la glace des mers se situant entre 0,36 et 0,39 ont été rapportées aussi par Lin'Kov (Lin'Kov 1958). Sinha (Sinha 1987) indique que les valeurs du coefficients de Poisson mesurées présentent très peu de dispersion quel que soit le type de glace.

Les valeurs du module de Young obtenues par la moyenne de Reuss sont celles qui correspondent le mieux aux mesures expérimentales rapportées dans la littérature. En revanche, les trois méthodes donnent des valeurs du coefficient de Poisson acceptables et comparables aux expériences.

### **2.5.2 Fluage de la glace**

Le fluage est la déformation lente d'un matériau qui se produit sous l'effet d'une contrainte constante à température constante. Dans les matériaux polycristallins, le fluage n'intervient généralement qu'à haute température. Les résultats d'un essai de fluage sont généralement présentés sous la forme d'une courbe de déformation en fonction du temps. La pente de la courbe représente la vitesse de fluage et son point final représente l'instant de la rupture.

La glace comme la plupart des matériaux polycristallins présente un comportement de type fluage à des températures voisines de sa température de fusion (Glen 1955; Duval 1974; Michel 1978; Sinha 1983; Derradji-Aouat 1992). La Figure 2.7 décrit les trois stades du fluage. La glace soumise à une contrainte donnée, présente d'abord un fluage transitoire qui diminue avec le temps, puis un fluage secondaire ou permanent à vitesse de déformation constante, enfin, un fluage tertiaire à vitesse de déformation élevée contrôlé en partie par le processus de recristallisation se traduisant par un accroissement de la taille et une réorientation des grains pour accommoder la déformation (Duval 1974).

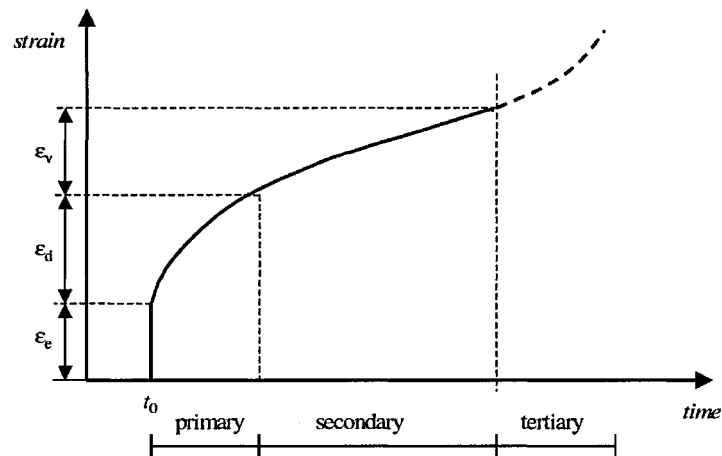


Figure 2.7: Courbe typique de fluage sous chargement constant (Heinonen 2004)

### 2.5.3 Comportements ductile et fragile de la glace

La ductilité est par définition la capacité d'un matériau à se déformer plastiquement. La ductilité d'un matériau dépend de plusieurs paramètres, notamment : la température, la structure interne et la vitesse de déformation. En déformations ductiles, la

contrainte maximale que peut supporter un matériau est appelée résistance ultime. Au-delà de cette contrainte, le matériau continue à se déformer à des contraintes inférieures à la résistance limite jusqu'à la rupture finale (Michel 1978). En revanche, en déformations fragiles, on parle de résistance à la rupture, c'est la contrainte à laquelle les fissures se forment et se propagent d'une manière rapide conduisant à la rupture brutale du matériau.

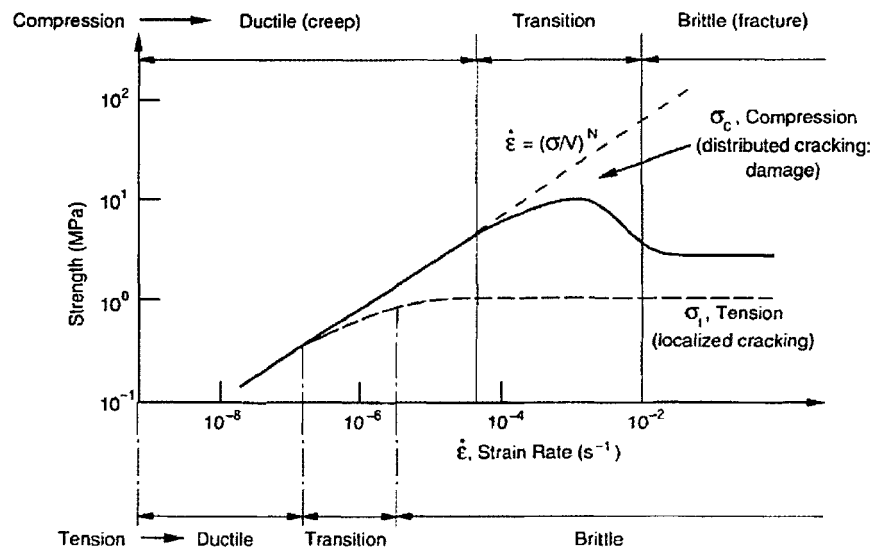


Figure 2.8: Modes de déformation pour la glace d'eau douce ( $T = -10^{\circ}C$ ,  $d = 5mm$ ) (Wu and Niu 1995)

Le comportement en déformation, le mécanisme de rupture, et la résistance de la glace sont fortement influencés par la température et la vitesse de déformation (Michel 1978; Sinha 1979(b); Sinha 1981; Sinha 1982). La Figure 2.8 montre que le domaine des vitesses de déformation peut être divisé en trois parties : un domaine où le comportement est ductile, une zone de transition et un domaine où le comportement est fragile. Dans le domaine du comportement ductile, la déformation de la glace obéit à la loi de Glen qui assume que le matériau est isotrope et incompressible (Glen 1955; Sunder and Wu 1990) :



$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_0 \left( \frac{\sigma}{V} \right)^n \quad (2.4)$$

avec :

$$V = V_0 \exp(Q/RT) \quad \text{pour } 233 \text{ K} \leq T \leq 263 \text{ K} \quad (2.5)$$

La relation (2.4) relie la vitesse d'écoulement plastique  $\dot{\epsilon}$  à la contrainte en compression  $\sigma$  pour les faibles vitesses de déformations qui caractérisent le comportement ductile de la glace, où  $\dot{\epsilon}_0$  est le taux de déformation de référence (qui peut être considéré égal à l'unité sans perte de généralité (Sunder and Wu 1989)),  $n$  est l'exposant de la loi en puissance et qui est égal approximativement à 3 (Glen 1955). Le paramètre  $V$ , qui est fonction de la température avec une unité de contrainte, suit une loi d'Arrhenius exprimée dans l'équation (2.5) pour des températures comprises entre  $-10^\circ\text{C}$  et  $-40^\circ\text{C}$ , où  $V_0$  est une constante qui dépend de la température,  $Q$  est l'énergie d'activation, et  $R$  est la constante universelle des gaz.

Le comportement fragile de la glace polycristalline est caractérisé par une déformation élastique suivie d'une rupture brutale. La résistance à la rupture est quasi-indépendante du taux de déformation et est très peu dépendante de la température et de la structure de la glace (Michel 1978; Wu and Niu 1995).

## 2.6 Modélisation du comportement mécanique de la glace

L'intérêt développé pour l'étude de la glace des océans au début du siècle dernier, a mené au développement de plusieurs modèles pouvant décrire ou prédire le comportement mécanique de la glace soumise à des sollicitations de nature uniaxiales

puis multiaxiales (Derradji-Aouat 1992). Les modèles peuvent être classés essentiellement en deux catégories : les modèles empiriques et les modèles analytiques.

Le principal avantage des modèles empiriques par rapport aux modèles analytiques réside dans le fait qu'ils sont moins compliqués à obtenir. Cependant, leur domaine d'application reste restreint et doit correspondre aux hypothèses retenues lors du développement du modèle. Les modèles analytiques (modèles continus) quant à eux, demandent une compréhension des mécanismes gouvernant la déformation et font appel à des concepts mathématiques plus complexes, ce qui les rend plus difficiles à obtenir. Ils offrent cependant un intervalle d'application plus étendu que celui des modèles empiriques, mais qui reste toutefois limité par les hypothèses de base retenues lors du développement.

L'essor qu'a connu le domaine informatique et le développement des méthodes numériques telles que la méthode des éléments finis ou la méthode des éléments finis de frontière permet de nos jours de mieux exploiter ces modèles. Grâce à cela, il est possible de prédire le comportement des matériaux sous des sollicitations aussi complexes que celles que l'on rencontre dans la nature et que l'on ne peut reproduire en laboratoire faute de moyens ou de temps. Dans les sections qui suivent, nous nous limiterons à la présentation des modèles jugés les plus représentatifs et susceptibles d'alimenter le présent travail.

### **2.6.1 Modèle de Sinha**

Le modèle phénoménologique de Sinha (Sinha 1979(a); Sinha 1979(b); Sinha 1981; Sinha 1982; Sinha 1983; Sinha 1984) décrit le comportement mécanique de la

glace soumise à une sollicitation de compression uniaxiale. Les expériences menées par Sinha sur la glace d'eau douce ont montré que la glace subit des déformations élastiques (réversibles) et plastiques (permanentes). La déformation totale est considérée comme une somme de trois composantes : une déformation élastique instantanée, une déformation avec retard (viscoélasticité) causée par le glissement aux joints de grains, et une déformation permanente provenant du processus de déformation intragranulaire provoqué par le mécanisme de glissement et de montée des dislocations dans la glace. L'endommagement, quant à lui, intervient lorsque le glissement aux joints de grains atteint une certaine valeur critique. Ce modèle est capable de représenter l'effet de la taille des grains, de la température, et de l'endommagement (initiation et propagation des fissures) sur le comportement en fluage de la glace. Cependant, le modèle de Sinha présente certaines limitations en ce qui concerne la représentation du fluage tertiaire et des conditions de chargement multiaxiales.

### **2.6.2 Modèle d'Ashby et Duval**

Sur la base des données d'essais de (Jacka 1984) pour la glace polycristalline isotrope, Ashby et Duval (Ashby and Duval 1985) ont suggéré que des relations uniques existaient entre certaines variables adimensionnelles. Ces relations sont telles que sous un état de contrainte constante, les relations adimensionnelles entre la déformation, la vitesse de déformation et le temps sont totalement indépendantes de la température et de la contrainte appliquée. En revanche, dans le cas de chargement à vitesse de déformation constante, le modèle prédit qu'une relation unique existe entre la contrainte adimensionnelle et le temps (ou la déformation). Le modèle devient ainsi indépendant de la contrainte et de la température et permet d'obtenir un ensemble unique de courbes

maitresses pour le fluage. Le modèle prédit convenablement le comportement en fluage primaire et secondaire tout en tenant compte des variations de la contrainte ou de la température pouvant survenir lors des tests. Cependant, il présente les mêmes limitations que le modèle de Sinha concernant la représentation du fluage tertiaire et les conditions de chargement multiaxiales.

### **2.6.3 Modèle de Derradji-Aouat**

Le modèle de Derradji-Aouat construit sur la base du modèle de Sinha est un modèle mathématique développé pour décrire le comportement ductile de la glace d'eau douce. Le modèle est décrit comme étant capable de prédire le comportement de la glace granulaire isotrope et colonnaire anisotrope sous différentes conditions de chargement en compression : uniaxiales, multiaxiales et cycliques. Les comparaisons faites par l'auteur sur la base des résultats expérimentaux obtenus par Sinha ainsi que d'autres résultats tirés de la littérature montrent que le modèle reproduit convenablement les résultats expérimentaux. Le modèle est cependant jugé par son auteur comme étant imprécis et incapable de reproduire des essais de traction ou des essais triaxiaux à grande pression de confinement. En effet, les observations expérimentales de (Jones 1982) indiquent que la résistance en compression de la glace augmente à de faibles pressions de confinement, et qu'elle décroît lorsque la pression de confinement est grande. Or, le modèle prédit une augmentation de cette résistance avec l'augmentation de la pression de confinement, qu'elle soit faible ou élevée.

#### **2.6.4 Modèle de Santaoja**

Santaoja (Santaoja 1990) a développé un modèle tridimensionnel pour décrire le comportement ductile isotrope de la glace sur un large intervalle de taux de déformation et de température. Le modèle proposé dans ces travaux décrit les mécanismes de déformation ductile et l'initiation et propagation des microfissures associés à la déformation élastique en mode fragile. Le modèle comporte trois composantes : une composante élastique instantanée reposant sur la loi de Hooke généralisée au cas 3D, une composante viscoélastique et une composante de déformation permanente reposant sur la généralisation du modèle uniaxial de Sinha modifié par Ashby et Duval. L'approche développée pour décrire l'endommagement repose sur la mécanique de l'endommagement continu et la mécanique de la rupture pour faire intervenir un tenseur d'endommagement du quatrième ordre dans la loi de Hooke. Ce modèle bien qu'il soit intéressant, présente l'inconvénient de ne pas pouvoir représenter les chargements cycliques que peut subir la glace.

#### **2.6.5 Modèle de Choi**

Choi (Choi 1989) a développé un modèle tridimensionnel pour décrire le comportement ductile de la glace d'eau douce sur un large intervalle de vitesses de déformation. Le modèle comprend trois composantes : une déformation élastique instantanée, une déformation viscoélastique et une déformation permanente qui est une généralisation 3D de la loi de Norton-Bailey pour le fluage. L'endommagement intervient dans la formulation élastique sous la forme d'un tenseur du quatrième ordre faisant appel à deux mécanismes : un endommagement qui est dû à la déformation totale et à la

propagation de fissures transgranulaires, et un endommagement qui est provoqué par la déformation viscoélastique et le glissement des joints de grains. Les lois d'évolution de l'endommagement développées pour chaque mécanisme tiennent compte de l'effet de la vitesse de déformation, de l'état de contrainte, de la déformation et de l'endommagement accumulé. Le modèle est jugé capable de prédire les essais à vitesse de déformation constante, et à contrainte constante sous des chargements de compressions uniaxiales et multiaxiales ainsi que les essais de chargement cycliques. Aussi, le modèle est capable de reproduire la différence de comportement en traction par rapport à la compression ainsi que l'anisotropie de l'endommagement. Les caractéristiques et les applications intéressantes du modèle nous motivent à l'étudier plus en détail dans le chapitre 3.

#### **2.6.6 Modèle de Pulkkinen**

Pulkkinen (Pulkkinen 1988) a proposé un modèle tridimensionnel pour décrire les comportements ductile et fragile de la glace. Le modèle comprend deux parties : un modèle de fluage sensible au taux d'endommagement pour décrire le comportement continu de la glace à l'échelle macro, et une autre partie sensible au taux de fissuration pour décrire le comportement à la rupture. Le modèle de Pulkkinen prend en compte l'effet de la vitesse de déformation, l'anisotropie et l'endommagement sur le comportement mécanique de la glace soumise à des sollicitations monotones. Le modèle est développé sur une base purement mathématique, les données expérimentales sur les propriétés mécaniques de la glace à l'époque n'ayant pas été disponibles en quantités suffisantes, le modèle n'a pu être vérifié d'une manière étendue (Derradji-Aouat 1992).

### **2.6.7 Modèle de Szyszkowski et Glockner**

Un modèle empirique non linéaire comprenant un ressort et un amortisseur requérant six paramètres a été proposé par (Szyszkowski, Dost et al. 1985) pour décrire le fluage primaire et secondaire. Un modèle plus évolué nécessitant huit paramètres capable de décrire le fluage tertiaire a été proposé par (Szyszkowski and Glockner 1985). Bien que ce modèle semble être très prometteur, il est très lourd à mettre en œuvre et difficile à utiliser. Des techniques numériques combinées à des corrections par essais et erreurs sont nécessaires pour résoudre le plus simple des cas de sollicitation. Alors que la littérature regorge de données expérimentales, les capacités prédictives du modèle n'ont jamais été établies (Sinha, Timco et al. 1987).

## **2.7 Discussion**

Bien que d'énormes efforts aient été fournis dans l'espoir d'aboutir à un modèle complet pouvant prédire avec un maximum de précision le comportement mécanique de la glace ; tous les modèles phénoménologiques que l'on vient de passer en revue présentent diverses limitations : certains de ces modèles ne sont valides que pour le chargement uniaxial, d'autres présentent des difficultés de mise en œuvre informatique, ou encore n'ont pas été validés expérimentalement, etc. À notre avis, deux modèles méritent plus d'attention, à savoir, le modèle unidimensionnel de Sinha et le modèle tridimensionnel de Choi. Le modèle de Sinha par son caractère unidimensionnel représente une bonne introduction pour toute personne désirant se familiariser avec le comportement mécanique de la glace. Le modèle de Choi quant à lui, offre par sa tridimensionnalité et la versatilité de ses applications (compression avec ou sans

confinement, traction, chargement cyclique, etc.) une image plus réelle des situations de chargement que peut subir la glace dans la nature. De ce fait, nous avons décidé d'étudier plus en détail ces deux modèles dans le prochain chapitre.



## **Chapitre 3 : Modélisation mathématique du comportement mécanique de la glace**

### **3.1 Introduction**

Les lois de comportement des milieux continus relient l'aspect cinématique (déplacements) à l'aspect cinétique ou dynamique (actions des forces et des contraintes). Pour les matériaux qui constituent notre domaine d'intérêt, ces lois ont pour but de relier le champ des déformations à celui des contraintes.

Les principaux comportements que l'on puisse rencontrer dans les matériaux sont le comportement élastique, plastique, visqueux, ou une combinaison des précédents : élastoplastique, viscoélastique, etc., sans compter les lois qui tiennent compte de l'effet thermique et de l'environnement en appliquant les principes de la thermodynamique. Les lois de comportement ont pour but d'établir la réponse du matériau en fonction des conditions de chargement mécanique (sollicitations de type mécaniques) et environnemental (sollicitations de types thermiques ou hygrothermiques) auxquelles il est soumis.

### **3.2 Rappels de la mécanique des milieux continus**

La mécanique des milieux continus est l'étude des mouvements et des déformations des corps matériels continus sous l'influence des sollicitations extérieures. L'inventaire des applications de la mécanique des milieux continus est très vaste. La notion de

continuité dont il est fait mention ici, fait référence à l'évolution des positions géométriques des particules matérielles au cours du temps : des particules voisines à un instant donné, demeurent voisines au cours de l'évolution du temps et leurs propriétés physiques évoluent aussi de manière comparable.

### **3.2.1 Définitions**

Avant d'aller plus loin dans les formulations mathématiques des lois de comportement, il est jugé nécessaire de se familiariser avec quelques définitions.

#### **Isotropie et anisotropie matérielle:**

Un matériau est dit isotrope s'il possède les mêmes propriétés mécaniques dans toutes les directions (aucune direction privilégiée) : les métaux sont considérés généralement comme tels avant de subir une mise en forme. Les matériaux dont les propriétés dépendent de la direction de l'observation sont dits anisotropes, c'est le cas du bois par exemple (ou autres matériaux fibreux) qui est globalement anisotrope mais localement orthotrope. On distingue certains cas particuliers où l'anisotropie n'est pas totale, on parle alors de matériau orthotrope lorsque les propriétés sont les mêmes dans deux plans perpendiculaires, et d'un matériau transversalement isotrope lorsqu'il possède une direction privilégiée.

#### **Contraintes et déformations**

On définit la contrainte comme étant une force surfacique qui agit sur un corps matériel, elle est définie localement en chaque point du matériau par un tenseur du second ordre appelé : tenseur des contraintes  $\sigma_{ij}$ , tel que :

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

où le 1<sup>ier</sup> indice fait référence à la normale du plan sur lequel agit la contrainte et le second réfère à la direction de cette dernière.

De même, on définit la déformation comme étant la réponse d'un matériau à une sollicitation externe. Ceci se traduit par un allongement, un accourcissement ou encore une distorsion. Elle s'exprime aussi sous forme d'un tenseur du second ordre  $\varepsilon_{ij}$ , tel que :

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

### 3.2.2 Invariants scalaires des tenseurs de contrainte et de déformation

Les lois de comportement des milieux continus sont souvent exprimées d'une manière simple et lisible en fonction de quantités tensorielles obtenues par décomposition des tenseurs de contraintes et de déformations en parties sphérique et déviatorique. Cette décomposition est unique. On définit la pression hydrostatique  $p$ , le tenseur déviateur des contraintes  $S_{ij}$ , la déformation volumique  $\varepsilon_{vol}$  et le tenseur de déformation déviatorique  $e_{ij}$  tels que :

$$p = \frac{1}{3} \sigma_{kk} = \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \quad (3.3)$$

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - p \delta_{ij} \quad (3.4)$$

$$\varepsilon_{vol} = \varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \quad (3.5)$$

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (3.6)$$

$\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker, tel que :  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

On définit aussi les quantités appelées invariants scalaires. Comme leur nom l'indique, ces valeurs sont indépendantes du repère (système d'axes) dans lequel le tenseur des contraintes est exprimé :

$$\begin{aligned} I_\sigma &= Tr(\sigma) = \sigma_{kk} = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \\ II_\sigma &= \frac{1}{2} \left( (Tr(\sigma))^2 - Tr(\sigma^2) \right) \\ III_\sigma &= det(\sigma) \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$q = \sqrt{\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij}} \quad (3.8)$$

où  $I_\sigma$ ,  $II_\sigma$  et  $III_\sigma$  correspondent respectivement aux premier, deuxième et troisième invariants du tenseur de contraintes,  $q$  est la contrainte équivalente de von Mises.

### 3.2.3 Notation de Voigt

Dans le cas où les tenseurs des déformations et des contraintes sont symétriques, il est plus judicieux de les écrire sous une forme vectorielle appelée notation de Voigt, et

ce, afin de faciliter l'implémentation informatique. Les tenseurs des contraintes et des déformations comprennent neuf composantes, dont six seulement sont indépendantes.

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{23} \end{Bmatrix} \text{ et } \sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

Les coefficients (2) qui apparaissent dans la représentation vectorielle de la déformation sont la conséquence directe de la transformation de la notation tensorielle à la notation de Voigt.

### 3.3 Présentation du modèle unidimensionnel de Sinha

Avant d'aborder la formulation mathématique du modèle tridimensionnel retenu, on juge intéressant de commencer par une description détaillée du modèle unidimensionnel de Sinha. Le modèle de Sinha décrit le comportement élastoviscoplastique de la glace sous des sollicitations uniaxiales. En plus de son caractère unidimensionnel qui lui confère une certaine simplicité, c'est un modèle qui recueille un consensus général au sein de la communauté scientifique. La déformation totale que subit la glace est décomposée en la somme de trois composantes : une composante élastique instantanée, une composante viscoélastique (déformation élastique avec retard) et une composante de déformation permanente telle que :

$$\varepsilon^t = \varepsilon^e + \varepsilon^{ve} + \varepsilon^{vp} \quad (3.10)$$

où :  $\varepsilon^t$ ,  $\varepsilon^e$ ,  $\varepsilon^{ve}$  et  $\varepsilon^{vp}$  désignent respectivement la déformation totale, la déformation élastique instantanée, la déformation viscoélastique et la déformation viscoplastique.

### 3.3.1 Élasticité

La composante élastique obéit à la loi de Hooke, la déformation est proportionnelle à la contrainte appliquée :

$$\varepsilon^e = \sigma / E \quad (3.11)$$

où  $E$  et  $\sigma$ , représentent respectivement le module de Young et la contrainte appliquée. Le module de Young est fonction de la température comme démontré par (Dantl 1969).

### 3.3.2 Viscoélasticité

La composante viscoélastique exprime la déformation causée par le glissement des joints de grains. Sinha a proposé la relation suivante (Sinha 1979(b)):

$$\varepsilon^{ve} = \frac{C_1 d_1}{d} \left[ \frac{\sigma}{E} \right]^s \left( 1 - \exp(-(a_T t)^b) \right) \quad (3.12)$$

où  $d$  est le diamètre moyen des grains,  $a_T$  l'inverse du temps de relaxation, et  $t$ , le temps de chargement.

### 3.3.3 Viscoplasticité

La déformation viscoplastique est due aux déformations intragranulaires, et tout particulièrement au mouvement des dislocations (Sinha 1978). Elle est exprimée par :

$$\varepsilon^{vp} = \dot{\varepsilon}_{v0} t \left[ \frac{\sigma}{\sigma_0} \right]^n \quad (3.13)$$

où  $\dot{\varepsilon}_{v0}$  représente le taux de déformation visqueuse correspondant à la contrainte de déformation de référence  $\sigma_0$  et  $n$ , une constante matérielle à identifier.

La température joue un effet considérable en accentuant les effets du fluage dans la glace polycristalline. Afin de prendre en compte cet effet, les deux paramètres  $a_T$  et  $\dot{\varepsilon}_{v0}$  qui apparaissent dans les formulations des déformations viscoélastiques et viscoplastiques sont exprimés en fonction de la température tels que :

$$\begin{aligned} a_T(T_2) &= a_T(T_1) S_{1,2} \\ \dot{\varepsilon}_{v0}(T_2) &= \dot{\varepsilon}_{v0}(T_1) S_{1,2} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Les déformations viscoélastiques et viscoplastiques ayant la même énergie d'activation  $Q$  (Sinha 1978), la fonction de passage  $S_{1,2}$  s'écrit :

$$S_{1,2} = \exp \left\{ \frac{Q}{R} \left[ \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right] \right\} \quad (3.15)$$

où  $Q$  et  $R$  désignent respectivement l'énergie d'activation et la constante universelle des gaz.

### 3.3.4 Endommagement

D'après (Sinha 1979(b)), la déformation induite par le glissement des joints de grains,  $\varepsilon_{gbS}$ , est exprimée par :

$$\varepsilon_{gbs} = K \bar{x} d^{-1} \quad (3.16)$$

où  $\bar{x}$  représente le déplacement moyen des joints de grains,  $d$  est le diamètre moyen des grains et  $K$  un facteur de moyenne dont la valeur avoisine 1. Comme mentionnée auparavant, la déformation viscoélastique est due au glissement des joints de grains :

$$\varepsilon_{gbs} = \varepsilon^{ve} \quad (3.17)$$

Le glissement des joints de grains résulte de la concentration de contraintes aux points triples (point où trois grains se rencontrent) ou au niveau des irrégularités aux joints de grains. L'amorçage des fissures causé par la concentration des contraintes se fait lorsque le déplacement des joints de grains atteint une valeur critique exprimée par :

$$x_c = (M_1 - m_1 T) \frac{d_1}{K} \quad (3.18)$$

où  $x_c$  est la valeur critique du déplacement des joints de grains, et  $T$  est la température absolue en Kelvin.

La déformation viscoélastique correspondant au seuil critique au-delà duquel l'endommagement de la glace est initié est définie par :

$$\varepsilon_c^{ve} = \frac{K \cdot x_c}{d} = (M_1 - m_1 T) \frac{d_1}{d} \quad (3.19)$$

Lorsque le matériau se déforme, le nombre de fissures augmente. La densité de fissures est alors exprimée par :

$$N = N_c [\exp(\psi(x - x_c))] \quad (3.20)$$

où  $N$  est la densité de fissures à un temps, température et contrainte donnés.



La présence de fissures n'affecte que la déformation permanente. Les effets sont alors incorporés à la composante viscoplastique  $\varepsilon^{vp}$ . Le terme  $\dot{\varepsilon}_{v0}$  est modifié tel que :

$$\dot{\varepsilon}_c^{vp} = \dot{\varepsilon}_{v0} \left[ 1 + \left\{ \frac{\pi}{16,497} \right\}^{3/2} N d^3 n^{1/2} \right] \quad (3.21)$$

où  $\dot{\varepsilon}_c^{vp}$  est le taux de déformation permanente après l'amorçage des fissures.

Le Tableau 3.1 résume les valeurs des différents paramètres intervenant dans les équations de la déformation viscoélastique, de la déformation viscoplastique, ainsi que l'endommagement pour la glace d'eau douce.

**Tableau 3.1: Paramètres du modèle de Sinha pour la glace d'eau douce**

$C_1 = 9.0 \cdot 10^{-3}$ $d_1 = 1. \text{ m}$ $s = 1.$ $n = 3.$ $b = 0.34$ $K = 1$	$M_1 = 1.67 \cdot 10^{-6}$ $m_1 = 4.55 \cdot 10^{-9} \text{ K}^{-1}$ $N_C = 550 \text{ m}^{-2}$ $a_T = 2.5 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ $\psi = 1.33 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$ $\dot{\varepsilon}_{v0} = 1.76 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1} (\sigma_0 = 1 \text{ MN} \cdot \text{m}^{-2})$
$Q = 67 \text{ KJ/mol}$ (16 Kcal/mol ou 0.70eV)	

### 3.4 Présentation du modèle 3D de Choi

#### 3.4.1 Élasticité polycristalline

Un comportement élastique est caractérisé par le fait qu'après décharge de la structure, il ne subsiste aucune déformation résiduelle. Le comportement est parfaitement

réversible. Le comportement élastique d'un matériau polycristallin représente une moyenne du comportement élastique d'un cristal. Ce dernier résulte de la déformation de sa structure. La loi de Hooke est utilisée pour relier le champ des contraintes à celui des déformations. Le comportement élastique est décrit par :

$$\sigma_{ij} = K_{ijkl}^e \varepsilon_{kl} \quad (3.22)$$

où  $K_{ijkl}^e$ ,  $\sigma_{ij}$  et  $\varepsilon_{ij}$  représentent respectivement le tenseur élastique du quatrième ordre, les tenseurs de contraintes et de déformations du second ordre.

### 3.4.2 Viscoélasticité

Un matériau viscoélastique possède une loi de comportement qui est réversible dans laquelle figure le temps. Un matériau viscoélastique peut être défini comme un matériau se comportant à la fois comme un solide élastique et comme un fluide visqueux. La déformation de la matière serait dépendante de certains paramètres tels que : la température, la contrainte et son gradient, etc.

L'explication physique du processus de glissement des joints de grains est décrite dans (Zener 1941; Zener 1948) : le glissement d'un crystal par rapport à un autre provoque une déformation élastique aux extrémités des grains adjacents. Cependant, cette déformation élastique développe des contraintes internes qui s'opposent au glissement. Les contraintes internes continuent à augmenter sous la forme d'une énergie élastique emmagasinée tant que le glissement des joints de grains continue. Lorsque la contrainte interne atteint une valeur égale à la contrainte imposée, le glissement des joints de grains s'arrête. Lorsque le chargement externe est supprimé, l'énergie emmagasinée est libérée,

ce qui a pour effet d'inverser le processus de glissement et remet les joints à leur position initiale. Ainsi, les déformations causées par le glissement des joints de grains sont de nature élastiques (Derradji-Aouat 1992).

Dans le cas de la glace qui fait l'objet de notre étude, la déformation viscoélastique est induite principalement par le glissement des joints de grains. Un autre terme pour caractériser la déformation viscoélastique qui est aussi souvent employé dans la littérature est la déformation élastique différée.

$$\varepsilon_{ij}^{ve} = A \left[ \frac{3}{2} K S_{ij} - \varepsilon_{ij}^{ve} \right]^m \quad (3.23)$$

où  $\varepsilon_{ij}^{ve}$  et  $\dot{\varepsilon}_{ij}^{ve}$  désignent respectivement les tenseurs de déformation et de vitesse de déformation viscoélastiques.

### 3.4.3 Viscoplasticité

Un comportement visqueux est caractérisé par l'intervention du paramètre temps. Un matériau viscoplastique est défini comme un matériau se comportant à la fois comme un solide plastique et comme un fluide visqueux. La déformation viscoplastique résulte du mouvement des dislocations dans le matériau sur les plans de base de la structure hexagonale du cristal de glace  $I_h$  tel que :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} = \frac{3}{2} K_n q^{n-1} S_{ij} \quad (3.24)$$

où  $\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp}$  représente le taux de déformation viscoplastique,  $q$  et  $S_{ij}$  désignent respectivement la contrainte équivalente de von Mises et le tenseur déviateur des contraintes définis à la section (§3.2.2).  $K_n$  et  $n$  sont des paramètres matériels.

#### **3.4.4 Endommagement**

L'endommagement des matériaux polycristallins est dû à l'apparition de microfissures qui tendent à augmenter de taille et à se propager au fur et à mesure que le matériau se déforme (Choi 1989; Derradji-Aouat 1992). L'accumulation de l'endommagement produit une diminution de la rigidité du matériau jusqu'à la rupture. L'endommagement ductile qui caractérise la glace polycristalline à des faibles vitesses de déformation, est la décohésion atomique résultant de l'empilement des dislocations ou la formation et la coalescence de cavités. La croissance des fissures est causée par la rupture des liaisons interatomiques. Sous l'effet d'une sollicitation externe, la distance interatomique augmente. Si elle est suffisamment élevée, elle peut causer la rupture de la liaison interatomique et le front de fissure avance (Derradji-Aouat 2005).

Il existe deux types de fissures dans la glace polycristalline : Les fissures transgranulaires ou de clivage, d'apparence ramifiée, qui traversent les grains, et les fissures intergranulaires qui suivent les joints de grains. Les fissures transgranulaires sont causées par des forces de tension qui se propagent sur des plans définis et se développent lorsque les contraintes sont suffisamment grandes (Dieter 1961). Les fissures intergranulaires quant à elles, naissent des concentrations de contraintes autour des joints de grains qui provoquent leur glissement, mais également, de la nucléation de microfissures le long des joints et aussi aux points triples (Choi 1989). Comme mentionné auparavant, le glissement des joints de grains est lié à la déformation viscoélastique, l'initiation et la propagation des fissures intergranulaires se font lorsque cette déformation viscoélastique atteint une limite critique indépendamment de la contrainte appliquée.

L'influence de l'endommagement sur le comportement de la glace polycristalline a souvent été prise en compte dans les modèles phénoménologiques à travers un scalaire caractérisant la densité de distribution des fissures ; cette approche bien qu'offrant une relative facilité est sujette à des critiques car elle présente des limitations lors de son application pour les modèles multiaxiaux. De plus, elle est incapable de traduire l'effet de l'endommagement anisotrope observé dans nombre de matériaux (Choi 1989). La mécanique de l'endommagement continu offre un cadre scientifique bien plus rigoureux pour caractériser l'endommagement des matériaux fragiles (Krajcinovic 1985; Choi 1989). Le modèle d'endommagement décrit dans ce qui suit est basé sur l'approche développée par (Krajcinovic 1985) pour l'étude de l'endommagement dans les matériaux quasi-fragiles tels que le béton ou la roche. Cette approche est décrite plus en détail dans (Krajcinovic 1985) et (Choi 1989).

Considérons que les microfissures de forme plane avec des orientations et des grandeurs différentes se développent sur des plans parallèles dans le matériau. Chaque microfissure est définie par son aire  $\xi^{(i)}$  et un vecteur normal  $\underline{N}$  par :

$$\underline{\xi}^{(i)} = \xi^{(i)} \underline{N} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.25)$$

où le changement de  $\xi^{(i)}$  est la mesure de la décohésion qui caractérise l'endommagement.

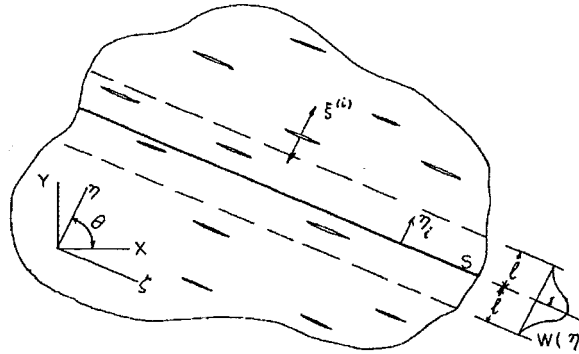
L'état d'endommagement d'un solide contenant  $n$  microfissures de ce type est complètement défini par  $n$  mesures de  $\xi^{(i)}$ . En se posant dans le cas le plus général, le nombre  $n$  est très grand et dépend de la taille de l'éprouvette. Par ailleurs, les détails

exacts de la distribution sont inconnus et différents d'une éprouvette à une autre. Il serait donc plus opportun d'introduire une variable moyenne  $\omega^{(j)}$  qui représenterait une mesure appropriée de la distribution des microfissures dans le solide telle que :

$$\omega^{(j)} = \omega(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(n)}; V^0) \quad (i = 1, 2, \dots, k \ll n) \quad (3.26)$$

où  $V^0$  indique que la moyenne se fait sur le volume.

Considérons maintenant un solide avec un grand nombre de microfissures planes et parallèles tel que montré sur la Figure 3.1, toutes les microfissures ont une même orientation sur un plan parallèle.



**Figure 3.1: Système de microfissures planes et parallèles (Krajcinovic 1985)**

Pour donner un sens physique à la variable moyenne définie précédemment et qui caractérise l'endommagement, on considère le rapport entre l'aire totale des microfissures dans une section d'un élément de volume et la surface totale de cette section. En assumant que la rigidité d'une section  $S$  n'est affectée que par les

microfissures situées dans une bande délimitée par :  $-l < \eta < l$ , la surface  $\bar{\xi}$  de la section  $S$  qui n'est pas disponible pour supporter les contraintes est exprimée par :

$$\bar{\xi}(\zeta, \eta) = \sum_i w^{(i)}(\eta_i - \eta) \xi^{(i)}(\zeta, \eta_i) \quad (3.27)$$

où la fonction de pondération  $w(\eta)$  représente la distance entre les microfissures et la section  $S$  et satisfait la condition :

$$w^{(i)} = 1 \text{ si } \eta_i - \eta = 0 \quad (3.28)$$

$$w^{(i)} = 0 \text{ si } |\eta_i - \eta| \geq 1$$

Sur une large surface  $A$  de  $S$  contenant un échantillon représentatif des surfaces de discontinuités  $\xi$  (de façon que  $\bar{\xi}$  ne varie pas d'une manière significative suivant  $\zeta$ ), un système de microfissures parallèles peut être défini par le vecteur :

$$\underline{\omega}_l(\zeta, \eta) = \frac{\bar{\xi}(\zeta, \eta)}{A} \underline{N}_l = \omega \underline{N}_l \quad (3.29)$$

où  $\underline{N}_l$  est la normale au champ de microfissures.

Considérons maintenant le cas général où les normales à toutes les fissures sont orientées dans le demi-plan de l'espace défini par  $(0 \leq \theta \leq \pi)$ . Chaque système de microfissures est défini par son orientation  $\theta^{(\alpha)} = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) \Delta\theta$ , (où  $\alpha = 1, 2, \dots, m$  et  $m = \pi/\Delta\theta$ ). À chaque système correspond un vecteur  $\omega$  défini selon l'équation (3.29). Ainsi, un champ de microfissures discrétisé en  $m$  systèmes de microfissures parallèles peut être représenté par  $m$  vecteurs  $\omega$ . Le degré de l'approximation dépend de la taille de

la discrétisation déterminée par la valeur de  $\Delta\theta$ . Lorsque  $m$  tend vers l'infini, la représentation devient exacte.

Afin de définir l'endommagement, il faut faire au préalable la distinction entre les systèmes de microfissures actifs et passifs. Un système de microfissures est dit actif si l'état de contrainte ou de déformation local crée une discontinuité le long de la fissure. Le caractère anisotrope de l'endommagement ne peut être totalement exprimé par un scalaire, il est nécessaire de définir un tenseur d'ordre supérieur. Dans le présent modèle, un tenseur du deuxième ordre est utilisé. L'endommagement sur un plan particulier défini par sa normale  $\underline{N}_l$  est la somme des projections de tous les systèmes actifs de microfissures avec une normale  $\underline{N}_k$  tel que :

$$D_{kl} = \sum_{\alpha} \omega^{(\alpha)} \underline{N}_k^{(\alpha)} \underline{N}_l^{(\alpha)} \quad (3.30)$$

Lorsque le nombre des systèmes de microfissures tend vers l'infini, le tenseur d'endommagement  $D_{kl}$  peut être écrit tel que :

$$D_{kl} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \omega(\theta, \phi) N_{kl}(\theta, \phi) \sin\phi \, d\theta \, d\phi \quad (3.31)$$

où  $N_{kl}$  est le produit dyadique des vecteurs  $\underline{N}_k$  et  $\underline{N}_l$  définit par :

$$N_{kl} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta \sin^2 \phi & \cos \theta \sin \theta \sin^2 \phi & \cos \theta \sin \phi \cos \phi \\ \sin^2 \phi \sin^2 \phi & \sin \theta \sin \phi \cos \phi & \sin^2 \phi \\ \text{sym} & & \end{bmatrix} \quad (3.32)$$



Les coordonnées sphériques  $\theta$  et  $\phi$  définissent les orientations des systèmes actifs de microfissures délimités par :  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$  et  $\phi_1 \leq \phi \leq \phi_2$ . La distribution des microfissures est déterminée par la fonction  $\omega(\theta, \phi)$ .

La présence des fissures affecte non seulement la composante élastique, mais aussi, les composantes viscoélastique et viscoplastique. L'hypothèse de petites déformations permet d'assumer que l'influence de l'endommagement sur les différentes composantes de déformation est indépendante les unes des autres. L'effet de l'endommagement sur l'élasticité se traduit par une perte de la rigidité. Un tenseur vient s'ajouter au tenseur de rigidité tel que :

$$\begin{aligned} \{\underline{\sigma}\} &= [K]\{\underline{\varepsilon}^e\} \\ &= ([K^e] + [K^d])\{\underline{\varepsilon}^e\} \end{aligned} \quad (3.33)$$

où  $[K^e]$  est le tenseur élastique pour le matériau sans endommagement (matériau vierge), et  $[K^d]$  est le tenseur traduisant l'endommagement anisotrope. Les deux tenseurs sont tels que:

$$[K^e] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2\mu & 0 & 0 \\ & sym & & & 2\mu & 0 \\ & & & & & 2\mu \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

et

$$[K^d] = \begin{bmatrix} 2(C_1 + C_2)D_{11} & C_1(D_{11} + D_{22}) & C_1(D_{11} + D_{33}) & C_1D_{23} & (C_1 + C_2)D_{31} & (C_1 + C_2)D_{12} \\ & 2(C_1 + C_2)D_{22} & C_1(D_{22} + D_{33}) & (C_1 + C_2)D_{23} & C_1D_{31} & (C_1 + C_2)D_{12} \\ & & 2(C_1 + C_2)D_{33} & (C_1 + C_2)D_{23} & (C_1 + C_2)D_{31} & C_1D_{12} \\ & & & C_2(D_{22} + D_{33}) & C_2D_{12} & C_2D_{31} \\ & sym & & & C_2(D_{11} + D_{33}) & C_2D_{23} \\ & & & & & C_2(D_{11} + D_{22}) \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$C_1$  et  $C_2$  sont les paramètres de l'endommagement.

L'effet de l'endommagement sur les composantes viscoélastiques et viscoplastiques est pris en compte au moyen du concept de la contrainte effective déterminée par :

$$\{\underline{\tilde{\sigma}}\} = \frac{1}{2} \{[K^e][K]^{-1} + [K]^{-1}[K^e]\}\{\underline{\sigma}\} \quad (3.36)$$

En utilisant la définition du tenseur déviateur exprimée dans l'équation (3.4), et la définition (3.36) de la contrainte effective, on définit aussi le tenseur déviateur effectif par :

$$\tilde{S}_{ij} = \tilde{\sigma}_{ij} + \tilde{p}\delta_{ij} \quad (3.37)$$

L'équation pour les déformations viscoélastiques (3.24) devient :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{ve} = A \left[ \frac{3}{2} K \tilde{S}_{ij} - \varepsilon_{ij}^{ve} \right]^m \quad (3.38)$$

De même, la déformation viscoplastique exprimée en (3.23) devient alors :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} = \frac{3}{2} K_n \left( \frac{3}{2} \tilde{S}_{kl} \tilde{S}_{kl} \right)^{\frac{n-1}{2}} \tilde{S}_{ij} \quad (3.39)$$

### 3.4.5 Lois d'évolution de l'endommagement

Les lois d'évolution relient la croissance de l'endommagement à l'évolution de l'état de contrainte, de la déformation et du temps. L'existence de deux mécanismes de microfissurations intergranulaires et intragranulaires impose la définition de deux lois d'évolution distinctes pour les deux mécanismes telles que :

$$\omega(\theta, \phi) = \omega^{(1)}(\theta, \phi) + \omega^{(2)}(\theta, \phi) \quad (3.40)$$

où  $\omega^{(1)}$  est la fonction d'évolution liée à la déformation viscoélastique, et  $\omega^{(2)}$  est celle liée à la déformation totale. Les joints de grains avec une normale dans la direction des déformations en tension positives sont plus susceptibles de fissurer. Afin de déterminer ces déformations en tension, on fait appel à une transformation tensorielle pour passer du repère principal de l'éprouvette au repère local par des rotations successives comme montré sur la Figure 3.2 et telle que :

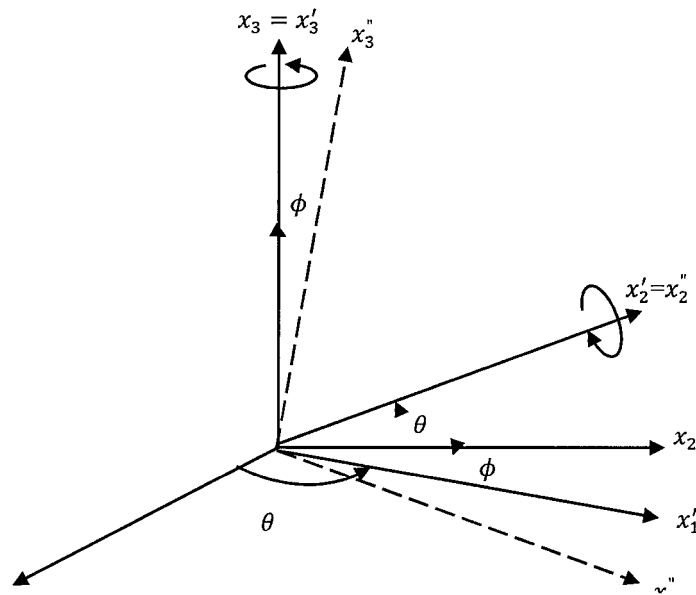
$$\underline{\varepsilon}'' = \underline{S} \underline{\varepsilon} \underline{S}^T \quad (3.41)$$

où le tenseur de déformation dans la base principale est défini par :

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_I & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{III} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

et la matrice de transformation par les rotations successives est définie par :

$$[S] = \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \theta & \cos \phi \sin \theta & -\sin \phi \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \sin \phi \cos \theta & \sin \phi \sin \theta & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (3.43)$$



**Figure 3.2: Transformation de coordonnées (Choi 1989)**

La déformation en tension normale au système de microfissures dans le système de coordonnées locales est exprimée par :

$$\varepsilon_{33}'' = \sin^2 \phi \cos^2 \theta \varepsilon_I + \sin^2 \phi \sin^2 \theta \varepsilon_{II} + \cos^2 \phi \varepsilon_{III} \quad (3.44)$$

Dans le cas de la compression uniaxiale avec ou sans confinement pour un matériau isotrope :  $\varepsilon_I = \varepsilon_{II}$  et donc la déformation locale définie en (3.34) est indépendante de l'angle  $\theta$ .

$$\varepsilon_{33}'' = \varepsilon_{nn} = \sin^2 \phi \varepsilon_I + \cos^2 \phi \varepsilon_{III} \quad (3.45)$$

Les microfissures subissant des déformations de tension dans le repère local qui sont inférieures à une certaine valeur critique n'augmentent jamais de taille. Les lois

d'évolution de l'endommagement sont considérées comme fonctions de la déformation normale, de la vitesse de déformation, de la contrainte, et aussi, de l'endommagement préexistant. La loi d'évolution est de la forme :

$$\begin{aligned}\frac{d\omega^{(1)}}{d\varepsilon_{nn}^{ve}} &= f_1(\omega^{(1)}, \sigma_{nn}, \dot{\varepsilon}_{nn}^{ve}) \\ &= \beta_1(\alpha_1 - \omega^{(1)})\end{aligned}\tag{3.46}$$

avec pour condition initiale :

$$\omega^{(1)} = 0 \text{ pour } \varepsilon_{nn}^{ve} \leq \varepsilon_{cr}^{ve}\tag{3.47}$$

$\alpha_1$  représente une limite d'endommagement qui est fonction de la contrainte appliquée et  $\beta_1$  représente le taux de progression de l'endommagement qui est fonction du taux de déformation.

Pour le cas du chargement uniaxial, la contrainte locale  $\sigma_{nn}$  et la vitesse de déformation viscoélastique locale  $\dot{\varepsilon}_{nn}^{ve}$  sont déterminées à partir des valeurs principales avec des formulations similaires à celle donnée en (3.45) pour la déformation locale :

$$\sigma_{nn} = \sin^2 \phi \sigma_I + \cos^2 \phi \sigma_{III}\tag{3.48}$$

$$\dot{\varepsilon}_{nn}^{ve} = \sin^2 \phi \dot{\varepsilon}_I^{ve} + \cos^2 \phi \dot{\varepsilon}_{III}^{ve}\tag{3.49}$$

La différence de comportement entre la compression et la traction qui caractérise les matériaux fragiles tels que la glace est prise en compte dans la formulation des lois d'évolution à travers le paramètre  $\alpha_1$ :

$$\begin{cases} \alpha_1 = \exp(\gamma_1 \sigma_{nn}) & \text{pour } \sigma_{nn} > 0 \\ \alpha_1 = 1 & \text{pour } \sigma_{nn} < 0 \end{cases} \quad (3.50)$$

L'effet de la vitesse de déformation sur le comportement est aussi pris en compte, le seuil qui détermine la transition dans le comportement (ductile-fragile) tel qu'observé expérimentalement sur la Figure 2.8 est fixé à  $10^{-5} \text{s}^{-1}$  :

$$\begin{cases} \beta_1 = \xi_1 \log|\dot{\varepsilon}_{nn}^{ve}| + \eta_1 & \text{pour } |\dot{\varepsilon}_{nn}^{ve}| > 10^{-5} \\ \beta_1 = -5\xi_1 + \eta_1 & \text{pour } |\dot{\varepsilon}_{nn}^{ve}| < 10^{-5} \end{cases} \quad (3.51)$$

Le second mécanisme d'endommagement lié à la déformation totale est décrit par une équation d'évolution de la même forme que (3.46) :

$$\begin{aligned} \frac{d\omega^{(2)}}{d\varepsilon_{nn}} &= f_2(\omega^{(2)}, \sigma_{nn}, \dot{\varepsilon}_{nn}) \\ &= \beta_2(\alpha_2 - \omega^{(2)}) \end{aligned} \quad (3.52)$$

avec pour condition initiale :

$$\omega^{(2)} = 0 \text{ pour } \varepsilon_{nn} \leq \varepsilon_{cr} \quad (3.53)$$

Les paramètres  $\alpha_2$  et  $\beta_2$  traduisent l'effet de la contrainte appliquée et de la vitesse de déformation sur l'évolution de l'endommagement, tels que :

$$\begin{cases} \alpha_2 = \exp(\gamma_2 \sigma_{nn}) & \text{pour } \sigma_{nn} > 0 \\ \alpha_2 = 1 & \text{pour } \sigma_{nn} < 0 \end{cases} \quad (3.54)$$

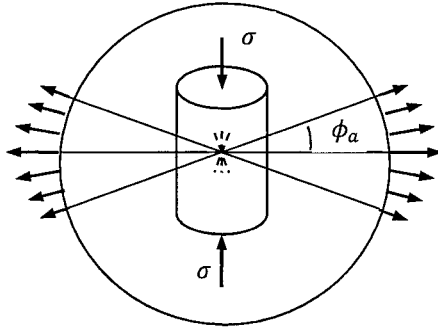
$$\begin{cases} \beta_2 = \xi_2 \log|\dot{\varepsilon}_{nn}| + \eta_2 & \text{pour } |\dot{\varepsilon}_{nn}| > 10^{-5} \\ \beta_2 = -5\xi_2 + \eta_2 & \text{pour } |\dot{\varepsilon}_{nn}| < 10^{-5} \end{cases} \quad (3.55)$$

Dans le cas de la compression uniaxiale suivant l'axe  $x_3$ , l'endommagement est beaucoup plus susceptible de se développer sur des plans parallèles à cet axe. Ces plans orientés perpendiculairement par rapport aux deux autres axes  $x_1$  et  $x_2$  sont délimités par l'angle  $\phi_a$  tel que montré dans la Figure 3.3. Les bornes d'intégration du tenseur d'endommagement défini en (3.31) sont telles que :

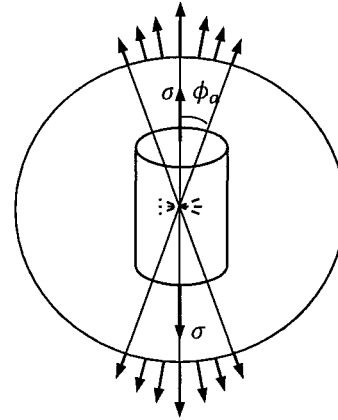
$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} - \phi_a \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} + \phi_a \end{aligned} \quad (3.56)$$

Le comportement en tension étant différent du comportement en compression, les plans perpendiculaires à l'axe  $x_3$  sont ceux qui sont les plus disposés à développer des microfissures tel que montré dans la Figure 3.4. En conséquence, les bornes d'intégration du tenseur d'endommagement défini en (3.31) deviennent :

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ -\phi_a \leq \phi \leq \phi_a \end{aligned} \quad (3.57)$$



**Figure 3.3: Orientation de l'endommagement en compression uniaxiale (Choi 1989)**



**Figure 3.4: Orientation de l'endommagement en tension uniaxiale (Choi 1989)**

L'endommagement étant conditionné par un seuil de déformation critique, l'angle  $\phi_a$  est la solution de l'équation (3.45) lorsque la déformation atteint la valeur critique  $\varepsilon_{cr}$  :

$$\phi_a = \frac{1}{2} \cos^{-1} \left[ \frac{\varepsilon_{cr} - \left( \frac{\varepsilon_I + \varepsilon_{III}}{2} \right)}{\left( \frac{\varepsilon_I - \varepsilon_{III}}{2} \right)} \right] \quad (3.58)$$

Le Tableau 3.2 comprend les valeurs des paramètres intervenant dans le modèle de Choi pour la glace d'eau douce.

**Tableau 3.2: Paramètres du modèle pour la glace d'eau douce (Choi 1989)**

<u>Élasticité</u>	<u>Viscoélasticité</u>	<u>Viscoplasticité</u>
$E = 9,5 \text{ GPa}$	$A = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$	$K_n = 1,7 \cdot 10^{-7} \text{ MPa}^{-n} \text{ s}^{-1}$
$\nu = 0,35$	$K = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ MPa}^{-1}$	$n = 3,11$
<u>Endommagement</u>		
$C_1 = 1370 \cdot 10^6$	$\gamma_1 = 1 \text{ MPa}^{-1}$	$\gamma_2 = 1 \text{ MPa}^{-1}$
$C_2 = -3420 \cdot 10^6$	$\xi_1 = 100$	$\xi_2 = 160$
	$\eta_1 = 525$	$\eta_2 = 830$
	$\varepsilon_{cr}^d = 10^{-6}$	$\varepsilon_{cr} = 10^{-5}$



## **Chapitre 4 : Procédure expérimentale**

### **4.1 Introduction**

La glace présente une structure et un comportement particuliers par rapport aux autres matériaux que l'on rencontre en ingénierie. Des efforts considérables ont été déployés durant les dernières décennies pour étudier ses propriétés mécaniques. Le comportement de la glace sous des sollicitations de flexion, ou en compression uniaxiale et triaxiale a été couvert de manière assez exhaustive dans la littérature depuis le milieu du 19<sup>ième</sup> siècle (Glen 1955; Mellor and Cole 1982). Néanmoins, les limitations technologiques de l'époque ne permettaient pas de tirer un réel bénéfice de tous les résultats obtenus : les essais étaient effectués dans des environnements à température non contrôlée, manque de précision des instruments de mesure de l'époque, etc. (Glen 1955). Avec les avancées technologiques et les équipements disponibles actuellement, il est possible de contourner tous ces problèmes.

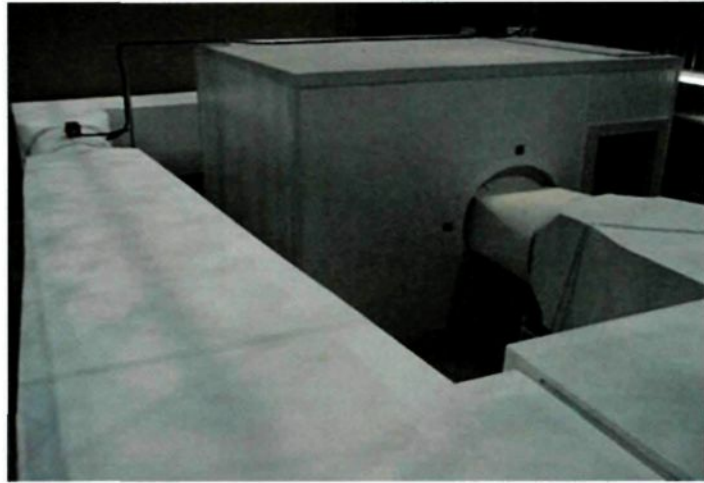
La loi de comportement étudiée comprend un certain nombre de paramètres à identifier par voie expérimentale avant de pouvoir être utilisée pour simuler le comportement de la glace atmosphérique. Les constantes élastiques peuvent être déterminées à partir d'un essai dynamique où les effets visqueux n'ont pas le temps de se développer, alors que les paramètres de la composante viscoplastique sont à déterminer à partir d'un essai de compression à vitesse de déformation constante lente. Les paramètres de la composante viscoélastique sont identifiés à partir d'un essai de fluage. Finalement,

les paramètres gouvernant l'endommagement sont déterminés par méthodes inverses à partir d'un essai triaxial.

Dans le cadre de ce projet, l'accumulation de la glace atmosphérique s'est faite dans la soufflerie réfrigérée de la CIGELE (chaire industrielle de recherche sur le givrage des équipements des réseaux électriques). Les tests de compression uniaxiale à vitesse de déformation constante, et de flexion, ont été effectués sur une machine de type MTS810 entreposée dans une chambre froide maintenue à une température de  $-10^{\circ}\text{C}$ , cette température étant la température moyenne dans la région de Québec. Dans ce qui suit, nous décrivons plus en détail l'équipement utilisé, la procédure d'accumulation, la taille des éprouvettes, les tests réalisés ainsi que les résultats obtenus.

#### **4.2 Description de la soufflerie réfrigérée**

L'accumulation de la glace au cours de cette étude a été effectuée au niveau de la soufflerie réfrigérée à circuit fermé disponible à la CIGELE présentée à la Figure 4.1. On donne dans ce qui suit une brève description des caractéristiques du dispositif : la soufflerie réfrigérée est d'une longueur approximative de 30 m, elle est équipée d'un moteur électrique délivrant une puissance de 45 kW, la fréquence est ajustable par le biais d'un logiciel installé sur ordinateur afin de couvrir une plage de fréquences allant de 0 à 60 Hz, ce qui permet de reproduire des vitesses de vent allant jusqu'à 29 m/s. Une relation directe entre la fréquence de rotation du moteur et la vitesse du vent obtenue a été établie au cours de travaux antérieurs (Mousavi 2003).



**Figure 4.1: Soufflerie réfrigérée de la CIGELE**

Comme son nom l'indique, un système de réfrigération à base d'ammoniaque et commandé par un panneau de contrôle permet d'atteindre et de maintenir des températures d'air allant jusqu'à  $-25\text{ }^{\circ}\text{C}$ . La mesure de la température s'effectue à l'aide de thermocouples de type T à base de cuivre/constantan (alliage de cuivre + nickel) disposés à différents endroits du circuit. Ce type de thermocouples est particulièrement adapté aux applications cryogéniques, il couvre l'intervalle de températures entre  $-180\text{ }^{\circ}\text{C}$  et  $+350\text{ }^{\circ}\text{C}$  et permet la prise des mesures avec une tolérance de  $\pm 0.5\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Le tunnel réfrigéré est constitué de plusieurs sections, chacune ayant une vocation bien particulière. La plupart de ces parties sont construites en aluminium recouvert d'un isolant. En revanche, la section accessible du circuit de circulation d'air est en plexiglas, ce qui nous permet de visualiser et de suivre l'opération d'accumulation de la glace.

Il est possible de jouer sur les différents paramètres contrôlant l'évènement de glace atmosphérique désiré et reproduire ainsi les différents types de glace que l'on rencontre dans la nature. La technique utilisée pour l'accumulation de glace est basée sur

l'injection d'eau tiède dans un flux d'air froid s'écoulant au travers de trois gicleurs totalement indépendants situés au bord de fuite d'un profil NACA0012. L'eau provenant d'un réservoir d'eau de ville, tandis que l'air comprimé provient d'un compresseur utilisant l'air ambiant. Il est possible d'ajuster les pressions d'eau et d'air afin de contrôler la taille des gouttelettes d'eau.

### **4.3 Conditions d'accumulation de la glace atmosphérique**

Comme vu précédemment, les conditions climatiques influencent le type de glace atmosphérique obtenu. Ainsi, la vitesse du vent, la température de l'air, la pression de l'air, la teneur en eau et la taille des gouttelettes déterminent l'évènement de glace atmosphérique qui se produit et l'aspect de la glace tant au niveau microstructural qu'au niveau macroscopique. À une vitesse de vent trop faible inférieure à 5 m/s, des problèmes d'accrétion ont été observés par le passé, ceux-ci étant principalement dus à l'effet de la gravité sur la distribution spatiale de la teneur en eau liquide et sur la taille des gouttelettes (Koosheh 2007). Pour obtenir une glace d'aspect plus uniforme, une vitesse du vent de 10 m/s a été retenue. Les conditions de température et de pression ont été fixées à  $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$  et à 1 atm. Ces mêmes conditions ont été conservées pour le stockage des éprouvettes ainsi que pour les tests afin d'éviter tout métamorphisme de la structure de la glace.

La teneur en eau liquide est un autre paramètre important contrôlant la formation de la glace atmosphérique, elle représente la mesure de la masse d'eau par unité de volume d'air. C'est une fonction de la différence entre la pression d'air et la pression d'eau dans les conduites, la vitesse de l'air et dans une moindre mesure de la température

et le débit d'eau dans la conduite. Une faible teneur en eau a pour conséquence de former une glace avec un volume important d'inclusions d'air. Pour cela, une teneur en eau de  $2,5 \text{ g/m}^3$  a été choisie, elle est obtenue pour une pression d'air et d'eau de 103 420 Pa et 379 210 Pa respectivement (Koosheh 2007).

#### **4.4 Procédure d'accumulation de la glace atmosphérique**

Un cylindre d'aluminium (longueur : 590 mm, diamètre : 78 mm) est placé à l'intérieur du tunnel dans la partie accessible. Le cylindre est nettoyé avant chaque accumulation avec de l'isopropanol (alcool isopropylique) afin d'ôter tout dépôt de poussière ou d'impureté, puis il est mis en place pour une durée approximative de 2 heures afin que sa température s'équilibre avec celle choisie pour l'accumulation. Un système mécanique relié à un moteur assure un mouvement de rotation du cylindre à l'intérieur du tunnel avec une vitesse constante de 2 tr/min, ceci permet d'obtenir une distribution plus ou moins uniforme du dépôt de glace comme le montre la Figure 4.2.



**Figure 4.2: Accumulation de glace sur un cylindre en aluminium**

La distance entre les gicleurs et le cylindre d'aluminium est suffisamment grande afin que l'équilibre thermodynamique puisse s'établir entre le flux d'air et la gouttelette d'eau la plus large (Koosheh 2007). Une fois l'accumulation terminée, le cylindre est retiré, la glace est ensuite coupée en plusieurs parties de dimensions réduites au moyen d'une lame en aluminium préchauffée afin de prévenir toute contrainte mécanique pouvant induire la formation de fissures.

#### **4.5 Description du microtome**

Le microtome (Figure 4.3) est un appareil qui permet, à l'aide d'un rasoir, d'effectuer des coupes minces. Il est utilisé généralement par les biologistes pour effectuer des coupes sur des tissus organiques provenant de plantes ou d'animaux. La nature fragile de la glace a amené les chercheurs à l'utiliser aussi pour découper les éprouvettes de glace.



**Figure 4.3: Microtome Leitz Wetzlar**

Le rasoir contient une lame en acier solidement fixée. La partie mobile sur laquelle on maintient le bloc de glace coulisse sur le plateau du microtome, et est ajustable en hauteur, ceci permet de régler la profondeur de passe. Le mouvement de va-et-vient imprégné à cette partie permet d'effectuer la coupe. L'appareil est disposé pendant quelques heures dans une chambre froide à  $-5^{\circ}\text{C}$  afin qu'il soit à une température n'affectant pas la glace.

#### **4.6 Description des éprouvettes de test**

En l'absence de normes dans l'ingénierie de la glace, on se basera sur les recommandations de chercheurs de renom dans le domaine (Schwarz, Frederking et al. 1981). Selon ce groupe de travail, les éprouvettes du test de compression doivent être de type cubique, prismatique ou encore cylindrique. Leurs dimensions dépendent généralement de la taille des grains, qui à son tour dépend des conditions d'accumulation. Les observations microstructurales effectuées par (Koosheh 2007) indiquent que la glace atmosphérique accumulée dans les mêmes conditions que celles choisies a une taille de grains moyenne de 0,5 mm. La largeur des éprouvettes devrait être 15 à 20 fois la taille des grains, et la longueur égale à 2,5 fois la largeur.

Pour les tests de flexion trois-points, les recherches menées par (Lavrov 1971) et (Frederking and Häusler 1978) ont montré que la géométrie utilisée influençait d'une manière significative les résultats. Des poutres trop courtes subissent beaucoup plus les effets du cisaillement, alors que des poutres trop larges se comportent telles des plaques sous des sollicitations biaxiales (état de contrainte plan). Les recommandations de (Schwarz, Frederking et al. 1981) indiquent que pour éviter l'effet de taille des grains, le

rapport entre la largeur de la poutre et le diamètre moyen des grains devrait être supérieur ou égal à 10, aussi, la largeur et la longueur de l'éprouvette doivent être respectivement 1-2 fois et 7-10 fois son épaisseur.

Compte tenu de certaines limitations liées aux déplacements du plateau du microtome utilisé, les dimensions des éprouvettes des tests de compression ont été fixées à 20 mm de largeur, 45 mm de longueur et 40 mm de hauteur, alors que pour les tests de flexion trois-points, les dimensions ont été fixées à 40 mm de largeur, 20 mm d'épaisseur, et 70 mm de longueur. Cependant, ces dimensions ne permettent pas une utilisation rigoureuse de la théorie des poutres compte tenu des effets de cisaillement qui devraient affecter le calcul.

#### **4.7 Tests de compression uniaxiale et de flexion trois-points**

Bien que les effets désastreux de l'accumulation et du délestage de la glace atmosphérique remontent à plus loin que la tempête de 1998, très peu de travaux concernant son comportement mécanique ont été réalisés et très peu de résultats ont été obtenus. Le travail pionnier de (Druez, Nguyen et al. 1986) et celui de (Koosheh 2007) sont les seuls relevés dans la littérature.

Le programme expérimental établi dans ce chapitre ne répond pas complètement aux exigences de calibrage du modèle pour diverses raisons : le choix du modèle étudié ayant intervenu tardivement, aussi l'indisponibilité de l'équipement et son inadéquation ont aussi pesé lourdement sur le déroulement du projet, ceci nous a limité à des sollicitations uniaxiales, ce qui n'est pas très pratique lorsque l'on étudie un modèle tridimensionnel. Des essais de compression triaxiale qui est un cas de chargement général



auraient pu apporter des informations nécessaires pour procéder au calage des paramètres du modèle.

La CIGELE dispose dans ses locaux d'une cellule de tests triaxiaux avec une pression de confinement maximale pouvant atteindre 20MPa, les essais n'ont pu être réalisés car la commande de cette cellule s'est faite sur la base d'éprouvettes larges de diamètre égal à 10cm. Cependant, les limitations de l'accumulation de la glace dans le tunnel réfrigéré ne permettent pas d'obtenir des éprouvettes de cette dimension.

#### **4.7.1 Test de compression uniaxiale**

Le test de compression uniaxiale est de loin le test le plus répandu dans l'ingénierie de la glace. Il se déroule le plus souvent à taux de déformation constant. La force appliquée à l'éprouvette varie de telle manière à maintenir une vitesse de déformation constante ( $\dot{\epsilon}$ ). Le déplacement relatif du piston est contrôlé sur la machine de test à boucle fermée en fonction du déplacement de l'extensomètre fixé sur l'éprouvette. Les déformations sont mesurées au niveau du centre de l'éprouvette. Les résultats de ces tests sont utilisés afin de relier la résistance de la glace (maximum de la courbe contrainte-déformation) au taux de déformation (Derradji-Aouat 1992).

Druez et al. (Druez, Nguyen et al. 1986) ont effectué des tests de compression uniaxiale sur de la glace atmosphérique accumulée à différentes températures ( $-2^{\circ}\text{C}$ ,  $-6^{\circ}\text{C}$ ,  $-10^{\circ}\text{C}$ ,  $-15^{\circ}\text{C}$ ), en utilisant les vitesses de vents (4 m/s, 8 m/s, 15 m/s, 20 m/s) respectivement, et différentes valeurs de teneurs en eau (0,4 et 0,8 g/m<sup>3</sup>). La

glace fut testée à la même température utilisée pour l'accumulation et à deux différentes vitesses de déformation:  $1,2 \cdot 10^{-3} \text{s}^{-1}$  et  $4,33 \cdot 10^{-2} \text{s}^{-1}$ .

Une série de tests a été effectuée par (Koosheh 2007) couvrant un large domaine de vitesses de déformation en compression uniaxiale à différentes températures. L'accent a été mis au cours de ce travail sur le comportement fragile de la glace atmosphérique. La glace a été accumulée dans les mêmes conditions que celles retenues pour notre étude, mais en utilisant trois différentes températures ( $-6^\circ\text{C}$ ,  $-10^\circ\text{C}$  et  $-20^\circ\text{C}$ ). Les tests ont été effectués avec les mêmes températures utilisées pour l'accumulation. Des tests additionnels à différentes températures pour la glace accumulée à  $-10^\circ\text{C}$  ont été réalisés afin de déterminer l'influence de ce paramètre sur la résistance en compression de la glace atmosphérique. Les résultats obtenus ont montré que la résistance de la glace augmente avec la diminution de la température de test et l'augmentation du taux de déformation jusqu'à la transition ductile-fragile qui a été identifiée pour un taux de déformation autour de  $\dot{\epsilon} = 10^{-3} \text{s}^{-1}$ .

Les tests réalisés au cours de notre projet ont été menés dans une chambre froide maintenue à la même température utilisée pour l'accumulation ( $-10^\circ\text{C}$ ), les vitesses de déformation s'étalaient de  $10^{-5} \text{s}^{-1}$  à  $10^{-3} \text{s}^{-1}$ . Les déformations ont été mesurées en utilisant un extensomètre fixé directement sur les éprouvettes. Les déplacements et la force appliquée par la cellule de charge de la machine ont été enregistrés sur un ordinateur relié à la machine et disposé à l'extérieur de la chambre froide. Chaque test a été répété au minimum cinq fois afin de s'assurer d'une certaine « répétabilité » des résultats.

#### 4.7.2 Test de flexion trois-points

Les comportements en compression et en traction des matériaux fragiles sont différents. Alors que les tests de compression ne présentent aucune difficulté de mise en œuvre, la réalisation des tests de traction peut s'avérer être un réel défi technique pour cette classe de matériaux. Dans l'impossibilité de réaliser un tel essai, il est possible de lui substituer un essai de flexion trois-points ou un essai brésilien, le choix pour nous s'est porté sur l'essai de flexion trois-points. Ce test est destiné à vérifier l'aptitude du matériau à subir une flexion sans rompre. L'éprouvette qui est généralement de forme prismatique repose sur deux supports, alors qu'un piston vient appliquer une force au milieu de la partie supérieure. Le matériau devient sujet à une sollicitation combinée de type traction-compression. La partie supérieure par rapport à ce plan se trouve en état de compression, alors que la partie inférieure est en traction. La surface de fibres neutres désigne le plan du prisme qui ne subit aucune déformation notable.

Koosheh (Koosheh 2007) a effectué des tests de flexion trois-points à différentes températures ( $-3\text{ }^{\circ}\text{C}$ ,  $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$  et  $-20\text{ }^{\circ}\text{C}$ ) sur de la glace atmosphérique accumulée à  $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Les taux de déformations couvraient l'intervalle allant de  $3 \cdot 10^{-5}\text{s}^{-1}$  à  $2 \cdot 10^{-3}\text{s}^{-1}$ . Il a été constaté que la résistance à la flexion est inversement proportionnelle à la diminution de la température pour les faibles vitesses de déformations, et que la température n'avait aucun effet pour les vitesses de déformation élevées. Aussi, selon la température du test, augmenter la vitesse de déformation peut augmenter ou diminuer la résistance de la glace.

Les tests réalisés au cours de notre projet reprennent la méthodologie décrite dans (Koosheh 2007), mais sont limités à la température de  $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$ . La Figure 4.4 montre un exemple d'une éprouvette taillée au microtome. La vitesse de déformation est déterminée selon la théorie de flexion des poutres par :

$$\dot{\varepsilon} = 6h\delta/L^2 \quad (4.1)$$

tel que  $h$  et  $L$  représentent l'épaisseur et la longueur de la poutre respectivement et  $\delta$  désigne la vitesse de déplacement de l'actionneur hydraulique de la machine de test.

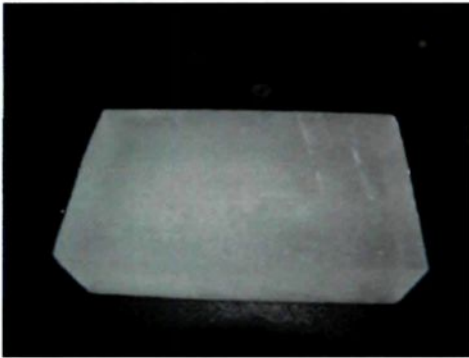


Figure 4.4: Exemple d'éprouvette de test en flexion trois-points

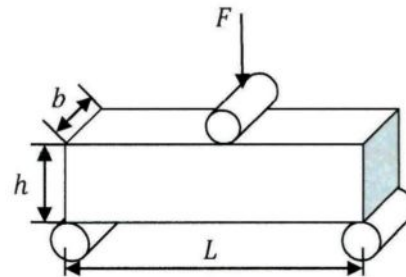


Figure 4.5: Configuration de tests pour la flexion trois-points

La force normale à la face supérieure est appliquée au milieu de la poutre comme le montre le schéma sur la Figure 4.5 au moyen d'un actionneur hydraulique équipé d'un LVDT qui mesure son déplacement. La force appliquée et le déplacement de l'actionneur ont été enregistrés par un système d'acquisition de données situé à l'extérieur de la chambre froide. Les tests ont été répétés un minimum de cinq fois pour chaque vitesse sélectionnée afin de s'assurer de la « répétabilité » des résultats.

## 4.8 Résultats obtenus et discussion

### 4.8.1 Compression uniaxiale

La Figure 4.6 présente la variation de la résistance à la compression en fonction de la vitesse de déformation imposée. L'augmentation de la résistance à la compression avec l'augmentation de la vitesse de déformation en compression rapportée dans la littérature pour les différents types de glace (glace d'eau douce, ou glace des océans) est observée aussi pour la glace atmosphérique. Les valeurs des moyennes et les bornes supérieures et inférieures sont présentées sur le graphique.

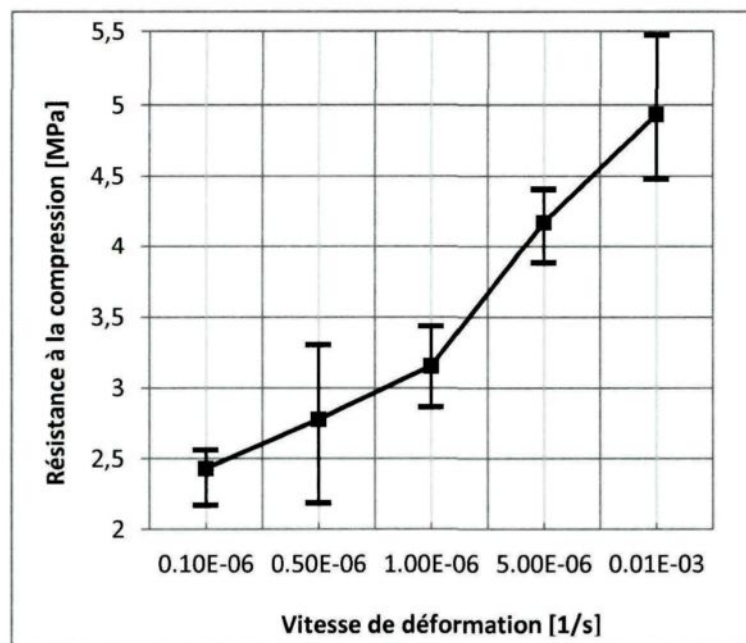


Figure 4.6: Variation de la résistance en compression en fonction de la vitesse de déformation imposée pour la glace atmosphérique à  $T=-10^{\circ}\text{C}$

La Figure 4.7 présente une comparaison entre les résultats pour la résistance à la compression obtenus dans le cadre de cette étude et des valeurs tirées de la littérature

pour la glace atmosphérique (Druez, Nguyen et al. 1986) et (Koosheh 2007), ainsi que des résultats pour la glace d'eau douce : (Hawkes and Mellor 1972), (Jones 1982) et (Schulson and Canon 1984). Comme mentionné auparavant, l'absence de normes dans l'ingénierie de la glace rend l'établissement de cette comparaison extrêmement difficile, voire impossible (différentes structures, différentes tailles des éprouvettes, différentes tailles de grains...etc). Les écarts entre les différentes estimations pour la glace d'eau douce sont attribués essentiellement à la différence de taille et de forme des éprouvettes utilisées dans ces différentes études.

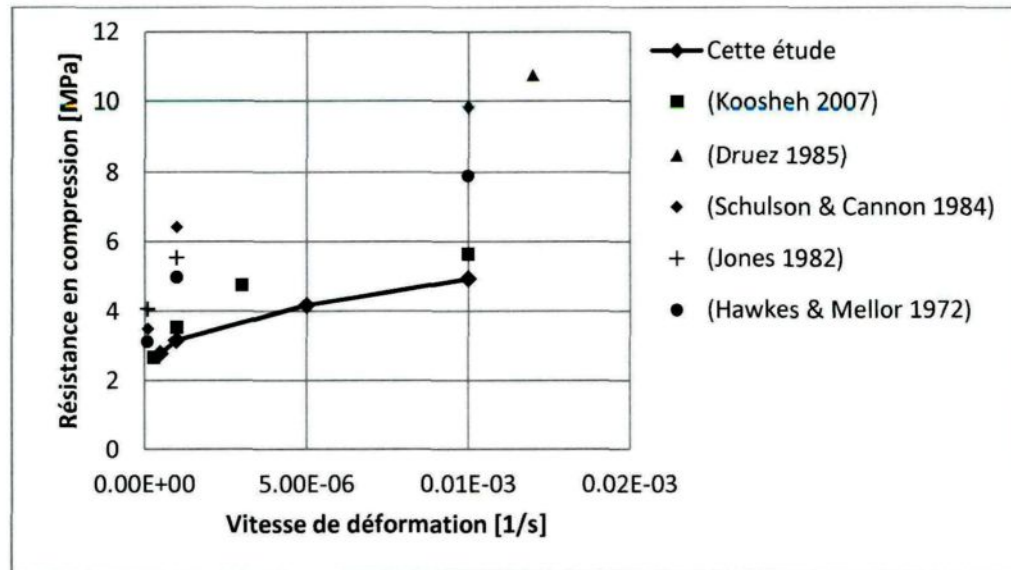


Figure 4.7: Comparaison des résultats de la résistance en compression obtenue dans cette étude et des résultats provenant d'autres études pour la glace atmosphérique et la glace d'eau douce

Les conditions d'accumulation et la procédure de test retenues sont les mêmes que celles utilisées par (Koosheh 2007), l'origine de la légère différence entre les résultats de notre étude et celle de Koosheh est méconnue, néanmoins, elles sont d'ordre comparable

et présentent la même tendance. D'autres investigations sont requises pour établir les causes de cette différence.

La Figure 4.8 représente les courbes contraintes-déformations obtenues lors des tests réalisés. Le comportement ductile caractérisé par un pic de contrainte suivi d'une phase d'adoucissement lorsque la glace commence à perdre graduellement sa rigidité est nettement observé sur ces courbes. À des vitesses élevées ( $\dot{\epsilon} \geq 10^{-4} \text{s}^{-1}$ ), l'initiation et la propagation des fissures pouvaient être facilement observées lors des tests. En revanche, pour les vitesses plus faibles, les éprouvettes se déformaient sans montrer de signes visibles de fissuration, et ce, jusqu'à un niveau avancé de la déformation. Aucune référence comprenant des courbes contraintes-déformation pour la glace atmosphérique n'a pu être relevée dans la littérature pour des fins de comparaison.

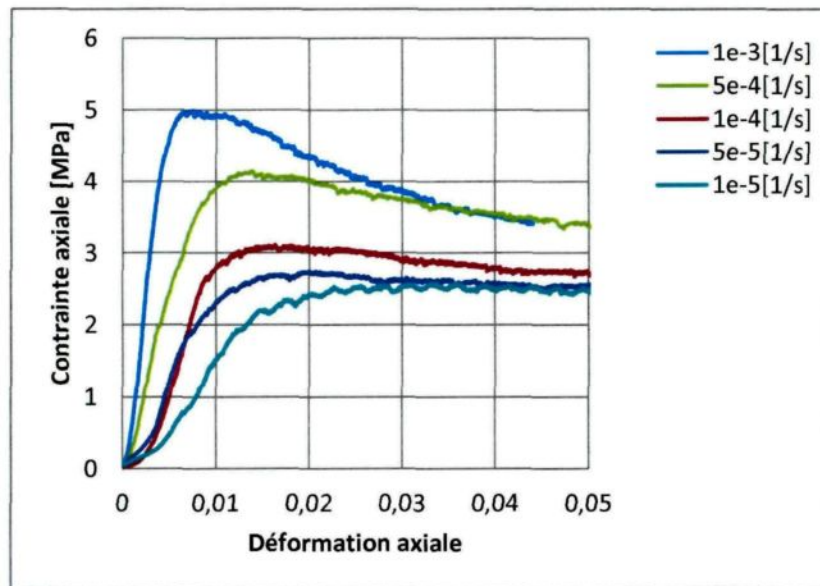


Figure 4.8: Courbes contraintes-déformations pour les tests de compression uniaxiale à  $T = -10^\circ\text{C}$

#### 4.8.2 Flexion trois-points

La résistance à la flexion détermine la contrainte maximale supportée par la poutre avant fendillement ou rupture, elle est exprimée par la formule suivante :

$$\sigma_f = \frac{3FL}{2bh^2} \quad (4.2)$$

où  $\sigma_f$  et  $F$  désignent respectivement la résistance à la flexion et la force appliquée au milieu de l'éprouvette.  $L$ ,  $b$  et  $h$  sont les dimensions de l'éprouvette représentées sur la Figure 4.5.

Des essais de flexion trois-points ont été réalisés pour des vitesses de déformation de  $\dot{\epsilon} = 10^{-4}\text{s}^{-1}$  et  $\dot{\epsilon} = 10^{-5}\text{s}^{-1}$ . La Figure 4.9 reprend les résultats des expériences de flexion effectuées ainsi que les résultats obtenus par (Koosheh 2007). Nos résultats sont en parfait accord avec les résultats obtenus par (Koosheh 2007). On observe une variation linéaire de la contrainte en flexion jusqu'à l'instant de la rupture. La résistance en flexion est la valeur de la contrainte en flexion maximale enregistrée. Aucune tendance particulière qui lie la résistance en flexion à la vitesse de déformation imposée n'est observée.



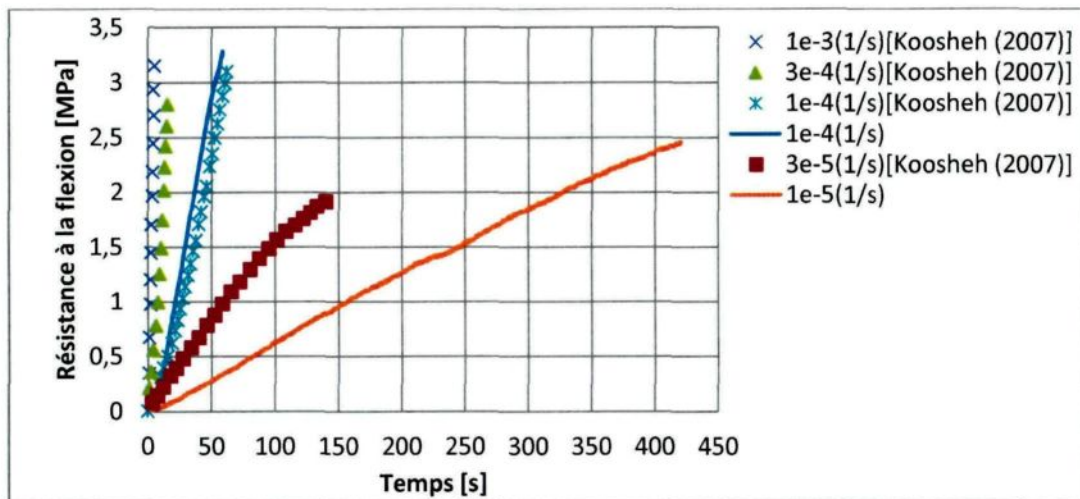


Figure 4.9: Contrainte en flexion de la glace atmosphérique à  $T = -10^{\circ}\text{C}$

Les résultats dans la littérature concernant la glace d'eau douce dont les caractéristiques sont celles qui se rapprochent le plus de celles de la glace atmosphérique, sont en nombre considérable, (Lavrov 1971; Timco and Frederking 1982; Gow and Ueda 1988; Dempsey, Wei et al. 1989). Timco et Frederking (Timco and Frederking 1982) ont utilisé des éprouvettes de dimensions (400 mm X 100 mm X 60 mm) pour des tests de flexion trois- points et quatre-points. Gow et Ueda (Gow and Ueda 1988) ont utilisé des éprouvettes de largeur et hauteur variant entre 78 mm et 140 mm, et de longueur variant aussi entre 710 mm et 1020 mm pour des essais de flexion trois points. Dempsey et al. (Dempsey, Wei et al. 1989) indiquent que la taille de l'éprouvette utilisée peut avoir un effet significatif sur les valeurs obtenues.

La résistance en flexion de la glace atmosphérique testée à une température de  $-10^{\circ}\text{C}$  et à une vitesse de  $10^{-4}\text{s}^{-1}$  est d'environ 3,2 MPa. Timco et Frederking (Timco and Frederking 1982) ont effectué des tests à la même température et à une vitesse

de  $9 \cdot 10^{-5} s^{-1}$ . Ils indiquent que la configuration du test (flexion trois-points ou quatre-points) n'a aucune influence sur la résistance en flexion. Cette dernière est de  $2,2 \pm 0,32$  MPa et de  $1,77 \pm 0,19$  MPa selon si la partie supérieure ou inférieure de la poutre est sollicitée en tension, ceci est dû à une différence dans la taille des grains. De même, (Gow and Ueda 1988) pour leurs tests rapportent des valeurs de  $2,41 \pm 0,29$  MPa et  $1,59 \pm 0,17$  MPa pour des tests de flexion trois-points selon deux configurations : partie supérieure ou inférieure en tension respectivement. Des investigations complémentaires sont toujours requises afin de combler le manque de connaissances à ce sujet.

## **Chapitre 5 : Mise en œuvre informatique, validation et utilisation du modèle**

### **5.1 Introduction**

La formulation du modèle élastoviscoplastique pour la glace d'eau douce présentée au chapitre 3 comprend trois composantes : une composante élastique, une composante viscoélastique et une composante viscoplastique, la déformation totale étant égale à la somme. Les deux composantes visqueuses ainsi que l'endommagement qui sont responsables des non-linéarités matérielles sont exprimés sous forme de taux de variations. Ils doivent, par conséquent, être intégrés au moyen d'un schéma d'intégration approprié (schéma d'Euler explicite, implicite ou autre). L'exploitation de cette loi dans un cadre éléments finis est assurée par l'utilisation du logiciel commercial ABAQUS, la loi de comportement étant fournie sous forme d'une sous-routine utilisateur VUMAT.

L'implémentation du modèle dans l'outil numérique est validée par une série de simulations tirées de la littérature. Dans ce chapitre, nous présentons la méthode d'implémentation du modèle ainsi que les résultats obtenus. Le modèle ayant été à l'origine développé et paramétré pour simuler le comportement de la glace d'eau douce, une identification inverse des paramètres intervenant dans la loi s'impose afin de reproduire le comportement de la glace atmosphérique. Malheureusement, cette opération n'a pu être réalisée en totalité en raison du manque de temps et l'inadéquation de l'équipement pour effectuer les essais requis.

## 5.2 Intégration et implémentation numérique du modèle

Les lois de comportement de type élastoplastiques sont exprimées sous forme d'équations différentielles dont la résolution se fait en utilisant des méthodes numériques. Dans la loi de comportement étudiée, les composantes de déformations viscoélastique et viscoplastique sont exprimées sous forme de taux de variation. De même, les lois d'évolutions gouvernant l'endommagement sont exprimées sous forme d'équations différentielles. Avant de pouvoir exploiter ces relations dans un programme informatique, il est nécessaire de les intégrer en utilisant un schéma d'intégration et de les exprimer dans une forme plus appropriée, permettant d'obtenir, conséquemment à l'accroissement des déformations, la contrainte en  $t + \Delta t$ .

### 5.2.1 Intégration numérique et formulation incrémentale

On retrouve dans la littérature un bon nombre de schémas d'intégration, ces derniers peuvent être groupés en trois classes (des schémas implicites, des schémas explicites et des schémas semi-implicites) selon la position du temps ou de l'espace à laquelle les gradients sont évalués. Les schémas d'Euler rétrograde (implicite) et progressif (explicite) figurent parmi les schémas les plus utilisés dans les calculs numériques. Les schémas implicites sont connus pour être inconditionnellement stables, alors que les schémas explicites requièrent une condition sur l'incrément utilisé et sont par conséquent, conditionnellement stables.

Toute variable  $u$  peut être exprimée au temps  $t_{n+1}$  implicitement ou explicitement en fonction des quantités connues à l'incrément  $t_n$  tel que présenté dans la relation :

$$u_{t+\Delta t} = u_t + \Delta t \cdot [(1 - \alpha)\Xi(u_t) + \alpha \Xi(u_{t+\Delta t})] \quad (5.1)$$

où  $\alpha$  est égal à 1 lorsqu'on est en implicite, et égal à 0 lorsqu'on est en explicite. Toutefois, il est possible de prendre  $\alpha$  égal à 0.5 pour obtenir le schéma semi-implicite de Cranck-Nicholson.

La résolution des problèmes non linéaires par la méthode des éléments finis passe par l'application du chargement graduellement, ce qui provoque des incréments de déplacements et de ce fait, des incréments de déformations. La relation entre les taux de contraintes et de déformations totales peut être exprimée sous une forme semblable à celle utilisée en élasticité linéaire telle que :

$$\dot{\sigma} = [K^{evp}] \dot{\varepsilon} \quad (5.2)$$

où que  $K^{evp}$  désigne la matrice tangente élastoviscoplastique. Pour de petites déformations élastiques, il est possible de décomposer l'incrément de la déformation totale en déformation élastique (élastique instantanée et viscoélastique) et déformations inélastiques (viscoplastiques), tel que :

$$\Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon^e + \Delta \varepsilon^{ve} + \Delta \varepsilon^{vp} \quad (5.3)$$

En combinant les relations (5.2) et (5.3), on peut exprimer la loi de comportement comme suit :

$$\dot{\sigma} = [K^e] \dot{\varepsilon}^e = [K^e] (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^{ve} - \dot{\varepsilon}^{vp}) \quad (5.4)$$

ou encore, sous forme incrémentale par :

$$\Delta\sigma = [K^e]\Delta\varepsilon^e = [K^e](\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon^{ve} - \Delta\varepsilon^{vp}) \quad (5.5)$$

Connaissant l'état de contrainte à l'instant précédent ainsi que son incrément, la mise à jour de l'état de contrainte se fait par :

$$\sigma|^{t+\Delta t} = \sigma|^{t} + \Delta\sigma|^{t+\Delta t} = \sigma|^{t} + [K^e](\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon^{ve} - \Delta\varepsilon^{vp})|^{t+\Delta t} \quad (5.6)$$

Les incréments des déformations viscoélastiques et viscoplastiques sont calculés respectivement à partir des formules (3.23) et (3.24) tels que :

$$\Delta\varepsilon_{ij}^{ve}|^{t+\Delta t} = A \left[ \frac{3}{2} K S_{ij} - \varepsilon_{ij}^{ve}|^{t} \right] \Delta t \quad (5.7)$$

$$\Delta\varepsilon_{ij}^{vp}|^{t+\Delta t} = \left( \frac{3}{2} K_n q^{n-1} S_{ij} \right) \Delta t \quad (5.8)$$

Les lois d'évolution de l'endommagement exprimées en (3.46) et (3.52) doivent être elles aussi intégrées et exprimées sous forme incrémentale telles que :

$$\omega^{(1)}|^{t+\Delta t} = \omega^{(1)}|^{t} + \Delta\omega^{(1)}|^{t+\Delta t} \quad (5.9)$$

avec :

$$\Delta\omega^{(1)}|^{t+\Delta t} = \beta_1 \left( \alpha_1 - \omega^{(1)}|^{t} \right) \Delta\varepsilon_{nn}^{ve}|^{t+\Delta t} \quad (5.10)$$

Les équations pour le second mécanisme sont similaires à celles présentées en (5.9) et (5.10) en prenant en compte les changements qui s'imposent.

### 5.2.2 Stratégie de l'implémentation

La stratégie d'implémentation originale du modèle telle que décrite dans (Choi 1989), repose sur l'intégration de la loi de comportement non linéaire au moyen d'itérations successives afin de déterminer, à chaque pas de temps, la contrainte satisfaisant la vitesse de déformation imposée. Pour ce faire, une estimation de la contrainte est utilisée afin de calculer les déformations élastique et viscoélastique pour déduire, par la suite, la vitesse de déformation viscoplastique. La contrainte calculée à partir de la déformation viscoplastique est comparée à l'estimation initiale utilisée. Si elles sont différentes l'une de l'autre, le processus est répété en altérant l'estimation initiale de la contrainte jusqu'à ce que la loi constitutive soit satisfaite. La contrainte ainsi calculée est utilisée pour mettre à jour le tenseur d'endommagement pour l'incrément de temps suivant.

Pour les besoins de l'implémentation dans ABAQUS, l'algorithme de résolution est modifié afin de lui conférer une plus grande simplicité de mise en œuvre. La différence essentielle concerne le calcul des composantes de déformations élastique, viscoélastique et viscoplastique. Pour ce faire, on considère que le premier incrément de déformation est le fait d'une contribution exclusivement élastique. Les contributions de la visocélasticité et de la viscoplasticité ne sont considérées comme effectives qu'à partir du second incrément. La contrainte est déduite en utilisant la loi de Hooke. En disposant de toutes les données nécessaires, les variables d'endommagement peuvent être calculées pour mettre à jour le tenseur d'endommagement. La Figure 5.1 présente un organigramme de la procédure proposée.

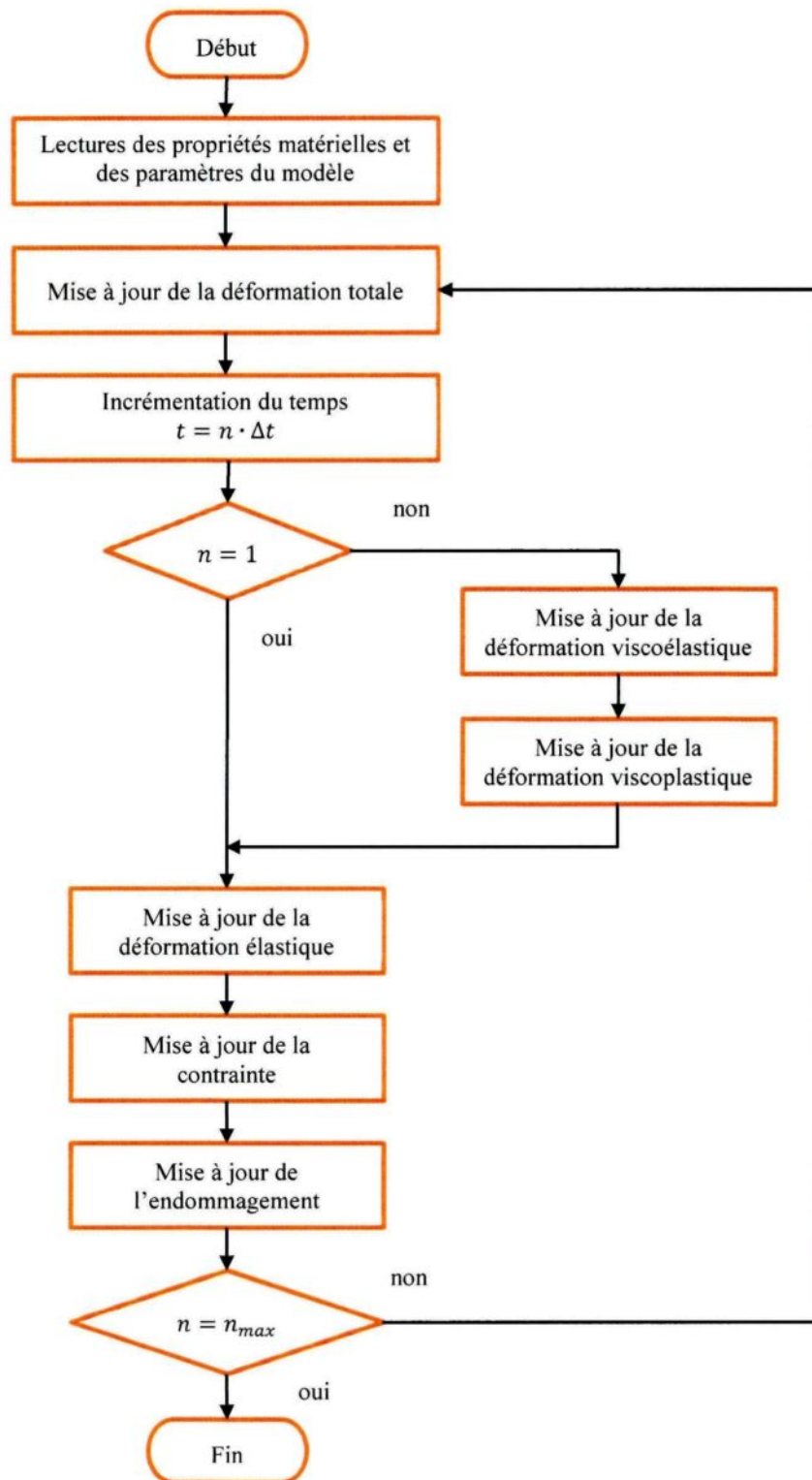


Figure 5.1: Organigramme adopté pour le calcul de la contrainte et des déformations



### **5.3 Validation du développement dans Maple**

Afin de démontrer la validité de l'approche décrite dans la section précédente, on a implémenté le modèle, dans une première étape, sur le logiciel de calcul formel Maple. Les résultats obtenus sont comparés aux résultats de Choi sur un seul point d'intégration pour différentes situations de chargement, comprenant : compression uniaxiale, tension et compression triaxiale (uniaxiale confinée). Dans cette section, nous démontrons que le changement dans la stratégie d'implémentation du modèle affecte d'une façon négligeable le calcul des composantes de déformations, mais n'a aucune répercussion sur la réponse globale du modèle.

#### **5.3.1 Compression uniaxiale**

Des simulations de tests de compression uniaxiale à taux de déformation constants ont été réalisées. La Figure 5.2 présente les différentes courbes obtenues pour les différents taux de déformation couvrant l'intervalle entre  $10^{-6} \text{ s}^{-1}$  et  $10^{-3} \text{ s}^{-1}$ . Des points sélectionnés à partir de (Choi 1989) sont représentés à titre de comparaison. La correspondance existante entre les résultats indique que l'implémentation est réussie dans le cas de la compression uniaxiale. Le modèle parvient à représenter l'influence de la vitesse de déformation sur le comportement de la glace d'eau douce en compression. La perte de la rigidité consécutive à l'endommagement du matériau est très importante aux vitesses élevées comparativement aux faibles vitesses où le matériau adopte un comportement élastique parfaitement plastique.

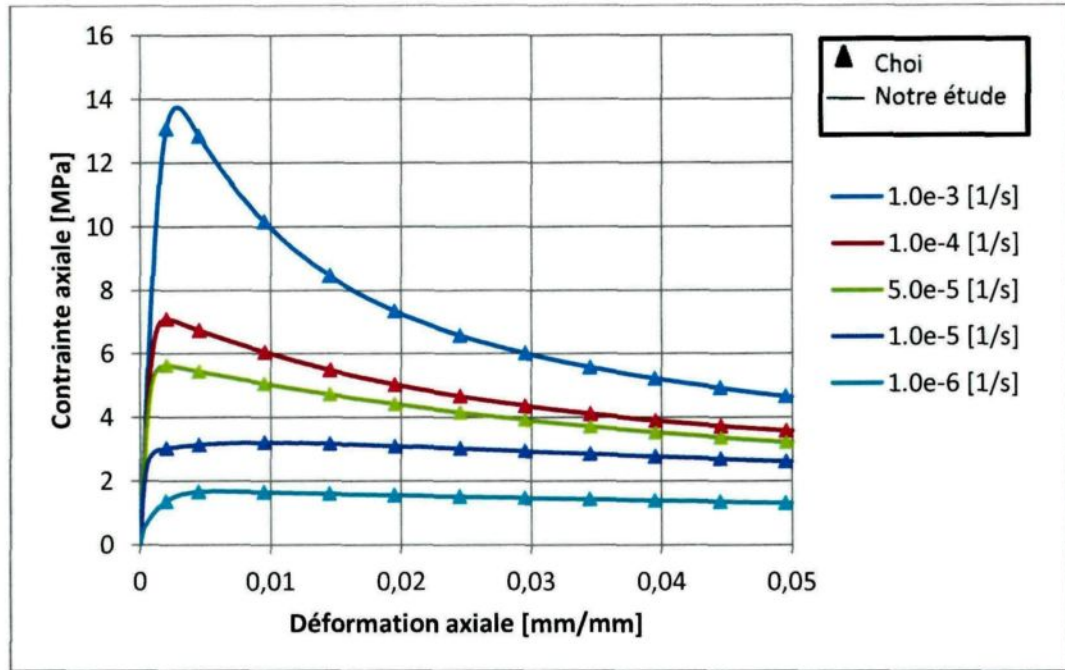


Figure 5.2: Courbes contraintes-déformations pour différents taux de déformation imposés

Afin de nous conforter dans notre démarche, nous avons pensé à extraire et à comparer les contributions des différentes composantes de déformation. Les Figure 5.3 à Figure 5.5 présentent les courbes obtenues pour deux vitesses de déformation  $\dot{\epsilon} = 10^{-3} \text{ s}^{-1}$  et  $\dot{\epsilon} = 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ . On remarque que la modification dans la stratégie d'implémentation affecte d'une manière négligeable la composante élastique aux hautes vitesses de déformation, ainsi que la composante viscoélastique aux faibles vitesses de déformation. Quant à la déformation viscoplastique qui est le mécanisme de déformation dominant, elle n'est pas du tout affectée.

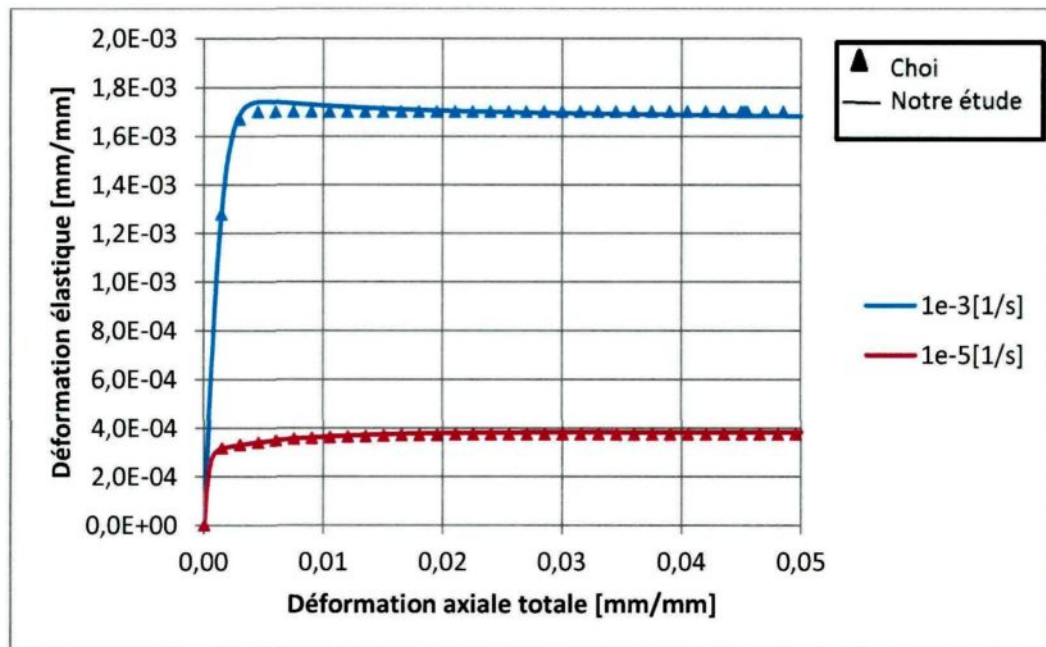


Figure 5.3 : Comparaison des évolutions de la déformation élastique avec les deux méthodes d'implémentation

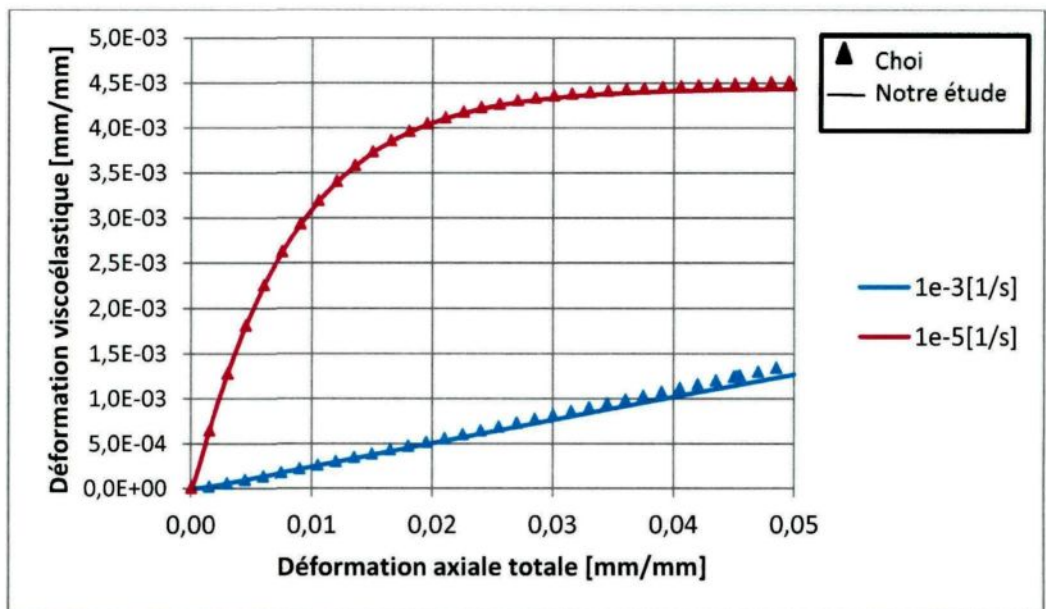
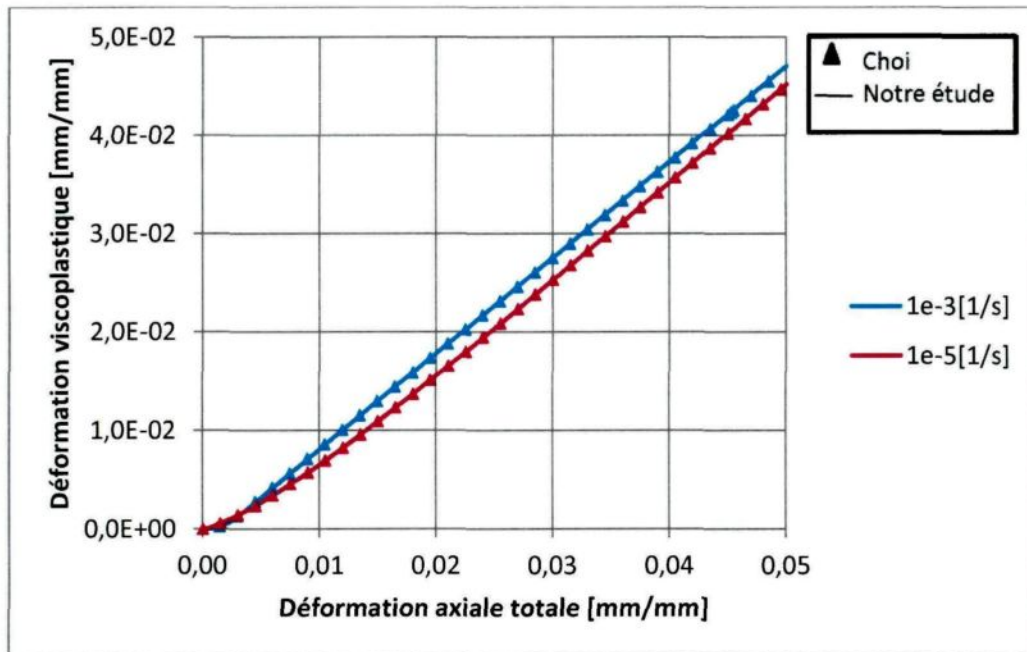


Figure 5.4: Comparaison des évolutions de la déformation viscoélastique avec les deux méthodes d'implémentation



**Figure 5.5: Comparaison des évolutions de la déformation viscoplastique avec les deux méthodes d'implémentation**

La Figure 5.6 présente les évolutions des variables d'endommagement pour une vitesse de déformation égale à  $10^{-3}\text{s}^{-1}$ . Les résultats sont identiques à ceux fournis par (Choi 1989). Bien que le mécanisme d'endommagement lié à la déformation totale soit dominant comparativement à celui lié à la déformation viscoélastique, on a préféré ne pas négliger ce dernier dans l'implémentation car il peut prendre une valeur plus importante à des vitesses moins élevées.

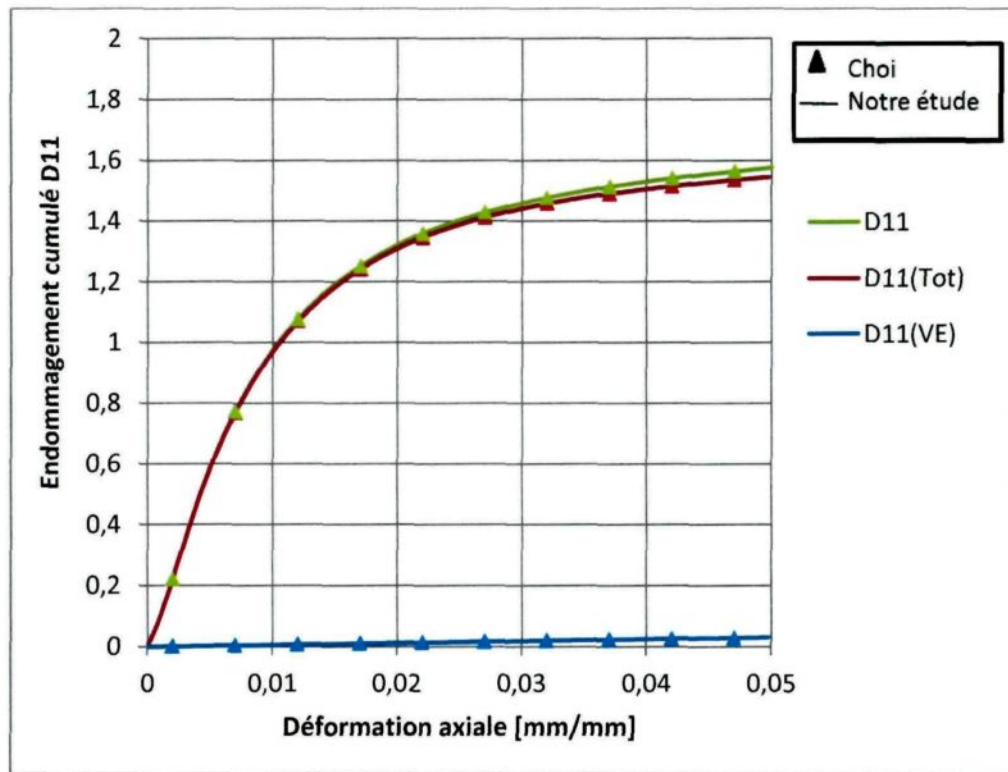


Figure 5.6: Évolution des deux mécanismes d'endommagement D11 liés à la déformation viscoélastique et à la déformation totale

La Figure 5.7 présente les évolutions des déformations volumétriques pour différentes vitesses de déformation. Les déformations viscoplastique et viscoélastique n'apportant pas de changement de volume, la déformation volumétrique est due exclusivement à la déformation élastique. La légère différence notée auparavant dans les évolutions de la composante élastique sur la Figure 5.3 selon les deux stratégies d'implémentations (originale et modifiée) n'apparaît pas ici, ce qui nous conforte dans notre démarche et nous assure que l'erreur commise est sans effet sur la réponse globale. La déformation volumétrique atteint une valeur maximale avant de décroître en raison de



l'évolution des composantes viscoélastique et viscoplastique, ces dernières imprégnant au matériau un comportement quasi-incompressible.

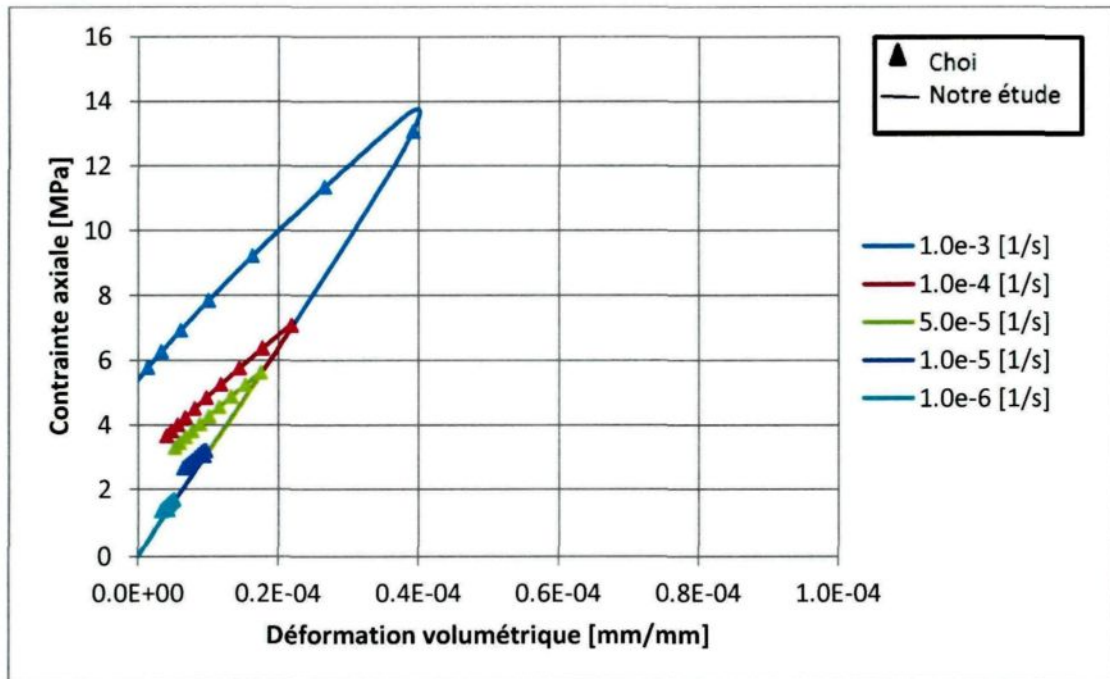
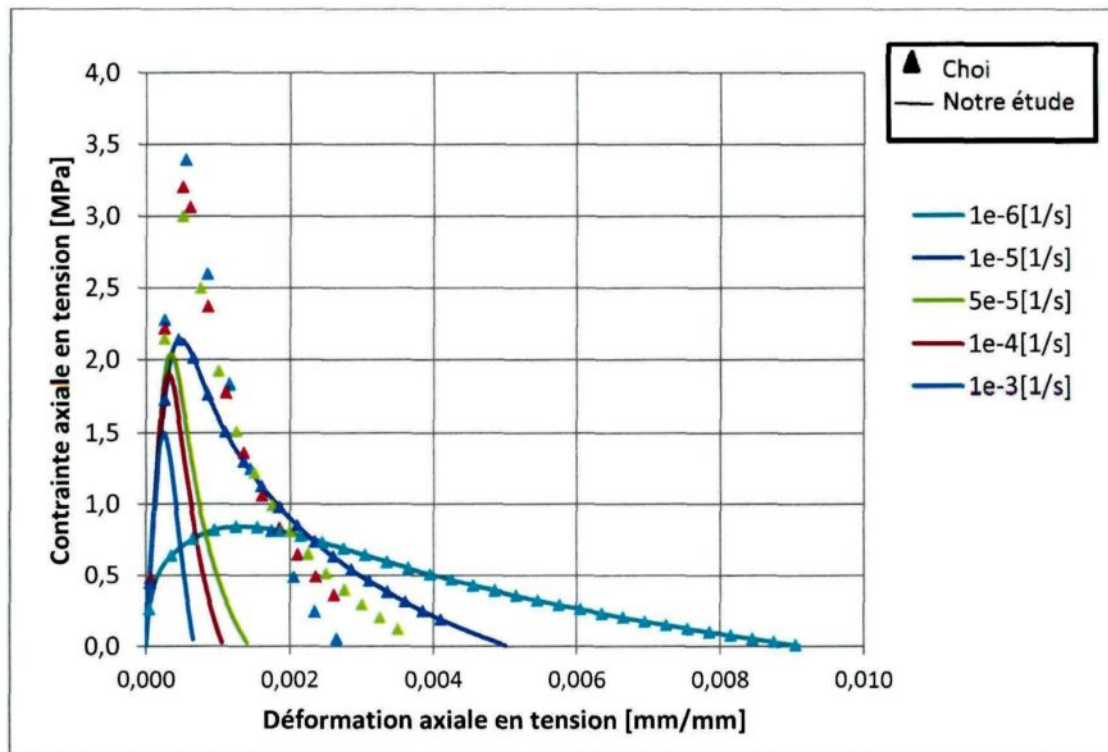


Figure 5.7: Évolution de la déformation volumétrique à différents taux de déformations imposés en compression uniaxiale

### 5.3.2 Test de traction

Très peu de modèles dans la littérature sont identifiés comme étant capables de traiter le cas de la glace en tension. De plus, les résultats fournis ne sont pas représentatifs de la réalité expérimentale. Parmi ces modèles, on peut retrouver le modèle étudié de Choi. Ce fut d'ailleurs l'une de nos motivations essentielles quant à son choix afin de pouvoir simuler ultérieurement la flexion de la glace où se combinent des contraintes de traction, de compression et de cisaillement. La Figure 5.8 présente les courbes obtenues à

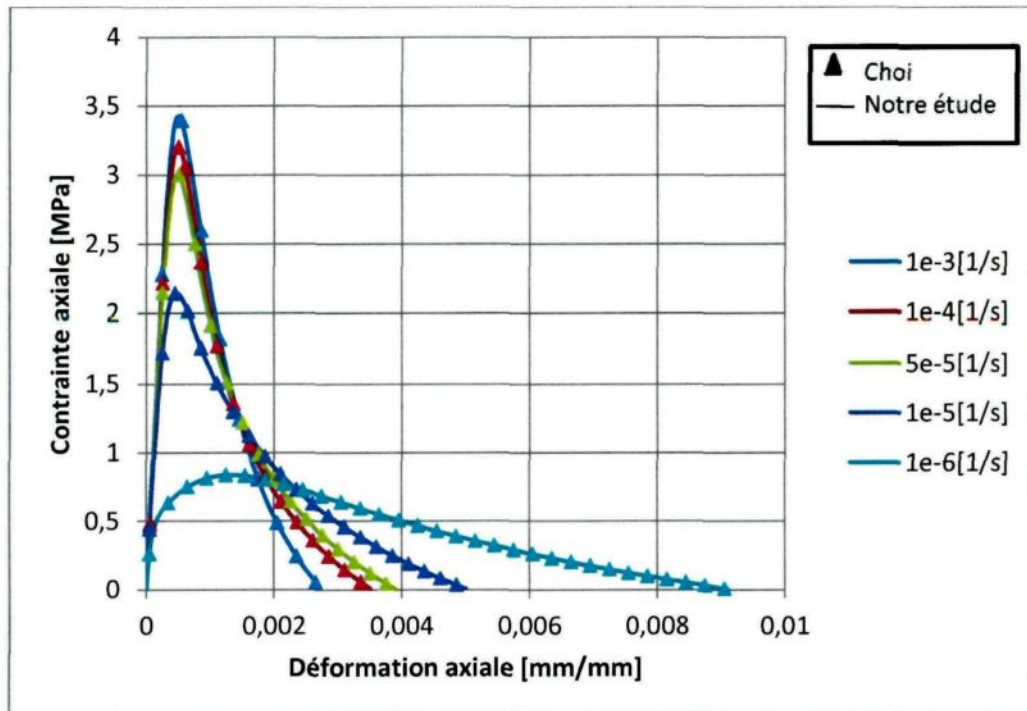
partir de l'implémentation du modèle en tension. On notera que la résistance de la glace en tension est beaucoup plus faible comparativement à sa résistance en compression. On observe aussi que la résistance en tension de la glace prédite augmente jusqu'à la vitesse de déformation  $\dot{\varepsilon} = 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ , mais chute sévèrement pour des vitesses plus élevées.



**Figure 5.8:** Courbes contraintes-déformations pour différents taux de déformation en tension

Les résultats que nous avons obtenu en respectant la formulation du modèle ne correspondaient pas aux résultats présentés dans (Choi 1989) pour les hautes vitesses. Ceci nous a amené à nous questionner au sujet de notre démarche et la possibilité de l'existence d'erreurs ou d'incohérences dans notre implémentation. Choi a gracieusement mis à notre disposition les codes utilisés. Il semblerait que la différence provienne du fait

que Choi a considéré constant le paramètre  $\beta_2$  présent dans l'équation (3.55), et de ce fait, indépendant de la vitesse de déformation. Cependant, aucune mention et/ou motivation n'est fournie à ce sujet dans la littérature. En substituant la valeur de  $\beta_2$  utilisée par Choi dans notre modèle, on retrouve les résultats obtenus par Choi comme l'indique la Figure 5.9.



**Figure 5.9: Courbes contraintes-déformation pour différents taux de déformation imposés en tension ( $\beta_2$  constant)**

En se référant à la Figure 2.8 où les tendances des évolutions de la résistance en compression et en tension sont décrites, on note que les résultats obtenus par le modèle en compression sont en accord ; la résistance en compression augmente avec l'augmentation de la vitesse de déformation. Toutefois, les résultats en tension ne présentent pas la même

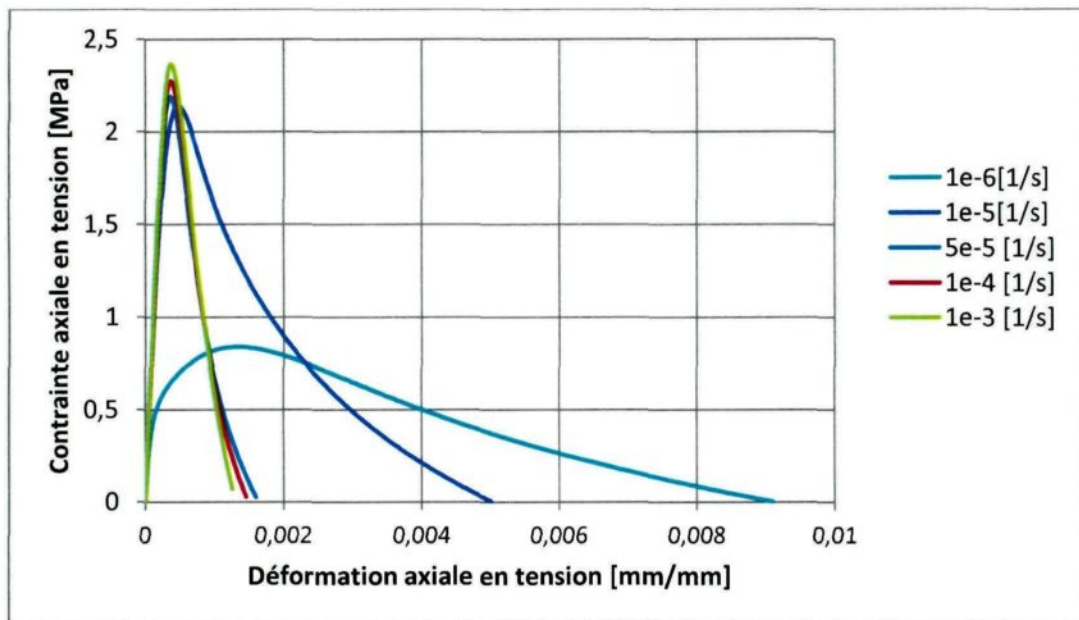


évolution où la résistance augmente jusqu'à une vitesse de déformation de l'ordre de  $\dot{\varepsilon} = 5 \cdot 10^{-6} s^{-1}$ , puis n'est plus affectée par le taux de déformation, cette tendance est confirmée dans les expériences de (Hawkes and Mellor 1972) effectuées à  $-7^{\circ}C$  sur de la glace granulaire avec une taille moyenne des grains de  $0.7 \text{ mm}$ . La glace testée contenait, selon la description, beaucoup d'inclusions d'air. La résistance maximale atteinte en tension était d'environ  $2.25 \text{ MPa}$ .

L'implémentation rigoureuse du modèle approche cette valeur, cependant, la chute brutale de la résistance à  $\dot{\varepsilon} = 10^{-3} s^{-1}$  nous permet d'affirmer que le modèle tel que présenté dans la littérature ne peut être utilisé pour prédire les essais de tension sans y apporter une modification au paramètre  $\beta_2$ . Afin de maintenir une résistance en tension constante aux hautes vitesses de déformations tel que le montrent les observations expérimentales, nous proposons la formulation suivante pour l'évolution du paramètre  $\beta_2$  :

$$\begin{cases} \beta_2 = \beta_2(\dot{\varepsilon}_{nn}) = \xi_2 |\dot{\varepsilon}_{nn}| + \eta_2 & \text{pour } |\dot{\varepsilon}_{nn}| \geq 10^{-5} \\ \beta_2 = 30 & \text{pour } |\dot{\varepsilon}_{nn}| < 10^{-5} \end{cases} \quad (5.11)$$

avec  $\xi_2 = 16500$  et  $\eta_2 = 104.5$ . Ces paramètres devant être déterminés par identification inverse en considérant les résultats de tests en tension. Ne disposant pas d'un outil dédié à cette opération, nous avons procédé par essais et erreurs. Nos résultats avec cette nouvelle formulation qui sont présentés sur la Figure 5.10 respectent adéquatement les observations expérimentales de la Figure 2.8.



**Figure 5.10: Courbes contraintes-déformations pour différentes vitesses de déformations (nouvelle formulation)**

### 5.3.3 Test de compression triaxiale

Le test de compression triaxiale consiste à soumettre une éprouvette généralement cylindrique à un champ de contrainte uniforme au moyen d'un fluide remplissant une cellule (généralement de l'huile hydraulique). Par la suite, on applique une contrainte axiale sur l'éprouvette par l'intermédiaire d'un piston tout en maintenant le confinement initial jusqu'à la rupture de l'éprouvette. Les essais peuvent être effectués à différentes pressions de confinement.

La Figure 5.11 présente les courbes de contraintes-déformations à différentes pressions de confinement à une vitesse de déformation imposée  $\dot{\epsilon} = 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ . Les résultats ici présentés sont également conformes aux résultats de Choi. Le comportement fragile qui caractérise la glace à cette vitesse est atténué par la pression de confinement

qui limite la formation et la propagation de fissures, ce qui permet d'obtenir une résistance en compression plus importante lorsqu'une pression de confinement est imposée. Le modèle prédit une augmentation continue de la résistance en compression avec l'augmentation de la pression de confinement. Jones (Jones 1982) a effectué une série de tests de compression triaxiale sur de la glace polycristalline à vitesse de déformation constante allant de  $10^{-7} s^{-1}$  à  $10^{-1} s^{-1}$  à une température de  $-10^{\circ}C$ . Les éprouvettes avaient un diamètre de  $20mm$  et une hauteur de  $60mm$ . La tendance prédite par le modèle est confirmée par ces expériences, cependant, à très haute pression de confinement ( $85 MPa$ ), les observations expérimentales indiquent que la résistance à la compression chute, alors que le modèle prédit toujours une augmentation de la résistance avec la pression de confinement.

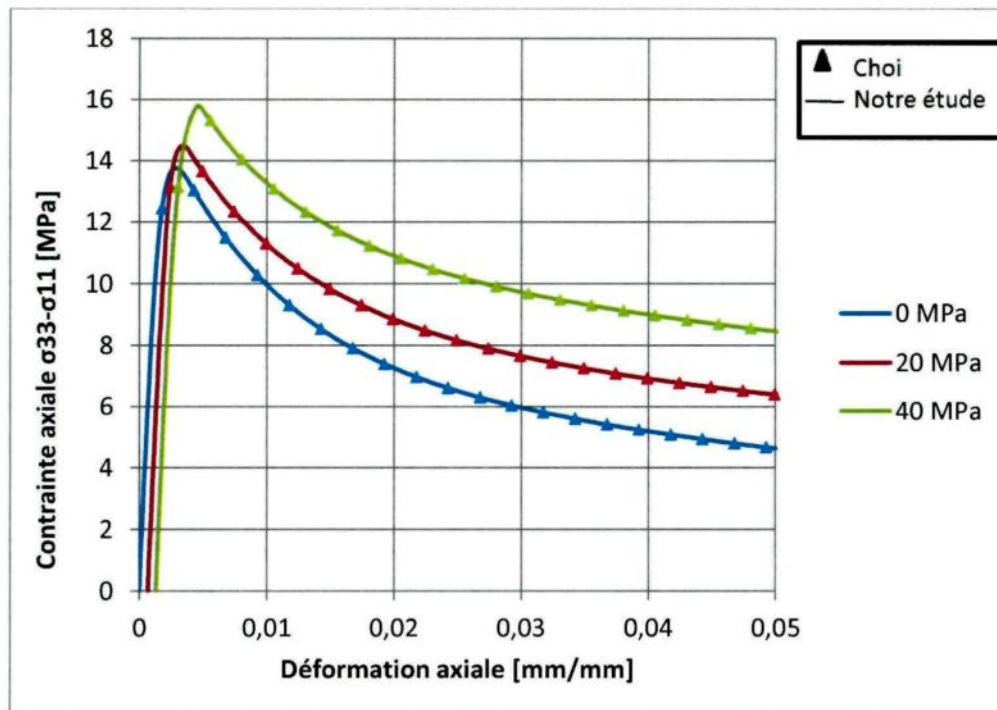


Figure 5.11: Courbes contraintes-déformations à différentes pressions de confinement pour une vitesse de déformation  $1e-3 [1/s]$

## **5.4 Sous-routine utilisateur VUMAT pour ABAQUS**

ABAQUS est l'un des premiers fournisseurs mondiaux de logiciels et de solutions pour l'analyse par éléments finis. Il offre des solutions pour la résolution des problèmes les plus complexes en ingénierie. Il se compose essentiellement de deux produits : ABAQUS/Standard et ABAQUS/Explicit, le premier est un solveur général utilisant un schéma d'intégration implicite (inconditionnellement stable) pour traiter les problèmes de type statique, dynamique à faible vitesse et les problèmes de transport en régime permanent, alors que le second utilise un schéma d'intégration explicite (conditionnellement stable) pour résoudre les problèmes d'analyse à haute vitesse (impacts et chocs), les problèmes en mode non-linéaire ainsi que ceux où la réponse transitoire est dominante.

Comme mentionné auparavant, la résolution des problèmes mécaniques nécessite la connaissance des conditions aux limites, des conditions de chargement ainsi que de la loi de comportement qui relie les déformations aux contraintes. La plupart des logiciels commerciaux d'éléments finis propose en plus d'un large choix de lois de comportement, la possibilité d'implémenter sa propre loi lorsqu'aucun modèle dans la librairie fournie n'est capable de représenter adéquatement le comportement du matériau utilisé. Cette alternative est offerte avec le logiciel ABAQUS, via les sous-routines UMAT et VUMAT dans les modules Standard et Explicit respectivement. Ces interfaces permettent l'implémentation de n'importe quelle loi de comportement quel que soit son degré de complexité, néanmoins, cet exercice nécessite un effort de développement considérable ainsi qu'un nombre important de tests pour s'assurer du bon fonctionnement de la sous-routine.

L'appel de la sous-routine VUMAT se fait à chaque pas de temps sur la base d'un seul point d'intégration. Un certain nombre d'informations est communiqué à la sous-routine, dont les plus pertinents sont :

1. Le temps d'étape, le temps total et l'incrément de temps définis respectivement via les paramètres : *stepTime*, *totalTime* et *dt*.
2. Le tenseur des contraintes de Cauchy *stressOld* définissant l'état de contrainte en chaque point matériel correspondant au début de l'incrément.
3. Les variables historiques *stateOld* en chaque point matériel au début de chaque incrément de temps. Leur nombre est défini par le paramètre *nstatev*. Un espace de mémoire est alloué pour conserver ces quantités.
4. L'incrément de déformation *strainInc* en chaque point matériel.
5. La densité du matériau nécessaire au calcul du pas de temps stable pour les simulations utilisant des schémas explicites, ce pas doit être choisi tel que :

$$\Delta t \leq \min \left( L^{el} \sqrt{\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}} \right) \quad (5.12)$$

où  $L^{el}$  est la longueur caractéristique associée à chaque élément du maillage,  $\rho$  est la densité du matériau.  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé.

Les quantités suivantes doivent être mises à jour à la fin de chaque incrément :

1. Le tenseur des contraintes *stressNew*.
2. Les variables historiques *stateNew*.

Les variables qui dépendent de la solution (variables historiques) sont quant à elles conservées avec des identifiants SDV1, SDV2...etc, elles sont listées dans le Tableau 5.1. Les propriétés matérielles de la glace d'eau douce utilisées dans la sous-routine VUMAT développée sont listées dans le Tableau 5.2. Ces propriétés dont le nombre est défini par le paramètre *nprops* sont introduites via l'interface de définition du matériau d'ABAQUS. Il est utile de rappeler qu'il faut veiller au respect de la consistance des unités et de l'ordre d'introduction des paramètres.

**Tableau 5.1: Liste des variables historiques enregistrées dans ABAQUS**

Description	Désignation	Numéro	Valeur initiale	Unité
Composante du tenseur de déformation élastique	$\epsilon_{11}^e$	STATE(1)	0,0	---
Composante du tenseur de déformation élastique	$\epsilon_{22}^e$	STATE(2)	0,0	---
Composante du tenseur de déformation élastique	$\epsilon_{33}^e$	STATE(3)	0,0	---
Composante du tenseur de déformation élastique	$\epsilon_{12}^e$	STATE(4)	0,0	---
Composante du tenseur de déformation élastique	$\epsilon_{23}^e$	STATE(5)	0,0	---
Composante du tenseur de déformation élastique	$\epsilon_{31}^e$	STATE(6)	0,0	---
Composante du tenseur de déformation viscoplastique	$\epsilon_{11}^v$	STATE(7)	0,0	---
Composante du tenseur de déformation viscoplastique	$\epsilon_{22}^v$	STATE(8)	0,0	---
Composante du tenseur de déformation viscoplastique	$\epsilon_{33}^v$	STATE(9)	0,0	---
Composante du tenseur de déformation viscoplastique	$\epsilon_{12}^v$	STATE(10)	0,0	---
Composante du tenseur de déformation viscoplastique	$\epsilon_{23}^v$	STATE(11)	0,0	---
Composante du tenseur de déformation viscoplastique	$\epsilon_{31}^v$	STATE(12)	0,0	---
Composante du tenseur de déformation viscoélastique	$\epsilon_{11}^{ve}$	STATE(13)	0,0	---
Composante du tenseur de déformation viscoélastique	$\epsilon_{22}^{ve}$	STATE(14)	0,0	---
Composante du tenseur de déformation viscoélastique	$\epsilon_{33}^{ve}$	STATE(15)	0,0	---
Composante du tenseur de déformation viscoélastique	$\epsilon_{12}^{ve}$	STATE(16)	0,0	---
Composante du tenseur de déformation viscoélastique	$\epsilon_{23}^{ve}$	STATE(17)	0,0	---
Composante du tenseur de déformation viscoélastique	$\epsilon_{31}^{ve}$	STATE(18)	0,0	---
Composante du tenseur de déformation totale	$\epsilon_{11}$	STATE(19)	0,0	---
Composante du tenseur de déformation totale	$\epsilon_{22}$	STATE(20)	0,0	---
Composante du tenseur de déformation totale	$\epsilon_{33}$	STATE(21)	0,0	---
Composante du tenseur de déformation totale	$\epsilon_{12}$	STATE(22)	0,0	---
Composante du tenseur de déformation totale	$\epsilon_{23}$	STATE(23)	0,0	---
Composante du tenseur de déformation totale	$\epsilon_{31}$	STATE(24)	0,0	---

**Tableau 5.2: Paramètres matériels utilisés en entrée dans ABAQUS**

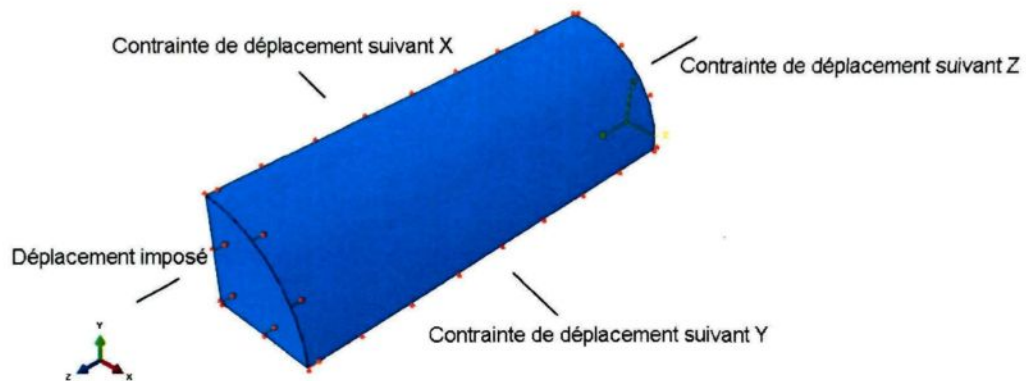
Propriété matérielle	Désignation	Numéro	Valeur	Unité
Module de Young	E	PROPS(1)	9,5e9	[Pa]
Coefficient de Poisson	$\nu$	PROPS(2)	0,35	---
Paramètre matériel dans l'équation (3.39)	$K_n$	PROPS(3)	3.7410723e-26	[Pa/s]
Paramètre matériel dans l'équation (3.38)	A	PROPS(4)	15.0e-4	[1/s]
Paramètre matériel dans l'équation (3.38)	K	PROPS(5)	1.2e-9	[Pa <sup>-1</sup> ]
Paramètre matériel dans l'équation (3.35)	$C_1$	PROPS(6)	1370e+06	---
Paramètre matériel dans l'équation (3.35)	$C_2$	PROPS(7)	-3420e+06	---
Paramètre matériel dans l'équation (3.48)	$\gamma_1$	PROPS(8)	1.0e-06	[Pa <sup>-1</sup> ]
Paramètre matériel dans l'équation (3.54)	$\gamma_2$	PROPS(9)	1.0e-06	[Pa <sup>-1</sup> ]
Paramètre matériel dans l'équation (3.49)	$\xi_1$	PROPS(10)	100.	---
Paramètre matériel dans l'équation (3.55)	$\xi_2$	PROPS(11)	160.	---
Paramètre matériel dans l'équation (3.49)	$\eta_1$	PROPS(12)	525	---
Paramètre matériel dans l'équation (3.55)	$\eta_2$	PROPS(13)	830	---

## 5.5 Simulations de tests sur ABAQUS

Le modèle tel que décrit est capable de reproduire différents scénarios de chargement, néanmoins, il présente une certaine difficulté de mise en œuvre en raison de la formulation adoptée pour l'endommagement. En effet, le modèle dans sa formulation actuelle est simplifié afin d'être utilisé pour simuler des cas simples de chargement uniaxial, incluant : la compression avec ou sans confinement, la tension, le chargement cyclique. La simulation d'un cas général de chargement tridimensionnel tel qu'il pourrait se produire dans la nature requiert l'emploi d'une formulation plus générale de l'endommagement décrite au chapitre 3. Dans ce qui suit, nous présentons les résultats obtenus de nos simulations pour certains cas simples. Ceux-ci sont comparés aux résultats tirés de la littérature afin d'attester de la validité de l'implémentation de la sous-routine.

### 5.5.1 Compression uniaxiale

Dans ce qui suit, nous présentons en détail un exemple de compression uniaxiale traité sur ABAQUS en utilisant la sous-routine VUMAT. La compression est effectuée à un taux de déformation constant de  $10^{-5}\text{s}^{-1}$ . On utilisera une géométrie simple représentant un quart de cylindre de rayon  $15\text{mm}$  et de hauteur  $60\text{mm}$  avec un maillage composé d'éléments C3D8R (cubes à 8 nœuds et à intégration réduite à un point de Gauss). Une condition limite en déplacement est imposée selon la direction  $(-z)$ , des déplacements nuls sont prescrits sur les autres faces (Figure 5.12).



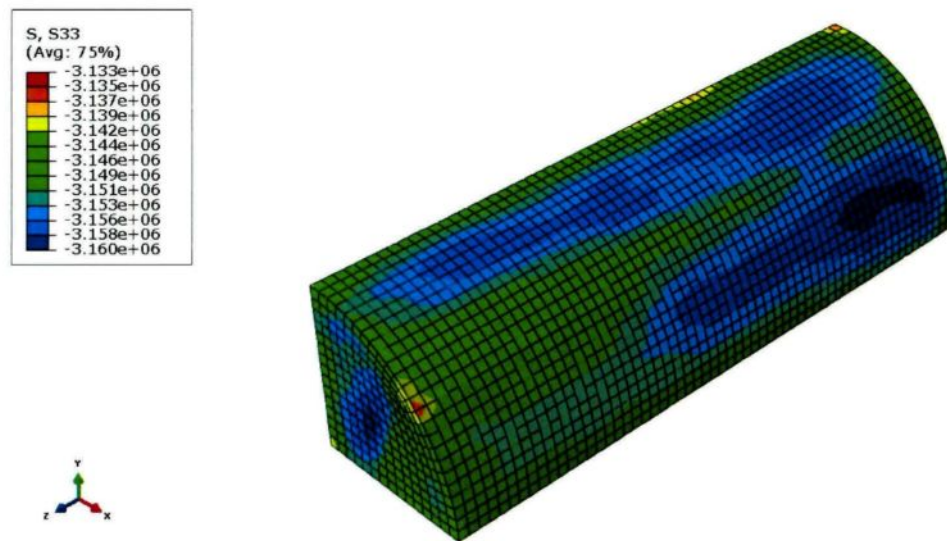
**Figure 5.12: Géométrie et conditions aux limites imposées sur ABAQUS pour les simulations des tests de compression uniaxiale à taux de déformation imposé**

Le choix de cette vitesse de déformation relativement lente est dû au fait qu'à des vitesses plus élevées, la perte de rigidité due à l'endommagement réduit considérablement le pas de temps stable nécessaire pour effectuer la simulation, de ce fait, le temps CPU total requis peut s'avérer considérablement important. Pour les besoins



de la simulation, on peut se contenter d'une déformation de l'ordre de 2% qui correspondrait donc à un déplacement axial de 1,2 *mm*.

La distribution des contraintes dans le quart du cylindre à la fin de la simulation ( $t = 2000s$ ) correspond au résultat du modèle obtenu sur Maple. La Figure 5.13 présente la distribution des contraintes selon ( $z$ ), celles-ci atteignent une valeur uniforme d'environ 3,15 *MPa*. La Figure 5.14, quant à elle, présente la distribution des contraintes selon la direction ( $x$ ). La distribution selon ( $y$ ) étant quasiment similaire, on a choisi de ne représenter que l'une des deux. Les quelques fluctuations qui apparaissent sont conséquentes des erreurs d'arrondis dans le calcul, ces dernières peuvent être nettement atténuées en imposant un incrément de temps plus faible. Les déplacements obtenus  $U_3$  et  $U_1$  sont représentés sur les Figure 5.15 et Figure 5.16. Comme on pouvait le prévoir, les déplacements sur les deux faces de la pièce correspondent aux conditions aux limites imposées.



**Figure 5.13: Distribution des contraintes  $\sigma_{33}$  dans le quart de cylindre**

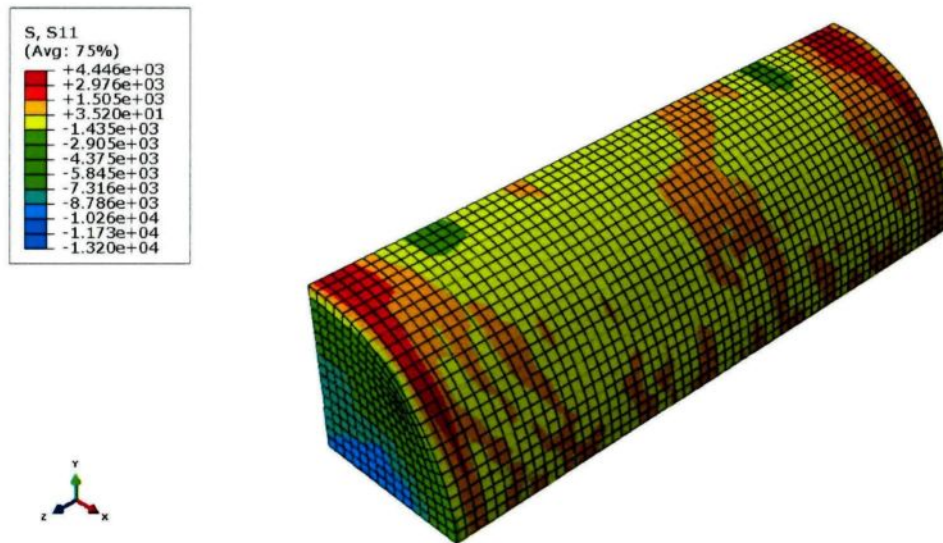


Figure 5.14: Distribution des contraintes  $\sigma_{11}$  dans le quart de cylindre

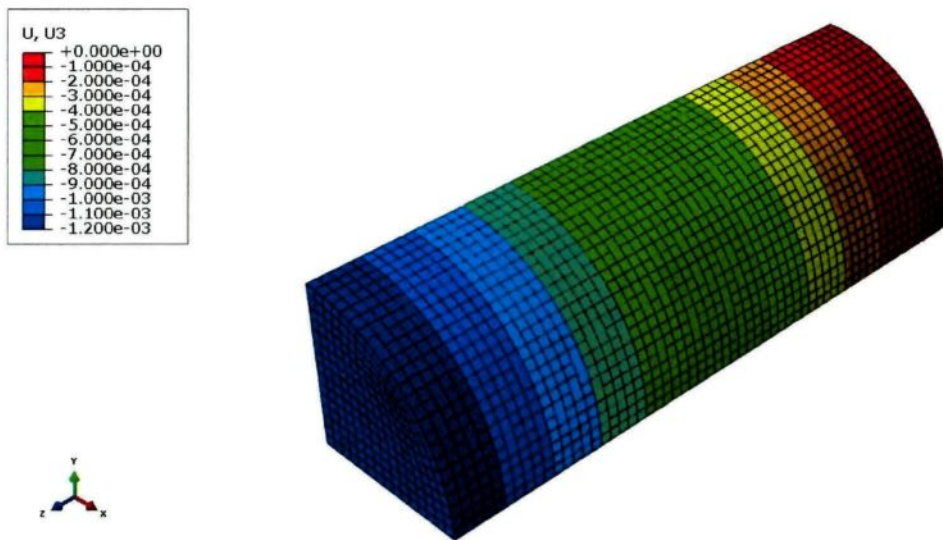


Figure 5.15: Profil des déplacements axiaux  $U_3$

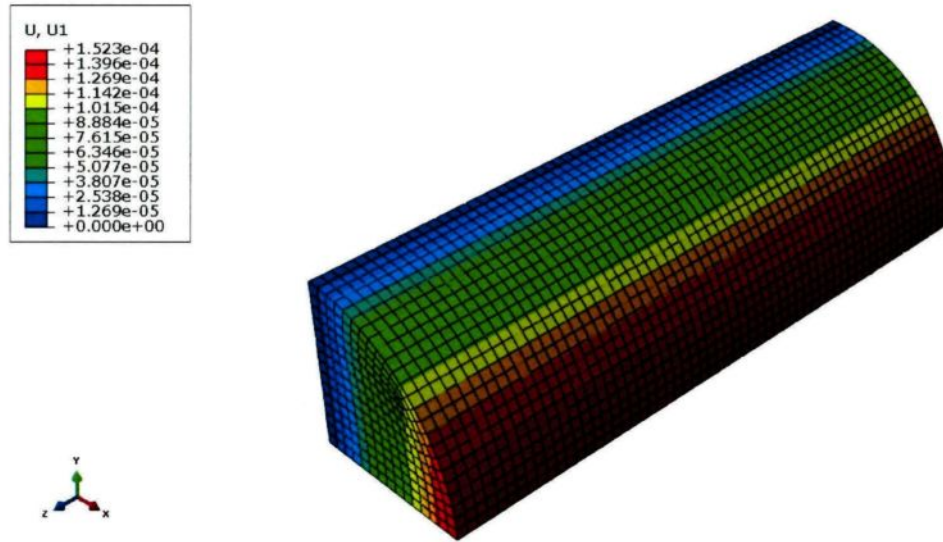
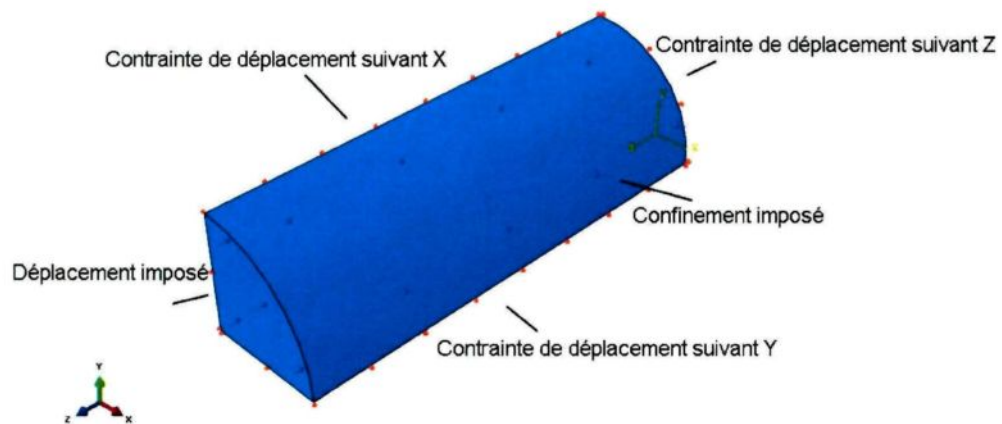


Figure 5.16: Profil des déplacements latéraux  $U_1$

### 5.5.2 Compression triaxiale

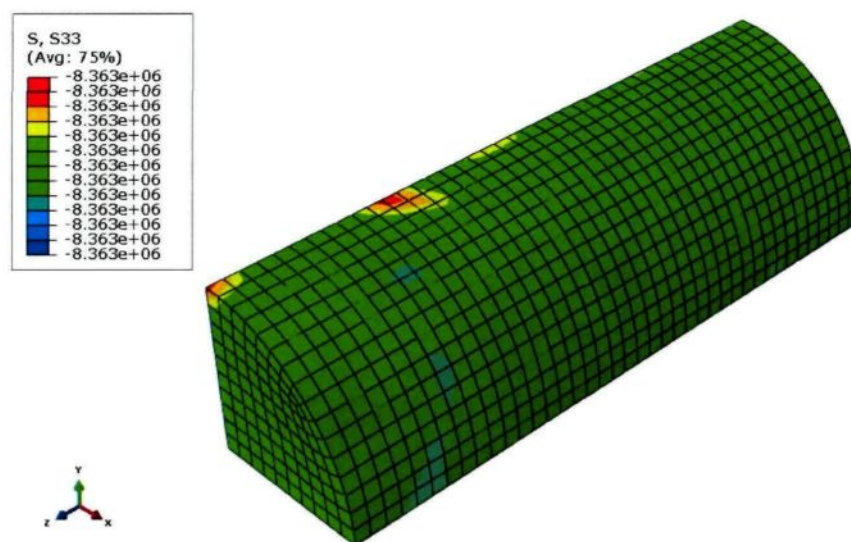
Afin de tester la sous-routine en situation de chargement triaxial sur ABAQUS, on a repris la même géométrie utilisée pour la compression uniaxiale et on a appliqué une pression de confinement. On présente sur la Figure 5.17, la géométrie et les conditions aux limites imposées. Le confinement est appliqué d'une manière uniforme sur la face supérieure et sur la surface latérale de la pièce. Des contraintes en déplacement sont imposées afin de maintenir la pièce dans l'espace selon les directions ( $x$ ) et ( $y$ ). Une fois la pression de confinement atteinte, un déplacement imposé à vitesse constante selon ( $z$ ) est appliqué.



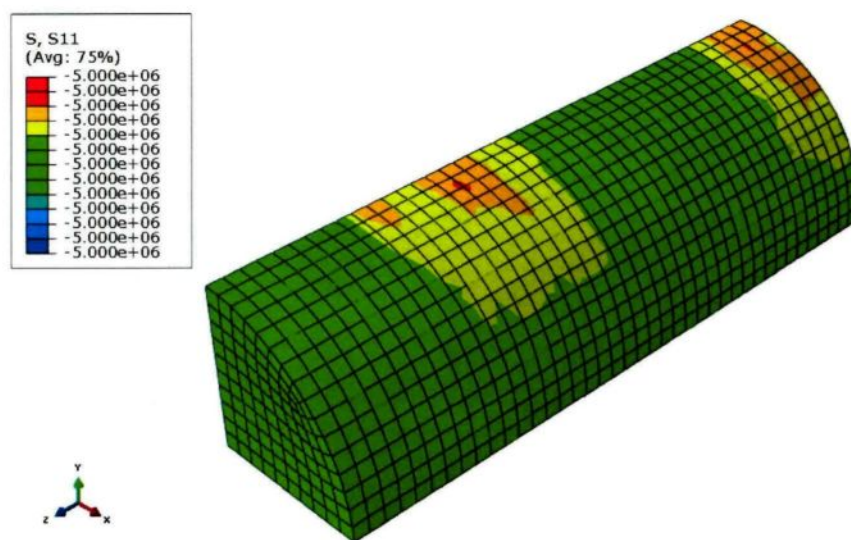
**Figure 5.17: Géométrie et conditions aux limites imposées pour un test de compression uniaxiale confinée**

Dans ce qui suit, nous présentons les résultats obtenus en compression uniaxiale confinée à vitesse de déformation constante  $\dot{\epsilon} = 10^{-5}\text{s}^{-1}$  sur la glace d'eau douce en utilisant une pression de confinement égale à 5 MPa. Les Figure 5.18 et Figure 5.19 présentent les distributions des contraintes axiales et latérales sur la pièce. La distribution des contraintes est uniforme, comme on peut s'attendre, la contrainte  $\sigma_{11}$  est égale à la pression de confinement imposée. La contrainte  $\sigma_{33}$  est égale à la pression de confinement augmentée de la contrainte engendrée par le déplacement imposé.





**Figure 5.18: Distribution des contraintes S33 en compression uniaxiale confinée**



**Figure 5.19: Distribution des contraintes S11 en compression confinée**

La Figure 5.20 présente les résultats de l'évolution des contraintes en fonction de la déformation à une pression de confinement de 5 MPa. Les points concordent avec les résultats du modèle. De ce fait, on peut dire que notre implémentation est parfaitement réussie.

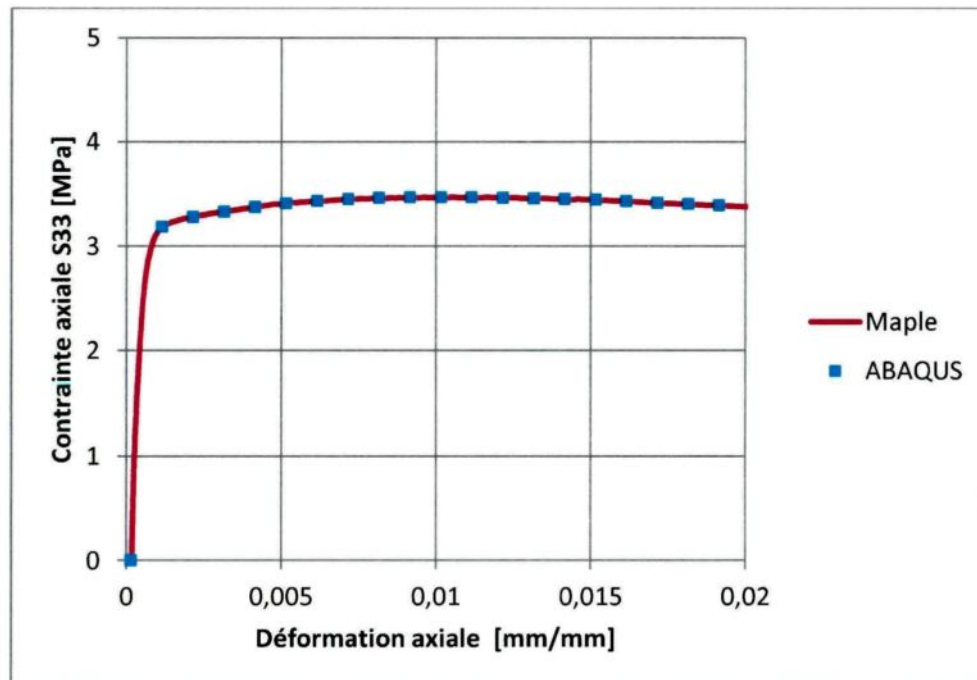


Figure 5.20 : Vérification des résultats du VUMAT pour une compression confinée à 5MPa

## 5.6 Identification des paramètres (glace atmosphérique)

Le problème consiste à déterminer un ou plusieurs paramètres dont dépend le système étudié sur la base de résultats expérimentaux obtenus par le biais d'essais mécaniques. Le principe du problème inverse consiste donc à « caler » ces paramètres de telle manière à ce que les calculs analytiques approchent les observations expérimentales.

### 5.6.1 Stratégie d'identification

L'identification des paramètres du modèle élastoviscoplastique qui fait l'objet de cette étude nécessite la mise en place d'un programme expérimental beaucoup plus élaboré que celui présenté dans le chapitre 4. Faute de temps et de moyens techniques disponibles, cette opération n'a pu être accomplie d'une manière rigoureuse. La Figure 5.21 présente les essais caractéristiques nécessaires afin de déterminer les paramètres du modèle.

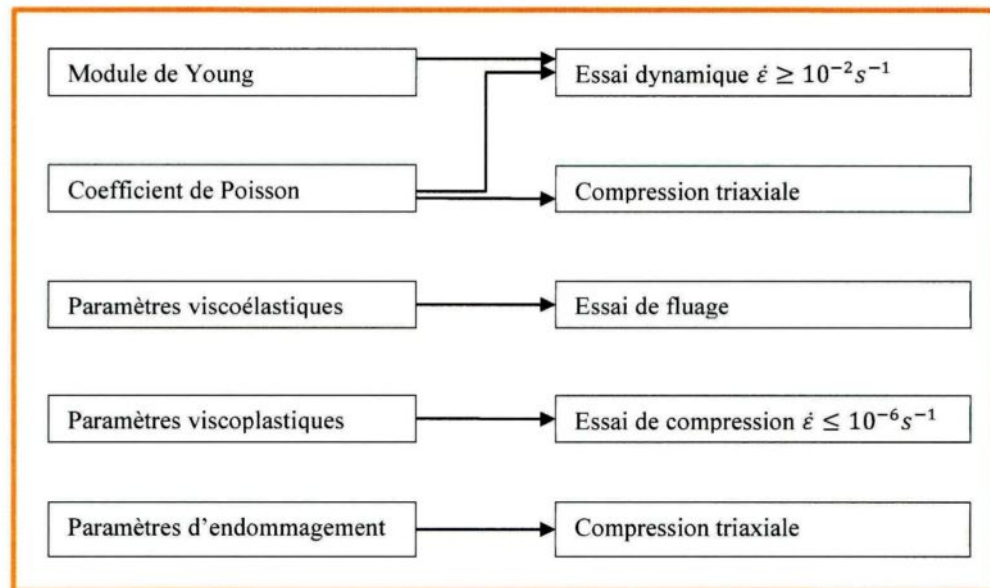


Figure 5.21: Essais caractéristiques pour l'identification des paramètres du modèle

Pour les paramètres plus difficilement identifiables au moyen d'essais, l'identification inverse consiste à simuler numériquement l'expérimentation à l'aide du modèle développé et à identifier, via une technique d'optimisation, les paramètres

permettant l'obtention des mesures observables obtenues en laboratoire. Pour ce faire, on construit une fonction coût à minimiser qui traduit l'erreur entre les valeurs calculées et les valeurs expérimentales, à cette fin, un module d'optimisation couplé au logiciel ABAQUS peut être utilisé tel que montré dans la Figure 5.22.

En partant d'un jeu initial de paramètres (paramètres pour l'eau douce), la fonction coût est estimée, si l'écart entre les valeurs calculées par ABAQUS et les valeurs expérimentales est supérieur à une certaine tolérance, le module d'optimisation iSight calcule un nouveau jeu de paramètres pour refaire la simulation sous ABAQUS, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'écart obtenu soit raisonnable.

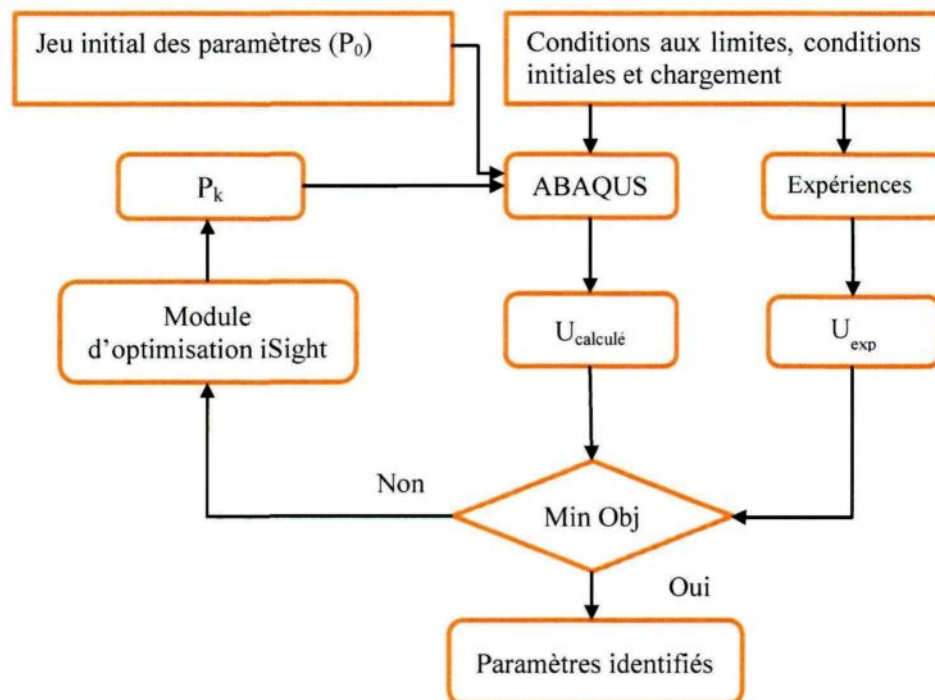


Figure 5.22: Organigramme de l'identification inverse par couplage d'iSight et ABAQUS



### 5.6.2 Élasticité

L'identification des paramètres définissant l'élasticité, à savoir, le module de Young ( $E$ ) ainsi que le coefficient de Poisson ( $\nu$ ), requiert l'utilisation d'un essai de compression à vitesse élevée supérieure à  $10^{-3}\text{s}^{-1}$  où les effets visqueux n'ont pas le temps de se développer, ou encore, vu la nature fragile de la glace, d'effectuer des essais non destructifs (émission d'ultrasons).

Le module de Young correspond à la pente de la courbe qui relie les contraintes aux déformations. Il est d'usage de mesurer cette propriété selon les recommandations de l'ASTM en utilisant deux extensomètres disposés symétriquement sur une éprouvette. Cependant, on ne disposait que d'un seul extensomètre calibré lors des expériences. La mesure effectuée à partir des données recueillies indique une valeur de 3,9 GPa. Koosheh (Koosheh 2007) estime le module de Young à 4,7 GPa pour la glace atmosphérique accumulée à  $-10^{\circ}\text{C}$ .

Déterminer le coefficient de Poisson requiert l'utilisation d'un extensomètre particulier disposé sur une éprouvette cylindrique et mesurant la déformation radiale, ou encore, d'utiliser une cellule de test triaxial et déterminer le coefficient de Poisson au moyen de la mesure de la déformation volumétrique. Toutefois, là aussi, l'équipement nécessaire nous a fait défaut.

### 5.6.3 Viscoplasticité

Les paramètres ( $K_n, n$ ) de la loi de Norton-Bailey utilisée en viscoplasticité doivent être déterminés à partir d'un essai de fluage à faible contrainte ou de compression

uniaxiale à faible vitesse de déformation. L'endommagement dans ces conditions n'est pas très développé tel que les expériences sur la glace le montrent et pourrait par conséquent être complètement exclu du modèle. Les effets élastiques et viscoélastiques disparaissent après un certain temps pour ne laisser que les effets viscoplastiques qui sont de nature permanente.

La détermination de ces deux paramètres passe par la résolution d'un système de deux équations à deux inconnues, toutefois, il est possible de se contenter de déterminer uniquement le paramètre  $K_n$  en maintenant la valeur du paramètre  $n = 3,11$ , ce dernier étant approximativement égal à 3 pour la glace (voir §2.5.3). En considérant l'essai à taux de déformation constant effectué sur la glace atmosphérique à  $\dot{\epsilon} = 10^{-5} s^{-1}$ , la contrainte atteint une valeur de 2,5 MPa. En résolvant l'équation (3.24), nous obtenons une valeur de  $K_n = 5,786 \cdot 10^{-7} MPa^{-n} s^{-1}$ .

#### 5.6.4 Viscoélasticité

L'identification des paramètres viscoélastiques ( $K, A$ ) du modèle de Kelvin-Voigt, se fait sur la base des résultats d'essais de fluage. Certaines contraintes au niveau du temps imparti à la réalisation du projet ont fait que ces essais n'ont pu être réalisés. Lors de ces tests, une contrainte constante est appliquée et l'évolution de la déformation est mesurée. Pour de faibles contraintes, et connaissant les propriétés élastiques et viscoplastiques, il est possible de déterminer la déformation due exclusivement à la viscoélasticité.

L'application de méthodes inverses pour l'identification de ces deux paramètres est requise pour effectuer cette opération. Il est relativement aisé de réaliser cette

opération en définissant une fonction coût sur Maple. L'optimisation étant effectuée par l'algorithme de Levenberg-Marquardt.

#### **5.6.5 Endommagement**

L'endommagement comprend un nombre de paramètres qui n'ont pas de signification physique particulière et dont la détermination pour la glace d'eau douce s'est faite sur la base d'essais et erreurs. Afin d'adapter le modèle à la glace atmosphérique, un test triaxial à faible confinement et à vitesse de déformation élevée serait approprié afin de déterminer ces paramètres. En effet, c'est aux hautes vitesses que l'endommagement prend de l'ampleur. Le faible confinement permettra non seulement de réduire l'endommagement sans l'éliminer complètement, mais aussi de faire apparaître l'anisotropie qui lui est due.

## **Chapitre 6 : Conclusion générale et recommandations**

### **6.1 Conclusion générale**

Ce projet de recherche avait pour objectif le développement d'un outil numérique afin de pouvoir simuler, dans un cadre éléments finis, le comportement ductile de la glace atmosphérique. Bien que les dégâts occasionnés par les tempêtes de verglas depuis des décennies soient impressionnants, les travaux de modélisation et de simulation du comportement mécanique de la glace atmosphérique sont toujours au stade embryonnaire.

Une revue de littérature a tout d'abord été effectuée. Cette étape importante nous a permis de nous familiariser avec la structure cristalline, les propriétés et le comportement mécaniques de la glace. Ces derniers sont sensibles à un certains nombres de paramètres dont : la température, la taille des grains, la structure cristalline, la vitesse de chargement et la vitesse de déformation. La glace présente un comportement de type fluage aux températures proches de sa température de fusion. De plus, la température affecte les propriétés mécaniques de la glace. La vitesse de déformation détermine le comportement de la glace : aux basses vitesses, la glace adopte un comportement ductile, alors qu'aux vitesses élevées, elle adopte un comportement fragile. La revue de littérature a aussi permis de voir différents modèles phénoménologiques qui ont été développés au cours des dernières décennies. Tous les modèles présentent des limitations, de ce fait, le besoin de développement de modèles performants est toujours requis.

Les modèles phénoménologiques présentés se basent sur une décomposition de la déformation totale en la somme de plusieurs composantes, chacune décrivant un mécanisme particulier : une composante élastique, une composante viscoélastique pour décrire le fluage primaire et une composante de déformation permanente pour décrire le fluage secondaire. Le fluage tertiaire est gouverné par l'endommagement ductile qui est caractérisé par une perte progressive de la rigidité.

Des expériences en laboratoire ont été réalisées. La glace atmosphérique présente un comportement similaire à celui de la glace d'eau douce. Sa résistance en compression est aussi affectée par la vitesse de déformation, cependant sa valeur est plus faible que celle de la glace d'eau douce. La différence entre le comportement en compression et en tension des matériaux fragiles est mise en évidence à travers des essais de compression et de flexion trois points. En compression, la glace présente des déformations permanentes et non-permanentes suivies d'un adoucissement dû à la propagation progressive des fissures, alors qu'en tension, la glace présente un comportement essentiellement élastique suivi d'une rupture brutale.

Une sous-routine utilisateur VUMAT pour ABAQUS/Explicit a été développée sur la base du modèle phénoménologique étudié. La loi de comportement a été reformulée sur une base incrémentale afin de satisfaire les besoins de l'implémentation. Cette dernière a été validée par la simulation de certaines conditions de chargement simples : compression uniaxiale à taux de déformation constant avec et sans confinement. Les résultats sont en accord avec les résultats numériques tirés de la littérature pour la glace d'eau douce pour la compression.

Afin d'adapter le modèle à la glace atmosphérique, un programme expérimental étendu est requis. Toutefois, cette opération s'est heurtée à des contraintes de temps et de moyens, et n'a pu, par conséquent, être menée à terme. À ce jour, il existe toujours un manque considérable de données expérimentales fiables dans la littérature concernant la glace atmosphérique.

En conclusion, l'étude de ce modèle de comportement n'a pas été facilitée par le manque de ressources dans la littérature le concernant. Cependant, l'effort consenti a permis, non seulement, d'apporter une meilleure compréhension de ce modèle, mais aussi de lever le voile sur certaines zones d'ombre, qui devront par la suite, permettre une meilleure exploitation de ses possibilités. Bien que ce projet présente un caractère original avec le développement d'une sous-routine utilisateur pour simuler le comportement de la glace atmosphérique ainsi que la correction apportée au paramètre  $\beta_2$ , il a été entravé par d'énormes difficultés indépendantes de notre volonté. Des recommandations sont formulées dans la section qui suit afin d'enrichir et d'améliorer le travail dans la perspective d'aboutir à un modèle complet et robuste.

## **6.2 Recommandations**

Le développement d'un modèle numérique pour simuler le comportement mécanique de la glace atmosphérique reste toujours un besoin essentiel, le travail effectué au cours de ce projet constitue un premier pas décisif vers l'atteinte de cet objectif. Les quelques recommandations sur les plans expérimental et numérique qui suivent devraient permettre d'apporter des améliorations conséquentes au travail.

1. Les travaux dans la littérature concernant les géomatériaux et les poudres métalliques mettent en évidence l'influence de la porosité sur le comportement mécanique des matériaux poreux. La glace atmosphérique présente une porosité importante par rapport à la glace d'eau douce, cet effet devrait par conséquent être pris en compte via l'implémentation d'un modèle poroélastique au lieu de la composante élastique linéaire.
2. Le comportement mécanique de la glace est influencé par plusieurs paramètres. Le modèle à l'état actuel se base sur une taille de grains uniforme et une température de  $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$  et ne tient compte que de l'effet de la vitesse de déformation. La température tel que vu à travers la revue de littérature joue un rôle essentiel dans le comportement mécanique de la glace en accentuant les effets de fluage et en modifiant ses propriétés mécaniques. De ce fait, il serait judicieux d'incorporer les effets de la température, de la taille des grains dans les formulations des composantes viscoélastiques et viscoplastiques tels que présentés dans le modèle unidimensionnel de Sinha.
3. Bien que le modèle de Choi présente un aspect attrayant au vu de ses multiples applications, il présente une certaine complexité de mise en œuvre concernant sa composante d'endommagement. En effet, ce modèle considère deux mécanismes d'endommagement comportant un certain nombre de paramètres dont la signification physique n'est pas très claire, et leur identification se base essentiellement sur une approche inverse. Il serait utile de développer une nouvelle composante d'endommagement avec des paramètres physiques à déterminer expérimentalement.

4. La formulation utilisée considère la glace comme matériau homogène et isotrope. Or, la glace est un matériau polycristallin dont le comportement isotrope ou anisotrope est déterminé par l'orientation des cristaux qui forment l'agrégat de glace. Compte tenu de cela, la texture de la glace atmosphérique devrait être aussi prise en compte dans la formulation de la loi constitutive. Des travaux de caractérisation poussés sont requis afin de combler cette lacune.
5. Les résultats des expériences dans le domaine de l'ingénierie de la glace sont souvent entachés par une très forte dispersion. Ceci est dû essentiellement à l'absence de normes de tests dans ce domaine et à l'inhomogénéité de la glace. De plus, les données expérimentales concernant la glace atmosphérique sont en nombre réduit, un programme expérimental étendu doit être mis en place.
6. On a identifié un problème lié à l'implémentation du modèle en tension. En effet, une modification d'un paramètre jouant un rôle dans la formulation de l'endommagement affecte grandement la qualité des résultats obtenus. Une correction de ce problème a été proposée en considérant les résultats d'expériences sur la glace d'eau douce dans la littérature. Des tests de tensions sont recommandés afin d'effectuer le calage des paramètres pour la glace atmosphérique.
7. L'étape de l'identification inverse des paramètres s'est heurtée au manque de données expérimentales. Ceci est dû à des contraintes de temps et d'équipement. Sur la base de la méthodologie proposée, le calibrage du modèle pour les différents types de glace atmosphérique permettra de disposer d'un modèle complet capable de prédire avec le maximum de précision le comportement mécanique de la glace atmosphérique.



## Références

- Ashby, M. F. and P. Duval (1985). The creep of polycrystalline ice. Cold region science and technology, Vol 11, PP 285-300.
- Bernardin, S. (1989). Étude et analyse du delestage de la glace atmosphérique sur les câbles, Université du Québec à Chicoutimi, Mémoire de maîtrise.
- Choi, K. (1989). A damage mechanics approach to the three dimensional constitutive modelling of ice deformation. Department of Ocean Engineering. Massachusetts, Massachusetts Institute of Technology. PhD thesis.
- Cole, D. M. (2001). The microstructure of ice and its influence on mechanical properties. Engineering fracture mechanics, Vol 68, PP 1797-1822.
- Dantl, G. (1969). Elastic Moduli of Ice. Proceedings of the International Symposium on Physics of Ice, PP 223-230.
- Dempsey, J. P., Y. Wei, et al. (1989). Fracture toughness of S2 columnar freshwater ice: Crack length and specimen size effects- Part I. The Eighth International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineerin.
- Derradji-Aouat, A. (1992). Mathematical modelling of monotonic and cyclic behaviour of polycrystalline fresh water ice. Department of civil engineering. Ottawa, University of Ottawa. PhD Thesis.
- Derradji-Aouat, A. (2005). Explicit FEA and constitutive modelling of damage and fracture in polycrystalline ice - simulations of ice loads on structures 18th International Conference on Port and Ocean Engineering Under Arctic Conditions. Potsdam, New York, USA, Vol I, PP 225-238.
- Dieter, G. E. (1961). Mechanical Metallurgy. McGraw-Hill, New-York.
- Druez, J., D. D. Nguyen, et al. (1986). Mechanical properties of atmospheric ice. Cold Regions Science and Technology, Vol 13, PP 67-74.
- Duval, P. (1974). Fluage de la glace polycrystalline. Rheol. Acta, Vol 13, PP 562-566.
- Frederking, R. and F. U. Häusler (1978). The flexural behaviour of ice from in-situ cantilever beam tests. IAHR Symposium on Ice Problems, Lulea, Sweden.
- Glen, J. W. (1955). The Creep of Polycrystalline Ice. Proceedings of the Royal Society of London Series A, Mathematical and Physical Sciences 228(1175), PP 519-538.
- Gold, L. W. (1958). Some observations on the dependence of strain on stress for Ice. Canadian Journal of Physics, Vol 36, Number 10, PP 1265-1276.

- Gow, J. A. and T. H. Ueda (1988). Structure and temperature dependence of the flexural properties of laboratory freshwater ice sheets. *Cold region science and technology*, Vol 16, PP 249-269.
- Hawkes, I. and M. Mellor (1972). Deformation and fracture of ice under uniaxial stress. *Journal of Glaciology*, Vol 11, Number 61, PP 103-131.
- Heinonen, J. (2004). Constitutive modeling of ice rubble in first-year ridge keel. VTT Technical Research Centre of Finland. Espoo. PhD thesis.
- Hill, R. (1952). The elastic behaviour of crystalline aggregate, The physical society.
- Jacka, T. H. (1984). The time and strain required for development of minimum strain rates in ice. *Cold region science and technology*, Vol 8, PP 261-268.
- Jacob, J. (2005). Experimental and computational aerodynamic analysis of ice fragments shed from aircraft surfaces. College of Engineering, Wichita State University. Master of Science.
- Jesse, Z. (2010). AirTransparency. 2011, from <http://www.airtransparency.com/airtransparency/?currentPage=3>.
- Jones, S. J. (1982). The confined compressive strength of polycrystalline ice. *Journal of Glaciology*, Vol 28, Number 98, PP 171-177.
- Kalman, T., M. Farzaneh, et al. (2007). Numerical analysis of the dynamic effects of shock-load-induced ice shedding on overhead ground wires. *Computers and Structures*, Vol 85, PP 375–384.
- Koosheh, M. K. (2007). Ice shedding from cables and conductors a cracking model of atmospheric ice. Département des sciences appliquées. Chicoutimi, Université du Québec à Chicoutimi. PhD thesis.
- Krajcinovic, D. (1985). Continuous damage mechanics revisited : basic concepts and definitions. *Journal of applied mechanics*, Vol 52, PP 829-834.
- Kuroiwa, D. (1965). Icing and snow accretion on electric wires, cold regions research and engineering lab hanover n h, research report.
- Lavrov, V. V. (1971). Deformation and strength of ice. *Gidrometeorologicheskoe Isdatel'stvo*.
- Lecomte, L. E., A. W. Pang, et al. (1998). La tempête de verglas de 1998. Toronto, Institut de prévention des sinistres catastrophiques.
- Lin'Kov, E. M. (1958). Study of the elastic properties of an ice cover in the arctic. *Vestnik Leningradskogo Univ*, Vol 13, PP 17-22.

- Lobban, C., J. L. Finney, et al. (1997). The structure of a new phase of ice. *Nature*, Vol 391, PP 268-270.
- Mellor, M. and D. M. Cole (1982). Deformation and failure of ice under constant stress or constant strain-rate. *Cold Regions Science and Technology*, Vol 5, PP 201-219.
- Michel, B. (1978). *Ice Mechanics*, Presses de l'université Laval.
- Michel, B. and R. O. Ramseier (1971). Classification of river and lake ice. *Canadian Geotechnical Journal*, Vol 8, PP 38-45.
- Mousavi, M. (2003). Experimental and theoretical verification of two icing codes. Département des sciences appliquées, Université du Québec à Chicoutimi. Mémoire de maîtrise en ingénierie.
- Ramseier, R. O. (1976). Growth and mechanical properties of river and lake. Faculté des Sciences, Département de Génie Civil. Québec, Université Laval. PhD thesis.
- Reuss, A. (1929). Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle. *ZAMM* Vol 9, Number 1, PP 49-58.
- Schulson, E. M. and M. Canon (1984). The effect of grain size on the compressive strength of ice. *IAHR Ice symposium*. Hamburg, PP 109-117.
- Schwarz, J., R. Frederking, et al. (1981). Standardized testing methods for measuring mechanical properties of ice. *Cold Regions Science and Technology*, Vol 4, PP 245-253.
- Sinha, N. K. (1978). Rheology of columnar-grained ice. *Experimental Mechanics*, Vol 18, Number 12, PP 464-470.
- Sinha, N. K. (1979(a)). Grain boundary sliding in polycrystalline materials. *Philosophical Magazine*, Vol 40, Number 6, PP 825-842.
- Sinha, N. K. (1979(b)). Rate sensitivity of compressive strength of Columnar-grained ice. *SESA Spring Meeting*. San Francisco, PP 209-218.
- Sinha, N. K. (1981). Constant stress rate deformation modulus of ice. Sixth international conference on port and ocean engineering under arctic conditions (POAC 81), Quebec City.
- Sinha, N. K. (1982). Constant strain- and stress-rate compressive strength of columnar-grained ice. *Journal of Materials Science*, Vol 17, PP 785-802.
- Sinha, N. K. (1983). Creep Model Of Ice For Monotonically Increasing Stress. *Cold Regions Science and Technology*, Vol 8, PP 25-33.

- Sinha, N. K. (1987). Effective Poisson's ratio of isotropic ice. Proceedings of the Sixth (1987) International Offshore Mechanics and Arctic Engineering Symposium, Houston, TX.
- Sinha, N. K. (1989). Elasticity of natural types of polycrystalline ice. Cold Regions Science and Technology, Vol 17, PP 127-135.
- Sinha, N. K., G. W. Timco, et al. (1987). Recent advances in ice mechanics in Canada. Applied Mechanics Reviews, Vol 40, Number 9, PP 1214-1231.
- Sunder, S. S. W., M. S. (1990). On the constitutive modeling of transient creep in polycrystalline ice. Cold Regions Science and Technology, Vol 18, PP 267-294.
- Szyszkowski, W., S. Dost, et al. (1985). A nonlinear constitutive model for ice. International Journal of Solids and Structures, Vol 21, Number 3, PP 307-321.
- Szyszkowski, W. and P. G. Glockner (1985). Modelling the time-dependent behavior of ice. Cold Regions Science and Technology, Vol 11, PP 3-21.
- Timco, G. W. and R. M. W. Frederking (1982). Comparative strengths of fresh water ice. Cold region science and technology, Vol 6, PP 21-27.
- Voigt, W. (1910). Lehrbuch der Kristallphysik (textbook on crystal physics). Leipzig und Berlin, Teubner.
- VPR (2008). VPR News. 2011, from [http://www.vpr.net/news\\_detail/78794/](http://www.vpr.net/news_detail/78794/).
- Wu, M. S. and J. Niu (1995). Micromechanical prediction of the compressive failure of ice: model development. Mechanic of Materials, Vol 20, PP 9-32.
- Yamaji, K. and D. Kuroiwa (1956). 0° -100°C no han'i ni okeru kori no nenda nsei. Teion-kagaku, Vol 15, PP 171-183.
- Zener, C. (1941). Theory of the elasticity of polycrystals with viscous grain boundaries. Physics review, Vol 60, PP 906-908.
- Zener, C. (1948). Elasticity and anelasticity of metals. Illinois, The university of Chicago press.