

**AHMED RAHEM**

**ANALYSE NON LINÉAIRE EN GRANDES ROTATIONS ET  
GRANDS DÉPLACEMENTS DES STRUCTURES MINCES  
MÉTALLIQUES**

**Thèse  
présentée  
à la Faculté des études supérieures  
de l'Université Laval  
pour l'obtention  
du grade de Philosophiae Doctor (Ph.D.)**

**Département de génie civil  
FACULTÉ DES SCIENCES ET DE GÉNIE  
UNIVERSITÉ LAVAL  
QUÉBEC**

**MARS 2001**

**© Ahmed Rahem, 2001**



**National Library  
of Canada**

**Acquisitions and  
Bibliographic Services**

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

**Bibliothèque nationale  
du Canada**

**Acquisitions et  
services bibliographiques**

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file Votre référence*

*Our file Notre référence*

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-60783-6

**Canada**

*À mes parents et à ma tendre épouse.  
À la mémoire de Nacim Berrahma-Chekroun.*

## Résumé court

Un outil d'aide pour l'ingénieur en calcul des structures a été développé et proposé. Cet outil permet de simuler numériquement de façon plus complète le comportement non linéaire (géométrique et matériel) des structures métalliques, compte tenu de ses imperfections (contraintes et déformations résiduelles internes). Ce rapport contient la stratégie adoptée et les modèles numériques associés. Nous présentons les techniques et algorithmes de résolution les plus prometteuses dans le calcul non linéaire des structures subissant de grands déplacements et de grandes rotations. Les ingrédients de la cinématique des rotations finies et différentielles sont exposés avec le souci de rendre simple la compréhension de cette cinématique par les ingénieurs. La formulation et la validation d'un modèle de poutre 3D et d'un modèle de coques, fondés sur une cinématique "exacte", sont également présentées. Deux applications industrielles sont réalisées dans le but de démontrer l'utilité pratique du modèle proposé. La première consiste à faire l'étude de la résistance post-critique d'un panneau ondulé. La seconde concerne la simulation d'un essai ROPS (*Roll-Over Protective Structure*) d'un camion forestier en tenant compte des contraintes et déformations résiduelles. Comparés aux solutions de référence, les résultats numériques obtenus sont très satisfaisants et révèlent la robustesse des logiciels développés.



## Abstract

An engineering aided-tool for structural computations has been developed and proposed. This tool allows the complete (total) numerical simulation of the nonlinear behavior (geometrical and material nonlinearities) of metallic structures, taking into account their imperfections (residual stresses and deformations). This report presents the strategy and the models associated with the proposed tool. Herein are presented promising algorithms and techniques for nonlinear computations of structures subjected to large displacements and large rotations. The kinematic of finite and differential rotations are (re)developed with the concern of easier understanding by structural engineers. The formulation and then the validation of 3D beam and shell models, based on the so-called “exact” kinematics, are also presented. In order to illustrate the practical features of the proposed tool, two industrial applications are considered. The first one consists of studying the post-critic resistance of an ondulated panel. The second one concerns the simulation of ROPS (Roll-Over Protective Structure) test of a ranger truck taking into account residual stresses and deformations. The results are very satisfying and shows the robustness of the developed software.

## Résumé

Ce travail a pour but le développement d'un outil d'aide, souple et très efficace, pour l'ingénieur en calcul des structures. Cet outil rendra possible :

- l'étude et la simulation (jusqu'à la ruine) du comportement non linéaire (géométrique et matériel) des structures métalliques en grands déplacements et grandes rotations;
- la simulation complète du comportement pré et post-flambement de chacun des composants de la structure;
- la simulation d'un essai de laboratoire réel.

L'outil, fondé sur une approche éléments finis, a été développé en s'inspirant d'une riche recherche bibliographique. D'un point de vue formulation, les modèles associés se distinguent nettement de ceux proposés par la littérature en termes de facilité de compréhension et surtout une efficacité d'utilisation. En effet, le développement de ces modèles a été effectué avec le souci de rendre meilleure, rapide et efficace leur utilisation par l'ingénieur.

Par ailleurs, ce travail a conduit à l'élaboration d'un logiciel de calcul dont les principaux ingrédients sont:

- des éléments de type poutres et coques très précis, basés sur une formulation en grands déplacements et à grandes rotations (*cf.* chapitres 6 et 7);
- un processus "exact" de mise à jour de la géométrie (translations et rotations) tenant compte de la nature non vectorielle des rotations (*cf.* chapitres 4, 6 et 7);
- des techniques de résolution et des critères de convergence accommodant les rotations ou autres grandeurs présentant des ordres de grandeurs différents (*cf.* chapitre 5);

- une stratégie d'incrémentation efficace permettant l'ajustement automatique du paramètre de pilotage imposé (*cf.* chapitre 5);
- une loi de comportement élastoplastique suivant le critère de von Mises avec écrouissage isotrope et intégrée selon un schéma de type *prédiction élastique retour radial*, préservant la convergence quadratique (*cf.* chapitre 3);
- un algorithme de calcul de la plastification progressive à travers l'épaisseur d'une coque ou la section (éventuellement de forme quelconque) d'une poutre (*cf.* chapitre 6 et 7);
- des possibilités de changer la base de données d'une analyse à une autre.

Afin de montrer l'utilité pratique du modèle proposé, deux applications industrielles ont été considérées. La première consiste à faire l'étude de la résistance post-critique d'un panneau ondulé. La seconde concerne la simulation d'un essai ROPS (*Roll-Over Protective Structure*) d'un camion forestier, en tenant compte des contraintes et déformations résiduelles. Comparés aux solutions de référence, les résultats numériques obtenus sont très satisfaisants et révélateurs, d'une part, de la fiabilité de la stratégie numérique préconisée (*cf.* ingrédients ci-dessus), et d'autre part, des performances numériques (précision, flexibilité, robustesse) du code de calcul mis en place.

## Préface

Le travail de recherche présenté dans ce document a été réalisé au sein du GIREF et du département de génie civil de l'université Laval.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur le professeur Mario Fafard, mon directeur de thèse, et je le remercie pour son appui et sa contribution à la mise en valeur de cette thèse.

J'exprime également ma reconnaissance à tous les membres de jury pour l'intérêt et le soin qu'ils ont portés à l'analyse de mon travail.

Je remercie le GIREF pour les soutiens informatique et infographique.

Mes remerciements vont aussi à l'ensemble de mes collègues du GIREF, dont la cordialité et l'amitié resteront inoubliables; que ceux qui m'ont aidé, d'un simple encouragement à un appui continu, trouvent ici l'expression de ma reconnaissance très sincère.

Je remercie surtout Celui qui est la source de toute lumière.

Ahmed Rahem

*Université Laval, Québec*

*Mars, 2001*

## Table des Matières

<b>Abstract</b>	<b>iv</b>
<b>Résumé</b>	<b>v</b>
<b>1. Introduction</b>	<b>1</b>
1.1 Généralités . . . . .	1
1.2 Aperçu bibliographique . . . . .	6
1.2.1 Évolution de l'analyse non linéaire . . . . .	7
1.2.2 Applications aux structures formées de poutres et de coques . .	11
1.3 Objectifs et cadre de la thèse . . . . .	19
1.4 Plan de la thèse . . . . .	20
1.5 Intérêts pratiques et apports de la thèse . . . . .	22
<b>2. Mécanique des solides déformables</b>	<b>25</b>
2.1 Introduction . . . . .	25
2.2 Aspects cinématiques . . . . .	26
2.2.1 Configurations et repères . . . . .	26
2.2.2 Gradient de déformation . . . . .	29
2.2.3 Mesures de déformation . . . . .	33
2.2.4 Taux de déformation . . . . .	37
2.3 Cinétique . . . . .	39
2.3.1 Équilibre du milieu déformable et travail virtuel . . . . .	39
2.3.2 Mesures de contraintes . . . . .	43
2.3.3 Taux de contraintes . . . . .	45
2.4 Conclusion du chapitre . . . . .	47

<b>3. Lois de comportement mécanique</b>	<b>48</b>
3.1 Introduction . . . . .	48
3.2 Lois constitutives élastiques . . . . .	48
3.3 Loi constitutive élastoplastique . . . . .	51
3.3.1 Généralités . . . . .	51
3.3.2 Comportement élastoplastique des métaux isotropes . . . . .	54
3.4 Conclusion du chapitre . . . . .	61
<b>4. Théorie des grandes rotations</b>	<b>62</b>
4.1 Introduction . . . . .	62
4.2 Tenseur de rotation . . . . .	63
4.3 Le pseudo-vecteur rotation n'est pas un vecteur . . . . .	68
4.4 Paramétrisation des rotations . . . . .	69
4.4.1 Formulation basée sur les rotation élémentaires . . . . .	70
4.4.2 Formulation basée sur le vecteur rotation . . . . .	71
4.5 Algèbre quaternion et les rotations finies . . . . .	72
4.5.1 Algèbre quaternion: définition et propriétés . . . . .	73
4.5.2 Représentation des rotations finies en terme du quaternion . . . . .	75
4.5.3 Équivalence du quaternion avec les paramètres d' <i>Euler</i> . . . . .	75
4.6 Loi de composition (combinaison) des rotations . . . . .	76
4.7 Extraction du vecteur rotation . . . . .	78
4.8 Actualisation du champ des rotations et du vecteur directeur . . . . .	78
4.9 Vitesse et accélération du champ de rotation . . . . .	79
4.10 Variations du champ de rotation . . . . .	83
4.11 Conclusion du chapitre . . . . .	86
<b>5. Discrétisation et algorithme de résolution des équations non linéaires d'équilibre</b>	<b>87</b>
5.1 Introduction . . . . .	87
5.2 Discrétisation spatiale par éléments finis . . . . .	88
5.3 Résolution des équations fondamentales . . . . .	91
5.3.1 Généralités . . . . .	91

5.3.2	Expressions relatives à la résolution par la méthode de Newton-Raphson . . . . .	92
5.3.3	Stratégies de résolution . . . . .	94
5.3.4	Critères et contrôle de la convergence . . . . .	102
5.4	Conclusion du chapitre . . . . .	106
<b>6.</b>	<b>Théorie des poutres</b>	<b>108</b>
6.1	Introduction . . . . .	108
6.2	Aspects géométriques et cinématiques . . . . .	109
6.2.1	Définitions géométriques . . . . .	109
6.2.2	Hypothèses cinématiques . . . . .	112
6.2.3	Gradient de déformation . . . . .	116
6.2.4	Mesure de déformation . . . . .	116
6.2.5	Variation des déformations . . . . .	118
6.3	Aspects cinétiques . . . . .	119
6.3.1	Expression du principe des travaux virtuels . . . . .	119
6.3.2	Variation du travail virtuel interne . . . . .	121
6.4	Lois de comportement . . . . .	122
6.4.1	Modèle élastique linéaire isotrope . . . . .	122
6.4.2	Modèle élastoplastique . . . . .	125
6.5	Actualisation des entités cinématiques . . . . .	127
6.5.1	Actualisation de la position et des directions . . . . .	127
6.5.2	Actualisation de la courbure et de la torsion . . . . .	129
6.6	Discrétisation par éléments finis . . . . .	130
6.6.1	Approximation de la configuration initiale . . . . .	131
6.6.2	Interpolation des déplacements et rotations . . . . .	132
6.6.3	Résidu interne et matrice de rigidité élémentaire . . . . .	133
6.7	Conclusion du chapitre . . . . .	134

<b>7. Théorie des coques</b>	<b>136</b>
7.1 Introduction . . . . .	136
7.2 Aspects géométriques et cinématiques . . . . .	137
7.2.1 Définitions géométriques . . . . .	137
7.2.2 Hypothèses cinématiques . . . . .	140
7.2.3 Mesure de déformation . . . . .	142
7.2.4 Variations des déformations . . . . .	144
7.3 Aspects cinétiques . . . . .	147
7.3.1 Expression du travail virtuel interne . . . . .	147
7.3.2 Variation du travail virtuel interne . . . . .	147
7.4 Lois de comportement . . . . .	150
7.4.1 Modèle élastique linéaire isotrope . . . . .	150
7.4.2 Modèle élastoplastique . . . . .	151
7.5 Aspects numériques . . . . .	152
7.5.1 Généralités . . . . .	152
7.5.2 Représentation paramétrique de la configuration initiale . . . . .	152
7.5.3 Interpolation et actualisation des configurations subséquentes . . . . .	154
7.5.4 Résidu interne et matrice de rigidité élémentaire . . . . .	157
7.5.5 Rotation autour du vecteur directeur . . . . .	159
7.6 Conclusion du chapitre . . . . .	164
<b>8. Exemples numériques - Discussions</b>	<b>165</b>
8.1 Introduction . . . . .	165
8.2 Validation des éléments de poutre . . . . .	165
8.2.1 Analyse d'un porte-à-faux soumis à un chargement de flexion . . . . .	166
8.2.2 Arc profond soumis à une charge concentrée . . . . .	169
8.2.3 Analyse élastique et élastoplastique de cadre de Lee . . . . .	173
8.2.4 Analyse élastique et élastoplastique d'un arc soumis à une charge concentrée . . . . .	173
8.2.5 Analyse tridimensionnelle d'un porte-à-faux courbe . . . . .	176
8.3 Validation des éléments de coques . . . . .	179



8.3.1	Plaque en flexion . . . . .	179
8.3.2	Hémisphère pincé . . . . .	180
8.3.3	Plaque annulaire . . . . .	183
8.3.4	Poutre en flexion plane . . . . .	184
8.3.5	Poutre en L sous chargement de flexion . . . . .	184
8.3.6	Déversement d'une poutre en C . . . . .	188
8.3.7	Analyse élastoplastique d'une plaque carrée sur appuis simples .	190
8.3.8	Analyse élastoplastique d'un arc soumis à une charge concentrée	195
8.4	Conclusion du chapitre . . . . .	195
<b>9.</b>	<b>Applications aux constructions métalliques industrielles</b>	<b>197</b>
9.1	Analyse non linéaire de panneaux ondulés types . . . . .	197
9.1.1	Introduction . . . . .	197
9.1.2	Méthodologie . . . . .	198
9.1.3	Résultats et conclusions . . . . .	200
9.2	Analyse par éléments finis des tests ROPS . . . . .	212
9.2.1	Introduction . . . . .	212
9.2.2	Méthodologie et données de base . . . . .	214
9.2.3	Résultats et conclusions . . . . .	217
<b>10.</b>	<b>Conclusion</b>	<b>236</b>
10.1	Rétrospective et conclusion . . . . .	236
10.2	Recommandations pour de futures extensions . . . . .	238
	<b>Bibliographie</b>	<b>240</b>
<b>A.</b>	<b>Critère de von Mises</b>	<b>261</b>
A.1	Critère de von Mises et loi d'écoulement associée . . . . .	261
A.2	Évaluation des termes de la matrice élastoplastique . . . . .	263
<b>B.</b>	<b>Section transversale de la poutre</b>	<b>266</b>
B.1	Caractéristiques de section transversale . . . . .	266
B.2	Intégration sur la section transversale de la loi élastoplastique . . . . .	267

## Liste des Figures

2.1	Systèmes de coordonnées dans les configurations de référence $C_0$ et actuelle $C_t$ . . . . .	28
2.2	Décomposition polaire. . . . .	32
2.3	Changement de contraintes par une rotation de corps rigide. . . . .	46
4.1	Rotation d'un point attaché à un corps rigide autour du vecteur unitaire $\mathbf{e}$ . . . . .	63
4.2	Exemple montrant que les rotations finies ne sont pas des vecteurs. . .	69
5.1	Courbe caractéristique charge-déplacement . . . . .	91
5.2	Type d'instabilité . . . . .	96
5.3	Algorithme de <i>Riks modifié</i> . . . . .	98
6.1	Géométrie de la poutre . . . . .	109
6.2	Cinématique de la poutre . . . . .	113
7.1	Géométrie de la coque . . . . .	138
7.2	Cinématique de la coque . . . . .	140
7.3	Éléments de référence . . . . .	153
7.4	Normale moyennée $\bar{\mathbf{N}}^I$ . . . . .	154
7.5	Côté $M$ de l'élément (nœuds $i$ et $j$ ) . . . . .	161
8.1	Porte-à-faux sous chargement de flexion. Données du problème. . . . .	166
8.2	Porte-à-faux avec charge concentrée. . . . .	168
8.3	Porte-à-faux avec moment concentré. . . . .	170
8.4	Arc profond soumis à une charge concentrée. Données du problème. . .	171
8.5	Arc profond soumis à une charge concentrée. . . . .	172
8.6	Cadre de Lee. Données du problème. . . . .	173
8.7	Cadre de Lee. Analyse élastique. . . . .	174

8.8	Cadre de Lee. Analyse élastoplastique. . . . .	175
8.9	Arc soumis à une charge concentrée. Données du problème. . . . .	176
8.10	Arc soumis à une charge concentrée. Courbe charge-déplacement du sommet. . . . .	177
8.11	Porte-à-faux courbe. Données du problème. . . . .	177
8.12	Porte-à-faux courbe. Courbe charge-déplacement du bout libre. . . . .	178
8.13	Porte-à-faux courbe. Déformées successives. . . . .	178
8.14	Plaque en flexion. . . . .	181
8.15	Hémisphère pincé. Données du problème. . . . .	182
8.16	Hémisphère pincé. Déformée réelle. . . . .	182
8.17	Hémisphère pincé. Courbe charge-déplacement. . . . .	183
8.18	Plaque annulaire. Données du problème. . . . .	184
8.19	Plaque annulaire. Courbe charge-déplacement. . . . .	185
8.20	Plaque annulaire. Déformées de la structure. . . . .	185
8.21	Poutre en flexion plane. Données du problème. . . . .	186
8.22	Poutre en flexion plane. Configurations initiale et finale. . . . .	186
8.23	Poutre en flexion plane. Courbe charge-déplacement. . . . .	187
8.24	Poutre en L sous chargement de flexion. Données du problème. . . . .	188
8.25	Poutre en L sous chargement de flexion. . . . .	189
8.26	Poutre en C. Données du problème. . . . .	190
8.27	Poutre en C. Courbe charge-déplacement sous la charge. . . . .	191
8.28	Poutre en C. déformées réelles. . . . .	192
8.29	Plaque carrée. Données du problème. . . . .	193
8.30	Plaque carrée. Courbe charge-déplacement. . . . .	194
8.31	Arc soumis à une charge concentrée. Courbe charge-déplacement du sommet. . . . .	196
9.1	Maillage et conditions aux limites appliquées à la demi-largeur d'un panneau ondulé. . . . .	199
9.2	Localisation des points suivis lors des analyses non linéaires. . . . .	201
9.3	Courbes charge-déplacement (normalisées) des points <i>A</i> et <i>B</i> . Cas élas- tique. . . . .	202

9.4	Courbes charge-déplacement (normalisées) du point A. Élastoplastique: Cas 1. . . . .	203
9.5	Courbes charge-déplacement (normalisées) du point B. Élastoplastique: Cas 1. . . . .	204
9.6	Courbes charge-déplacement (normalisées) du point A. Élastoplastique: Cas 2. . . . .	206
9.7	Courbes charge-déplacement (normalisées) du point B. Élastoplastique: Cas 2. . . . .	207
9.8	Isocouleurs des déplacements selon $X$ , $Y$ et $Z$ correspondant à la première charge critique rencontrée. Élastoplastique: Cas 2. . . . .	208
9.9	Isocouleurs des déplacements selon $X$ , $Y$ et $Z$ au dernier pas de l'analyse. Élastoplastique: Cas 2. . . . .	209
9.10	Courbes charge-déformation plastique équivalente aux points $C$ , $D$ et $E$ . Élastoplastique: Cas 2. . . . .	210
9.11	Courbes charge-contrainte de von Mises aux points $C$ , $D$ et $E$ . Élastoplastique: Cas 2. . . . .	211
9.12	Véhicule forestier. Conditions aux limites appliquées. . . . .	216
9.13	Véhicule forestier. Maillage utilisé. . . . .	218
9.14	Véhicule forestier sans plaque de renforcement. Courbes charge-déplacement longitudinal des points A, B, C, D, E et F. Phase 1. . . . .	220
9.15	Véhicule forestier sans plaque de renforcement. Courbes charge-déplacement latéral des points A, B, C, D, E et F. Phase 1. . . . .	221
9.16	Véhicule forestier sans plaque de renforcement. Courbes charge-déplacement vertical des points A, B, C, D, E et F. Phase 1. . . . .	222
9.17	Véhicule forestier sans plaque de renforcement. Courbes charge-énergie des points B, C, D et E. . . . .	223
9.18	Véhicule forestier sans plaque de renforcement. Courbes charge-déplacement longitudinal des points A, B, C, D, E et F. Phase 2. . . . .	224
9.19	Véhicule forestier sans plaque de renforcement. Courbes charge-déplacement latéral des points A, B, C, D, E et F. Phase 2. . . . .	225
9.20	Véhicule forestier sans plaque de renforcement. Courbes charge-déplacement vertical des points A, B, C, D, E et F. Phase 2. . . . .	226
9.21	Véhicule forestier sans plaque de renforcement. Déformées réelles finales. . . . .	227
9.22	Véhicule forestier avec plaque de renforcement. Courbes charge-déplacement longitudinal des points A, B, C, D, E et F. Phase 1. . . . .	228

9.23 Véhicule forestier avec plaque de renforcement. Courbes charge-déplacement latéral des points A, B, C, D, E et F. Phase 1. . . . .	229
9.24 Véhicule forestier avec plaque de renforcement. Courbes charge-déplacement vertical des points A, B, C, D, E et F. Phase 1. . . . .	230
9.25 Véhicule forestier avec plaque de renforcement. Courbes charge-énergie des points B, C, D et E. . . . .	231
9.26 Véhicule forestier avec plaque de renforcement. Courbes charge-déplacement longitudinal des points A, B, C, D, E et F. Phase 2. . . . .	232
9.27 Véhicule forestier avec plaque de renforcement. Courbes charge-déplacement latéral des points A, B, C, D, E et F. Phase 2. . . . .	233
9.28 Véhicule forestier avec plaque de renforcement. Courbes charge-déplacement vertical des points A, B, C, D, E et F. Phase 2. . . . .	234
9.29 Véhicule forestier avec plaque de renforcement. Déformées réelles finales.	235
 B.1 Section transversale d'une poutre tridimensionnelle. . . . .	 267
B.2 Élément quadrilatère à 4 nœuds dans le repère ( $S^1$ , $S^2$ ). . . . .	268
B.3 Section rectangulaire. . . . .	269
B.4 Section générale. . . . .	270

## Liste des Tableaux

8.1	Résultats comparatifs du porte-à-faux soumis à un effort constant. . .	167
8.2	Résultats comparatifs du porte-à-faux avec un moment constant. . . .	169
8.3	Charge critique de l'arc profond. . . . .	171
8.4	Résultats comparatifs des déplacements du bout libre. . . . .	179
8.5	Plaque en flexion. Résultats comparatifs. . . . .	180
8.6	Plaque carrée en flexion. Intégration sur l'épaisseur (1 seul pas). . . .	195
9.1	Limite élastique (en $MPa$ ) pour les différents type d'acier utilisés. . .	215
9.2	Énergie absorbée (en Joules) pour $F_H = 9.53 \text{ kN}$ . . . . .	219
9.3	Énergie absorbée (en Joules) pour $F_H = 21.4 \text{ kN}$ . . . . .	223

# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Généralités

Au cours des dernières décennies, les techniques de calcul des structures ont connu un essor considérable, suscité par les besoins industriels et soutenu par les progrès effectués dans le domaine informatique. Ainsi, la méthode des éléments finis est aujourd'hui couramment utilisée pour l'analyse des structures dans de nombreux secteurs de l'industrie: aérospatial, nucléaire, génie civil, construction navale, mécanique, etc.. Naguère réservée à un cercle restreint d'initiés, chercheurs et ingénieurs des instituts de recherche et des industries de pointe, elle constitue maintenant un instrument industriel utilisé pour les problèmes usuels de calcul des structures et figure désormais dans les programmes d'enseignement des universités et des écoles d'ingénieurs. De plus, l'implémentation des méthodes de résolution de problèmes non linéaires dans les codes de calcul par éléments finis ainsi que l'avènement des calculateurs électroniques modernes ont bouleversé les méthodes de travail de l'ingénieur qui peut aujourd'hui résoudre les problèmes les plus complexes avec un degré de raffinement qui ne serait pas envisageable avec les méthodes traditionnelles.

Un très grand nombre de problèmes rencontrés en pratique peuvent être résolu à l'aide de méthodes linéaires. Cependant, l'ingénieur doit recourir, comme dans notre

cas, à l'analyse non linéaire lorsque les trois hypothèses essentielles qu'il utilise habituellement dans ses calculs linéaires ne sont plus satisfaites. Ces hypothèses sont:

- les déplacements sont suffisamment petits pour pouvoir confondre les positions non déformés et déformées de la structure;
- les matériaux se comportent de manière élastique linéaire dans le domaine des déformations résultant de ces déplacements.
- Les conditions aux limites ne changent pas au cours du mouvement.

On reconnaît trois types de non-linéarité dans le comportement des structures:

1. Les non-linéarités géométriques: Elles interviennent lorsque les déplacements et éventuellement les déformations sont suffisamment importants. Dans ce cas, les caractéristiques de rigidité de la structure sont non linéaires. Le phénomène d'instabilité élastique représente un exemple de ce type de non-linéarité.
2. Les non-linéarités matérielles ou constitutives: elles se produisent dans le cas où le comportement du matériau ne peut plus être considéré comme élastique linéaire. Citons, à titre d'exemple, la plasticité et l'endommagement.
3. Les non-linéarités de contact: Elles se manifestent lorsque les conditions aux limites changent au cours du mouvement. Ce type de non-linéarités apparaît en particulier dans les processus de formage à froid ou dans les assemblages boulonnés.

Pour des raisons d'économie et de sécurité de plus en plus sévères, on exige maintenant que l'on tienne compte, dans les analyses structurales, des différents types de non-linéarité susceptibles de se produire. L'évolution de la technologie des matériaux et le développement des divers secteurs industriels ont amené l'emploi de matériaux légers et résistants. Ceux-ci sont utilisés pour construire des composants structuraux élancés qui présentent un rapport optimal coût/poids. L'acier, permettant de réduire la dimension des composantes d'une structure en raison de son niveau élevé de résistance, est un bel exemple de l'économie que l'on peut en tirer, encore mieux lorsqu'on prend en considération le domaine non linéaire du comportement du matériau. Les poutres, les plaques et les coques sont d'autres exemples du profit que nous apporte leur exploitation. Cependant, malgré la position privilégiée qu'ils occupent dans les réalisations



industrielles, grâce à la tenue mécanique assez grande qu'ils possèdent pour une masse réduite du matériau, les éléments structuraux de type poutre, plaque et coque sont plus sensibles aux phénomènes d'instabilité provoqués par les grands déplacements. Dans le cadre des corps orientés employés en génie civil ou dans la construction aéronautique, aérospatiale et automobile, les phénomènes d'instabilité doivent être contrôlés pour assurer la fiabilité et la sécurité de ces structures. Les questions primordiales, relatives à la sécurité et à l'économie d'un ouvrage, nécessitent une connaissance du comportement jusqu'à et même au-delà de la ruine. Même si une structure réagit "linéairement" sous les charges de service, l'ingénieur ne pourra juger valablement l'économie et la sécurité de cette structure que s'il peut en prédire le comportement jusqu'à la ruine. Ce but, vu l'évolution actuelle des normes de construction, est toujours plus recherché et ne peut être atteint que par une analyse non linéaire tenant compte de toutes les sources de non-linéarités possibles.

Pour ce faire, on fait appel à la théorie non linéaire de la mécanique des milieux continus qui permet de décrire le comportement du système physique grâce à des équations aux dérivées partielles; rappelons que celle-ci requiert, en cas de grands déplacements, une description du mouvement du corps; cette description est dite

- **eulérienne** si elle étudie le passage du corps à travers une région donnée de l'espace, prise comme référence;
- **lagrangienne** si elle étudie le mouvement du corps dans l'espace, à partir d'une certaine référence connue.

Si la première description convient surtout aux problèmes de mécanique des fluides, la deuxième s'adapte bien à l'analyse des solides. Deux approches sont très répandues parmi les formulations lagrangiennes (descriptions lagrangiennes): la Formulation Lagrangienne Totale (FLT) où l'état initial est considéré comme référence permanente et la Formulation Lagrangienne Actualisée (FLA) où un état intermédiaire sert de référence actualisée. Lorsque l'actualisation de la référence est effectuée à chaque pas de chargement, la FLA peut être classée en FLAP (Formulation Lagrangienne Actualisée à chaque Pas) et lorsque l'actualisation de la référence est effectuée à chaque itération d'équilibre, la FLA peut être classée en FLAI (Formulation Lagrangienne Actualisée à chaque Itération). Les équations aux dérivées partielles obtenues sont dans ces cas fortement non linéaires, et leur résolution n'est concevable que d'une manière approchée. Il faut alors, d'une part une technique d'approximation qui soit en mesure de

transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques et d'autre part un algorithme de résolution qui permette de résoudre les équations algébriques non linéaires et obtenir les courbes retraçant l'évolution des déplacements au cours du temps.

En ce qui concerne l'approximation, les méthodes des différences finies et des éléments finis peuvent convenir avec toutefois une préférence pour la deuxième (qui sera employée dans ce travail). Il ne fait aucun doute que cette méthode, due à la simplicité de sa mise en œuvre et sa puissance numérique, est devenue et demeurera encore pour un certain temps l'outil de calcul privilégié des ingénieurs.

Quant à l'algorithme de résolution des équations non linéaires, en plus de tenir compte du type de non-linéarité et des branches (stables ou instables) rencontrées, il doit être précis et converger rapidement.

La majorité des algorithmes implantés dans les codes de calcul par éléments finis utilise, pour obtenir la solution du problème non linéaire, des méthodes incrémentales-itératives conduisant à résoudre un système d'équations linéaires à chaque itération. Ces méthodes sont bien adaptées pour traiter toutes les non-linéarités possibles, telles les non-linéarités matérielles ou de contact par exemple. Elles sont basées sur un processus de prédiction-correction, qui consiste, dans une première étape, à linéariser le problème non linéaire de départ et donc d'obtenir d'abord une estimation de la solution et rechercher ensuite une solution corrective ou une direction qui, additionnée à la solution estimée, permettra de s'approcher de la solution recherchée et ce d'itération en itération. Pour obtenir cette direction corrective, on emploie ordinairement les méthodes de type Newton-Raphson, soit la méthode de Newton-Raphson standard ou une variante de celle-ci qu'on appelle modifiée. La première (adoptée dans le cadre de ce travail) est très robuste dans les zones de forte non-linéarité et dans les zones d'instabilité et assure généralement une convergence quadratique, surtout si la matrice tangente est calculée exactement. L'autre variante est sans doute moins exigeante que la première, puisqu'elle ne nécessite pas le calcul d'une nouvelle matrice tangente à chaque itération d'équilibre, mais seulement au début de chaque pas de chargement et de la garder fixe d'itération en itération. Cependant elle n'est pas assez robuste dans les zones de forte non-linéarité et sa vitesse de convergence faible, car la direction corrective est moins bien évaluée que dans le cas de la méthode standard. Cette méthode peut être avantageuse dans certaines situations pour diminuer le coût relié au calcul et à la factorisation de la matrice tangente. Par exemple, certaines lois de comportement et certains modèles de frottement (tels les modèles d'écoulement plastique non associé et

de frottement de Coulomb) engendrent des matrices tangentes non symétriques, mais il arrive que dans les calculs on décide de l'approcher par sa partie symétrique. Dans ce cas, la sauvegarde et la factorisation de la partie symétrique à chaque itération n'est pas justifiée. Il y a lieu alors d'utiliser la méthode de Newton-Raphson modifiée. Il peut aussi s'avérer avantageux d'utiliser cette méthode lorsqu'il est difficile de définir explicitement la matrice tangente au complet et donc de l'évaluer exactement. On a alors recourt aux méthodes numériques de perturbation pour calculer d'une manière approximative la matrice tangente. Ce processus étant très coûteux en temps calcul, il convient bel et bien dans ce cas d'utiliser la méthode de Newton-Raphson modifiée afin d'obtenir un gain sur le temps de calcul total.

Le pilotage du processus incrémental par accroissement de paramètre du charge diverge dès l'approche d'un point critique et ne permet pas ainsi de suivre les branches instables, nécessaire pour la prédiction du comportement post-critique et post-ultime de la structure. Il convient dans ce cas d'utiliser d'autres techniques de pilotage permettant de tracer la courbe complète charge-déplacement. Il en existe plusieurs dont entre autres les techniques de pilotage en déplacement imposé et en longueur d'arc imposée. Cependant, le bon choix de la technique de pilotage ne suffit pas à lui seul de franchir d'éventuels points stationnaires et d'obtenir la courbe charge-déplacement au complet; le choix de la taille du paramètre imposé (incrément de charge, de déplacement ou de longueur d'arc) est à considérer aussi. En effet, même si la technique de pilotage est bien adaptée au problème, sa résolution peut ne pas être accomplie en raison du mauvais choix de la taille de l'incrément. L'algorithme de résolution a certainement avantage d'intégrer un schéma permettant d'ajuster automatiquement les valeurs successives du paramètre imposé suivant le degré de non-linéarité du problème et les caractéristiques de convergence du pas précédent. L'utilisateur du code aura ainsi la possibilité de spécifier l'incrémentation à suivre ou de laisser le code choisir son propre schéma d'incrémentation, toute en se basant sur les tolérances spécifiées par l'utilisateur.

Pour satisfaire la précision désirée par l'utilisateur, l'algorithme de résolution peut disposer de plusieurs critères de convergence. L'utilisation du critère de "forces" conjointement avec le critère de "déplacements" permet d'assurer une bonne mesure de la solution recherchée, surtout si ces critères sont ajustés de façon à ce que les variables (cinématiques et mécaniques) présentant la même "nature" et le même "ordre de grandeur" soient comparées entre elles (rotations comparées aux rotations, translations aux translations, forces aux forces, moments aux moments, ..., etc.). On a ainsi intérêt

à conformer les critères de convergence aux “champs” actifs dans le problème étudié (champs de rotations, de translations, de températures, . . . , etc.).

Il s’ensuit que le calcul non linéaire requiert généralement des connaissances dans les domaines suivants:

1. mécanique des solides: résistance des matériaux, stabilité des structures, plasticité, . . . , etc.;
2. analyse numérique: méthodes d’approximation, stratégies de résolution de systèmes d’équations linéaires et non linéaires, méthode de calcul des valeurs et vecteurs propres, . . . , etc.;
3. informatique appliquée: techniques d’organisation des blocs fonctionnels et de programmation.

Cependant, il serait dommage d’en faire une raison pour compliquer un code de calcul en essayant de lui intégrer plusieurs méthodes ou techniques de résolution. Ceci ne justifie pas la non-existence de méthodes générales valables pour tous les cas et ne fait en réalité qu’augmenter le malaise de l’ingénieur vis-à-vis de ce type d’analyse. En fait, ce dont l’ingénieur a besoin pour atteindre ses objectifs c’est d’une stratégie de résolution simple mais efficace, mettant en œuvre des méthodes de base et des techniques fiables et flexibles, pouvant s’adapter sans difficultés à chaque classe de problèmes donnée. Pour satisfaire ce besoin et répondre aux objectifs de cette thèse, nous allons tenter de raffiner les techniques numériques citées précédemment de façon à les rendre plus efficaces et simplifier leur utilisation.

Ce travail est consacré principalement à l’analyse statique non linéaire des structures métalliques tridimensionnelles constituées essentiellement d’assemblage d’éléments de poutre et/ou de coque. L’effet de contact ne fait pas l’objet d’études dans le présent travail; quant aux autres effets non linéaires (géométrique et matériel), ils doivent être spécialisés pour les éléments structuraux qui nous intéressent, à savoir les poutres 3D et les coques subissant de grands déplacements et de grandes rotations, mais de petites déformations élastoplastiques.

## 1.2 Aperçu bibliographique

On se propose, dans cette section, de rappeler, dans un premier temps, les étapes principales de l’évolution de l’analyse non linéaire par élément finis, pour ensuite faire

la revue des publications reflétant certains aspects essentiels de l'application de la méthode des éléments finis, dans le domaine non linéaire, aux structures de types poutre et coque. Cet état de la question n'a pas la prétention d'être exhaustif; il est rédigé en fonction des connaissances acquises pendant l'étude de ce travail.

### 1.2.1 Évolution de l'analyse non linéaire

En 1960, Turner propose pour la première fois l'application de la méthode des éléments finis à l'analyse non linéaire des structures. L'auteur présente une approche "incrémentale" [TDM60] permettant d'analyser les problèmes géométriquement non linéaires par éléments finis. La réponse non linéaire de la structure est obtenue "incrémentalement", c'est à dire pas à pas, par augmentation progressive de la sollicitation. Pour chaque état déformé, on calcule une matrice de rigidité incrémentale comprenant un terme supplémentaire, dit "matrice géométrique", qui résulte de la prise en compte des termes quadratiques du champ de déplacements. À partir de cette date, l'analyse non linéaire par éléments finis va connaître un développement intense sous l'impulsion des industries aéronautique et aérospatiale et grâce à la disponibilité d'ordinateurs de plus en plus puissants. D'innombrables publications sont apparues depuis; nous référons le lecteur aux excellentes revues bibliographiques qui ont été faites par Oden [Ode69a], Batoz [Bat77], Frey [Fre78], Gadala [GDO84] et Crisfield [Cri97a], pour ne citer que ceux-là. Il en ressort certaines remarques importantes que voici.

Même si la méthode incrémentale est appliquée avec des succès et perfectionnements divers par Turner [TMW64], Argyris [AKK64, Arg65], Fellipa [Fel66], Martin [Mar66], Wissmann [Wis66], Oden [Ode66, Ode69b], essentiellement pour l'analyse de l'instabilité élastique des structures, il faudra attendre jusqu'en 1968 pour assister à une vulgarisation de cette méthode sous l'impulsion de Marcal [HMR70], Oden [Ode72] et de Yagmai [Yag68] qui ont établi les équations d'une formulation générale de l'analyse non linéaire géométrique, respectivement pour la description lagrangienne "totale", qui prend constamment comme référence l'état initial non chargé de la structure, et pour la description lagrangienne "actualisée", qui prend comme référence le dernier état calculé de la structure. Dès lors, de nombreuses publications sont apparues dont celles de Brebbia et Connor [BC69] qui introduisent le principe de prédiction-correction et résolvent des problèmes de plaques et coques quasi planes en utilisant la méthode de Newton-Raphson; Hibbit et al. [HMR70] emploient le principe des travaux virtuels et obtiennent la forme incrémentale de la description lagrangienne totale après avoir discrétisé le champ de déplacements en fonction des inconnues nodaux; Hofmeister et

al. [HGE71] présentent la formulation lagrangienne actualisée, en faisant ressortir la notion du résidu d'équilibre qui permet de vérifier l'équilibre à chaque pas de chargement; Sharifi et Popov [SP71] étendent la formulation lagrangienne actualisée établie par Yagmai à l'analyse élastoplastique en petites déformations des coques de révolution. Suivirent plusieurs autres publications dont on peut consulter la longue liste chez Gadala [GDO84] ou Crisfield [Cri97a, Cri97b].

La méthode "directe" utilisée dès 1965 par Schmit, Bognor, Fox et Mallet [SBF68, MS67] entre autres, comme alternative à la méthode incrémentale, a toutefois été rapidement abandonnée en faveur de cette dernière. Basée sur le principe de minimisation de l'énergie potentielle totale, elle ne fournit aisément que les configurations stables de la structure. Aussi, elle ne s'applique pas aux matériaux dont la loi constitutive dépend du chemin parcouru (plasticité par exemple), alors que la méthode incrémentale s'adapte bien à la théorie différentielle de la plasticité qui nécessite une solution pas à pas. De plus, elle permet de déterminer la réponse du système pendant l'application des charges, à partir d'une position initiale connue. Il en résulte une série de courbes retraçant l'évolution des déplacements, permettant ainsi l'étude de la stabilité de la structure à tous les niveaux de charge.

Il faut noter que seule la formulation lagrangienne totale aura connu beaucoup de succès jusque dans les années 1970. Les résultats encourageants obtenus par les équipes dynamiques de Marcal et Oden ont lancé toute la recherche non linéaire sur la formulation lagrangienne totale pendant dix bonnes années. Par la suite, grâce au leadership de Wilson et de ses collaborateurs [BOW74, BO75], la formulation lagrangienne actualisée a refait surface pour détrôner la formulation lagrangienne totale dans bien des applications, au moment où cette dernière a commencé à éprouver des difficultés de mise en œuvre dans le cas des grandes rotations tridimensionnelles, spécialement pour les corps orientés, puisqu'elle exige un champ cinématique "exact" et une bonne représentation des rotations. Or, il était très difficile jusqu'alors, notamment pour les coques de formes quelconques et les poutres tridimensionnelles, de mettre en œuvre les formules "exactes" pour élaborer un élément en formulation lagrangienne totale. Son utilisation s'est limitée alors à des cas dits de rotations modérées entre la configuration initiale et la configuration finale ou avec des éléments finis basés sur la théorie intrinsèque [Ode69a, KY69, BRW75, BO76, Ode72, RA71, Gac71, BD73, BCD76, Bat77, Str71, Gal73, RM73, Opp82]. La formulation lagrangienne totale valable pour les grandes rotations mais petites déformations a cependant été utilisée avec succès pour les structures planes de type poutres, arcs et anneaux [BJ83, BJ86, Leb85].

Dans la formulation lagrangienne actualisée, l'utilisation de la configuration déformée actualisée à chaque pas de chargement [HGE71, BN73, Was82] ou à chaque itération d'équilibre [Bat82, Fre78, Jaa86] comme configuration de référence permet de découper le mouvement entre les configurations initiale et finale en un certain nombre de pas de déplacements et rotations modérés et dégager des expressions approximatives du champ cinématique et des déformations, faciles à mettre en œuvre. Cette façon de faire permet de traiter les grands déplacements et les grandes rotations d'une manière simple en admettant l'hypothèse des petits déplacements et petites rotations entre la configuration déformée et la configuration intermédiaire et en utilisant la théorie linéaire classique pour le calcul des déformations ce qui est important en théorie assujettie car les expressions pour le calcul des déformations sont complexes si l'on doit utiliser la cinématique complète sans hypothèses simplificatrices. La formulation lagrangienne actualisée s'avère simple et efficace mais contient des approximations qui peuvent introduire des erreurs jouant un rôle considérable sur les résultats et la convergence, surtout dans le cas des structures très flexibles où quelques complications apparaissent à cause de la nature non vectorielle des grandes rotations. Un maillage assez fin et de petits pas de chargement doivent être adoptés pour respecter l'hypothèse des déplacements et rotations modérés sur un pas. La formulation lagrangienne actualisée restera cependant jusqu'aux années 1980 une des seules possibilités pour traiter les problèmes de grandes rotations des structures avec des éléments simples; elle a été utilisée essentiellement pour les éléments basés sur la théorie assujettie [Fre78, Faf87].

Il faudra attendre les travaux de Simo et ses collaborateurs [Sim85, SVQ86, SF89] pour assister à l'extension du champ d'application de la formulation lagrangienne totale à l'analyse des corps orientés subissant des grandes rotations tridimensionnelles. Simo a appliqué la cinématique des grandes rotations, défrichée par Argyris [Arg82], pour établir sur une base rigoureuse un modèle géométriquement "exact" de poutre [Sim85, SVQ86, SVQ88] et de coque [SF89]. Ainsi, sous l'impulsion de Simo et ses collègues la recherche est relancée dans ce domaine [CG88, Lo92, Ibr95, PL96, SB92, BR92, BD97, RFD97, Dam96, Cri97b].

La méthode d'*Euler explicite* fut la première technique utilisée avec la méthode incrémentale pour la résolution des équations d'équilibre non linéaires [TDM60]. Malheureusement, cette technique peut conduire à une accumulation d'erreurs inquantifiable. Pour contrer ce problème Brebbia et Connor [BC69], Murray et Wilson [MW68], entre autres, ont combiné la méthode incrémentale avec les itérations de Newton-Raphson de façon à permettre aux équations d'équilibre d'être satisfaites avec

une certaine tolérance. Oden [Ode69a] et Zienkiewicz [ZN71] signalent le désavantage de la méthode de Newton-Raphson relié au coût de calcul et de triangularisation de la matrice tangente, spécialement pour les problèmes à grand nombre de degrés de liberté, et recommandent pour minimiser le temps de calcul de factoriser la matrice tangente au début de chaque pas et de la garder fixe d'itération en itération. Il est cependant apparu que cette variante, dite de Newton-Raphson modifiée, n'est pas aussi robuste que la méthode originale dans les zones de forte non-linéarité et dans les zones d'instabilité où la direction corrective doit être mieux approchée pour garantir la convergence. Plusieurs techniques ont été alors suggérées pour déterminer la longueur optimale du vecteur direction et accélérer la convergence. La technique d'accélération dite de "line search" en est une; elle consiste à trouver un facteur scalaire optimal qui multiplie le vecteur correction pour accélérer la convergence. Crisfield [Cri80] a proposé une méthode de calcul approximative de ce facteur et Fafard [Faf87] une méthode exacte basée sur la fonctionnelle d'énergie.

Le contrôle du processus incrémental par l'accroissement du paramètre de charge a vite été mis en défaut au "passage des extrema". Pour pouvoir passer ces extrema, Sharifi et Popov [SP71] ont utilisé un artifice qui consiste à introduire des ressorts fictifs afin d'éliminer la singularité de la matrice tangente. Il s'est avéré toutefois que cette technique est très limitative, ce qui a mené au développement de la méthode de pilotage en déplacement imposé. Plusieurs approches adoptant cette technique ont conduit à la destruction de la symétrie de la matrice tangente. Quoique cette lacune fût surmontée par Pian et Tang [PT71], il resta que leur approche exige la modification de la matrice tangente incrémentale. Il faudra attendre les travaux de Heisler et al. [HSK77], Batoz et Dhett [BD79], qui ont proposé d'autres schémas permettant de conserver et la symétrie et la structure de la matrice tangente, pour assister à l'exploitation massive de la méthode de déplacement imposé. Reste que l'obstacle majeur de cette méthode réside dans le bon choix du degré de liberté à imposer. Des chercheurs tels que Wempner, Riks, Crisfield et Ramm [Wem71, Rik79, Cri80, Ram81] ont réussi par la suite à venir à bout des difficultés du pilotage en déplacement imposé, en proposant des méthodes beaucoup plus générales basées sur l'équation de la longueur d'arc.

Signalons, pour clore cette sous section, que parallèlement aux méthodes et techniques de résolution citées ci-dessus, il en existe plusieurs. Pour une synthèse très concise dans ce domaine, nous référons le lecteur aux excellents travaux de Fafard [Faf87], de Murray [MG90] et de Dhett et Fafard [DF95].



### 1.2.2 Applications aux structures formées de poutres et de coques

Le lecteur averti comprendra qu'il est illusoire de prétendre présenter ici une synthèse complète sur l'analyse non linéaire des poutres et des coques par éléments finis. Ce sont des sujets qui reçoivent une attention internationale considérable depuis plusieurs années, étant donné qu'ils sont préalablement nécessaires au développement du calcul non linéaire d'un grand nombre de structures. Nous allons donc nous contenter, dans les sous-sections suivantes, de faire allusion aux travaux importants de quelques auteurs parmi tant d'autres qu'inévitablement nous ne pourrions citer; nous essaierons cependant de combler les lacunes en mentionnant dans la mesure de nos connaissances les bibliographies ou les ouvrages de base contenant de nombreuses références. Certains de ces travaux seront également mentionnés dans les différents chapitres de la thèse en rapport direct avec les sujets abordés.

#### Analyse non linéaire des coques

Il est évident que l'introduction du concept d'éléments finis a grandement contribué dans l'évolution de l'analyse non linéaire des coques. Dès la fin des années 60, plusieurs auteurs se sont intéressés à l'application de cette méthode pour analyser le comportement non linéaire des coques. Parmi ces auteurs citons: Stricklin et al. [SHS68, Str71], Marcal [Mar70], Prost [Pro75] qui ont étudié des coques de révolution; Brebbia et Connor [BC69], Roberts et Aswell [RA71], Tahiani [Tah71], Bergan et Clough [BC73] analysent le comportement des coques surbaissées; Gallagher et al. [GY68, GLM71], Zienkiewicz et Nayak [ZN71], Bathe et al. [BRW75, BO76] traitent des coques de formes arbitraires. Tous ces auteurs ont établi leurs formulations en utilisant l'une ou l'autre des théories classiques établies jusqu'alors, soit la théorie non linéaire des coques surbaissées de type *Marguerre* ou de type *Donnell-Mushtari-Vlassov* ou la théorie non linéaire des coques non surbaissées de type *Koiter-Sanders*. Dans ces théories, considérant la coque comme un milieu bidimensionnel caractérisé par une surface de référence et une épaisseur, on cherche essentiellement à exprimer le champ de déplacements en fonction de celui de la surface de référence en retenant comme base l'hypothèse des rotations modérés et de Love-Kirchhoff gouvernant le déplacement des normales, complété ou non de l'hypothèse de géométrie surbaissée. En fait, jusqu'à la fin des années 70, peu d'auteurs ont contribué à la modification de ces théories pour tenir compte des déformations de cisaillement transversal dans l'analyse non linéaire des coques. Parmi les travaux touchant à ce domaine mentionnons celui de Dhatt [Dha70] qui admet l'hypothèse des sections droites et de non variation de l'épaisseur

(*Reissner/Mindlin/Naghdi*) pour construire un élément triangulaire courbé basé sur la théorie non linéaire des coques de type Marguerre. Les déformations transversales sont alors admises et la rotation de la normale n'est plus la rotation de la surface moyenne. Cependant, pour relier la rotation de la normale aux déformations de la surface moyenne, l'auteur impose les conditions de type Kirchhoff le long de contour de l'élément. Théoriquement, l'énergie due aux déformations de cisaillement n'est pas identiquement nulle sur l'élément, mais tend cependant vers zéro lorsque le nombre d'éléments augmente. Cette approche, dite de type *Kirchhoff discret*, a été adoptée et améliorée par la suite par plusieurs auteurs, notamment Key [Key72], Batoz et al. [BD75, BDP75, BCD76, Bat77], Matsui et Matsuoka [MM76], Bathe et Ho [BH81], Fafard [Faf87], Pol [Pol92].

En dépit de cela, une autre approche, tenant compte de l'hypothèse de Reissner/-Mindlin/Naghdi, va dominer les travaux de recherche relatifs aux coques pendant deux décennies. Il s'agit de l'approche *tridimensionnelle dégénérée* (ou *isoparamétrique dégénérée*) introduite en 1968 par Ahmad et al. [AIZ68, AIZ70] et dans laquelle la formulation éléments finis est obtenue directement à partir des équations tridimensionnelles en considérant la coque comme un domaine tridimensionnel limité par une surface supérieure et une surface inférieure, généralement courbées. Cette approche, limitée au début à l'analyse linéaire des coques s'est progressivement étendue à l'étude non linéaire des coques sous l'impulsion notamment de Parish [Par79], Bathe et Bolourchi [BB80], Hughes et al. [HL81a, HL81b, HC83], Surana [Sur83], Milford [MS86], Kanok [KNTH81], Parks et Stanley [PS86], Liu et al. [LLB86], Rothert et Dehmel [RD87], Mahe et Sourisseau [MS93], Boisse et al. [BDG97] avec l'hypothèse des rotations modérées et plus récemment en incorporant les grandes rotations sous l'impulsion de Stander et al. [SMR89], Saleeb et al. [SCGY90], Parish [Par91], Buchter et al. [BR92, BRR94], Kebari et Cassell [KC92] et Gruttmann et al. [GKW95]. Outre les articles mentionnés ci-dessus, nous référons le lecteur aux livres [Bat82, ZT91, Cri97a] qui offre une revue plus ou moins détaillée de l'approche dégénérée et les méthodologies qui lui sont reliées et à l'excellent article de Buchter et Ramm [BR92] examinant les relations existant entre les théories classiques des coques et la théorie tridimensionnelle dégénérée.

Malgré la domination de l'approche isoparamétrique dégénérée, dû principalement à l'absence de complexité mathématique et à sa simple extension au régime non linéaire, les dernières années ont été marquées par le développement d'une nouvelle approche, dite *directe* ou *géométriquement exacte*, qui considère la coque comme une

surface de type *Cosserat* muni d'un seul vecteur directeur. Cette approche initiée par Ericksen et Truesdell [ET58] et exploitée récemment par Simo et ses collaborateurs [SF89, SFR89, SFR90, SRF90a, SRF90b, SK92, Sim93] est en train de relancer toute la recherche non linéaire sur les coques. Outre les articles de Simo, nous ont servi de référence les contributions importantes de Sansour et Buffler [SB92], Wriggers et Gruttmann [WG93], Chroscielewski et al. [CMS92], Ibrahimbegovic et al. [Ibr94, IF94a, IF94b, Ibr96], Dammak [Dam96], Brank et Damjanic [BD97].

Sur le plan numérique, on a observé que les résultats obtenus avec des éléments de coque en flexion-cisaillement basés sur l'hypothèse de Reissner/Mindlin/Naghdi, avec un modèle déplacement et une intégration exacte suivant les directions de la surface de référence, se détériorent lorsque l'épaisseur de la coque diminue. C'est la manifestation du "blocage en cisaillement" dû essentiellement à une domination numérique de l'énergie de cisaillement transversal sur l'énergie de flexion. Pour éviter ce phénomène, un certain nombre d'éléments de coque basés sur une formulation mixte de type *Hellinger-Reissner* ou *Hu-Washizu* ont été développés [Pra69, Tah71, BD92, BD86a]. Si ces éléments ont l'avantage d'être précis dans l'évaluation des contraintes de cisaillement transversal, reste qu'ils sont plus coûteux en temps calcul que les éléments basés sur l'approche déplacement et que leur formulation est compliquée [PJ91]. Avec le modèle déplacement, différentes techniques ont été proposées pour améliorer le comportement des éléments pour l'analyse des coques minces. Une première façon de procéder consiste à utiliser une intégration numérique "réduite" (uniforme ou sélective) pour évaluer l'énergie interne de déformation [KC91, KC92, ZTT71, HCH78, MH78, BD92]. Un autre artifice utilisé consiste à introduire des facteurs de correction au niveau de la rigidité de cisaillement transversal lui permettant, au cas où la coque devient mince, d'agir comme une fonction de "pénalité", contraignant la normale à rester perpendiculaire à la surface moyenne (approximativement) [HTK77, HW80]. Enfin, une alternative intéressante est celle de Simo et Hughes [SH86] connue sous le nom de *méthode de déformation de substitution* (*assumed strain method*) et qui propose d'introduire une représentation indépendante des déformations de cisaillement transversal. Parmi les travaux recourant à cette technique pour formuler des éléments de coque et de plaque, nous trouvons: [Aya93, Kat93, ZXZ<sup>+</sup>93, Ibr93, BRR94].

Concernant l'analyse élastoplastique, deux approches sont généralement suivies dans la formulation des éléments de coque: l'approche "locale" et l'approche "résultante". La première, appliquée par plusieurs auteurs: [Fre78, Faf87, FDB89, YS85, KC92, Dam96] entre autres, est caractérisée par une loi d'écoulement exprimée en

terme du tenseur des contraintes. En plus d'être précise et générale (applicable à tout matériau et toute structure qu'elle soit mince où épaisse), l'approche locale permet la prise en compte de l'écrouissage et des contraintes résiduelles dans l'épaisseur, donc de suivre progression de la plasticité à travers l'épaisseur. Néanmoins, elle est pénalisée par un stockage et un coût plus important, puisque l'intégration numérique doit être effectuée non seulement sur la surface de référence, mais aussi dans la direction de l'épaisseur. Dans la deuxième approche, on fait l'hypothèse que la coque est soit élastique soit plastique dans toute son épaisseur, la loi d'écoulement dépend par conséquent uniquement des efforts résultants. Ce modèle permet de calculer la matrice élastoplastique et les efforts internes plastiquement admissibles sans intégration dans l'épaisseur de manière simple et efficace, vu qu'il nécessite moins de stockage de variables et réduit énormément le temps de calcul. Toutefois, dans la réalité, la plastification est progressive, ce qui confère à la structure une rigidité un peu plus importante pendant la plastification réelle. Par conséquent, dans le cas d'instabilité plastique les charges ultimes calculées par cette méthode peuvent être sousévaluées. D'autre part, la formulation des critères d'écoulement en efforts généralisés est délicate. Un des critères globaux le plus connue est celui d'*Ilyushin* basé sur l'hypothèse de Kirchhoff-Love [BB93b, BB93a] et qui a été retenue par plusieurs auteurs [DO66, OF83, Pol92, Jaa86] pour analyser le comportement élastoplastique des coques mines.

### Analyse non linéaire des poutres

L'analyse non linéaire des poutres a fait l'objet d'un grand nombre d'articles et continue d'attirer l'attention de beaucoup de chercheurs en raison de nouveaux besoins industriels notamment dans les domaines mécanique et aérospatial. Il serait donc vain de vouloir présenter ici une bibliographie exhaustive des questions touchant ce domaine. Nous nous contenterons de commenter quelques uns de ces travaux en guise de mise au point. Les développements relatifs à l'aspect numérique ne sont pas repris; nous mentionnons toutefois un certain nombre d'articles concernant cet aspect mais nous n'en feront pas la revue.

D'abord, en ce qui concerne les problèmes de poutres et arcs plans Bathe [BO75], Wood [Woo77], Frey [Fre78], Batoz et Jameux [BJ83, BJ86] Lebouvier [Leb85], Dvorkin et al. [DOO88], Tessler et al. [TS86, Tes91] et Ibrahimbegovic et Frey [IF92] ont effectué les analyses non linéaires géométriques, matérielles et/ou dynamiques en utilisant diverses approches basées sur les hypothèses de Euler-Bernoulli ou de Timoshenko, considérant ou pas les grandes rotations. Un récent livre de Crisfield [Cri97a]

résume la majorité des approches proposées jusqu'à nos jours.

L'analyse non linéaire des poutres tridimensionnelles est beaucoup plus complexe à cause de la torsion, du gauchissement et surtout de la présence des grandes rotations. Ces rotations tridimensionnelles ne sont pas des quantités vectorielles qu'on peut additionner comme dans le cas des poutres bidimensionnelles<sup>1</sup>. Pour remédier provisoirement à ce problème Bathe et Bolourchi [BB79] ont admis l'hypothèse des petites rotations, dans leur analyse non linéaire géométrique des poutres droites à section pleine. Ils ont présenté deux formulations lagrangiennes (une actualisée et une totale), établies les relations permettant le passage de la première à la seconde et démontré l'équivalence entre les deux, pour des petites rotations. Toutefois, ils ont recommandé l'utilisation de la formulation lagrangienne actualisée, parce qu'elle permet d'éviter le calcul de certaines matrices additionnelles telle la matrice de passage du système local attaché à la configuration actuelle au système local attaché à la configuration de référence. Plusieurs chercheurs ont suivi leur conseil et ont utilisé diverses formulations actualisées en considérant de plus le gauchissement. Citons parmi eux: Ramm et Osterrieder [RO83] qui ont effectué l'analyse non linéaire géométrique et matérielle des poutres rectilignes à sections ouvertes et parois minces en utilisant une formulation lagrangienne actualisée et en considérant la plastification progressive de la section. Akoussah [Ako87] s'est intéressé au comportement physique des systèmes poteaux-entremises-diaphragme. Il a développé pour cette fin des éléments de poutre droite et courbe surbaissée (hypothèse de Marguerre) à parois minces et à sections ouvertes basés sur une formulation lagrangienne actualisée approchée (élément rectiligne) ou partielle (élément d'arc surbaissé). Il a considéré les non-linéarités géométriques et matérielles avec ou sans contraintes résiduelles et opté pour la méthode de plastification progressive. Des travaux plus complets sont faits par Wunderlich et al. [WOS86] et Guo [Guo87]. Ce dernier a présenté, en considérant une formulation lagrangienne actualisée, un élément rectiligne à section arbitraire pour l'analyse non linéaire statique et dynamique en grands déplacements et élastoplasticité. Il a comparé la méthode de plastification progressive avec la méthode de plastification globale et indiqué que la première est plus générale et plus précise que la deuxième. Wunderlich et ses collaborateurs, qui ont aussi adopté une formulation lagrangienne totale, ont considéré une section arbitraire, l'axe courbé, les imperfections initiales, le gauchissement de torsion

---

<sup>1</sup>Nous monterons au chapitre 4 que la composition des rotations est additive sous l'hypothèse des petites rotations ou si les rotations partagent le même axe.

et l'élastoplasticité.

Toutes ces formulations souffrent d'un seul problème inhérent: elles sont limitées aux petites rotations entre deux configurations successives. Cette hypothèse ne reste plus valable dans le cas des poutres très flexibles et quelques complications apparaissent à cause de la nature non vectorielle des grandes rotations. Ceci a poussé les chercheurs à prendre en compte la théorie des grandes rotations dans la formulation des poutres tridimensionnelles. À ce sujet signalons les excellents travaux de Argyris et al. [AHMS79, ABHK82] et Simo et al. [Sim85, SVQ86] qui ont permis de lancer la recherche dans cette voie. Argyris et ses collègues ont étudié l'équilibre d'une poutre tridimensionnelle soumise aux grandes rotations et introduit le concept de rotations "semi-tangentielles" conférant la propriété de commutativité au tenseur orthogonal des rotations et la symétrie à la matrice tangente. Simo et ses collaborateurs ont écrit la formulation d'une poutre tridimensionnelle sous forme très mathématique et présenté un modèle "exact" avec la prise en compte des déformations de cisaillement transversal. Ils définissent les rotations comme une transformation orthogonale, généralement non commutative, appartenant au groupe de *Lie* et soulignent que la matrice tangente obtenue, bien que non symétrique, est toujours symétrique dans une configuration d'équilibre [Sim85]. Les travaux de Simo ont orienté les travaux de beaucoup de chercheurs, parmi eux: Lo [Lo92] qui a présenté un élément courbé pour l'analyse non linéaire géométrique des poutres. Il a obtenu une matrice tangente non symétrique et confirmé en utilisant quelques exemples que d'utiliser uniquement la partie symétrique n'influence pas vraiment le taux de convergence de la méthode de Newton-Raphson; Shakourzadeh [Sha94] a modifié l'élément de Guo [Guo87] pour tenir compte de la théorie du second ordre des grandes rotations (les termes cubiques et supérieurs sont négligés dans l'expression de la matrice de rotation) et a analysé des pylônes de transmission électriques; Park et Lee [PL96] ont présenté un élément rectiligne pour l'analyse géométrique et matérielle des poutres; Saleeb et al. [SCG92] ont présenté une formulation mixte et utilisé une interpolation linéaire pour les déplacements. Un travail plus exhaustif a été présenté par Cardonna et Geradin [CG88] qui ont proposé une formulation permettant de tenir compte des grandes rotations dans l'analyse statique et dynamique des poutres. Il ont exploité la relation entre la matrice orthogonale des grandes rotations et le vecteur des grandes rotations pour déduire une matrice tangente symétrique; Ibrahimbegovic et ses collaborateurs [MI95, Ibr95] ont exploité cette idée qui leur a permis de formuler un élément de poutre pour l'analyse non linéaire géométrique.

Pour clore cette section, nous aimerions mentionner les références suivantes couvrant quelques aspects mathématiques et techniques concernant les grandes rotations: [Arg82, NOC91, IF95, PB83, Arg82, AP93, Ibr97a]. En plus, nous référons le lecteur aux travaux: [Guo87, Fre78, IF92, Sha94] touchant l'aspect numérique, soit les techniques utilisées pour éviter le blocage de cisaillement dans les poutres ou l'intégration de la loi de comportement.

### Quelques remarques

Il ressort de l'examen des publications mentionnées dans cette section les remarques importantes que voici:

La formulation lagrangienne totale soumise à des réserves, voire des critiques, restait pendant des années dévalorisée en faveur de la formulation lagrangienne actualisée, devenue populaire malgré son "défaut caché", à savoir que la géométrie de la configuration de référence change constamment. La formulation lagrangienne actualisée s'est alors imposée tranquillement là où la première a échoué, à savoir pour les éléments formulés en théorie assujétie et subissant des grands déplacements et des grandes rotations tridimensionnelles. En effet, les formules établies jusqu'alors pour permettre le traitement des grandes rotations compliquaient davantage les expressions du champ cinématique et des déformations et conduisaient souvent à des difficultés considérables de mise en œuvre<sup>2</sup>. Ceci conduit à définir des éléments très complexes, peu utilisables en pratique. Au cours des dernières années, beaucoup de raffinements ont été apportés à la formulation lagrangienne actualisée et différentes façons ont été proposées pour le calcul des déformations et des contraintes. Ces améliorations ont certes conduit à des versions plus performantes et ont permis de résoudre pas mal de problèmes académiques et pratiques, mais il s'est avéré que les approximations que contient l'une ou l'autre des formulations lagrangiennes actualisées (addition des rotations sous formes vectorielle, discrétisation par facette, opérateurs incomplets, ..., etc.) peuvent introduire des erreurs entraînant de sérieux problèmes de convergence et ne garantissant pas des résultats précis dans tous les cas. Par exemple, on doit adopter un maillage assez fin pour l'analyse des structures courbées et de petits pas de

---

<sup>2</sup>Même dans le cas des structures minces, notamment pour des coques de forme quelconque, basées sur l'hypothèse de Kirchhoff, où les rotations sont formulées par des dérivées des translations, l'utilisation de la formulation lagrangienne totale aboutissait à des expressions de déformations très complexes, exigeant une continuité  $C^1$  de toutes les composantes de déplacements de la surface de référence pour définir des éléments conformes.

chargement pour l'analyse des structures flexibles. Les résultats dépendent fortement du degré de non-linéarité du problème.

En raison de nouveaux besoins industriels, notamment dans les domaines aéronautique, aérospatiale et automobile (par exemple, besoin de structures encore plus flexibles et plus légères), les chercheurs ont orienté leurs efforts vers la formulation de nouveaux éléments non linéaires plus robustes (précision et coût) en grandes rotations et grands déplacements, qui suivent une théorie tenant compte de "l'effort tranchant", où les rotations peuvent s'exprimer indépendamment des translations (théorie de Reissner-Mindlin ou théories raffinées d'ordre supérieur). Ceci a permis le retour sur la scène actuelle de la formulation lagrangienne totale et motivé certains chercheurs à investir dans la description de la cinématique des grandes rotations. Des points de vue purement mathématiques ont été récemment adoptés considérant les rotations comme des objets non linéaires appartenant au groupe de *Lie*. Ceci a eu pour effet de compliquer la compréhension du traitement des rotations tridimensionnelles pour un bon nombre de chercheurs et ingénieurs. Pour aplanir ces difficultés de compréhension de façon à la rendre plus accessible aux ingénieurs, nous avons adopté, dans ce travail, un point de vue purement algébrique. Les connaissances mathématiques requises sont limitées aux calculs matriciel et différentiel.

Devant les deux tendances générales qui existent dans la formulation des problèmes matériellement non linéaires, que doit-on choisir, l'approche locale ou l'approche résultante? La réponse est difficile à donner et dépend du but recherché: veut-on considérer des structures constituées de matériaux avec écrouissage et considérant les effets dus au changement de la géométrie? Si c'est le cas, le modèle local est le plus approprié, puisque il permet de tenir compte de l'écrouissage et des contraintes résiduelles dans l'épaisseur de la coque ou de la section droite de la poutre. Dans le cas contraire, le modèle résultant peut être très efficace, car il nécessite moins de stockage et réduit énormément le temps de calcul. On sait, d'autant plus, par la théorie de la plasticité appliquée aux matériaux sans écrouissage et aux structures ne considérant pas les effets dus au changement de la géométrie, que la "charge limite" n'est ordinairement pas sensible à la pénétration plastique progressive, mais ne dépend que du stade final entièrement plastifié [Fre78]. Cependant, nous estimons que cette approche est insuffisante. Elle risque d'être dangereusement optimiste pour les phénomènes d'instabilité (une extension même très locale de la plasticité peut suffire à déclencher une instabilité), et ne permet guère de prendre en compte les contraintes résiduelles, souvent si importantes. Il convient donc de discrétiser l'épaisseur ou la section droite. La



division en tranches, avec une variation constante ou linéaire des contraintes dans les tranches, pouvant s'avérer insuffisante ou rudimentaire, il est meilleur d'adopter un schéma d'intégration numérique classique de type *Gauss* ou *Lobatto* (choisi dans ce travail: offrant des points d'intégration sur les peaux extérieures où la plastification commence).

Pour clore cette section, nous aimerions souligner que jusqu'à présent, des études approfondies visant l'amélioration des méthodes de résolution et des critères de convergence permettant de tenir compte de la nature et de l'ordre de grandeur des rotations ne semble pas avoir été faites. Dans ce sens, nous avons essayé modestement de raffiner ces derniers le mieux possible en suivant les directives générales du programme *ABAQUS*.

### 1.3 Objectifs et cadre de la thèse

Sécurité et économie sont actuellement deux des facteurs qui militent le plus en faveur du calcul non linéaire des structures. Cependant, même si l'analyse non linéaire des structures par élément finis est de nos jours bien acceptée des ingénieurs, il demeure qu'un bon nombre d'entre eux éprouvent toujours un certain malaise vis-à-vis de ce type d'analyse, qui les plonge continuellement dans l'embarras. En effet, la large gamme d'éléments finis, de critère de convergence, de méthodes et techniques de résolution provoquent l'embarras du choix et il devient difficile pour l'utilisateur d'effectuer un choix éclairé. Ces faits ont orienté les travaux de recherche présentés dans cette thèse. Nous nous sommes fixés comme objectif de développer des modèles robustes de poutre et de coque courbes générales qui permettent l'analyse statique non linéaire des structures, prenant en compte les grands déplacements, les grandes rotations et le comportement mécanique réel ainsi que de raffiner davantage les techniques numériques de façon à les rendre beaucoup plus efficaces et flexibles; ceci dans le but de faciliter la tâche de l'utilisateur, sans toutefois atténuer son rôle et sa responsabilité. Nous avons tout de même restreint notre étude en fonction de l'objectif pratique recherché, soit l'application aux structures métalliques constituées d'assemblage de poutre et/ou de coques (ossatures de bâtiments, panneaux toitures, réservoirs, pylônes et tours de transmissions électriques, etc.). Il se dégage de l'analyse de telles structures les faits suivants:

- elles sont formées de composants structuraux élancés et/ou minces et, par suite, les déplacements et les rotations peuvent devenir importants;

- même si elles peuvent subir des grands déplacements et des grandes rotations, leurs déformations demeurent petites;
- elles nécessitent la prise en compte de la plasticité si l'on désire faire le calcul à la ruine pour connaître le degré réel de sécurité.

Chacun de ces faits sera pris en considération dans ce travail, néanmoins les restrictions et hypothèses suivantes ont été faites:

- les imperfections mécaniques initiales (contraintes et déformations résiduelles) ne sont pas considérées;
- les déformations et les contraintes dues au gauchissement des sections transversales des poutres sont négligées;
- nous ne considérons que les forces conservatives;
- les phénomènes considérés se déroulent suffisamment lentement pour que les effets dynamiques et le fluage puissent être ignorés.

Ce cadre est déjà large et suffit amplement au but de la thèse.

## 1.4 Plan de la thèse

Pour atteindre les buts visés par ce travail, nous retenons la méthodologie suivante.

Dans le chapitre deux, nous rappelons les équations de base de la mécanique des solides déformables, sans spécialisation directe aux corps orientés et sans aucune restriction quant à l'amplitude des déformations et déplacements. Les concepts et les différents tenseurs et mesures couramment utilisés sont rappelés dans le but de clarifier certaines notions nécessaires au développement des chapitres relatifs à la théorie des corps orientés.

Le chapitre trois traite de l'écriture des lois de comportement en présence de petites déformations. Nous y présentons les principales hypothèses et relations qui caractérisent le comportement des métaux usuels. De plus, nous donnons l'expression explicite des modules tangents élastoplastiques consistants relatifs aux corps massifs et orientés de type coque et poutre.

Le chapitre quatre est consacré à l'examen général de la cinématique des grandes rotations et à la discussion des procédures de paramétrisation et de linéarisation du

champ de rotations ainsi qu'à l'établissement, après une brève introduction de l'algèbre de quaternion, des règles et des lois de composition et de mise à jour des rotations.

Le chapitre cinq comprend les aspects numériques de la résolution des équations d'équi-libre non linéaires, soit la discrétisation de la forme variationnelle et les techniques utilisées dans la recherche de la solution des relations fondamentales ainsi obtenues.

Le chapitre six expose notre choix de paramétrisation des poutres courbes tridimensionnelles ainsi que les hypothèses cinématiques et constitutives qui permettent d'établir l'expression du principe des travaux virtuels et de retrouver les relations qui caractérisent la théorie non linéaire des poutres en membrane, flexion, cisaillement transversal et torsion sans gauchissement. Ce chapitre présente aussi les aspects numériques du modèle élément fini adopté, soit l'interpolation et l'actualisation des champs cinématiques et la discrétisation de la forme variationnelle permettant de définir le vecteur résidu et la matrice tangente.

La théorie non linéaire des coques courbes, incluant les déformations de cisaillement transversal est le sujet du chapitre sept. Nous y présentons une description "exacte" des champs cinématiques et du processus de leurs mise à jour. Les lois de comportement et les aspects de discrétisation et d'intégration associés au modèle de coque proposé sont également présentés.

La validation des algorithmes et des modèles de coque et de poutre proposés est faite au chapitre huit. Plusieurs exemples numériques sont présentés pour démontrer les performances et l'efficacité des divers éléments et techniques formulés dans le cadre de cette recherche, notamment l'algorithme d'intégration implicite de la plasticité, l'intégration sur l'épaisseur de la coque et la section de la poutre, les grandes rotations et d'autres aspects.

Le chapitre neuf oriente le travail vers la réalisation de deux études pratiques non linéaires.

Finalement, une rétrospective de cette recherche et quelques recommandations concernant l'orientation des recherches futures sont proposées au dernier chapitre.

## 1.5 Intérêts pratiques et apports de la thèse

Bien que l'utilité pratique de la thèse concerne avant tout les constructions métalliques civiles, elle intéresse aussi d'autres constructions, notamment mécaniques, aéronautiques et spatiales (carrosseries automobiles, fuselages, hélices, ailes d'avions, satellites, panneaux et antennes télescopiques, etc.).

Nous pouvons affirmer que le résultat tangible de la thèse est la mise au point d'un modèle numérique d'éléments finis pour simuler le comportement pré et post-flambement de certains composants structuraux utilisés dans les constructions métalliques avec la possibilité de tenir compte de la plastification de ces composants. Ce modèle permettra d'améliorer sensiblement l'analyse non linéaire, particulièrement au voisinage de la ruine, des structures métalliques et d'avoir une meilleure compréhension du comportement global de la structure ainsi que le comportement individuel des éléments qui la composent. Il reste évident que les développements qu'ont entraîné cette recherche pourront être directement appliqués, ou étendus si nécessaire, à toute autre structure, quels que soient sa forme géométrique et ses matériaux constitutants.

Plus spécifiquement, nous considérons avoir contribué au développement et à l'amélioration des aspects suivants:

### 1. Aspects théoriques:

- application générale (tridimensionnelle) et particulière (après l'introduction des hypothèses cinématiques concernant les coques et les poutres) de l'algorithme du retour radial au modèle élastoplastique adopté et déduction de l'expression explicite du module tangent élastoplastique cohérent avec l'algorithme du retour radial et préservant la convergence quadratique de l'algorithme de Newton-Raphson.
- présentation claire de la cinématique des rotations finies et différentielles. Celle-ci a été développée sous forme algébrique et expliquée en termes concis, permettant sa compréhension et sa mise en œuvre sur ordinateur. Cette présentation s'adresse aux lecteurs qui désirent comprendre les grandes rotations et les notions qui s'y rattachent sans passer par l'algèbre de *Lie*, nécessitant des connaissances mathématiques approfondies. Elle est donc utile à la fois aux étudiants et chercheurs en sciences appliquées et aux ingénieurs. Les connaissances mathématiques requises sont celles d'un ingénieur (calculs matriciel et différentiel).

- application de la théorie des grandes rotations dans le contexte des corps flexibles orientés, basés sur l'hypothèse de Reissner-Mindlin. Cela nous a permis d'établir un champ "exact" des grands déplacements et grandes rotations des coques et des poutres tridimensionnelles courbés. Relativement à ces modèles:
  - (a) la méthode de plastification progressive est adoptée pour l'analyse élastoplastique;
  - (b) la méthode des normales moyennées aux nœuds est utilisée pour obtenir une géométrie présentant une continuité de type  $C^0$ , utile dans le traitement des intersections;
  - (c) une technique de pénalisation de la rigidité du cisaillement transversal est utilisée afin d'empêcher la domination numérique de l'énergie du cisaillement transversal sur l'énergie de flexion et assurer une représentation acceptable des relations du modèle de Kirchhoff;
  - (d) les mesures de déformations et les lois de comportement proposées sont présentées, de même que le calcul variationnel et l'actualisation des entités cinématiques;
  - (e) la matrice de rigidité et le vecteur des forces internes sont explicités en vue d'une résolution des équations non linéaires statiques basée sur la méthode de Newton-Raphson.

## 2. Aspects numérique et technique:

- mise au point d'un code de calcul sophistiqué et industriel<sup>3</sup>, hiérarchisé de façon à permettre à l'utilisateur de diviser son problème en plusieurs analyses séquentielles. Ceci permet de combiner plusieurs type d'analyses (analyse élastoplastique suivie d'une analyse de stabilité tenant compte des contraintes et déformations résiduelles) et changer les données d'une analyse à une autre (supprimer les éléments inutiles, changer les sollicitations, les conditions aux limites, les paramètres de résolution, etc.). Afin d'augmenter l'efficacité du code, nous lui avons intégré:

---

<sup>3</sup>Ce code constitue la version améliorée du logiciel CLEF [DF92]

- (a) de nouveaux éléments finis non linéaires à interpolation linéaire et quadratique, considérés très utiles pour l'analyse élastique et élastoplastique, en grands déplacements et en grandes rotations, des poutres et coques minces ou épaisses;
- (b) un processus exact de mise à jour de la géométrie (translation et rotation) tenant compte de la nature non vectorielle des rotations;
- (c) des techniques de résolution et des critères de convergence accommodant les rotations ou autres grandeurs présentant des ordres de grandeurs différents;
- (d) une stratégie d'incrémentation efficace permettant d'ajuster automatiquement à chaque pas le paramètre imposé (incrément de charge, de déplacement ou de la longueur d'arc) suivant le degré de non-linéarité du problème et les caractéristiques de convergence du pas précédent;
- (e) une procédure de sauvegarde des calculs pour un usage ultérieur.

### 3. Aspect pratique:

- réalisation de deux études pratiques, une touchant des panneaux ondulés et l'autre un camion forestier.

## Chapitre 2

# Mécanique des solides déformables

### 2.1 Introduction

Nous présentons dans le présent chapitre un résumé des principaux concepts utilisés en mécanique des milieux continus. Ce résumé a pour but de clarifier certaines notations et définitions nécessaires au développement des chapitres relatifs à la théorie des corps *orientés* ou théorie *assujettie* [Fre78]. Les équations de base de la théorie tridimensionnelle des corps *massifs* ou théorie *intrinsèque* [Fre78] seront présentées sans spécialisation directe aux corps orientés et sans aucune restriction quant à l'amplitude des déformations et déplacements; nous préciserons en temps opportun les limitations et avantages que ces restrictions apportent dans chaque cas particulier où nous les emploierons. Deux aspects généraux de la mécanique tridimensionnelle sont alors succinctement rappelés dans ce chapitre, soit la cinématique permettant de livrer les relations à caractères géométrique et cinétique permettant d'exprimer l'équilibre mécanique sous forme forte (relations aux dérivées partielles) et sous forme faible (relation du travail virtuel). Les lois constitutives caractérisant le comportement des matériaux composant le corps étudié feront l'objet du chapitre 3.

Les références qui ont servi à l'élaboration de ce chapitre sont principalement: Green et Zerna [GZ68], Malvern [Mal69], Chung [Chu88], Frey [Fre78], Batoz et Dhatt

[BD86b], Charlier [Cha87], Fafard [Faf87] et El Mouatassim [EM89].

## 2.2 Aspects cinématiques

### 2.2.1 Configurations et repères

Considérons un corps solide continu  $A$  constitué d'un ensemble de particules matérielles  $P$  occupant à l'instant  $t$  un volume  $V$  de l'espace euclidien, borné par une frontière  $S$ . L'état, dans lequel se trouve le solide à cet instant, définit ce qu'on appelle la *configuration actuelle* du solide. Cette configuration notée  $C_t$  est caractérisée par un ensemble de variables cinématiques et mécaniques, telles que:

- les positions géométriques  $\mathbf{x}$  des particules matérielles occupant le volume  $V$  limité par la surface  $S$ ;
- les vitesses et accélérations des particules matérielles  $\dot{\mathbf{x}}$  et  $\ddot{\mathbf{x}}$ ;
- les contraintes et les déformations internes aux points matériels  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ;
- la masse volumique  $\rho$ , les sollicitations par unité de volume  $\mathbf{f}_V$  et les sollicitations par unité de surface  $\mathbf{f}_S$ .

La description de ces variables en fonction des positions spatiales  $\mathbf{x}$  est appelée *description spatiale* ou encore *description eulerienne*. Généralement en mécanique des structures quand on parle de configuration connue, on sous entend que toutes les quantités cinématiques et mécaniques caractérisant la configuration sont connues. Souvent, l'analyste introduit une *configuration de référence*, notée  $C_0$ , qui est une configuration particulière connue de la structure à un instant  $t_0$  et fait la description au cours du temps des transformations géométriques que subit la structure quand elle se déplace de cette référence. Les variables d'état définies ci-dessus sont alors décrites en fonction des positions matérielles  $\mathbf{X}$  des particules dans la configuration  $C_0$ . Cette formulation est appelée en général *description matérielle* ou *lagrangienne* et en particulier *description lagrangienne totale* si elle est écrite relativement à l'état naturel de repos non chargé.

Pour décrire une variable d'état (vectorielle ou tensorielle) d'une configuration donnée il est commode de l'exprimer en terme de ses composantes. Ces composantes sont associées à un système de coordonnées qui définit en chaque particule matérielle un ensemble de vecteurs de base. Les vecteurs de la *base cartésienne*  $[\mathbf{I}_i]_{i=1,2,3}$  sont toujours



“orthonormés” et dans la même “direction” en tous les points (figure 2.1). Bien que ce système soit plus simple à utiliser, nous avons besoin d’un système de coordonnées plus “général”, puisque nous aurons à considérer ultérieurement des coques et des poutres, pour lesquelles il est pratique de décrire les contraintes et déformations en terme des directions associées à la surface de la coque (ou aux axes définissant la poutre) et qui changent souvent d’un point à un autre de la surface et d’une configuration à une autre. Cette préférence nous amène à associer au corps solide dans une configuration donnée, un ensemble de vecteurs de base, choisis linéairement indépendants et spécifiés par la donnée de leurs cosinus directeurs par rapport au système cartésien global  $(Z^1, Z^2, Z^3)$ . Nous introduisons alors les vecteurs de base  $\mathbf{g}_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) pour exprimer les variables d’état associées à la configuration actuelle et  $\mathbf{G}_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) pour exprimer celles de la configuration de référence. La base  $[\mathbf{g}_\alpha]_{\alpha=1,2,3}$  est associée au corps solide dans sa configuration actuelle, soit quand le point en question est en  $\mathbf{x}$ ; alors que la base  $[\mathbf{G}_\alpha]_{\alpha=1,2,3}$  est associée au corps dans sa configuration de référence, quand le même point se trouvait en  $\mathbf{X}$ . Les vecteurs respectifs de ces bases ne sont en général ni unitaires, ni orthogonaux. Pour cette raison et afin de faciliter la représentation de certaines relations, nous avons besoin d’introduire les vecteurs *contravariants*  $\mathbf{g}^\alpha$  et  $\mathbf{G}^\alpha$  vérifiant:

$$\mathbf{g}^\alpha \cdot \mathbf{g}_\beta = \delta_\beta^\alpha \quad \text{et} \quad \mathbf{G}^\alpha \cdot \mathbf{G}_\beta = \delta_\beta^\alpha \quad \begin{matrix} \alpha = 1, 2, 3 \\ \beta = 1, 2, 3 \end{matrix} \quad (2.1)$$

où  $\delta_\beta^\alpha$  est le *symbole de Kronecker* défini par

$$\delta_\beta^\alpha = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = \beta \\ 0 & \text{si } \alpha \neq \beta \end{cases}$$

Ainsi tout vecteur et tout tenseur, associés à la configuration actuelle par exemple, tel que le vecteur position  $\mathbf{x}$  et le tenseur métrique  $\mathbf{g}$ , peuvent s’exprimer dans les bases *covariante* et *emphcontravariante* liées à cette configuration par:

$$\mathbf{x} = x^\alpha \mathbf{g}_\alpha = x_\beta \mathbf{g}^\beta$$

et

$$\mathbf{g} = g^{\alpha\beta} \mathbf{g}_\alpha \otimes \mathbf{g}_\beta = g_{\gamma\delta} \mathbf{g}^\gamma \otimes \mathbf{g}^\delta$$

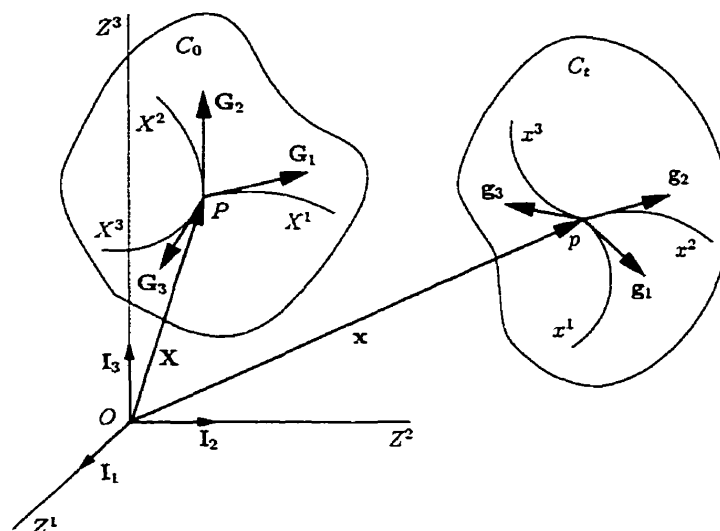


Figure 2.1: Systèmes de coordonnées dans les configurations de référence  $C_0$  et actuelle  $C_t$ .

### Remarques

- Nous utilisons dans cette thèse les indices latins à la place des indices grecs pour distinguer, dans certains cas, entre les composantes cartésiennes d'un vecteur  $\mathbf{v}$  et ses composantes dans une base générale telle que  $[\mathbf{g}_\alpha]_{\alpha=1,2,3}$ . Ainsi  $a^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) est la composante du vecteur  $\mathbf{v}$  suivant l'axe cartésien  $Z^i$  (suivant  $\mathbf{I}_i$ ), tandis que  $a^\alpha$  est la composante contravariante de  $\mathbf{v}$  le long du vecteur de base  $\mathbf{g}_\alpha$ .
- En utilisant le produit vectoriel avec les relations (2.1), nous pouvons exprimer les vecteurs de base contravariants en terme de la base covariante et inversement. Par exemple:

$$\mathbf{g}^1 = \frac{1}{E} \mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3 \quad \mathbf{g}^2 = \frac{1}{E} \mathbf{g}_3 \times \mathbf{g}_1 \quad \mathbf{g}^3 = \frac{1}{E} \mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2$$

où  $E$  est un scalaire donné par le produit mixte

$$E = \mathbf{g}_1 \cdot (\mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3)$$

et inversement,

$$\mathbf{g}_1 = \frac{1}{E} \mathbf{g}^2 \times \mathbf{g}^3 \quad \mathbf{g}_2 = \frac{1}{E} \mathbf{g}^3 \times \mathbf{g}^1 \quad \mathbf{g}_3 = \frac{1}{E} \mathbf{g}^1 \times \mathbf{g}^2$$

### 2.2.2 Gradient de déformation

L'action des sollicitations de surface et/ou de volume provoque en général dans le corps solide des déformations et des mouvements de corps rigide. On dit que le corps continu se "déforme", si la position relative d'au moins deux de ses particules matérielles change au cours du temps. Si, par contre, la distance entre chaque couple de particules reste constante durant le mouvement du corps, ce dernier subit alors un *mouvement de corps rigide* constitué de *translations* et de *rotations*; translations et rotations sont pour cette raison appelés *déplacements du corps rigide*.

Nous adoptons dans la suite de ce chapitre le point de vue lagrangien. Donc, si  $\mathbf{X}$  est la position occupée par une particule matérielle dans la configuration de référence, la description du mouvement du corps est donnée par la relation

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \quad (2.2)$$

qui est une bijection ponctuelle entre la position initiale  $\mathbf{X}$  de la particule matérielle et la position  $\mathbf{x}$  à l'instant  $t$  de cette même particule matérielle; la transformation (2.2) peut toujours être inversée si on veut connaître  $\mathbf{X}$  connaissant  $\mathbf{x}$  et  $t$ . Considérons à présent deux particules voisines, situées en  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{X} + d\mathbf{X}$  dans la configuration de référence. Dans la configuration actuelle nous devons avoir, en utilisant l'équation (2.2):

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \cdot d\mathbf{X} \quad (2.3)$$

ou encore, en introduisant le tenseur  $\mathbf{F} = \partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{X}$ , dit *tenseur gradient de déformation*:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} \quad (2.4)$$

Comme le comportement matériel dépend de la déformation du solide et non de ses déplacements de corps rigide, ces composantes du mouvement au voisinage d'un point matériel doivent être distinguées. Examinons alors la jauge infinitésimale  $d\mathbf{X}$  émanant de la particule initialement en  $\mathbf{X}$  et désignons ses longueurs initiale et actuelle par  $dL$  et  $dl$  respectivement, telle que:

$$dL^2 = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} \quad \text{et} \quad dl^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}$$

Nous pouvons ainsi définir une mesure d'élongation par le rapport:

$$\lambda = \frac{dl}{dL} = \sqrt{\frac{d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}}{d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}}} \quad (2.5)$$

dit *rapport d'élongation*, de sorte que si  $\lambda = 1$  il n'y a pas de déformation de la jauge: elle subit des déplacements de corps rigide seulement. Combinons maintenant cette équation avec l'équation (2.4) afin d'obtenir la relation

$$\begin{aligned}\lambda^2 &= \frac{d\mathbf{X}}{\sqrt{d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}}} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{X}}{\sqrt{d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}}} \\ &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{N}\end{aligned}\quad (2.6)$$

qui fait apparaître le vecteur unitaire  $\mathbf{N}$  dans la direction de la jauge  $d\mathbf{X}$  et le *tenseur de Cauchy-Green droit*  $\mathbf{C}$

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$$

L'équation (2.6) montre comment mesurer, en n'importe quel point matériel (défini par  $\mathbf{X}$  ou par  $\mathbf{x}$ ), le rapport d'élongation associé à une direction quelconque  $\mathbf{N}$ . Par ailleurs, la résolution du problème aux valeurs propres

$$(\mathbf{C} - \lambda^2 \mathbf{I}) \cdot \mathbf{N} = 0$$

permet d'obtenir les valeurs stationnaires de  $\lambda^2 > 0$  et de déduire ainsi les trois valeurs propres, réelles positives  $\lambda_I$ ,  $\lambda_{II}$ ,  $\lambda_{III}$ , dites *élongations principales*, avec leurs trois vecteurs propres respectifs,  $\mathbf{N}_I$ ,  $\mathbf{N}_{II}$ ,  $\mathbf{N}_{III}$ , dits *directions principales de déformation*. Ces vecteurs sont orthogonaux si les valeurs propres correspondant sont différentes. Ils peuvent être orthogonalisés sinon. En vertu de l'équation (2.4), ils se transforment dans la configuration actuelle en  $\lambda_I \mathbf{n}_I$ ,  $\lambda_{II} \mathbf{n}_{II}$ ,  $\lambda_{III} \mathbf{n}_{III}$  tels que

$$\mathbf{n}_I = \frac{1}{\lambda_I} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_I, \quad \text{etc.}$$

Nous pouvons montrer que les vecteurs  $\mathbf{n}_I$ ,  $\mathbf{n}_{II}$ ,  $\mathbf{n}_{III}$ , définissent également une base orthonormée [BD86b]. Par conséquent:

$$\mathbf{n}_I = \mathbf{R} \cdot \mathbf{N}_I$$

$$\mathbf{n}_{II} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{N}_{II}$$

$$\mathbf{n}_{III} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{N}_{III}$$

où  $\mathbf{R}$  est le *tenseur de rotation de corps rigide pure*, vérifiant  $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$ . La comparaison des directions principales dans la configuration actuelle et de référence permet donc d'isoler la rotation du corps rigide et l'élongation. Autrement dit, la détermination des élongations principales et leurs directions dans les configurations actuelle et

originale fournit une solution au problème d'isoler les déformations pures du mouvement de corps rigide au voisinage d'un point matériel.

Considérons maintenant, dans la configuration de référence, une jauge infinitésimale  $d\mathbf{X}_I$ , dirigée suivant  $\mathbf{N}_I$ . Cette même fibre matérielle se verra dans la configuration actuelle, orientée vers la direction  $\mathbf{n}_I$  et étirée par  $\lambda_I$ , tel que

$$d\mathbf{x}_I = \lambda_I \mathbf{R} \cdot d\mathbf{X}_I$$

Il en est de même, le long des autres directions principales,

$$d\mathbf{x}_{II} = \lambda_{II} \mathbf{R} \cdot d\mathbf{X}_{II} \quad \text{et} \quad d\mathbf{x}_{III} = \lambda_{III} \mathbf{R} \cdot d\mathbf{X}_{III}$$

Puisque  $\mathbf{N}_I$ ,  $\mathbf{N}_{II}$  et  $\mathbf{N}_{III}$  forment une base orthonormée, toute fibre matérielle infinitésimale  $d\mathbf{X}$  en  $\mathbf{X}$  peut être exprimée en terme de ses composantes dans cette base:

$$d\mathbf{X} = d\mathbf{X}_I + d\mathbf{X}_{II} + d\mathbf{X}_{III}$$

où

$$d\mathbf{X}_I = \mathbf{N}_I \otimes \mathbf{N}_I \cdot d\mathbf{X}$$

Comme défini précédemment, chacun des vecteurs  $d\mathbf{X}_I$  se transforme en  $d\mathbf{x}_I$  de sorte que le la jauge actuelle  $d\mathbf{x}$  s'exprimera comme suit:

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} &= d\mathbf{x}_I + d\mathbf{x}_{II} + d\mathbf{x}_{III} \\ &= \lambda_I \mathbf{R} \cdot d\mathbf{X}_I + \lambda_{II} \mathbf{R} \cdot d\mathbf{X}_{II} + \lambda_{III} \mathbf{R} \cdot d\mathbf{X}_{III} \\ &= (\lambda_I \mathbf{R} \cdot \mathbf{N}_I \otimes \mathbf{N}_I + \lambda_{II} \mathbf{R} \cdot \mathbf{N}_{II} \otimes \mathbf{N}_{II} + \lambda_{III} \mathbf{R} \cdot \mathbf{N}_{III} \otimes \mathbf{N}_{III}) \cdot d\mathbf{X} \\ &= \mathbf{R} \cdot (\lambda_I \mathbf{N}_I \otimes \mathbf{N}_I + \lambda_{II} \mathbf{N}_{II} \otimes \mathbf{N}_{II} + \lambda_{III} \mathbf{N}_{III} \otimes \mathbf{N}_{III}) \cdot d\mathbf{X} \end{aligned}$$

que nous écrivons

$$d\mathbf{x} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot d\mathbf{X} \tag{2.7}$$

avec

$$\mathbf{U} = (\lambda_I \mathbf{N}_I \otimes \mathbf{N}_I + \lambda_{II} \mathbf{N}_{II} \otimes \mathbf{N}_{II} + \lambda_{III} \mathbf{N}_{III} \otimes \mathbf{N}_{III}) \tag{2.8}$$

Le vecteur  $d\mathbf{x}$  peut par ailleurs s'écrire

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} &= d\mathbf{x}_I + d\mathbf{x}_{II} + d\mathbf{x}_{III} \\ &= \lambda_I \mathbf{R} \cdot d\mathbf{X}_I + \lambda_{II} \mathbf{R} \cdot d\mathbf{X}_{II} + \lambda_{III} \mathbf{R} \cdot d\mathbf{X}_{III} \\ &= (\lambda_I \mathbf{R} \cdot \mathbf{N}_I \otimes \mathbf{N}_I + \lambda_{II} \mathbf{R} \cdot \mathbf{N}_{II} \otimes \mathbf{N}_{II} + \lambda_{III} \mathbf{R} \cdot \mathbf{N}_{III} \otimes \mathbf{N}_{III}) \cdot d\mathbf{X} \\ &= (\lambda_I \mathbf{n}_I \otimes \mathbf{N}_I + \lambda_{II} \mathbf{n}_{II} \otimes \mathbf{N}_{II} + \lambda_{III} \mathbf{n}_{III} \otimes \mathbf{N}_{III}) \cdot d\mathbf{X} \\ &= (\lambda_I \mathbf{n}_I \otimes \mathbf{n}_I + \lambda_{II} \mathbf{n}_{II} \otimes \mathbf{n}_{II} + \lambda_{III} \mathbf{n}_{III} \otimes \mathbf{n}_{III}) \cdot \mathbf{R} \cdot d\mathbf{X} \end{aligned}$$

conduisant à

$$d\mathbf{x} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} \cdot d\mathbf{X} \quad (2.9)$$

avec

$$\mathbf{V} = (\lambda_I \mathbf{n}_I \otimes \mathbf{n}_I + \lambda_{II} \mathbf{n}_{II} \otimes \mathbf{n}_{II} + \lambda_{III} \mathbf{n}_{III} \otimes \mathbf{n}_{III}) \quad (2.10)$$

Les tenseurs  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}$ , symétriques et définis positifs, sont appelés respectivement, le *tenseur d'élongation droit* et le *tenseur d'élongation gauche*. La comparaison des équations (2.7) et (2.9) avec la définition du gradient de déformation, équation (2.4), montre que

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} \quad (2.11)$$

qui traduit le théorème de décomposition polaire: tout mouvement peut être considéré comme une élongation pure suivie d'une rotation de corps rigide, sinon d'une application successive d'une rotation de corps rigide et d'une élongation pure. Le théorème de décomposition polaire est important puisqu'il permet de distinguer les parties élongation et rotation d'un mouvement. En terme explicites,  $\mathbf{F}$  décrit complètement les mouvements relatifs des particules matérielles dans le voisinage infinitésimal de la particule matérielle qui occupait la position  $\mathbf{X}$  dans la configuration de référence; le tenseur d'élongation  $\mathbf{U}$  (ou bien  $\mathbf{V}$ ) définit complètement la déformation pure de la particule matérielle en  $\mathbf{X}$  et le tenseur orthogonal  $\mathbf{R}$  définit la rotation du corps rigide des directions principales de déformation ( $\mathbf{N}_I$  dans la configuration de référence;  $\mathbf{n}_I$  dans la configuration actuelle). La figure (2.2) schématise les caractéristique de la décomposition polaire dans le cas plan.

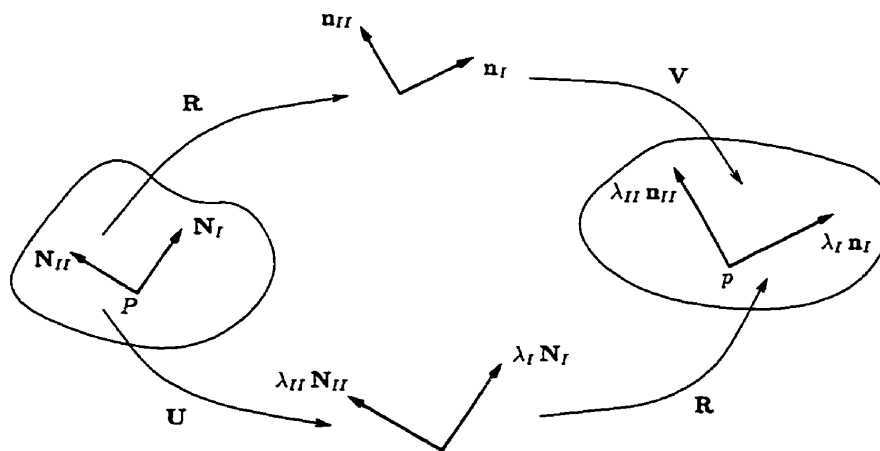


Figure 2.2: Décomposition polaire.

Des notions précédentes, on établit un résultat important:  $\mathbf{U} - \mathbf{I}$  doit être non nul en s'il y a une déformation quelconque du matériau au voisinage immédiat d'un point originairement en  $\mathbf{X}$  et actuellement en  $\mathbf{x}$ . En effet, si  $\mathbf{F} = \mathbf{R}$  seulement, on sait qu'il n'y a pas de déformation du matériau au point en question, puisque dans ce cas  $\mathbf{U} = \mathbf{I}$  et donc  $\lambda_I = \lambda_{II} = \lambda_{III} = 1$ . Dans ce sens  $\mathbf{U} - \mathbf{I}$  (et, de là,  $\mathbf{U}$  lui même), suffit pour définir la composante déformable d'un mouvement (il contient toutes les informations exceptée la rotation de corps rigide du point considéré). Ce résultat a permis, comme nous allons le montrer ci-après, de généraliser les mesures de déformation utilisées dans le cas unidimensionnel au cas tridimensionnel. Une description des rotations fera l'objet d'un autre chapitre, étant donné leur importance dans le cadre de ce travail.

### 2.2.3 Mesures de déformation

Pour comprendre la notion de mesure de déformation dans le cas des mouvements généraux, il y a lieu de considérer le concept de déformation dans le cas unidimensionnel au départ, ensuite de le généraliser aux mouvements arbitraires, en s'appuyant sur le théorème de décomposition polaire qui vient d'être dérivé.

#### Déformation unidimensionnelle

La mesure de *déformation* la plus intuitive dans le cas unidimensionnel est le rapport d'élongation  $\lambda$ . Cependant, une telle mesure n'est pas toujours adéquate. Pour bien voir où il est utile et où il ne l'est pas, remarquons d'abord que la valeur non contrainte de  $\lambda$  est égale à 1.0. Un matériau caoutchouteux peut voir sa longueur doubler ou même tripler quand on l'étire, si bien que la valeur du rapport d'élongation  $\lambda$  peut facilement atteindre 2 ou plus. Par opposition, l'élongation à la plastification d'une composante structurale constituée d'un métal usuel de construction (acier doux par exemple) et conçue pour répondre élastiquement sous les charges d'exploitation auxquelles elle sera soumise, est ordinairement de l'ordre de 1.001 en traction et 0.999 en compression. On voit bien que dans ce cas le rapport d'élongation ne peut pas être considéré comme une bonne mesure de déformation, puisque les nombres intéressants ne commencent à apparaître qu'au quatrième chiffre significatif. Pour éviter ce désagrément, on a introduit le concept de déformation. L'essence de l'idée est que la déformation est nulle en  $\lambda = 1$ , quand le matériau est non contraint.

En une dimension, on définit la déformation le long d'une jauge  $d\mathbf{X}$  en fonction de l'élongation  $\lambda$ :

$$\varepsilon = f(\lambda)$$

et on introduit le concept de déformation dans le but de guider le choix de la fonction  $f$ . Pour voir l'implication de ce concept, supposons que  $\varepsilon$  soit développée en séries de *Taylor* autour de l'état non déformé:

$$\varepsilon = f(1) + (\lambda - 1) \left. \frac{df}{d\lambda} \right|_{\lambda=1} + \frac{1}{2!} (\lambda - 1)^2 \left. \frac{d^2 f}{d\lambda^2} \right|_{\lambda=1} + \dots \quad (2.12)$$

Nous devons avoir  $f(1) = 0$ , de sorte que  $\varepsilon = 0$  en  $\lambda = 1$ . Nous choisissons aussi  $df/d\lambda|_{\lambda=1} = 1$ , afin de pouvoir retrouver la définition habituelle de la déformation: "changement de longueur par unité de longueur" et assurer que toutes les mesures de déformations définies de cette façon donneront la même valeur numérique, suivant l'ordre d'approximation, dans le cas des problèmes unidimensionnels à petites déformations. Finalement, nous exigeons que  $df/d\lambda > 0$  pour toutes les valeurs de  $\lambda > 0$ , de façon à assurer une croissance "monotone" de la déformation et faire correspondre à chaque valeur d'élongation une valeur unique de déformation<sup>1</sup>

Malgré ces restrictions,  $f(1) = 0$ ,  $df/d\lambda|_{\lambda=1} = 1$  et  $df/d\lambda > 0$  pour tout  $\lambda > 0$ , un choix de mesures de déformation s'offre toujours à nous. Parmi les plus connues, nous retrouvons :

- déformation *classique* (de *Biot*):  $f(\lambda) = \lambda - 1$
- déformation *logarithmique* (de *Hencky*):  $f(\lambda) = \ln \lambda$
- déformation de *Green-Lagrange*:  $f(\lambda) = \frac{1}{2} (\lambda^2 - 1)$
- déformation d'*Almansi*:  $f(\lambda) = \frac{1}{2} (1 - \lambda^{-2})$

Toutes ces mesures satisfont les restrictions de base. Évidemment plusieurs fonctions de déformation sont possibles<sup>2</sup>; le choix est strictement une question de commodité. Vue que la déformation joue habituellement le rôle d'un lien entre la cinématique et les lois de comportement, la commodité du choix dans le contexte éléments finis est

<sup>1</sup>Nous pouvons toutefois exiger que  $df/d\lambda < 0$ , ce qui implique tout simplement que la déformation soit considérée positive en compression quand  $\lambda < 1$ . Ce choix est généralement adopté dans les livres de mécanique des sols, du fait que les déformations (et les contraintes) impliquées dans les problèmes géotechniques sont souvent de type "compression". Nous adopterons dans ce travail la convention qu'une déformation positive représente une traction, quand  $\lambda > 1$ .

<sup>2</sup>La fonction  $f$  est souvent choisie de la forme  $(\lambda^{2m} - 1)/2m$ .



dictée par deux considérations: l'aisance avec laquelle la déformation peut être calculée à partir des déplacements, étant donné que ces derniers sont ordinairement les variables de base dans le modèle élément fini, et la justesse de la mesure de déformation relativement au modèle de comportement. Par exemple, il semble que la déformation logarithmique est particulièrement appropriée à la plasticité des métaux et la déformation de *Green-Lagrange* convient pour les problèmes entraînant des grands mouvements mais seulement des petites déformations, tandis que l'analyse en grandes déformations élastiques des caoutchoucs et matériaux similaires peut être faite d'une manière tout à fait satisfaisante sans avoir recourt à aucune mesure de déformation excepté le rapport d'élongation  $\lambda$ .

### Déformation tridimensionnelle

Dans la section (2.2.2), nous avons établi que la déformation pure au voisinage d'un point matériel est complètement caractérisée par six variables: les trois élongations principales ( $\lambda_I$ ,  $\lambda_{II}$ , et  $\lambda_{III}$ ) et l'orientation des trois directions principales d'élongation dans la configuration de référence (ou actuelle). Ce résultat permet immédiatement de généraliser la notion de mesure de déformation au cas tridimensionnel. En effet, en s'appuyant sur le concept de base introduit ci-haut, nous choisissons la fonction unidimensionnelle  $f$  qui sera utilisée comme mesure de déformation. Par conséquent,  $\varepsilon_I = f(\lambda_I)$  sera la déformation le long de la première direction principale  $\mathbf{N}_I$ ;  $\varepsilon_{II} = f(\lambda_{II})$  la déformation le long de  $\mathbf{N}_{II}$  et  $\varepsilon_{III} = f(\lambda_{III})$  la déformation le long de  $\mathbf{N}_{III}$ . L'état de déformation au point matériel peut être alors complètement caractériser par le tenseur<sup>3</sup>:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_I \mathbf{N}_I \otimes \mathbf{N}_I + \varepsilon_{II} \mathbf{N}_{II} \otimes \mathbf{N}_{II} + \varepsilon_{III} \mathbf{N}_{III} \otimes \mathbf{N}_{III} \quad (2.13)$$

Dans cette équation nous avons exprimé le tenseur en fonction des directions principales d'élongation dans la configuration de référence. Nous aurions pu également décomposer le gradient de déformation  $\mathbf{F}$  en une rotation suivie par une élongation des directions principales:  $\boldsymbol{\varepsilon}$  serait défini d'une manière similaire et serait alors associée aux directions principales dans la configuration actuelle.

Choisir la fonction  $f$  ne suffit donc pas pour définir la mesure de déformation (2.13).

---

<sup>3</sup>Notons la ressemblance avec la définition du tenseur d'élongation pure droit, équation (2.8): nous pourrions définir  $\boldsymbol{\varepsilon}$  par la fonction tensorielle  $\boldsymbol{\varepsilon} = f(\mathbf{U})$ , où nous entendons qu'une fonction tensorielle signifie d'une part que les deux tenseurs ont les mêmes directions principales et d'autre part que leurs valeurs principales sont reliées par la définition de  $f$ . Reste cependant que cette notation est insuffisante pour indiquer la relation entre les deux tenseurs.

Il nous faut les élongations principales ( $\lambda_I$ ,  $\lambda_{II}$ , et  $\lambda_{III}$ ) et leurs directions respectives  $\mathbf{N}_I$ ,  $\mathbf{N}_{II}$  et  $\mathbf{N}_{III}$ . Celles-ci peuvent être obtenues immédiatement à partir du calcul des valeurs et des vecteurs propres du tenseur  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$ , étant donné que:

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} \\ &= \lambda_I^2 \mathbf{N}_I \otimes \mathbf{N}_I + \lambda_{II}^2 \mathbf{N}_{II} \otimes \mathbf{N}_{II} + \lambda_{III}^2 \mathbf{N}_{III} \otimes \mathbf{N}_{III} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Une fois ces variables obtenues, nous calculons, pour la fonction  $f$  choisie comme mesure de déformation, les valeurs  $\varepsilon_I = f(\lambda_I)$ , etc. et nous construisons à partir de l'équation (2.13) le tenseur  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Malgré sa généralité, cette façon de procéder est très coûteuse dans le contexte éléments finis, puisque elle nécessite le calcul des valeurs et des vecteurs propres d'une matrice  $3 \times 3$  en chacun des différents points du modèle et en chacune des diverses itérations. Il serait donc souhaitable et moins coûteux que  $\boldsymbol{\varepsilon}$  puisse se calculer à partir de  $\mathbf{F}$ . Ceci est possible seulement pour certains choix de mesure de déformation,  $f(\lambda)$ . Nous considérons dans ce qui suit une de ces possibilités. Comme le tenseur identité  $\mathbf{I}$  peut s'écrire

$$\mathbf{I} = \mathbf{N}_I \otimes \mathbf{N}_I + \mathbf{N}_{II} \otimes \mathbf{N}_{II} + \mathbf{N}_{III} \otimes \mathbf{N}_{III}$$

nous obtenons donc, en utilisant l'équation (2.14):

$$\begin{aligned} \mathbf{C} - \mathbf{I} &= \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} - \mathbf{I} \\ &= (\lambda_I^2 - 1) \mathbf{N}_I \otimes \mathbf{N}_I + (\lambda_{II}^2 - 1) \mathbf{N}_{II} \otimes \mathbf{N}_{II} + (\lambda_{III}^2 - 1) \mathbf{N}_{III} \otimes \mathbf{N}_{III} \end{aligned}$$

En comparant cette équation avec l'équation (2.13) et en s'appuyant sur la définition de la déformation unidimensionnelle de Green-Lagrange:

$$\varepsilon^G = \frac{1}{2} (\lambda^2 - 1)$$

nous déduisons la définition du tenseur de déformation de Green-Lagrange, soit:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^G = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (2.15)$$

Une autre définition du tenseur de déformation de Green-Lagrange est obtenue en utilisant  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T$  à la place de  $\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$ , de sorte que le tenseur de déformation soit défini sur la configuration actuelle au lieu de prendre comme base la configuration de

référence<sup>4</sup>:

$$\varepsilon^g = \frac{1}{2} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} (\mathbf{B} - \mathbf{I})$$

où  $\mathbf{B}$  est le *tenseur de Cauchy-Green gauche*, défini par:

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} = \lambda_I^2 \mathbf{n}_I \otimes \mathbf{n}_I + \lambda_{II}^2 \mathbf{n}_{II} \otimes \mathbf{n}_{II} + \lambda_{III}^2 \mathbf{n}_{III} \otimes \mathbf{n}_{III} \quad (2.16)$$

Le tenseur de déformation de Green-Lagrange est donc directement dérivable à partir du gradient de déformation sans avoir recours au calcul des valeurs et directions principales. Ceci rend la déformation de Green-Lagrange plus attrayante sur le plan calcul. Rappelons toutefois que le choix d'une mesure de déformation devrait être optimale, tirant partie de la facilité de calcul et de la justesse de la déformation. Nous avons déjà suggéré que la déformation logarithmique est la plus juste pour les matériaux élastoplastiques ou élastoviscoplastiques pour lesquelles les déformations élastiques restent toujours petites. Il apparaît donc que la facilité du calcul de la déformation de Green-Lagrange ne peut être utilisée pour justifier son choix. Cependant, le choix de la fonction déformation,  $f(\lambda)$ , était restreint de sorte que, pour les petites déformations mais grandes rotations, toutes les mesures de déformations soient identiques, suivant l'ordre de l'approximation. Ainsi, pour de tels cas, la déformation de Green-Lagrange constitue un choix judicieux pour le calcul de la déformation<sup>5</sup>.

Finalement, il est bon de noter que la mesure bien connue des *petites déformations*

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left( \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right] + \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right]^T \right)$$

est seulement valable pour les problèmes à petits gradients de déplacements.

#### 2.2.4 Taux de déformation

Plusieurs matériaux ont un comportement dépendant du chemin parcouru, de sorte que leurs relations constitutives font souvent intervenir des incréments des contraintes

---

<sup>4</sup>La seule différence entre les deux définitions du tenseur de Green-Lagrange est la configuration dans laquelle le tenseur est défini: soit nous pensons au mouvement comme une élongation  $\mathbf{U}$  le long des axes principaux d'élongation, suivie par une rotation de corps rigide de ces axes,  $\mathbf{R}$ ; soit comme une rotation des axes principaux d'élongation,  $\mathbf{R}$ , suivie par une élongation le long de ces axes,  $\mathbf{V}$ . Nous avons adopté la première définition, équation (2.15), pour rester consistant avec la définition que nous avons donné à la fonction déformation prise sur la configuration de référence.

<sup>5</sup>La déformation de Green-Lagrange est communément utilisée dans la formulation des problèmes de structures minces (poutres, plaques et coques), car la minceur ou l'élancement des composantes permet souvent aux grandes rotations de se produire avec des déformations plutôt petites.

et des déformations. Nous introduisons ici différentes relations faisant intervenir des taux de déformation. La vitesse d'une particule matérielle occupant la position  $\mathbf{X}$  dans la configuration de référence est définie à partir de la relation 2.2 par<sup>6</sup>:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial t}$$

La différence de vitesse entre deux particules voisines dans la configuration actuelle s'écrit:

$$d\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \cdot d\mathbf{x}$$

ou encore, en introduisant le tenseur non symétrique  $\mathbf{L} = \partial \mathbf{v} / \partial \mathbf{x}$ , appelé *tenseur gradient des vitesses* dans la configuration actuelle:

$$d\mathbf{v} = \mathbf{L} \cdot d\mathbf{x} \quad (2.17)$$

En remplaçant dans cette relation  $d\mathbf{x}$  par son expression (2.4), nous obtenons:

$$d\mathbf{v} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}$$

La différence de vitesse peut s'exprimer aussi bien par:

$$d\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}) = \dot{\mathbf{F}} \cdot d\mathbf{X}$$

avec

$$\dot{\mathbf{F}} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}$$

La comparaison des deux expressions de  $d\mathbf{v}$ , en terme de  $d\mathbf{X}$  dans la configuration de référence, conduit ainsi à

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{F} = \dot{\mathbf{F}} \quad \text{ou} \quad \mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad (2.18)$$

Le tenseur  $\mathbf{L}$  se décompose en une partie symétrique liée à la vitesse de déformation de la matière et une partie antisymétrique liée à la vitesse de rotation de la matière<sup>7</sup>.

<sup>6</sup>Nous adoptons ici le point de vue lagrangien: nous observons une particule matérielle et suivons son mouvement, plutôt que de repérer un point fixe dans l'espace et surveiller le passage du matériau à travers ce point.

<sup>7</sup>Tout comme dans la théorie de petits déplacements, où on décompose le gradient des déplacements infinitésimaux,  $\mathbf{L} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}$ , en déformations et rotations infinitésimales.

La partie symétrique de la décomposition constitue ce qu'on appelle le *tenseur taux de déformation*:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) = \frac{1}{2} \left( \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \right] + \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \right) \quad (2.19)$$

quant à la partie antisymétrique, elle définit le *tenseur taux de rotation*:

$$\mathbf{\Omega} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) = \frac{1}{2} \left( \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \right] - \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \right) \quad (2.20)$$

Dans la configuration de référence, le taux du tenseur de déformation de Green-Lagrange est obtenu par simple dérivation par rapport au temps de la relation (2.15):

$$\dot{\epsilon}^G = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{F}}^T \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \cdot \dot{\mathbf{F}})$$

En tenant compte de l'équation (2.18), nous déduisons la relation entre  $\dot{\epsilon}^G$  et  $\mathbf{D}$ :

$$\dot{\epsilon}^G = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F} \quad \text{ou} \quad \mathbf{D} = \mathbf{F}^{-T} \cdot \dot{\epsilon}^G \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad (2.21)$$

$\dot{\epsilon}^G$  peut être considéré comme étant le transporté par  $\mathbf{F}$  du tenseur taux de déformation  $\mathbf{D}$ . Nous montrons que  $\mathbf{D}$  et  $\dot{\epsilon}^G$  s'annulent dans un mouvement de corps rigide [Cha87]. Ils peuvent donc être utilisés directement dans l'écriture d'une loi de comportement.

## 2.3 Cinétique

### 2.3.1 Équilibre du milieu déformable et travail virtuel

Plusieurs problèmes dont on s'intéresse en mécanique des structures nécessitent la recherche d'une solution approchée (par éléments finis) des déplacements, déformations, contraintes, et forces, et, possiblement d'autres variables telle que la température, permettant de caractériser l'état d'un corps solide le long de son histoire de chargement<sup>8</sup>. La solution exacte d'un tel problème nécessite la conservation en tout temps de l'équilibre des forces et des moments, sur un volume arbitraire du corps. La méthode des éléments finis est basée sur l'approximation de ces conditions d'équilibre en les remplaçant par une condition faible qui consiste à conserver l'équilibre dans un sens moyen sur un nombre fini de divisions du volume du corps solide. Dans cette section,

---

<sup>8</sup>Le terme "chargement" sous-entend une série d'événements pour lesquels la réponse du corps est recherchée.

nous formulons les équations d'équilibre exactes et nous les écrivons sous la forme d'une formulation du travail virtuel, utile pour les modèles éléments finis en déplacements. Soit  $V$  le volume occupé par le corps solide dans la configuration actuelle, et soit  $S$  la surface délimitant ce volume. Si nous désignons par  $\mathbf{f}_S$  la force de traction en un point quelconque de  $S$  par unité d'aire actuelle et par  $\mathbf{f}_V$  la force de volume en un point quelconque situé à l'intérieur de  $V$  par unité de volume actuel, l'équilibre des forces pour ce volume occupé par le matériau considéré est alors

$$\int_S \mathbf{f}_S dS + \int_V \mathbf{f}_V dV = 0 \quad (2.22)$$

Le tenseur des *contraintes vraies* ou de *Cauchy*  $\boldsymbol{\sigma}$  en un point de  $S$  est défini par

$$\mathbf{f}_S = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \quad (2.23)$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale à  $S$  en ce point. En utilisant cette définition, dite *formule fondamentale de Cauchy*, l'équation (2.22) devient

$$\int_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS + \int_V \mathbf{f}_V dV = 0$$

L'application du théorème de *Gauss*<sup>9</sup> sur l'intégrale de surface de l'équation d'équilibre donne

$$\int_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \cdot \boldsymbol{\sigma} dV$$

De là, l'équation d'équilibre prend la forme

$$\int_V \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_V \right] dV = 0$$

pour un volume arbitraire  $V$ , ce qui procure en chaque point les équations différentielles:

$$\left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_V = 0 \quad (2.24)$$

Les équations (2.24) représentent les trois équations différentielles bien connues exprimant l'équilibre local des forces. En les dérivant, nous n'avons émis aucune hypothèse

---

<sup>9</sup>Le théorème de *Gauss* permet de transformer une intégrale de surface en une intégrale de volume suivant la formule

$$\int_S \mathcal{F} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \cdot \mathcal{F} dV$$

où  $\mathcal{F}$  désigne une fonction continue quelconque (scalaire, vectorielle ou tensorielle).

quant à l'amplitude de la déformation ou de la rotation; ces équations constituent la formulation exacte de l'équilibre des forces pourvu que nous soyons précis dans nos définitions de forces de traction, forces de volume, contraintes (contraintes de Cauchy, définies par l'équation (2.23)), volume et aire.

En l'absence de couples agissant sur le volume, l'équation d'équilibre des moments est écrite dans le cas général en prenant les moments par rapport à l'origine:

$$\int_S (\mathbf{x} \times \mathbf{f}_S) dS + \int_V (\mathbf{x} \times \mathbf{f}_V) dV = 0$$

L'utilisation du théorème de Gauss avec cette équation conduit au résultat:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \quad (2.25)$$

exprimant le fait que le tenseur de Cauchy doit être *symétrique*<sup>10</sup>.

L'équilibre global du solide dans la configuration actuelle peut être exprimé par le *principe des travaux virtuels*<sup>11</sup> sous la forme:

$$W = \int_V \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_V \right] \cdot \delta \mathbf{v} dV = 0 \quad (2.26)$$

où  $\delta \mathbf{v}$  est un champ de vitesses virtuelles cinématiquement admissible: il doit respecter les conditions aux limites et la continuité du solide, c'est-à-dire être continûment dérivable sur  $V$ .

La règle de dérivation nous permet d'écrire

$$\left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{v}) = \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \cdot \boldsymbol{\sigma} \right] \cdot \delta \mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma} : \left( \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \right)$$

ainsi

$$\int_V \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \cdot \boldsymbol{\sigma} \right] \cdot \delta \mathbf{v} dV = \int_V \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{v}) - \boldsymbol{\sigma} : \left( \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \right) \right] dV$$

<sup>10</sup>Inversement, supposer que le tenseur des contraintes est symétrique laisse entendre que l'équilibre des moments est automatiquement satisfait et pour cette raison nous n'avons besoin de considérer que l'équilibre en translation quand nous écrivons explicitement les équations d'équilibre.

<sup>11</sup>Le principe des travaux virtuels (ou des *puissances virtuelles*) consiste à remplacer les trois équations d'équilibre représentées par l'équation (2.24) par une seule équation scalaire équivalente dite *forme intégrale en déplacement*: obtenue en multipliant au départ les équations différentielles par une fonction vectorielle arbitraire, appelée *fonction test* (pouvant être imaginée comme étant un champ de déplacements ou de vitesses *virtuelles*), ensuite en intégrant sur le volume en entier.

$$= \int_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{v} dS - \int_V \boldsymbol{\sigma} : \left( \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \right) dV$$

(application du théorème de Gauss)

$$= \int_S \mathbf{f}_S \cdot \delta \mathbf{v} dS - \int_V \boldsymbol{\sigma} : \left( \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \right) dV$$

(utilisation de la définition (2.23))

Par conséquent, la formulation du travail virtuel, équation (2.26), peut s'écrire

$$W = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \left( \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \right) dV - \int_S \mathbf{f}_S \cdot \delta \mathbf{v} dS - \int_V \mathbf{f}_V \cdot \delta \mathbf{v} dV = 0$$

Le tenseur non symétrique  $\frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \delta \mathbf{L}$  est appelé *gradient des vitesses virtuelles* dans la configuration actuelle. Il se décompose en une partie symétrique  $\delta \mathbf{D}$  et une partie antisymétrique  $\delta \mathbf{\Omega}$

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{L} &= \delta \mathbf{D} + \delta \mathbf{\Omega} \\ &= \frac{1}{2} (\delta \mathbf{L} + \delta \mathbf{L}^T) + \frac{1}{2} (\delta \mathbf{L} - \delta \mathbf{L}^T) \end{aligned}$$

appelées respectivement *tenseur taux de déformation virtuelle* et *tenseur taux de rotation virtuelle*. Avec ces définitions, le travail virtuel s'exprime finalement sous la forme "classique":

$$W = W_{int} - W_{ext} = 0 \quad (2.27)$$

où

$$W_{ext} = \int_S \mathbf{f}_S \cdot \delta \mathbf{v} dS + \int_V \mathbf{f}_V \cdot \delta \mathbf{v} dV \quad (2.28)$$

est le *travail virtuel externe* accompli par les forces extérieures sujettes à la perturbation virtuelle  $\delta \mathbf{v}$  et

$$W_{int} = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{D} dV \quad (2.29)$$

est *travail virtuel interne*<sup>12</sup> accompli par les contraintes sur le taux de déformation

<sup>12</sup>Pour obtenir cette forme, nous utilisons la propriété suivante:

$$\boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{\Omega} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{L} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{L}^T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{L} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{L} = 0$$

car  $\boldsymbol{\sigma}$  est symétrique et par conséquent

$$\boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{L} = \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{D} + \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{\Omega} = \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{D}$$



résultant de la perturbation  $\delta \mathbf{v}$ . Cette dernière équation implique que le tenseur des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  est *conjugué*<sup>13</sup> au tenseur taux de déformation virtuelle  $\delta \mathbf{D}$ .

Le principe du travail virtuel, exprimé par la forme intégrale (2.27), représente la *forme faible* des équations d'équilibre. Il constitue la formulation d'équilibre de base dans l'établissement des modèles éléments finis en déplacements, comme nous le verrons ultérieurement. Son avantage, à cet égard, est qu'il permet d'introduire des approximations en choisissant des fonctions tests pour le champ des vitesses virtuelles qui ne sont pas entièrement arbitraires, mais dont la variation est limitée à un nombre fini de valeurs nodales. Cette approche procure aux approximations une base mathématique plus robuste que l'alternative de discrétiser directement les dérivées dans les équations différentielles d'équilibre en un point, qui est le point de départ typique de l'approche différences finis pour le même problème.

### 2.3.2 Mesures de contraintes

Il est naturel de penser que les contraintes et les déformations soient des variables *conjuguées*, mais jusqu'à ici nous avons seulement des contraintes "vraies", et un grand choix de mesures de déformation possibles. Nous introduirons dans ce qui suit le concept de conjugaison [Mal69] permettant d'associer, d'une façon plus précise, la mesure de déformation choisie au tenseur de contraintes qui lui est conjugué.

Il convient de considérer qu'un corps matériel, possède un état naturel, élastique, auquel il retournera une fois déchargé. Pour un matériau parfaitement élastique tel un caoutchouc, cet état de référence sera toujours l'état original, non contraint. Pour un matériau risquant la plastification, tel un métal, cet état de référence sera éventuellement modifiée par les déformations plastiques irréversibles. En plus, il est admis que l'élasticité d'un matériau dérive d'un potentiel thermodynamique écrit par rapport à cet état de référence, de sorte que, pour des déformations isothermes, il existe une fonction potentielle élastique  $U$ <sup>14</sup>, dite densité d'énergie de déformation, définie par unité de volume naturel de référence. Sur cette base, nous introduisons le "concept de conjugaison" en écrivant le taux de travail interne (puissance développée par les

<sup>13</sup>Ici conjugué signifie conjugué par rapport au travail virtuel dans la configuration actuelle, dans le sens où la multiplication des deux tenseurs définit le travail virtuel par unité de volume actuel  $\boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{D}$ .

<sup>14</sup>Une fonction scalaire d'une des mesures de déformation, dont la dérivée par rapport à une des composantes de la déformation détermine la composante correspondante de tenseur des contraintes.

contraintes) par unité de volume dans l'état de référence élastique comme

$$\dot{U} = \boldsymbol{\tau}_c : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_c \quad (2.30)$$

où  $\boldsymbol{\varepsilon}_c$  est un choix particulier du tenseur de déformation, dérivé suivant les règles discutées dans la section (2.2.3), et  $\boldsymbol{\tau}_c$  est à présent le tenseur de contraintes qui lui est conjugué.

Tout comme dans l'équation (2.27), nous pouvons exprimer le taux de travail interne associé au champ de vitesses réelles  $\mathbf{v}$  en terme du tenseur de contraintes de Cauchy et du tenseur taux de déformation:

$$\int_V \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} dV$$

Cette puissance interne se réécrit comme une intégrale sur le volume naturel de référence:

$$\int_V \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} dV = \int_{V^0} J \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} dV^0$$

où  $J = dV/dV^0$  est le jacobien de la transformation entre le volume naturel de référence et le volume actuel. Donc, selon le concept de conjugaison tout juste défini, la mesure de contraintes définie par

$$\boldsymbol{\tau} = J \boldsymbol{\sigma} \quad (2.31)$$

est conjuguée par rapport au travail à la mesure de déformation dont la variation par rapport au temps est le tenseur taux de déformation  $\mathbf{D} = \text{sym} \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \right)$ . Cette mesure de contraintes, utilisée essentiellement dans le développement des lois constitutives en grandes déformations, est appelée *tenseur de contraintes de Kirchhoff*. Pour les problèmes impliquant non pas des grandes déformations mais des grands déplacements et des grandes rotations, la discussion sur les mesures de déformation suggèrerait l'utilisation du tenseur de déformation de Green-Lagrange. Cherchons alors la mesure de contrainte conjuguée par rapport au travail à la déformation de Green-Lagrange. Étant donné que le taux du travail interne par unité de volume de référence est

$$\dot{U} = J \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}$$

il vient donc, compte tenu de l'équation (2.21):

$$\dot{U} = J \boldsymbol{\sigma} : (\mathbf{F}^{-T} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^G \cdot \mathbf{F}^{-1}) = J (\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^G$$

Par conséquent, la mesure de contrainte conjuguée par rapport au travail à  $\boldsymbol{\varepsilon}^G$  est définie par le tenseur:

$$\mathbf{S} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad (2.32)$$

connue sous le nom de *tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff de seconde espèce*.  $\mathbf{S}$  est symétrique et lagrangien.

### 2.3.3 Taux de contraintes

Le comportement de la plupart des matériaux dépend de l'histoire et de l'évolution dans le temps des déformations et des contraintes. C'est pourquoi leurs lois constitutives apparaissent communément sous forme incrémentale: elles lient la vitesse de contrainte à la vitesse de déformation et non la contrainte à la déformation. Ces lois doivent être cependant indépendantes du référentiel (observateur) choisi pour observer le mouvement du solide<sup>15</sup>. Donc, le taux de contrainte utilisé dans l'équation constitutive doit être *objectif*, c'est à dire invariant dans tout changement de référentiel. Le tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff de seconde espèce, étant défini dans la configuration de référence, sa dérivée temporelle  $\dot{\mathbf{S}}$  est un tenseur objectif.  $\dot{\mathbf{S}}$  peut donc être utilisé directement dans l'écriture d'une loi de comportement incrémentale. Il n'en est pas de même pour  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$  et  $\dot{\boldsymbol{\tau}}$ <sup>16</sup> représentant respectivement le tenseur taux de contraintes de Cauchy et de Kirchhoff.

Pour illustrer ce point, considérons par exemple une barre soumise au temps  $t_1$  à un effort normal  $P$  constant. Si au temps  $t_2$  cette barre et l'effort normal qui la sollicite ont subi une rotation de  $90^\circ$  par rapport au système cartésien global  $(Z^1, Z^2, Z^3)$  (figure 2.3), les composantes  $\sigma^{ij}$ , du tenseur de contraintes de Cauchy dans cette base, sont différentes bien que le matériau reste soumis à la même sollicitation. En effet, à l'instant  $t_1$ ,  $\sigma^{11} = P/A$ , et toutes les autres  $\sigma^{ij} = 0$ , tandis qu'à l'instant  $t_2$ ,  $\sigma^{22} = P/A$ , et toutes les autres  $\sigma^{ij} = 0$ . Il vient alors que  $d\sigma^{11}$  et  $d\sigma^{22}$  sont non nulles durant  $t_1 \rightarrow t_2$ . Ce qui prouve que  $d\boldsymbol{\sigma}$  (de même que  $d\boldsymbol{\tau}$ ) est affecté par une rotation rigide du solide bien que, de point de vue constitutif, l'état de chargement auquel est soumis le matériau ne soit pas modifié. Il faudra donc, dans le développement des lois constitutives, prendre en compte cette particularité et, par des considérations géométriques, séparer les modifications du tenseur de contraintes ( $\boldsymbol{\sigma}$  ou  $\boldsymbol{\tau}$ ) dues aux rotations de corps rigide de celles dues aux déformations proprement dites. Nous dérivons à cette fin un résultat simple pour tout tenseur eulérien dont les composantes sont associées aux directions spatiales. À un instant donné  $t$ , imaginons qu'on attache à un point matériel une base vectorielle  $[\mathbf{g}_\alpha]_{\alpha=1,2,3}$ . Les vecteurs de cette base sont indéformables; toutefois ils sont supposés tourner avec le même taux de rotation que le matériau. Nous avons donc:

$$\dot{\mathbf{g}}_\alpha = \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{g}_\alpha \quad (2.33)$$

<sup>15</sup>C'est ce qu'on appelle le principe de *l'objectivité* ou de *l'indifférence matérielle*

<sup>16</sup>Dû au fait que les tenseurs de contraintes de Cauchy et de Kirchhoff sont eulériens: leurs composantes sont associées avec les directions spatiales dans la configuration actuelle

où  $\Omega$  est le tenseur taux de rotation (équation (2.20)).

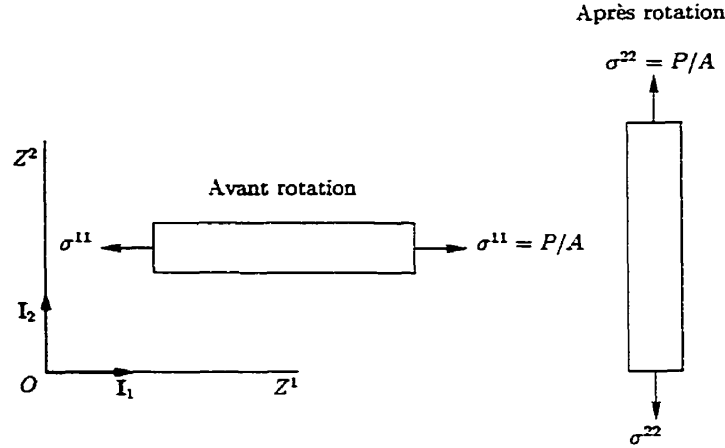


Figure 2.3: Changement de contraintes par une rotation de corps rigide.

Considérons à présent un tenseur eulérien quelconque  $\mathbf{T}$  opérant sur la configuration actuelle; nous pouvons l'exprimer en terme de ses composantes dans les directions  $\mathbf{g}_\alpha$ :

$$\mathbf{T} = T^{\alpha\beta} \mathbf{g}_\alpha \otimes \mathbf{g}_\beta \quad (2.34)$$

En dérivant par rapport au temps

$$\dot{\mathbf{T}} = \dot{T}^{\alpha\beta} \mathbf{g}_\alpha \otimes \mathbf{g}_\beta + T^{\alpha\beta} \dot{\mathbf{g}}_\alpha \otimes \mathbf{g}_\beta + T^{\alpha\beta} \mathbf{g}_\alpha \otimes \dot{\mathbf{g}}_\beta$$

Les deux derniers termes de cette équation constituent le taux de  $\mathbf{T}$  causé par la rotation de corps rigide. Par conséquent, le premier terme est la partie résultant d'autres effets (dans le cas des contraintes, elle constitue le taux associé à la réponse constitutive). Ce terme est appelé le *taux corotationnel*, ou le *taux de Jaumann* de  $\mathbf{T}$ . Nous noterons ceci  $\overset{\circ}{\mathbf{T}}$ <sup>17</sup>, telle que

$$\dot{\mathbf{T}} = \overset{\circ}{\mathbf{T}} + T^{\alpha\beta} \dot{\mathbf{g}}_\alpha \otimes \mathbf{g}_\beta + T^{\alpha\beta} \mathbf{g}_\alpha \otimes \dot{\mathbf{g}}_\beta$$

En utilisant les relations (2.33) et (2.34) et en tenant compte de l'antisymétrie de  $\Omega$ , nous obtenons

$$\dot{\mathbf{T}} = \overset{\circ}{\mathbf{T}} + \Omega \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot \Omega$$

<sup>17</sup>Ce tenseur est objectif [Mal69].

Ainsi, le taux “total” d’un tenseur eulérien quelconque est égal à la somme du taux corotationnel de ce tenseur et d’un taux causé purement par le taux de rotation locale. Cette relation joue un rôle important dans les lois de comportement incrémentales et le respect du principe de l’indifférence matérielle<sup>18</sup>. En effet, si  $\mathbf{T}$  représente un tenseur de contrainte eulérien, pour rendre objective une loi de comportement impliquant  $\dot{\mathbf{T}}$ , il suffit simplement de remplacer  $\dot{\mathbf{T}}$  par  $\overset{\circ}{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\Omega}$ , pourvu que les autres variables impliquées soient objectives. Par exemple, pour le tenseur de contraintes de Kirchhoff, nous admettons généralement qu’il est relié à son conjugué, le tenseur taux de déformation, par:

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}} = \mathcal{C}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{D}) \quad (2.35)$$

où  $\mathcal{C}$  est un tenseur constitutif linéaire par rapport à  $\mathbf{D}$ , contenant les coefficients caractérisant le comportement du matériau (élastique, élastoplastique avec ou sans écrouissage, ...), donc, dépendant généralement de l’historique de toutes les configurations antérieures (“du chemin parcouru”). Comme  $\boldsymbol{\tau}$ ,  $\mathbf{D}$  et  $\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}$  sont objectifs, cette relation est invariante dans tout changement de référentiel d’observation défini par une rotation rigide  $\mathbf{Q}(t)$ , c’est à dire:

$$\mathcal{C}(\mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{Q}^T, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q} \cdot \mathcal{C}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{D}) \cdot \mathbf{Q}^T$$

## 2.4 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre nous nous sommes contentés de rappeler l’essentiel de la théorie tridimensionnelle des corps massifs (théorie intrinsèque). Les notions de contraintes et de déformations ont été ainsi rappelées et les équations d’équilibre exprimées à l’aide du principe du travail virtuel. Le concept de conjugaison a été introduit afin de nous permettre d’utiliser les mesures appropriées de contraintes et de déformations. Ce n’est pas pour simplifier un sujet aussi riche et complexe que nous avons rédigé ce chapitre mais plutôt pour introduire les définitions et notations de base utiles à l’élaboration des chapitres suivants.

---

<sup>18</sup>D’autres relations peuvent être déduites en considérant d’autres concepts de mouvement des vecteurs  $\mathbf{g}_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ). Nous référons le lecteur aux travaux [BD86b, EM89, Bag93] pour toute information supplémentaire sur ce sujet.

## Chapitre 3

# Lois de comportement mécanique

### 3.1 Introduction

Nous avons vu au chapitre précédent que la recherche de l'état d'équilibre d'un solide soumis à des sollicitations extérieures nécessite la détermination des contraintes qui s'y développent. Ces contraintes dépendent des lois traduisant le *comportement macroscopique* du matériau constituant le solide: ces lois mathématiques doivent prendre en compte le plus fidèlement possible le comportement physique observé tout en respectant la rigueur mathématique nécessaire. Dans ce chapitre nous formulons les lois constitutives caractérisant les milieux *matériellement simples* à comportement isotherme qui se rattachent aux matériaux réels utilisés dans cette thèse, en présence des petites déformations.

### 3.2 Lois constitutives élastiques

Un matériau est dit *élastique* si le corps constitué de ce matériau retrouve complètement sa forme initiale après suppression des forces causant la déformation. Le modèle constitutif le plus général, disponible pour décrire le comportement élastique d'un

matériau est le modèle *hyperélastique*, dans lequel nous supposons l'existence d'une fonction potentielle des déformations dont la dérivée par rapport aux déformations donne les contraintes. L'hyperélasticité ignore les effets thermiques et admet que la fonction potentielle existe dans tous les cas et ne dépend que des déformations. Si  $U$  désigne la densité d'énergie de déformation par unité de volume de référence et si  $\tau$  et  $\epsilon$  désignent deux mesures quelconques de contraintes et de déformations "conjuguées" par rapport au travail, nous pouvons écrire:

$$\tau = \frac{\partial U}{\partial \epsilon^{el}}$$

Ce modèle d'élasticité est généralement utilisé pour modéliser le comportement non linéaire des élastomères<sup>1</sup>. Cependant, la déformation élastique de beaucoup de matériaux d'intérêt pratique reste suffisamment petite, de sorte que la densité d'énergie de déformation a une forme quadratique simple

$$U = \frac{1}{2} \epsilon^{el} : C^{el} : \epsilon^{el}$$

et le comportement est *élastique linéaire*

$$\tau = C^{el} : \epsilon^{el} \quad (3.1)$$

où  $C^{el}$  est le module élastique

$$C^{el} = \frac{\partial^2 U}{\partial \epsilon^{el} \partial \epsilon^{el}}$$

Ce modèle d'élasticité est destiné à être utilisé pour les problèmes en petites déformations ou pour modéliser l'élasticité dans un modèle élastoplastique dans lequel les déformations élastiques sont toujours petites. Rappelons que pour le cas des petites déformations, les mesures de déformation sont les mêmes et, par conséquent, toutes les mesures de contraintes sont indifférenciables<sup>2</sup>.

L'expérience montre que les métaux usuels de construction ont un comportement *élastique linéaire isotrope* tant que les déformations restent petites, inférieures à une certaine limite appelée *contrainte* ou *limite élastique initiale*. Ce modèle simple suffirait probablement pour la conception d'une composante fabriquée à partir d'un acier de construction standard, pourvu que cette composante ne soit pas dans une situation

<sup>1</sup>Matériaux dont la réponse aux grandes déformations qu'ils subissent est complètement récupérable (élastique).

<sup>2</sup>La distinction entre les différentes mesures de déformation entre en cause seulement si les déformations ne sont pas négligeables devant l'unité: cas des problèmes en grandes déformations.

critique. L'élasticité linéaire isotrope peut s'exprimer en fonction de deux paramètres matériels. Pour ce qui touche le développement effectué dans le cadre de cette thèse, il est plus approprié de choisir ces paramètres comme étant le module de compression hydrostatique,  $K$  et le module de cisaillement,  $G$ . Ceux-ci sont facilement calculables à partir du module de Young,  $E$  et du coefficient de Poisson,  $\nu$

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad \text{et} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

L'élasticité peut alors s'écrire en termes des composantes volumétriques et déviatoriques comme suit

**Volumétrique:**

$$p = -K \varepsilon_{vol}^{el} \quad (3.2)$$

où  $p$  est la pression hydrostatique équivalente et  $\varepsilon_{vol}^{el}$  la déformation volumétrique, définies par

$$p = -\frac{1}{3} \text{trace}(\boldsymbol{\tau}) = -\frac{1}{3} \mathbf{I} : \boldsymbol{\tau} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{vol}^{el} = \text{trace}(\boldsymbol{\varepsilon}^{el}) = \mathbf{I} : \boldsymbol{\varepsilon}^{el}$$

$\mathbf{I}$  étant le tenseur unité de deuxième ordre.

**Déviatorique:**

$$\boldsymbol{\tau}' = 2G \mathbf{e}^{el} \quad (3.3)$$

$\boldsymbol{\tau}'$  et  $\mathbf{e}^{el}$  sont respectivement les tenseurs déviateurs des contraintes et des déformations définis par

$$\boldsymbol{\tau}' = \boldsymbol{\tau} + p \mathbf{I} \quad \text{et} \quad \mathbf{e}^{el} = \boldsymbol{\varepsilon}^{el} - \frac{1}{3} \varepsilon_{vol}^{el} \mathbf{I}$$

Le tenseur de comportement élastique tridimensionnel  $\mathbf{C}^{el}$ , équation (3.1), est par conséquent [Dab94]:

$$\mathbf{C}^{el} = 2G \mathfrak{S} + \left(K - \frac{2G}{3}\right) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \quad (3.4)$$

dans lequel  $\mathfrak{S}$  est le tenseur unité de quatrième ordre.



### 3.3 Loi constitutive élastoplastique

#### 3.3.1 Généralités

Un matériau *élastoplastique* est un matériau pour lequel on peut définir à chaque instant dans l'espace des contraintes un domaine élastique borné par une surface, dite *surface de plasticité* ou *d'écoulement*, tel que si la contrainte reste à l'intérieur de ce domaine, les déformations sont réversibles. Mais dès que la contrainte atteint la frontière de ce domaine, des déformations permanentes, dites *plastiques*, se produisent. A ce moment, la contrainte totale dépend de l'historique de toutes les configurations antérieures ("du chemin parcouru").

Le comportement élastoplastique apparaît dans de nombreux cas de déformations permanentes des structures métalliques, notamment dans le formage à froid des métaux. La loi constitutive décrivant ce comportement est de type incrémentale: elle lie la vitesse de contrainte à la vitesse de déformation. Cette approche, qui constitue le point de départ de la *théorie différentielle* ou *incrémentale* de la plasticité, correspond mieux au comportement physique des métaux que la *théorie finie*, qui ne tient pas compte de l'histoire des déformations puisque elle lie la contrainte totale à la déformation.

L'hypothèse fondamentale des modèles élastoplastiques est la décomposition de la déformation en une partie élastique (réversible) et une partie plastique (irréversible). Dans sa forme la plus générale cette formulation s'écrit

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^{el} \cdot \mathbf{F}^{pl} \quad (3.5)$$

où  $\mathbf{F}$  est le gradient de déformation totale,  $\mathbf{F}^{el}$  est la partie entièrement récupérable de la déformation au point considéré ( $[\mathbf{F}^{el}]^{-1}$  est la déformation qui se produirait si, après la déformation  $\mathbf{F}$ , la réponse irréversible est d'une façon ou d'une autre empêchée mais au même moment la contrainte au point est réduite à zéro), et  $\mathbf{F}^{pl}$  est la partie plastique définie par  $\mathbf{F}^{pl} = [\mathbf{F}^{el}]^{-1} \cdot \mathbf{F}$ .

La pratique expérimentale et numérique de l'analyse des structures envisagées dans cette thèse montre que les déformations élastiques demeurent petites et n'atteignent ordinairement pas 0.5%, sans que ne soit déjà atteint, un état plastique de la structure. Nous pouvons tirer avantage de ce comportement pour simplifier la description de la déformation et utiliser la décomposition additive du taux de déformation [LH81]:

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^{el} + \dot{\epsilon}^{pl} \quad (3.6)$$

à la place de l'équation (3.5). Ici  $\dot{\epsilon}$  représente le taux de déformation totale,  $\dot{\epsilon}^{el}$  le taux de déformation élastique, et  $\dot{\epsilon}^{pl}$  le taux de déformation plastique.

Comme nous l'avons mentionné plus haut, tout modèle élastoplastique suppose l'existence à tout moment d'une fonction d'écoulement,  $F$ , satisfaisant la condition

$$F(\boldsymbol{\tau}, \mathcal{K}_\alpha) < 0 \quad (3.7)$$

pour une réponse purement élastique, et la condition

$$F(\boldsymbol{\tau}, \mathcal{K}_\alpha) = 0 \quad (3.8)$$

pour un état plastique. L'état de contrainte pour lequel  $F$  est positif est inadmissible, bien que ceci soit possible pour les modèles viscoplastiques.  $\mathcal{K}_\alpha$  est un ensemble de *paramètres d'écrouissage* reliés aux paramètres du matériau (limite d'élasticité par exemple), et qui sont introduits dans le but de contrôler l'évolution de la surface de plasticité au cours de l'écoulement plastique. Ces variables d'état, qui peuvent être de nature scalaire ou tensorielle, évoluent au fur et à mesure que les déformations plastiques progressent de telle façon que le *critère de plasticité*, équation (3.8), soit toujours maintenu. Les équations<sup>3</sup> décrivant l'évolution de l'écrouissage dans le temps s'écrivent d'une manière générale comme suit:

$$\dot{\mathcal{K}}_\alpha = \dot{\lambda} h_\alpha(\boldsymbol{\tau}, \mathcal{K}_\beta) \quad (3.9)$$

où  $h_\alpha$  est la *loi d'écrouissage* pour  $\mathcal{K}_\alpha$ , qui peut éventuellement dépendre de d'autres paramètres d'écrouissage  $\mathcal{K}_\beta$ .  $\dot{\lambda}$  est un scalaire non négatif mesurant la vitesse de l'écoulement plastique et dont la valeur est déterminée par l'exigence à satisfaire la condition de consistance  $F = 0$ , nécessaire à l'écoulement plastique. La *loi d'écrouissage isotrope* est la plus simple à utiliser mathématiquement. Elle postule essentiellement que la fonction d'écoulement garde sa forme; quant à l'accroissement de sa taille, il est contrôlé par un seul paramètre d'écrouissage,  $k$  (scalaire dépendant de la déformation plastique), relié à la limite élastique courante en traction pure  $\bar{\tau}$ . Pour ce cas l'équation (3.8) se réduit à

$$F(\boldsymbol{\tau}, k) \equiv f(\boldsymbol{\tau}) - \bar{\tau}(k) = 0$$

ou simplement à la condition d'écoulement

$$f(\boldsymbol{\tau}) = \bar{\tau}(k)$$

---

<sup>3</sup>Dans les modèles élastoplastiques complexes—par exemple, les modèles utilisés pour décrire le comportement des matériaux sous chargements cycliques—ces lois d'évolution ont des formes complexes, puisque cette complexité est nécessaire pour simuler le comportement expérimental observé.

où  $f(\boldsymbol{\tau})$  est le potentiel de contraintes et  $\bar{\tau}(k)$  la fonction définissant la loi d'écrouissage. Dans ce cas, pour mesurer l'écrouissage et en tirer la forme explicite de  $\bar{\tau}(k)$ , on peut faire l'hypothèse d'écrouissage en déformation; on choisit  $k$  égal à la déformation plastique équivalente  $\bar{\varepsilon}^{pl}$ :

$$k = \bar{\varepsilon}^{pl} = \int \dot{\bar{\varepsilon}}^{pl} dt \quad \text{avec} \quad \dot{\bar{\varepsilon}}^{pl} = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\varepsilon}^{pl} : \dot{\varepsilon}^{pl}$$

et on admet l'existence d'une courbe contrainte-déformation "universelle" reliant la contrainte  $\bar{\tau}$  à la déformation plastique équivalente  $\bar{\varepsilon}^{pl}$ :

$$\bar{\tau}(k) = h(\bar{\varepsilon}^{pl})$$

L'emploi de l'écrouissage isotrope est subordonné au fait que le chargement soit proportionnel. ce qui est le cas des problèmes que nous avons pour but de résoudre, en remarquant qu'ils ne comportent pas de cycles de charge où l'effet de Bauschinger est fondamental.

Le dernier ingrédient des modèles élastoplastiques est la loi d'évolution des déformations plastiques. Cette loi, appelée *loi d'écoulement plastique*, est donnée en fonction du *potentiel plastique*  $g(\boldsymbol{\tau}, \mathcal{K}_\alpha)$  par la relation:

$$\dot{\varepsilon}^{pl} = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\tau}} \quad (3.10)$$

Pour certaines lois de comportement élastoplastique la direction de l'écoulement est la même que la direction de la normale à la surface de plasticité:

$$\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \alpha \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\tau}}$$

où  $\alpha$  est un scalaire. De telles lois de comportement sont dites à *potentiel associé*. Les modèles élastoplastiques à potentiel associé sont utiles pour les matériaux dans lesquels le mouvement de dislocation fournit les mécanismes fondamentaux de l'écoulement plastique, lorsque il n'y a pas de changements brusques dans la direction de la vitesse de déformation plastique en un point. Appliqués aux matériaux dans lesquels la déformation irréversible est principalement causée par des mécanismes de friction, ces modèles donnent généralement des résultats médiocres. Le modèle élastoplastique décrit dans la section qui suit utilise un potentiel associé, choisi égal au *potentiel de contraintes de von Mises* qui représente mieux le comportement isotropique des métaux. Nous discuterons à cette section la formulation et la technique d'intégration de cette loi spécifique.

### 3.3.2 Comportement élastoplastique des métaux isotropes

Dans cette étude, nous considérons uniquement les métaux initialement isotropes et le restant au cours de la déformation. Nous excluons donc l'élasticité anisotrope et l'écrouissage cinématique, dont la description requiert une variable d'écrouissage tensorielle. Le modèle le plus approprié pour décrire le comportement de tels métaux utilise le critère de plasticité de von Mises conjointement avec une loi élastique linéaire isotrope. Ceci laisse supposer que l'écoulement plastique du métal n'est pas affecté par un état hydrostatique des contraintes, puisque le potentiel de contraintes de von Mises dépend seulement des contraintes déviatoriques, de telle sorte que la partie plastique de la réponse est incompressible. Cette hypothèse, justifiée par les observations expérimentales, nous permet ainsi de définir la déformation volumétrique comme

$$\varepsilon_{vol} = \text{trace}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \text{trace}(\boldsymbol{\varepsilon}^{el}) = \varepsilon_{vol}^{el}$$

et de là, la déformation déviatorique

$$\mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3}\varepsilon_{vol} \mathbf{I}$$

#### Définition du modèle matériel

La condition de plasticité de von Mises est définie par la forme classique (Annexe A):

$$\tau_e = \bar{\tau}(\bar{e}^{pl}) \quad (3.11)$$

où  $\tau_e$  est *contrainte équivalente* (potentiel de contraintes de von Mises), donnée par

$$f(\boldsymbol{\tau}) = \tau_e = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\tau}' : \boldsymbol{\tau}'}$$

dans laquelle  $\boldsymbol{\tau}'$  est le tenseur déviatorique des contraintes:

$$\boldsymbol{\tau}' = \boldsymbol{\tau} - \frac{1}{3}\text{trace}(\boldsymbol{\tau}) \mathbf{I} = \boldsymbol{\tau} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} : \boldsymbol{\tau}$$

et  $\bar{\tau}(\bar{e}^{pl})$  la limite élastique courante définissant la loi d'écrouissage en terme de la déformation plastique équivalente  $\bar{e}^{pl}$ .

La décomposition du taux de déformation est:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{el} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} \quad (3.12)$$

La partie élastique étant linéaire et isotrope; elle est décrite dans la section (3.2) en termes de la pression hydrostatique équivalente et le déviateur des contraintes:

$$p = -K\varepsilon_{vol} \quad (3.13)$$

et

$$\boldsymbol{\tau}' = 2G \mathbf{e}^{el} \quad (3.14)$$

Nous présentons à l'annexe A. le développement à la base de la loi d'écoulement associée définissant le taux de déformation plastique qui s'écrit:

$$\dot{\mathbf{e}}^{pl} = \dot{\bar{\mathbf{e}}}^{pl} \mathbf{n} \quad (3.15)$$

où

$$\mathbf{n} = \frac{3}{2} \frac{\boldsymbol{\tau}'}{\tau_e}$$

est la direction de l'écoulement.

### Intégration du modèle matériel

Rappelons que la résolution des équations non linéaires d'équilibre par la méthode itérative de Newton-Raphson. consiste en général à construire une suite d'approximations  $C_{t+\Delta}^i$  de la configuration  $C_{t+\Delta}$  recherchée, en équilibre sous le chargement extérieur à l'instant  $t + \Delta t$ . Le résidu d'équilibre et la matrice de rigidité tangente correspondant à chacune de ces configurations intermédiaires, dépendent des contraintes  $\boldsymbol{\tau}_{t+\Delta t}^i$ . Le calcul de celles-ci nécessite l'intégration de la loi de comportement du solide entre les configurations  $C_t$  et  $C_{t+\Delta t}^i$  (ou sur l'intervalle de temps  $[t, t + \Delta t]$ ).

Les équations (3.11) jusqu'à (3.15) définissant le comportement matériel, doivent alors être intégrées et résolues pour l'état correspondant à la fin de l'incrément. Le schéma le plus simple qui offre une stabilité d'intégration inconditionnelle et donne la solution exacte lorsque le chargement est radial est la méthode d'*Euler implicite*, dite aussi du *retour radial*, [OP85, ST85, OS86]. L'application de cette technique à loi d'écoulement plastique (équation (3.15)), donne

$$\Delta \mathbf{e}^{pl} = \Delta \bar{\mathbf{e}}^{pl} \mathbf{n} \quad (3.16)$$

Dans cette équation. et dans le reste de cette section, toute quantité non explicitement associée à un temps donné est supposée évaluée à la fin de l'incrément (au temps  $t + \Delta t$ ). En supposant que le taux de déformation soit constant sur l'incrément

du temps  $\Delta t$ . l'intégration sur cet incrément de l'équation (3.12) nous permet d'obtenir l'accroissement de déformation:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{el} + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$$

et son déviateur

$$\Delta \mathbf{e} = \Delta \mathbf{e}^{el} + \Delta \mathbf{e}^{pl} \quad (3.17)$$

En combinant celle-ci avec la loi d'écoulement intégrée (équation (3.16)) et l'élasticité déviatorique (équation (3.14)), nous obtenons

$$\boldsymbol{\tau}' = 2G (\mathbf{e}^{el}|_t + \Delta \mathbf{e} - \Delta \bar{\varepsilon}^{pl} \mathbf{n}) \quad (3.18)$$

Ensuite en utilisant la définition de la direction de l'écoulement  $\mathbf{n}$ , cette équation devient:

$$(1 + \frac{3G}{\tau_e} \Delta \bar{\varepsilon}^{pl}) \boldsymbol{\tau}' = 2G (\mathbf{e}^{el}|_t + \Delta \mathbf{e})$$

qui s'écrit

$$(1 + \frac{3G}{\tau_e} \Delta \bar{\varepsilon}^{pl}) \boldsymbol{\tau}' = 2G \hat{\mathbf{e}} \quad (3.19)$$

en posant

$$\hat{\mathbf{e}} = \mathbf{e}^{el}|_t + \Delta \mathbf{e}$$

qui est la partie déviatorique de

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\varepsilon}^{el}|_t + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}$$

Le produit interne de l'équation (3.19) avec elle même donne

$$(\tau_e + 3G \Delta \bar{\varepsilon}^{pl}) = 2G \bar{\varepsilon} \quad (3.20)$$

où

$$\bar{\varepsilon} = \sqrt{\frac{3}{2} \hat{\mathbf{e}} : \hat{\mathbf{e}}}$$

La contrainte équivalente de von Mises,  $\tau_e$ , doit satisfaire la condition de plasticité définie par l'équation (3.11), par conséquent, de l'équation (3.20),

$$G(2\bar{\varepsilon} - 3\Delta \bar{\varepsilon}^{pl}) - \bar{\tau} = 0 \quad (3.21)$$

Cette équation est non linéaire<sup>4</sup> en  $\Delta\bar{e}^{pl}$ , puisque  $\bar{\tau}$  est fonction de la déformation plastique équivalente. L'équation (3.21) est résolue par la méthode de Newton-Raphson:

$$c^{pl} = \frac{G(2\bar{e} - 3\Delta\bar{e}^{pl}) - \bar{\tau}}{3G + H} \quad \text{où} \quad H = \frac{d\bar{\tau}}{d\bar{e}^{pl}}$$

$$\Delta\bar{e}^{pl} = \Delta\bar{e}^{pl} + c^{pl}$$

et nous itérons jusqu'à convergence.

Une fois  $\Delta\bar{e}^{pl}$  connue, la solution est complètement définie. En utilisant l'équation (3.11),

$$\tau_e = \bar{\tau}$$

et donc, de l'équation (3.19).

$$\tau' = \frac{2G}{(1 + \frac{3G}{\tau_e} \Delta\bar{e}^{pl})} \hat{e}$$

À partir de l'équation (3.15).

$$\mathbf{n} = \frac{3}{2} \frac{\tau'}{\tau_e}$$

et par conséquent, de l'équation (3.16).

$$\Delta\mathbf{e}^{pl} = \Delta\bar{e}^{pl} \mathbf{n}$$

Pour les cas où les composantes directes de la déformation sont fournies par la solution cinématique (ceci n'est pas le cas des contraintes planes), l'équation (3.13) définie

$$p = -K\varepsilon_{vol}$$

et complète ainsi la solution.

Pour le cas des contraintes planes,  $\varepsilon_{33}$ , n'est pas définie par la cinématique, mais plutôt par la condition:

$$\tau_{33} = 0$$

Ceci n'affecte pas la procédure de résolution de l'équation (3.19) définie auparavant: nous avons supposé pour cette solution que  $\bar{e}$  était connue à partir de la solution

---

<sup>4</sup>Elle est linéaire en  $\Delta\bar{e}^{pl}$  pour un matériau parfaitement plastique.

cinématique, et ceci reste vrai, parce que  $\tilde{\epsilon}$  est purement déviatorique. Nous pouvons supposer que  $\hat{\epsilon}_{vol} = \text{trace}(\hat{\epsilon}) = 0$ , et par conséquent

$$\hat{\epsilon}_{11} = \epsilon_{11}^{el}|_t + \Delta\epsilon_{11}$$

$$\hat{\epsilon}_{22} = \epsilon_{22}^{el}|_t + \Delta\epsilon_{22}$$

et

$$\hat{\epsilon}_{33} = -(\hat{\epsilon}_{11} + \hat{\epsilon}_{22})$$

Donc,

$$\hat{e}_{11} = \hat{\epsilon}_{11}, \quad \hat{e}_{22} = \hat{\epsilon}_{22}, \quad \text{et} \quad \hat{e}_{33} = -(\hat{\epsilon}_{11} + \hat{\epsilon}_{22})$$

et ainsi  $\tilde{e}$  est connue à partir de la solution cinématique.

La solution est développée comme auparavant, sauf qu'au lieu d'utiliser l'équation (3.13), nous devons exiger

$$p = \tau'_{33}$$

de sorte que  $\tau_{33} = 0$ . Par conséquent,

$$\tau_{11} = 2\tau'_{11} + \tau'_{22}, \quad \text{et} \quad \tau_{22} = 2\tau'_{22} + \tau'_{11}$$

Pour le cas des poutres, nous avons la condition:

$$\tau_{22} = \tau_{33} = 0$$

En suivant les mêmes arguments que pour le cas des contraintes planes, nous obtenons:

$$\hat{e}_{11} = \hat{\epsilon}_{11} \quad \text{et} \quad \hat{e}_{22} = \hat{e}_{33} = -\frac{1}{2} \hat{\epsilon}_{11}$$

tel que:

$$\tilde{e} = \frac{3}{2} |\hat{\epsilon}_{11}|$$

Pour ce cas, nous exigeons que:

$$p = \tau'_{22} = \tau'_{33} = -\frac{1}{2} \tau'_{11}$$

de sorte que:

$$\tau_{11} = \frac{3}{2} \tau'_{11} \quad \text{et} \quad \tau_{22} = \tau_{33} = 0$$



### Module tangent élastoplastique consistant

Comme montré par Simo et Taylor [ST85, ST86], l'utilisation du module élastoplastique classique (le tenseur de comportement élastoplastique continu reliant  $\dot{\boldsymbol{\tau}}$  à  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ ) peut conduire à une divergence du schéma de résolution employé pour trouver la configuration d'équilibre acceptable  $C_{t+\Delta t}$ . Dans le but de préserver le taux de convergence quadratique caractérisant la méthode de Newton-Raphson, nous nous proposons alors d'utiliser un *module tangent élastoplastique* consistant avec l'algorithme d'intégration implicite d'Euler. Ce module tangent  $\mathbf{C} := \partial \boldsymbol{\tau} / \partial \boldsymbol{\varepsilon}$  est développé comme suit.

En prenant la variation de l'équation (3.19) par rapport à toutes les quantités correspondant à la fin de l'incrément, nous obtenons l'équation suivante:

$$\left(1 + \frac{3G}{\tau_e} \Delta \bar{\varepsilon}^{pl}\right) \partial \boldsymbol{\tau}' + \frac{3G}{\tau_e} \left(\partial \bar{\varepsilon}^{pl} - \frac{\Delta \bar{\varepsilon}^{pl}}{\tau_e}\right) \boldsymbol{\tau}' = 2G \partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (3.22)$$

D'un autre côté, à partir de l'équation (3.11),

$$\partial \tau_e = H \partial \bar{\varepsilon}^{pl}$$

et de l'équation (3.20),

$$\partial \tau_e + 3G \partial \bar{\varepsilon}^{pl} = 2G \partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

En combinant ces deux dernières relations,

$$\partial \bar{\varepsilon}^{pl} = \frac{2}{3(1+B)} \partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

où

$$B = \frac{H}{3G}$$

À partir de la définition de  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  (équation (3.20),

$$\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{3}{2\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} : \partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

et donc

$$\partial \bar{\varepsilon}^{pl} = \frac{1}{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(1+B)} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} : \partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

La combinaison de ces résultats avec l'équation (3.22) donne:

$$\partial \boldsymbol{\tau}' = [Q \mathfrak{S} - R \boldsymbol{\tau}' \otimes \boldsymbol{\tau}'] : \partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (3.23)$$

où  $Q = \tau_e / \tilde{e}$ ,  $\mathfrak{S}$  le tenseur unité de quatrième ordre, et

$$R = \frac{3}{2\tau_e \tilde{e}} \frac{(1 - \Delta \bar{e}^p H / \tau_e)}{(1 + B)}$$

Pour tous les cas où les trois composantes directes de la déformation sont définies par la solution cinématique, le module tangent élastoplastique est complété par

$$\partial p = -K \mathbf{I} : \partial \boldsymbol{\varepsilon}$$

ainsi, puisque

$$\partial \boldsymbol{\tau} = \partial \boldsymbol{\tau}' - \partial p \mathbf{I}$$

et

$$\partial \hat{\mathbf{e}} = \partial \mathbf{e} = (\mathfrak{S} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) : \partial \boldsymbol{\varepsilon}$$

nous avons l'expression

$$\partial \boldsymbol{\tau} = \left[ Q \mathfrak{S} + (K - \frac{1}{3} Q) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - R \boldsymbol{\tau}' \otimes \boldsymbol{\tau}' \right] : \partial \boldsymbol{\varepsilon}$$

qui définit le module tangent élastoplastique

$$\mathbf{C} = Q \mathfrak{S} + (K - \frac{1}{3} Q) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - R \boldsymbol{\tau}' \otimes \boldsymbol{\tau}' \quad (3.24)$$

Pour le cas des contraintes planes,

$$\partial \hat{e}_{11} = \partial \varepsilon_{11}, \quad \partial \hat{e}_{22} = \partial \varepsilon_{22}, \quad \text{et} \quad \partial \hat{e}_{33} = -(\partial \varepsilon_{11} + \partial \varepsilon_{22})$$

et

$$\partial \tau_{11} = 2\partial \tau'_{11} + \partial \tau'_{22} \quad \text{et} \quad \partial \tau_{22} = 2\partial \tau'_{22} + \partial \tau'_{11}$$

de sorte que le module tangent élastoplastique reliant  $[\partial \tau_{11} \quad \partial \tau_{22} \quad \partial \tau_{12}]^T$  à  $[\partial \varepsilon_{11} \quad \partial \varepsilon_{22} \quad \partial \gamma_{12}]^T$  prend l'expression (Annexe A):

$$\mathbf{C} \equiv \begin{bmatrix} 2Q - R \tau_{11}^2 & Q - R \tau_{11} \tau_{22} & -R \tau_{11} \tau_{12} \\ Q - R \tau_{11} \tau_{22} & 2Q - R \tau_{22}^2 & -R \tau_{22} \tau_{12} \\ -R \tau_{11} \tau_{12} & -R \tau_{22} \tau_{12} & \frac{1}{2} Q - R \tau_{12}^2 \end{bmatrix}.$$

Pour le cas des poutres, nous avons

$$\partial \hat{e}_{11} = \partial \varepsilon_{11}, \quad \partial \hat{e}_{22} = \partial \hat{e}_{33} = -\frac{1}{2} \partial \varepsilon_{11}$$

et

$$\partial\tau_{11} = \frac{3}{2} \partial\tau'_{11}$$

permettant de déduire le module tangent élastoplastique  $\mathbf{C}$  reliant  $[\partial\tau_{11} \ \partial\tau_{12} \ \partial\tau_{13}]^T$  à  $[\partial\varepsilon_{11} \ \partial\varepsilon_{12} \ \partial\gamma_{13}]^T$  (Annexe A):

$$\mathbf{C} \equiv \begin{bmatrix} \frac{3}{2}Q - R\sigma_{11}^2 & -R\sigma_{11}\sigma_{12} & -R\sigma_{11}\sigma_{13} \\ & \frac{1}{2}Q - R\sigma_{12}^2 & -R\sigma_{12}\sigma_{13} \\ \text{sym} & & \frac{1}{2}Q - R\sigma_{13}^2 \end{bmatrix}.$$

### 3.4 Conclusion du chapitre

Ce chapitre concernait les lois constitutives traduisant la réponse des matériaux à comportement isotherme. L'attention portait sur les matériaux isotropes obéissant au critère de von Mises, ce qui comprend les métaux usuels de construction. Nous avons montré que l'intégration de cette loi par un schéma implicite se réduit à la résolution d'une équation scalaire non linéaire, et donné un module tangent élastoplastique,  $d\boldsymbol{\tau}/d\boldsymbol{\varepsilon}$ , consistant avec l'algorithme d'Euler garantissant une convergence quadratique de la méthode de Newton-Raphson.

Il est à remarquer que l'utilisation du modèle élastoplastique ainsi développé est subordonné au fait que les déformations élastiques restent petites, de sorte que la configuration actuelle reste voisine de la configuration de référence élastique, et de ce fait la mesure appropriée de contraintes est le tenseur des contraintes ("vraie") de Cauchy ( $\approx$  au tenseur de contraintes de Kirchhoff définies par rapport à la configuration de référence élastique). La mesure de déformation qui lui est conjuguée est obtenue par intégration numérique du taux de déformation  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{D} = \text{sym} \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \right)$  [HW80, EM89, Dab94].

La classe des structures que nous analyserons pratiquement en génie civil engendrent souvent des petites déformations (élastiques et plastiques). Nous admettons donc dans le développement du chapitre des poutres et des coques, l'hypothèse des petites déformations. Ce qui nous permet de choisir comme mesure appropriée de contraintes, le tenseur de Piola-Kirchhoff de seconde espèce, conjugué à la déformation Green-Lagrange,  $\boldsymbol{\varepsilon}^G$ , suggérée pour les problèmes en grandes rotations et petites déformations.

## Chapitre 4

# Théorie des grandes rotations

### 4.1 Introduction

Les rotations finies en mécanique des milieux continus sont décrites soit par un tenseur orthogonal propre soit par des pseudo-vecteurs appelés couramment vecteurs rotations finies. Ce chapitre explore d'une façon générale les cinématiques finie et différentielle du mouvement de corps rigides et discute les différentes formes de paramétrisation utilisées dans la formulation matricielle des rotations finies. Il est montré comment arriver à représenter et décrire ces rotations finies par un certain nombre d'expressions élégantes déduites d'un calcul tensoriel consistant. Une analyse géométrique élémentaire des grandes rotations permettant l'interprétation du pseudo-vecteur rotation est donnée. Aussi, un bref rappel de l'algèbre quaternion est revu et reformulé judicieusement dans le but de l'adapter au calcul du vecteur rotation résultant de la combinaison de deux ou plusieurs rotations finies. Ceci permet de démontrer d'une façon claire la non-additivité et la non-commutativité de la composition des rotations et les particularités qui en découlent. En outre, ceci permet le calcul des différentes variations (spatiale et matérielle) et des taux de variations des rotations. Les concepts proposés sont appliqués dans les chapitres suivants au développement des relations cinématiques et d'équilibre gouvernant le comportement des solides orientés de types poutre et coque.

## 4.2 Tenseur de rotation

Considérons un point  $P$  d'un corps rigide et faisons tourner ce corps rigide d'un angle  $\phi$  autour d'un axe de rotation caractérisé par le vecteur unitaire  $\mathbf{e}$ . Le point  $P$  se voit transformer sous l'effet de la rotation au point  $p$ . Soit  $O$  un point quelconque appartenant à l'axe de rotation et,  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{x}$ , les deux vecteurs joignant le point  $O$  aux points  $P$  et  $p$  respectivement.

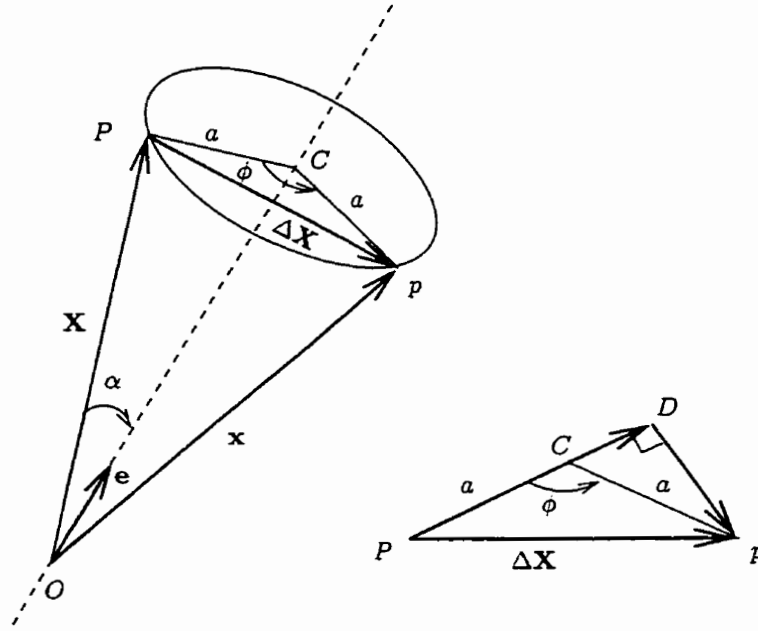


Figure 4.1: Rotation d'un point attaché à un corps rigide autour du vecteur unitaire  $\mathbf{e}$ .

Le vecteur  $\mathbf{x}$  peut être relié au vecteur  $\mathbf{X}$  via la transformation linéaire (tenseur de second ordre):

$$\mathbf{x} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{X} \quad (4.1)$$

de sorte que:

- (i) la longueur du vecteur de référence  $\mathbf{X}$  attaché au corps rigide et transformé en  $\mathbf{x}$  demeure constante, ce qui implique

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \implies \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R} = \mathbf{I} \quad (4.2)$$

signifiant que le tenseur décrivant la rotation est orthogonal;

- (ii) l'angle relatif entre deux directions quelconques demeure constant sous la transformation. En effet si  $\mathbf{A} = [\mathbf{E}_1 \ \mathbf{E}_2 \ \mathbf{E}_3]$  est une base attachée au corps rigide dans la configuration de référence et  $\mathbf{B} = [\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3]$  la même base après transformation et qui reste attachée au corps rigide dans la configuration actuelle, on a

$$\begin{cases} \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{E}_j = \delta_{ij} \\ \text{et} \\ \mathbf{E}_3 = \mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2 \end{cases} \implies (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{E}_3 = 1 \quad (4.3)$$

et par hypothèse

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{R} \cdot \mathbf{E}_i \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{A} \quad (4.4)$$

donc

$$\begin{cases} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \\ \text{et} \\ \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 \end{cases} \implies (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3 = 1 \quad (4.5)$$

En considérant (4.3), (4.4) et (4.5) on déduit que

$$\det \mathbf{A} = 1 \quad \text{et} \quad \det \mathbf{B} = 1$$

et par conséquent

$$\det \mathbf{R} = 1 \quad (4.6)$$

ce qui montre que le tenseur  $\mathbf{R}$  est une transformation orthogonale propre.

Donc la transformation  $\mathbf{R}$ , en plus d'être linéaire

$$\begin{cases} \mathbf{R} \cdot (\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = \mathbf{R} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{R} \cdot \mathbf{Y} \\ \text{et} \\ \mathbf{R} \cdot (\lambda \mathbf{X}) = \lambda \mathbf{R} \cdot \mathbf{X} \quad \forall \lambda \in R \text{ et } \forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} \text{ du corps rigide} \end{cases} \quad (4.7)$$

est aussi orthogonale propre

$$\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R} = \mathbf{I} \quad \text{et} \quad \det \mathbf{R} = 1 \quad (4.8)$$

La matrice orthogonale associée à la transformation  $\mathbf{R}$  possède une valeur propre réelle et deux valeurs propres complexes conjuguées [PB83]

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{et} \quad \lambda_{2,3} = \exp(\pm i\phi) = \cos \phi \pm i \sin \phi \quad (4.9)$$

$\phi$  est l'angle de rotation autour de  $\mathbf{e}$ . La matrice orthogonale propre  $\mathbf{R}$  admet donc au moins un vecteur propre  $\mathbf{e}$  tel que  $\mathbf{R} \cdot \mathbf{e} = \mathbf{e}$  et qui ne change pas durant la transformation. Ce vecteur  $\mathbf{e}$  est appelé direction de l'axe de rotation de  $\mathbf{R}$  et  $\phi$  angle de rotation de  $\mathbf{R}$  autour de  $\mathbf{e}$ . Si les vecteurs unitaires  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$  sont tels que

$$\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e} \quad \text{et} \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e} \times \mathbf{e}_1$$

alors  $\mathbf{R}$  peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \cos \phi (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) - \sin \phi (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) + \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} \\ \mathbf{R} &= \cos \phi \mathbf{I} + \sin \phi \mathbf{e} \times \mathbf{I} + (1 - \cos \phi) \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} \end{aligned} \quad (4.10)$$

La matrice de transformation  $\mathbf{R}$  non linéaire en  $\phi$  peut être aussi déduite géométriquement. Pour cela nous retournons à la Figure 4.1 et observons le point  $p$  dans sa position actuelle  $\mathbf{x} = \mathbf{Op}$  et initiale  $\mathbf{X} = \mathbf{OP}$ . On peut écrire

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \Delta \mathbf{X} \quad (4.11)$$

Notre but est de transformer le terme de droite de (4.11) sous la forme tensorielle (4.1). On déduit de la Figure 4.1

$$\Delta \mathbf{X} = \mathbf{PD} + \mathbf{Dp} \quad (4.12)$$

où  $D$  est la projection suivant  $PC$  de  $p$ . Pour déterminer  $\mathbf{Dp}$ , on note qu'il reste perpendiculaire au plan  $OPC$ , donc dirigé suivant la direction  $(\mathbf{e} \times \mathbf{X})$ . Pour trouver sa norme on observe que

$$\mathbf{Dp} = a \sin \phi$$

d'un autre côté on observe que

$$\|\mathbf{e} \times \mathbf{X}\| = \|\mathbf{X}\| |\sin \phi| = \|\mathbf{X}\| \frac{a}{\|\mathbf{X}\|} = a$$

d'où

$$\mathbf{Dp} = \sin \phi (\mathbf{e} \times \mathbf{X}) \quad (4.13)$$

La Figure 4.1 montre aussi que le vecteur  $\mathbf{PD}$  est non seulement perpendiculaire à  $(\mathbf{e} \times \mathbf{X})$  mais également à  $\mathbf{e}$ , puisque il est dans le plan  $PCp$  normal à  $\mathbf{e}$ . Il est donc dirigé suivant la direction  $\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{X})$  dont la norme est aussi égale à  $a$  puisque  $\mathbf{e}$  est un vecteur unitaire perpendiculaire à  $(\mathbf{e} \times \mathbf{X})$ . La Figure 4.1 permet aussi d'écrire:

$$\mathbf{PD} = a - a \cos \phi = (1 - \cos \phi) a$$

d'où

$$\mathbf{PD} = (1 - \cos \phi) (\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{X})) \quad (4.14)$$

En remplaçant les équations (4.14), (4.13) et (4.12) dans (4.11) on obtient l'expression

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{X} + (1 - \cos \phi) (\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{X})) + \sin \phi (\mathbf{e} \times \mathbf{X}) \\ \mathbf{x} &= \cos \phi \mathbf{X} + \sin \phi (\mathbf{e} \times \mathbf{X}) + (1 - \cos \phi) (\mathbf{e} \otimes \mathbf{e}) \cdot \mathbf{X} \\ \mathbf{x} &= [\cos \phi \mathbf{I} + \sin \phi \mathbf{e} \times \mathbf{I} + (1 - \cos \phi) \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}] \cdot \mathbf{X} \end{aligned} \quad (4.15)$$

permettant de déduire la transformation  $\mathbf{R}$

$$\mathbf{R} = \cos \phi \mathbf{I} + \sin \phi \mathbf{e} \times \mathbf{I} + (1 - \cos \phi) \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} \quad (4.16)$$

Donc géométriquement,  $\mathbf{R}$  représente une rotation autour de son vecteur propre  $\mathbf{e}$  vérifiant

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{e} = \mathbf{e} \quad \text{et} \quad \mathbf{e} \cdot \mathbf{e} = 1 \quad (4.17)$$

Le tenseur  $\mathbf{R}$  s'écrit aussi

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \sin \phi \hat{\mathbf{e}} + (1 - \cos \phi) \hat{\mathbf{e}} \cdot \hat{\mathbf{e}} \quad (4.18)$$

$\hat{\mathbf{e}}$  étant le tenseur antisymétrique associé au vecteur  $\mathbf{e}$  par les relations

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{e} = 0 \\ \text{et} \\ \hat{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{e} \times \mathbf{v} \quad \text{pour tout vecteur } \mathbf{v} \end{cases} \quad (4.19)$$

Relativement à la base euclidienne standard  $[\mathbf{i}^1, \mathbf{i}^2, \mathbf{i}^3]$ , si  $\mathbf{e} = e_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3^T$ , alors  $\hat{\mathbf{e}}$  est représenté par la matrice antisymétrique

$$[\hat{\mathbf{e}}] = \begin{bmatrix} 0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & 0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & 0 \end{bmatrix}$$

On introduit maintenant le *pseudo-vecteur rotation*  $\phi$  défini par

$$\phi = \phi \mathbf{e} \quad (4.20)$$

le long de l'axe de rotation. Ce pseudo-vecteur  $\phi$  peut s'écrire comme un vecteur colonne en terme de ses composantes  $\phi_1, \phi_2$  et  $\phi_3$  dans la base euclidienne  $[\mathbf{i}^1, \mathbf{i}^2, \mathbf{i}^3]$

$$\phi = \{\phi_1 \phi_2 \phi_3\}^T$$



avec

$$o = \|\phi\| = (\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2)^{1/2}$$

Il est à noter que dans le cas des grandes rotations (par opposition aux petites rotations), le pseudo-vecteur rotation  $\phi$  n'est pas un vecteur et les composantes  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ ,  $\phi_3$  ne peuvent être interprétées comme étant les composantes de la rotation autour des axes  $i^1$ ,  $i^2$  et  $i^3$  respectivement, comme on le verra un peu plus loin.

La transformation orthogonale  $\mathbf{R}$  s'écrit dans ce cas en fonction de  $\phi$

$$\mathbf{R} = \cos o \mathbf{I} + \frac{\sin \phi}{o} \phi \times \mathbf{I} + \frac{1 - \cos \phi}{\phi^2} \phi \otimes \phi \quad (4.21)$$

Ses composantes, mesurées par rapport à la base euclidienne  $[i^1, i^2, i^3]$  sont alors

$$R_{ij} = \cos o \delta_{ij} + \frac{\sin o}{o} \epsilon_{ikj} \phi_k + \frac{1 - \cos \phi}{\phi^2} \phi_i \phi_j \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (4.22)$$

où  $\epsilon_{ijk}$  est le tenseur de permutation, défini par

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1; \quad \epsilon_{132} = \epsilon_{213} = \epsilon_{321} = -1; \quad \text{tous les autres } \epsilon_{ijk} = 0.$$

Si on associe à l'opérateur  $(\phi \times)$  le tenseur antisymétrique  $\hat{\phi}$  vérifiant

$$\hat{\phi}^T + \hat{\phi} = 0$$

et relié à  $\phi$  par les relations

$$\begin{cases} \hat{\phi} \cdot \phi = 0 \\ \text{et} \\ \hat{\phi} \cdot v = \phi \times v \quad \text{pour tout vecteur } v \end{cases} \quad (4.23)$$

la transformation  $\mathbf{R}$  peut se réécrire

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \frac{\sin \phi}{\phi} \hat{\phi} + \frac{1 - \cos \phi}{\phi^2} \hat{\phi} \cdot \hat{\phi} \quad (4.24)$$

Géométriquement le tenseur  $\hat{\phi}$  représente une rotation infinitésimale autour de son vecteur propre  $\phi$  appelé aussi le vecteur axial du tenseur antisymétrique  $\hat{\phi}$ . Dans la base euclidienne  $[i^1, i^2, i^3]$ ,  $\hat{\phi}$  est représenté par la matrice

$$[\hat{\phi}] = \begin{bmatrix} 0 & -\phi_3 & \phi_2 \\ \phi_3 & 0 & -\phi_1 \\ -\phi_2 & \phi_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Le tenseur  $\mathbf{R}$  peut être aussi représenté sous la forme exponentielle en utilisant le développement en série de *Taylor* de  $\cos \phi$  et de  $\sin \phi$

$$\mathbf{R} = \exp(\hat{\phi}) = \mathbf{I} + \hat{\phi} + \frac{1}{2!} \hat{\phi}^2 + \frac{1}{3!} \hat{\phi}^3 + \dots \quad (4.25)$$

**Remarques**

1. Tout tenseur antisymétrique  $\hat{\theta}$  représente une rotation infinitésimale autour de son vecteur propre  $\theta$  vérifiant

$$\hat{\theta} \cdot \theta = 0 \quad (4.26)$$

2. La fonction exponentielle transforme ce tenseur en un tenseur orthogonal propre  $C$  produisant une grande rotation  $\theta$  autour de la direction spatiale  $\mathbf{p} = \theta/\|\theta\|$ , suivant la relation

$$C = \exp(\hat{\theta}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \hat{\theta}^k \quad (4.27)$$

égale à

$$C = \exp(\hat{\theta}) = I + \frac{\sin \|\theta\|}{\|\theta\|} \hat{\theta} + \frac{1 - \cos \|\theta\|}{\|\theta\|^2} \hat{\theta} \cdot \hat{\theta} \quad (4.28)$$

**4.3 Le pseudo-vecteur rotation n'est pas un vecteur**

Bien que le pseudo-vecteur rotation  $\phi$  possède une norme  $\|\phi\|$  et une direction  $\mathbf{e} = \phi/\|\phi\|$ , il n'est pas vecteur. Pour le qualifier ainsi il doit satisfaire les lois des vecteurs. En particulier, il doit obéir à la loi d'addition des vecteurs. Or, ce n'est pas le cas comme le montre la situation suivante [Mal69].

Prenons comme corps rigide le rectangle représenté à la Figure 4.2 dont la diagonale  $OA_0$  est initialement située dans le plan  $xy$ . Ce rectangle subit les séquences suivantes de rotations, chacune de magnitude égale 90 degrés

- (i) Autour de l'axe  $x$ , représenté par le pseudo-vecteur  $\pi/2 \mathbf{i}$  amenant la diagonale à  $OA_1$ .
- (ii) Autour de l'axe  $y$ , représenté par le pseudo-vecteur  $\pi/2 \mathbf{j}$  amenant la diagonale à  $OA_2$ .
- (iii) Autour de l'axe  $z$ , représenté par le pseudo-vecteur  $\pi/2 \mathbf{k}$  amenant la diagonale à  $OA_3$ .

Si les grandes rotations étaient des quantités vectorielles, la résultante définie par la somme  $\pi/2 (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$  devrait amener le rectangle de la position initiale  $OA_0$  à la position  $OA_3$ . Mais ce n'est pas le cas car la rotation résultante qui amène  $OA_0$  à  $OA_3$  est tout simplement la rotation autour de l'axe  $y$  de magnitude égale à 90

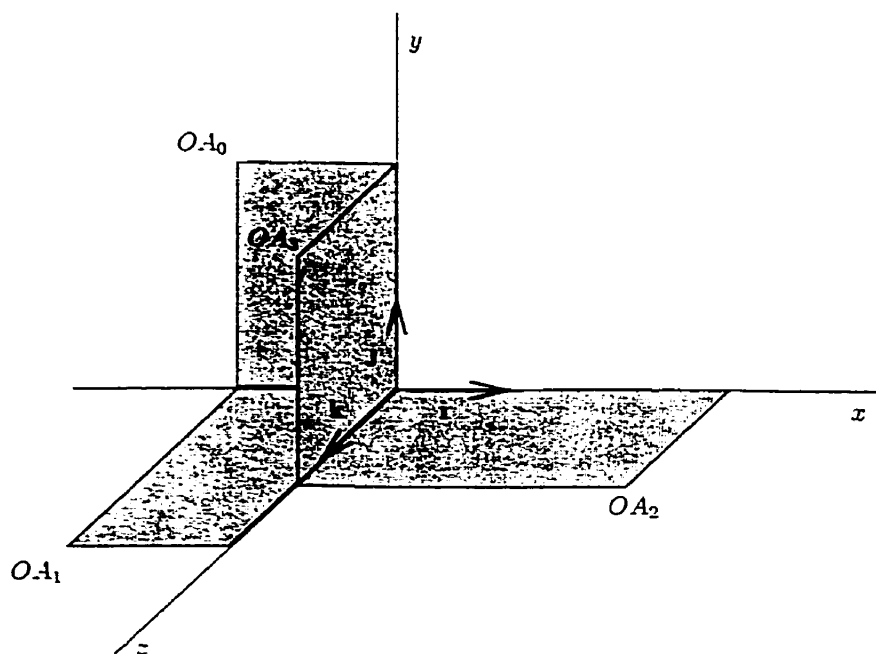


Figure 4.2: Exemple montrant que les rotations finies ne sont pas des vecteurs.

degrés, représentée par le pseudo-vecteur  $\pi/2\mathbf{j}$ , qui n'est pas la somme des trois rotations individuelles. En fait, la rotation totale résultant de l'application de  $n$  rotations successives

$$\phi^1, \phi^2, \dots, \phi^i, \dots, \phi^{n-1}, \phi^n$$

autour d'axes fixes dans l'espace, est la rotation correspondant à la transformation  $\mathbf{R}$  obtenue en multipliant les transformations individuelles  $\mathbf{R}_i$  dans l'ordre inverse de l'application des rotations  $\phi^i$

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_n \cdot \mathbf{R}_{n-1} \cdots \mathbf{R}_i \cdots \mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{R}_1$$

$\mathbf{R}$  est différente de la transformation

$$\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{R}_2 \cdots \mathbf{R}_i \cdots \mathbf{R}_{n-1} \cdot \mathbf{R}_n$$

correspondant à l'application des rotations dans l'ordre séquentiel

$$\phi^n, \phi^{n-1}, \dots, \phi^i, \dots, \phi^2, \phi^1$$

#### 4.4 Paramétrisation des rotations

Comme on a vu précédemment, les grandes rotations peuvent être complètement décrites par un tenseur orthogonal dépendant en général de trois paramètres indépendants

(variables indépendantes). Pour le cas des coques, seulement deux paramètres sont utilisés, étant donné que la rotation autour de la normale n'est généralement pas considérée. Plusieurs options s'offrent pour choisir ces paramètres indépendants; la majorité d'elles sont basées soit sur des rotations élémentaires, soit, comme on l'a vu précédemment, sur un pseudo-vecteur rotation qu'on appellera dorénavant vecteur rotation tout court. Ce choix peut être guidé par plusieurs critères tels que l'indépendance des paramètres, la forme mathématique du tenseur rotation, l'existence dans le domaine de définition des points singuliers, l'efficacité du calcul, la loi de composition des rotations, l'interprétation géométrique, la description adéquate de la cinématique du problème donné, etc.

#### 4.4.1 Formulation basée sur les rotation élémentaires

Dans ce type de formulation, la rotation totale d'un corps rigide autour d'un axe fixe dans l'espace est supposée résulter de la superposition de trois rotations élémentaires autour des axes  $x$ ,  $y$  et  $z$  d'une base euclidienne  $\{\mathbf{i}^1, \mathbf{i}^2, \mathbf{i}^3\}$ .

Soient  $\mathbf{R}_x(\theta)$ ,  $\mathbf{R}_y(\phi)$ ,  $\mathbf{R}_z(\psi)$  ces transformations élémentaires autour des axes  $x$ ,  $y$  et  $z$  respectivement

$$\begin{aligned} [\mathbf{R}_x(\theta)] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}; & [\mathbf{R}_y(\phi)] &= \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix}; \\ [\mathbf{R}_z(\psi)] &= \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Parmi les superpositions possibles, si on considère que la transformation totale  $\mathbf{R}$  est égale à

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_x(\theta) \cdot \mathbf{R}_y(\phi) \cdot \mathbf{R}_z(\psi) \quad (4.30)$$

on parle d'une paramétrisation par les angles de *Bryant* ou de *Cadran*; si

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_z(\psi) \cdot \mathbf{R}_x(\theta) \cdot \mathbf{R}_y(\phi) \quad (4.31)$$

on parle d'une paramétrisation par angles d'*Euler*.

D'autres combinaisons existent [Arg82, CG88], mais malheureusement toutes les formulations basées sur ce type de paramétrisation n'échappent pas à la singularité. L'unicité est vite perdue pour les angles de *Bryant* pour  $\phi = \pi/2 + n\pi$  et pour les angles d'*Euler* pour  $\theta = n\pi$ ,  $n = 0, 1, \dots$

#### 4.4.2 Formulation basée sur le vecteur rotation

Dans ce type de formulation, l'orientation dans l'espace d'un vecteur  $\mathbf{x}$  (ou d'une base) attaché à un corps rigide est considérée comme étant le résultat d'une seule rotation au début de laquelle le vecteur coïncidait avec le vecteur initial  $\mathbf{X}$ . La rotation de magnitude  $\phi$  est effectuée (dans le sens inverse des aiguilles d'une montre) autour d'un axe défini par le vecteur unitaire  $\mathbf{e}$ . La paramétrisation de cette rotation en terme du vecteur rotation  $\boldsymbol{\phi} = \phi \mathbf{e}$  est certainement la plus naturelle. Appelée paramétrisation *cartésienne*, elle a aussi plusieurs avantages tels que le nombre de paramètres qui reste minimal, l'interprétation géométrique facile et l'absence de singularité cinématique. Le tenseur rotation s'exprime alors en fonction de ces paramètres

$$\mathbf{R} = \exp(\hat{\boldsymbol{\phi}}) = \mathbf{I} + \frac{\sin \phi}{\phi} \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1 - \cos \phi}{\phi^2} \hat{\boldsymbol{\phi}} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (4.32)$$

La singularité apparente pour  $\phi = 0$  est facilement enlevable en notant que

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{\sin \phi}{\phi} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \phi}{\phi^2} = \frac{1}{2} \quad (4.33)$$

Dans certains cas il est plus pratique de paramétriser les rotations moyennant d'autres vecteurs rotation équivalents  $\boldsymbol{\phi}^i$  qui diffèrent du vecteur rotation  $\boldsymbol{\phi}$  dans la longueur [BR92, AP93]. Ceci permet d'obtenir des formules plus compactes, avançant la formulation de la cinématique du problème considéré. Par exemple

$$1. \quad \boldsymbol{\phi}^1 = 2 \tan \frac{\phi}{2} \mathbf{e} \implies \mathbf{R} = \mathbf{I} + \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \|\boldsymbol{\phi}^1\|^2} (\hat{\boldsymbol{\phi}}^1 + \frac{1}{2} \hat{\boldsymbol{\phi}}^1 \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}}^1) \quad (4.34)$$

$$2. \quad \boldsymbol{\phi}^2 = \tan \frac{\phi}{2} \mathbf{e} \implies \mathbf{R} = \mathbf{I} + \frac{2}{1 + \|\boldsymbol{\phi}^2\|^2} (\hat{\boldsymbol{\phi}}^2 + \hat{\boldsymbol{\phi}}^2 \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}}^2) \quad (4.35)$$

$$3. \quad \boldsymbol{\phi}^3 = \sin \phi \mathbf{e} \implies \mathbf{R} = \mathbf{I} + \hat{\boldsymbol{\phi}}^3 + \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\|\boldsymbol{\phi}^3\|}{2}} \hat{\boldsymbol{\phi}}^3 \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}}^3 \quad (4.36)$$

reliés par les relations

$$\frac{1}{2 \tan \frac{\phi}{2}} \boldsymbol{\phi}^1 = \frac{1}{\tan \frac{\phi}{2}} \boldsymbol{\phi}^2 = \frac{1}{\sin \phi} \boldsymbol{\phi}^3 = \frac{1}{\phi} \boldsymbol{\phi} = \mathbf{e} \quad (4.37)$$

Dépendant de l'application, chacune de ces définitions a ses avantages et ses inconvénients. Les vecteurs  $\boldsymbol{\phi}^1$  et  $\boldsymbol{\phi}^2$  engendrent des formules simples ne contenant pas de fonctions trigonométriques et convenant bien à l'actualisation des rotations, pourvu que  $\phi \neq \pi + 2n\pi$  ( $n = 0, 1, \dots$ ), sinon la longueur du vecteur rotation sera infinie.  $\boldsymbol{\phi}^3$

se prête particulièrement bien à s'exprimer en termes des déplacements [PB83] mais le tenseur rotation qui en découle est instable pour  $\phi = \pi + 2n\pi$  ( $n = 0, 1, \dots$ ).

Dans le cas de rotations infinitésimales toutes ces définitions à l'exception de la définition de *Gibb* du vecteur rotation ( $\phi^2 = \tan^2 \frac{\phi}{2}$ ), se réduisent au vecteur petites rotations retrouvé généralement en élasticité linéaire classique.

La formulation (4.32) basée sur le vecteur rotation *cartésien* et attribuée souvent à *Rodrigues*, est donc la seule qui ne présente aucune singularité dans le domaine  $0 \leq \phi < 2\pi$ . Cette définition constituera le point de départ des développements qui suivent et à la paramétrisation qu'on a adopté, soit la paramétrisation d'*Euler* ou la paramétrisation par *quaternion*.

À l'aide des relations trigonométriques

$$1 - \cos \phi = 2 \sin^2 \frac{\phi}{2} \quad \text{et} \quad \sin \phi = 2 \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2}$$

on définit les nouveaux paramètres

$$r_0 = \cos \frac{\phi}{2} \quad \text{et} \quad \mathbf{r} = \sin \frac{\phi}{2} \mathbf{e} \quad (4.38)$$

où par définition

$$\phi = \|\boldsymbol{\phi}\| \quad \text{et} \quad \mathbf{e} = \boldsymbol{\phi} / \|\boldsymbol{\phi}\| \quad (4.39)$$

Les quantités scalaire  $r_0$  et vectorielle  $\mathbf{r}$  sont appelées paramètres d'*Euler* ou paramètres de *quaternion*. Elles ne sont pas indépendantes puisqu'elles sont reliées par

$$r_0^2 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = 1 \quad (4.40)$$

Le tenseur rotation s'exprime ainsi en fonction de ces nouvelles quantités par l'expression quadratique

$$\mathbf{R} = \exp(\hat{\boldsymbol{\phi}}) = (2r_0^2 - 1) \mathbf{I} + 2r_0 \hat{\mathbf{r}} + 2 \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \quad (4.41)$$

Suivant la convention déjà introduite,  $\hat{\mathbf{r}}$  est le tenseur antisymétrique d'axe axial  $\mathbf{r}$ .

## 4.5 Algèbre quaternion et les rotations finies

L'algèbre quaternion [Arg82, SVQ86] inventé par *Hamilton* fournit une façon très élégante de décrire les grandes rotations. Il conduit d'une manière totalement différente au même concept d'angle d'*Euler* introduit à la section précédente. C'est pour cette

raison d'ailleurs que les paramètres qui lui sont associés s'appellent aussi les paramètres *quaternion*. De plus, la loi fondamentale de multiplication des quaternions fournit un moyen efficace pour exprimer la variation des rotations et pour combiner des rotations successives.

#### 4.5.1 Algèbre quaternion: définition et propriétés

**Quaternion.** Le quaternion est défini comme étant le couple

$$\mathbf{q} = (q_0, \mathbf{q}) \quad (4.42)$$

où  $q_0 \in \mathbb{R}$  est un scalaire appelé la *composante scalaire du quaternion* et  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$  un vecteur appelé la *composante vectorielle* du quaternion, notés

$$S(\mathbf{q}) = q_0 \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(\mathbf{q}) = \mathbf{q} \quad (4.43)$$

Cette définition peut être imaginée comme une généralisation du champ des nombres complexes composé d'une partie réelle et d'une partie imaginaire<sup>1</sup>. Dans ce qui suit nous rappelons quelques définitions et propriétés des opérations élémentaires définies sur le champ des quaternions.

**Vecteur et scalaire quaternion.** Le quaternion dont la composante scalaire est nulle  $\mathbf{q} = (0, \mathbf{q})$  est un *vecteur* appelé le *vecteur quaternion*, représenté tout simplement par sa composante vectorielle  $\mathbf{q} = \mathbf{q}$ . Le quaternion dont la composante vectorielle est nulle  $\mathbf{q} = (q_0, \mathbf{0})$  est un *scalaire*,  $\mathbf{q} = q_0$ , appelé le *scalaire quaternion*. Il découle de ces définitions qu'un scalaire et un vecteur sont des quaternions.

**Somme des quaternions et multiplication par un scalaire.** La *somme* de deux quaternions  $\mathbf{q}^1 = (q_0^1, \mathbf{q}^1)$  et  $\mathbf{q}^2 = (q_0^2, \mathbf{q}^2)$  est le quaternion  $\mathbf{q}^1 + \mathbf{q}^2 = (q_0^1 + q_0^2, \mathbf{q}^1 + \mathbf{q}^2)$ , obtenu en additionnant séparément les composantes scalaires et les composantes vectorielles des deux quaternions. La multiplication par un scalaire  $\lambda$  est définie pour tout quaternion  $\mathbf{q} = (q_0, \mathbf{q})$  par  $\lambda \mathbf{q} = (\lambda q_0, \lambda \mathbf{q})$ . L'addition des quaternions et la *multiplication par un scalaire* obéissent à tous les axiomes d'addition et de multiplication par un scalaire caractérisant un espace vectoriel; de là l'ensemble de tous les quaternion est un espace vectoriel.

---

<sup>1</sup>En fait, cette interprétation est en accord avec le concept original de *Hamilton*.

**Le produit de deux quaternions** est le quaternion, noté,  $\mathbf{q}^1 \circ \mathbf{q}^2$ , défini par

$$\begin{aligned}\mathbf{q}^1 \circ \mathbf{q}^2 &= (q_0^1, \mathbf{q}^1) \circ (q_0^2, \mathbf{q}^2) \\ &= (q_0^1 q_0^2 - \mathbf{q}^1 \cdot \mathbf{q}^2, q_0^1 \mathbf{q}^2 + q_0^2 \mathbf{q}^1 + \mathbf{q}^1 \times \mathbf{q}^2)\end{aligned}\quad (4.44)$$

Notons que

$$\mathbf{q}^1 \circ \mathbf{q}^2 \neq \mathbf{q}^2 \circ \mathbf{q}^1 \quad (4.45)$$

due à la présence du produit vectoriel. Donc le produit quaternion de deux quaternions est non commutatif.

**Le conjugué d'un quaternion** est le quaternion, noté  $\mathbf{q}^\dagger$ , défini par le dual

$$\mathbf{q}^\dagger = (q_0, -\mathbf{q}) \quad \text{avec} \quad \mathbf{q} = (q_0, \mathbf{q}) \quad (4.46)$$

**La norme d'un quaternion** est le scalaire noté  $\|\mathbf{q}\|$ , qui peut être calculé en terme des composantes du quaternion  $\mathbf{q}$  par

$$\|\mathbf{q}\| = q_0^2 + \mathbf{q} \cdot \mathbf{q} \quad (4.47)$$

ou en terme du produit  $\mathbf{q} \circ \mathbf{q}^\dagger = \mathbf{q}^\dagger \circ \mathbf{q}$  par

$$\|\mathbf{q}\| = (\mathbf{q} \circ \mathbf{q}^\dagger)^{1/2} = (\mathbf{q}^\dagger \circ \mathbf{q})^{1/2} \quad (4.48)$$

**L'inverse d'un quaternion**  $\mathbf{q}$  est le quaternion noté  $\mathbf{q}^{-1}$ , qui satisfait la condition

$$\mathbf{q} \circ \mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^{-1} \circ \mathbf{q} \quad (4.49)$$

C'est donc le quaternion

$$\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^\dagger / \|\mathbf{q}\| \quad (4.50)$$

**Quaternion unitaire (Versor).** est tout quaternion  $\mathbf{q}$  vérifiant

$$\|\mathbf{q}\| = 1 \quad (4.51)$$

Pour de tels quaternions, on introduit le symbole  $\mathbf{r} = (r_0, \mathbf{r})$  et on note que

$$\mathbf{r}^{-1} = \mathbf{r}^\dagger \quad \text{avec} \quad \mathbf{r} \circ \mathbf{r}^\dagger = \mathbf{r}^\dagger \circ \mathbf{r} = 1 \quad (4.52)$$

puisque

$$\|\mathbf{r}\| = r_0^2 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = 1 \quad (4.53)$$



### Remarques

Il suit des définitions précédentes

1. qu'un quaternion unitaire  $\mathbf{q}$  peut s'écrire

$$\mathbf{r} = (r_0, \mathbf{r}) = (\cos \alpha, \sin \alpha \mathbf{n}) \quad (4.54)$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur unitaire qui lui est associé.

2. Q'un quaternion  $\mathbf{q}$  peut toujours s'exprimer sous la forme

$$\mathbf{q} = \|\mathbf{q}\| \mathbf{r} \quad (4.55)$$

#### 4.5.2 Représentation des rotations finies en terme du quaternion

Considérons un vecteur  $\mathbf{x}$  obtenu par la rotation du vecteur de référence  $\mathbf{X}$ . Il est facile de vérifier que

$$\mathbf{x} = \mathbf{r} \circ \mathbf{X} \circ \mathbf{r}^\dagger \quad \text{et} \quad \mathbf{X} = \mathbf{r}^\dagger \circ \mathbf{x} \circ \mathbf{r} \quad (4.56)$$

où  $\mathbf{r} = (r_0, \mathbf{r})$  est un quaternion unitaire. En posant

$$\mathbf{r} = (r_0, \mathbf{r}) = (\cos \alpha, \sin \alpha \mathbf{n}) \implies \mathbf{r}^\dagger = (r_0, -\mathbf{r}) = (\cos \alpha, -\sin \alpha \mathbf{n}) \quad (4.57)$$

on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{r} \circ \mathbf{X} \circ \mathbf{r}^\dagger \\ &= [\cos 2\alpha \mathbf{I} + \sin 2\alpha \hat{\mathbf{n}} + (1 - \cos 2\alpha) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}] \cdot \mathbf{X} \\ &= [\mathbf{I} + \sin 2\alpha \hat{\mathbf{n}} + (1 - \cos 2\alpha) \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}}] \cdot \mathbf{X} \end{aligned} \quad (4.58)$$

où  $\hat{\mathbf{n}}$  est le tenseur antisymétrique associé  $\mathbf{n}$ .

#### 4.5.3 Équivalence du quaternion avec les paramètres d'Euler

Considérons encore une fois un vecteur  $\mathbf{x}$  obtenu par une rotation  $\phi$  du vecteur de référence  $\mathbf{X}$  autour de la direction  $\mathbf{e}$ . De l'équation (4.15) on a

$$\mathbf{x} = [\cos \phi \mathbf{I} + \sin \phi \mathbf{e} \times \mathbf{I} + (1 - \cos \phi) \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}] \cdot \mathbf{X} \quad (4.59)$$

et d'un autre coté, de l'équation (4.58)

$$\mathbf{x} = [\cos 2\alpha \mathbf{I} + \sin 2\alpha \mathbf{n} + (1 - \cos 2\alpha) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}] \cdot \mathbf{X} \quad (4.60)$$

Ces deux expressions sont égales à condition de choisir

$$\alpha = \frac{\phi}{2} \quad \text{et} \quad \mathbf{n} = \mathbf{e} \quad (4.61)$$

ou, en d'autres termes, de choisir un quaternion  $\mathbf{r} = (r_0, \mathbf{r})$  telles que

$$r_0 = \cos \frac{\phi}{2} \quad \text{et} \quad \mathbf{r} = \sin \frac{\phi}{2} \mathbf{e} \quad (4.62)$$

Ces composantes ne sont rien d'autres que les paramètres d'*Euler* définis par l'équation (4.38).

## 4.6 Loi de composition (combinaison) des rotations

La rotation composée est la rotation totale résultant de l'application successive de deux ou plusieurs champs de rotations. Dans le cas des problèmes géométriquement linéaires, les rotations composées sont obtenues tout simplement par superposition linéaire des vecteurs rotations individuelles. Cette propriété découle directement du développement en série de *Taylor* du tenseur de rotation  $\mathbf{R} = \exp(\hat{\phi})$ . Soient  $\phi^1$  et  $\phi^2$  deux vecteurs rotations représentant deux rotations infinitésimales:

$$\exp(\hat{\phi}^1) \approx \mathbf{I} + \hat{\phi}^1 \quad \text{et} \quad \exp(\hat{\phi}^2) \approx \mathbf{I} + \hat{\phi}^2 \quad (4.63)$$

La rotation totale représentée par le vecteur  $\phi$  est donc

$$\exp(\hat{\phi}) = \exp(\hat{\phi}^1) \cdot \exp(\hat{\phi}^2) \approx \mathbf{I} + \hat{\phi}^1 + \hat{\phi}^2 \quad (4.64)$$

avec

$$\hat{\phi} \approx \hat{\phi}^1 + \hat{\phi}^2 \quad \text{et} \quad \phi = \phi^1 + \phi^2 \quad (4.65)$$

La composition des rotations dans le cas des analyses linéaires est donc additive. En outre, elle est commutative puisque dans ce cas l'ordre d'application des rotations n'est pas important

$$\exp(\hat{\phi}^1) \cdot \exp(\hat{\phi}^2) = \exp(\hat{\phi}^2) \cdot \exp(\hat{\phi}^1)$$

Dans des analyses géométriquement non linéaires, la composition des rotations n'est plus additive; en plus elle est non commutative. L'ordre d'application des rotations est donc important. Une exception à cette règle survient lorsque les rotations élémentaires partagent le même axe de rotation. Ce cas particulier est traité un peu plus loin. Supposons un vecteur initial  $\mathbf{x}^0$ . Soient  $\mathbf{r}^1 = (r_0^1, \mathbf{r}^1)$ ,  $\mathbf{r}^2 = (r_0^2, \mathbf{r}^2)$ , deux quaternions paramétrisant deux transformations orthogonales  $\mathbf{R}_1$  et  $\mathbf{R}_2$  respectivement. La rotation composée résultant de l'application des rotations finies dans l'ordre

successif  $\mathbf{R}_1$ ,  $\mathbf{R}_2$  est obtenue comme suit.

Si  $\mathbf{x}^1$  représente le transformé de  $\mathbf{x}^0$  par  $\mathbf{R}_1$  et  $\mathbf{x}^2$  le vecteur obtenu suite à l'application de la transformation  $\mathbf{R}_2$ , on déduit de l'équation (4.56)

$$\mathbf{x}^1 = \mathbf{r}^1 \circ \mathbf{x}^0 \circ \mathbf{r}^{1\dagger} \quad \text{et} \quad \mathbf{x}^2 = \mathbf{r}^2 \circ \mathbf{x}^1 \circ \mathbf{r}^{2\dagger} \quad (4.66)$$

donc

$$\mathbf{x}^2 = \mathbf{r}^2 \circ (\mathbf{r}^1 \circ \mathbf{x}^0 \circ \mathbf{r}^{1\dagger}) \circ \mathbf{r}^{2\dagger} \quad (4.67)$$

$$= (\mathbf{r}^2 \circ \mathbf{r}^1) \circ \mathbf{x}^0 \circ (\mathbf{r}^2 \circ \mathbf{r}^1)^\dagger \quad (4.68)$$

La rotation totale ou composée est représentée donc par le produit quaternion  $\mathbf{r}^2 \circ \mathbf{r}^1$ , qui est calculé par

$$\mathbf{r}^2 \circ \mathbf{r}^1 = (r_0^2 r_0^1 - \mathbf{r}^2 \cdot \mathbf{r}^1, r_0^2 \mathbf{r}^1 + r_0^1 \mathbf{r}^2 + \mathbf{r}^2 \times \mathbf{r}^1) \quad (4.69)$$

Notons que l'équation (4.69) permet le calcul de la rotation composée, soit l'actualisation du champ des rotations sans passer par l'évaluation des transformations orthogonales  $\mathbf{R}_1$ ,  $\mathbf{R}_2$  en terme du quaternion correspondant ni par l'évaluation du produit  $\mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{R}_1$ . En plus, toutes les opérations sont libres de toute singularité, indépendamment des amplitudes des rotations individuelles. Notons aussi que le produit  $\mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{R}_1$ , qui est interprété comme étant la superposition de la rotation finie  $\mathbf{R}_2$  sur la rotation finie  $\mathbf{R}_1$ , est différent de  $\mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{R}_2$ , représenté par le quaternion  $\mathbf{r}^1 \circ \mathbf{r}^2$  et interprété comme étant la rotation finie  $\mathbf{R}_1$  superposée sur la rotation finie  $\mathbf{R}_2$ .

Pour le cas particulier où les rotations individuelles partagent le même axe de rotation, la composition des rotations se réduit à une forme additive commutative. Soient  $\mathbf{r}^1$ ,  $\mathbf{r}^2$ , deux quaternions correspondant à deux vecteurs rotations  $\phi^1$  et  $\phi^2$  partageant le même axe de rotation  $\mathbf{e}$ . Alors

$$\mathbf{e} = \frac{\phi^1}{\|\phi^1\|} = \frac{\phi^2}{\|\phi^2\|} \implies \begin{cases} \mathbf{r}^1 = (\cos \|\phi^1/2\|, \sin \|\phi^1/2\| \mathbf{e}) \\ \text{et} \\ \mathbf{r}^2 = (\cos \|\phi^2/2\|, \sin \|\phi^2/2\| \mathbf{e}) \end{cases} \quad (4.70)$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^2 \circ \mathbf{r}^1 = & (\cos \|\phi^2/2\| \cos \|\phi^1/2\| - \sin \|\phi^2/2\| \sin \|\phi^1/2\|, \\ & \cos \|\phi^2/2\| \sin \|\phi^1/2\| \mathbf{e} + \cos \|\phi^1/2\| \sin \|\phi^2/2\| \mathbf{e}) \end{aligned} \quad (4.71)$$

qui se réduit à

$$\mathbf{r}^2 \circ \mathbf{r}^1 = (\cos \|(\phi^1 + \phi^2)/2\|, \sin \|(\phi^1 + \phi^2)/2\| \mathbf{e}) \quad (4.72)$$

#### 4.7 Extraction du vecteur rotation

L'extraction du vecteur rotation correspondant à une transformation orthogonale paramétrisée par les paramètres quaternions est accomplie comme suit. Soit un quaternion  $\mathbf{r} = (r_0, \mathbf{r})$ . Le vecteur rotation  $\phi$ , qui lui est associé, est obtenue en inversant les équations (4.38). On obtient alors

$$\|\phi\| = 2 \tan^{-1} \left[ \frac{\|\mathbf{r}\|}{r_0} \right] \quad \text{et} \quad \phi = \|\phi\| \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} \quad (4.73)$$

Il est important de noter que l'extraction du vecteur rotation du quaternion n'est pas unique. La norme  $\|\phi\|$  est définie à  $2n\pi$  près,  $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$ . On s'entend de choisir toujours le vecteur rotation tel que  $\|\phi\| < 2\pi$ .

#### 4.8 Actualisation du champ des rotations et du vecteur directeur

Soit  $\mathbf{R}_i$  la transformation orthogonale représentant la rotation combinée définie comme étant le produit d'un ensemble de rotations élémentaires ou incrémentales  $\Delta\mathbf{R}_p$ , pour  $p = 1, 2, \dots, i$ . (Pour le cas des conditions aux limites imposées,  $\mathbf{R}_i$  représente le produit final après  $i$  pas de toutes les rotations imposées  $\Delta\mathbf{R}_p$ ; pour une procédure de résolution numérique itérative,  $\mathbf{R}_i$  est la rotation totale après  $i$  incréments et où  $\Delta\mathbf{R}_p$ , pour  $p = 1, 2, \dots, i$  est la solution convergée à chaque incrément du champ de rotation.) Par définition, la rotation composée est donnée par le produit

$$\mathbf{R}_i = \Delta\mathbf{R}_i \cdot \Delta\mathbf{R}_{i-1} \cdots \Delta\mathbf{R}_1$$

ou d'une façon équivalente, par la relation récurrente

$$\mathbf{R}_i = \Delta\mathbf{R}_i \cdot \mathbf{R}_{i-1}$$

Bien que la rotation composée soit définie en terme d'un tenseur orthogonal, dans un contexte numérique les vecteurs rotations (ou d'une manière équivalente les paramètres quaternion) associés aux tenseurs rotations sont les degrés de libertés. L'actualisation des rotations s'accomplit comme suit. Supposons connu à un instant donné du processus de résolution, le champ incrémental  $\Delta\phi^i$  du vecteur rotation à l'incrément  $i$  et le quaternion  $\mathbf{r}^{i-1} = (r_0^{i-1}, \mathbf{r}^{i-1})$  paramétrisant le champ de rotation à l'incrément précédent  $i - 1$ . Pour actualiser le champ de rotation par l'incrément de

rotation  $\Delta\phi^i$  jusqu'à l'incrément  $i$ , on procède comme suit. On calcule tout d'abord le quaternion paramétrisant la rotation incrémentale:

$$\Delta r_0^i = \cos \|\Delta\phi^i/2\| \quad \text{et} \quad \Delta \mathbf{r}^i = \frac{\sin \|\Delta\phi^i/2\|}{\|\Delta\phi^i\|} \Delta\phi^i \quad (4.74)$$

Le champ de rotation actualisé est obtenu par le produit quaternion  $\mathbf{r}^i = \Delta \mathbf{r}^i \circ \mathbf{r}^{i-1}$ , défini par

$$\mathbf{r}^i = (r_0^i, \mathbf{r}^i) = (\Delta r_0^i r_0^{i-1} - \Delta \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}^{i-1}, \Delta r_0^i \mathbf{r}^{i-1} + r_0^{i-1} \Delta \mathbf{r}^i + \Delta \mathbf{r}^i \times \mathbf{r}^{i-1}) \quad (4.75)$$

Alors

$$\|\phi^i\| = 2 \tan^{-1} \left[ \frac{\|\mathbf{r}^i\|}{r_0^i} \right] \quad \text{et} \quad \phi^i = \|\phi^i\| \frac{\mathbf{r}^i}{\|\mathbf{r}^i\|} \quad (4.76)$$

Une autre conséquence importante de la paramétrisation des rotations par le quaternion est la simplicité d'actualiser les vecteurs directeurs. Supposons connu le vecteur directeur  $\mathbf{t}^{i-1}$  d'une poutre ou d'une coque à l'incrément  $i-1$ . L'actualisation de ce vecteur directeur à l'incrément  $i$  est défini par

$$\mathbf{t}^i = \exp(\hat{\Delta\phi}^i) \cdot \mathbf{t}^{i-1} \quad (4.77)$$

où  $\exp(\hat{\Delta\phi}^i)$  est calculée par l'équation (4.41). Alors, le vecteur directeur  $\mathbf{t}^i$  est obtenu directement à partir du quaternion

$$\mathbf{t}^i = (2(\Delta r_0^i)^2 - 1) \mathbf{t}^{i-1} + 2\Delta r_0^i \Delta \mathbf{r}^i \times \mathbf{t}^{i-1} + 2(\Delta \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{t}^{i-1}) \Delta \mathbf{r}^i \quad (4.78)$$

## 4.9 Vitesse et accélération du champ de rotation

Considérons la rotation d'un point matériel  $P$  d'un corps rigide repéré par le vecteur position  $\mathbf{X}$  à la position  $p$  repéré par le vecteur position  $\mathbf{x}$

$$\mathbf{x} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{X} \quad (4.79)$$

La *vitesse instantanée* du point  $p$ , calculée en dérivant le vecteur position  $\mathbf{x}$  par rapport au temps est alors

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{X} \quad (4.80)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{x} \quad (4.81)$$

On définit le *tenseur vitesse angulaire spatiale*  $\hat{\omega}$  par

$$\hat{\omega} = \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T \quad (4.82)$$

C'est un tenseur spatial antisymétrique, puisque

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T) = \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{R}}^T = \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T + (\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T)^T = \mathbf{0} \quad (4.83)$$

Le vecteur propre  $\boldsymbol{\omega}$  du tenseur  $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ , vérifiant

$$\hat{\boldsymbol{\omega}} \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \hat{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \text{ pour tout vecteur } \mathbf{v} \quad (4.84)$$

définit ce qu'on appelle le *vecteur vitesse angulaire spatiale*. Le vecteur vitesse instantanée  $\dot{\mathbf{x}}$  s'exprime ainsi en terme  $\hat{\boldsymbol{\omega}}$  ou de  $\boldsymbol{\omega}$  par

$$\dot{\mathbf{x}} = \hat{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{x} \quad (4.85)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} \quad (4.86)$$

Si  $\boldsymbol{\phi}$  est le vecteur rotation associé à la transformation  $\mathbf{R}$ , le vecteur vitesse angulaire spatiale est relié au taux de variation de  $\boldsymbol{\phi}$  par la relation [NOC91]:

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{H}(\boldsymbol{\phi}) \cdot \dot{\boldsymbol{\phi}} \quad (4.87)$$

où  $\mathbf{H}(\boldsymbol{\phi})$ , appelé *opérateur tangentiel*, est défini par

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\phi}) = \frac{\sin \|\boldsymbol{\phi}\|}{\|\boldsymbol{\phi}\|} \mathbf{I} + \frac{1 - \cos \|\boldsymbol{\phi}\|}{\|\boldsymbol{\phi}\|^2} \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{\|\boldsymbol{\phi}\|^2} \left[ 1 - \frac{\sin \|\boldsymbol{\phi}\|}{\|\boldsymbol{\phi}\|} \right] \boldsymbol{\phi} \otimes \boldsymbol{\phi} \quad (4.88)$$

avec

$$\lim_{\|\boldsymbol{\phi}\| \rightarrow 0} \mathbf{H}(\boldsymbol{\phi}) = \mathbf{I} \quad (4.89)$$

Le *vecteur accélération* est obtenu en dérivant par rapport au temps l'équation (4.81)

$$\ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{X} \quad (4.90)$$

$$\ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{x} \quad (4.91)$$

On définit le *tenseur accélération angulaire spatiale*  $\boldsymbol{\alpha}$

$$\boldsymbol{\alpha} = \ddot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T \quad (4.92)$$

relié au tenseur vitesse angulaire spatiale  $\hat{\boldsymbol{\omega}}$  par la relation

$$\boldsymbol{\alpha} = \hat{\dot{\boldsymbol{\omega}}} + \hat{\boldsymbol{\omega}} \cdot \hat{\boldsymbol{\omega}} \quad (4.93)$$

obtenu en dérivant l'équation (4.86). Le premier terme de cette expression, qui est *non symétrique* représente le taux de variation des vitesses angulaires; Le second, *symétrique*, rassemble les termes d'accélération centrifuge.

Le vecteur axial du tenseur antisymétrique  $\hat{\dot{\omega}}$  définit ce qu'on appelle le *vecteur accélération angulaire*  $\dot{\omega}$ , vérifiant

$$\hat{\dot{\omega}} \cdot \dot{\omega} = 0 \quad \text{et} \quad \hat{\dot{\omega}} \cdot \mathbf{v} = \dot{\omega} \times \mathbf{v} \text{ pour tout vecteur } \mathbf{v} \quad (4.94)$$

Le vecteur accélération et la seconde dérivée par rapport au temps du tenseur rotation s'expriment donc

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}} &= \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{x} \\ &= \dot{\omega} \times \mathbf{x} + \omega \times (\omega \times \mathbf{x}) \end{aligned} \quad (4.95)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{R}} &= \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{R} \\ &= \hat{\dot{\omega}} \cdot \mathbf{R} + \dot{\omega} \cdot \dot{\omega} \cdot \mathbf{R} \end{aligned} \quad (4.96)$$

### Remarques

Dans les développements précédents, on a opté pour une description *spatiale* pour dériver les expressions des vecteurs vitesse et accélération. Toutes les quantités ainsi définies sont reliées à la configuration spatiale, obtenue par rotation de la configuration de référence. En d'autres termes si  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ , est une base orthonormée attachée à la configuration spatiale, alors tout vecteur  $\mathbf{v}_S$  et tout tenseur  $\mathbf{T}_S$  attachés à cette configuration s'écrivent en fonction de leurs composantes dans cette base

$$\mathbf{v}_S = v_S^i \mathbf{e}_i \quad \text{et} \quad \mathbf{T}_S = v_S^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad i, j = 1, 2, 3$$

Soit  $(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3)$ , la base matérielle attachée au corps rigide dans la configuration de référence. On a par définition

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_i \quad i = 1, 2, 3$$

Le vecteur matériel  $\mathbf{v}_M$  et le tenseur matériel  $\mathbf{T}_m$  définis comme étant les transports de  $\mathbf{v}_S$  et  $\mathbf{T}_S$  respectivement par la rotation  $\mathbf{R}$  sont reliés à leurs correspondants par

les relations

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}_M = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{v}_S \\ \text{et} \\ \mathbf{T}_M = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{T}_S \cdot \mathbf{R} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}_S = \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}_M \\ \text{et} \\ \mathbf{T}_S = \mathbf{R} \cdot \mathbf{T}_M \cdot \mathbf{R}^T \end{array} \right.$$

On définit ainsi le *tenseur vitesse angulaire matérielle*  $\hat{\Omega}$  relié à son correspondant spatial par

$$\hat{\Omega} = \mathbf{R}^T \cdot \dot{\omega} \cdot \mathbf{R} \quad (4.97)$$

Le *vecteur vitesse angulaire matérielle* est tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\Omega} \cdot \Omega = 0 \\ \text{et} \\ \hat{\Omega} \cdot \mathbf{V} = \Omega \times \mathbf{V} \quad \text{pour tout } \mathbf{V} \text{ de la configuration de référence} \end{array} \right. \quad (4.98)$$

$\Omega$  est relié au taux de variation du vecteur rotation  $\phi$  via la relation

$$\Omega = \mathbf{H}^T(\phi) \cdot \dot{\phi} \quad (4.99)$$

$\mathbf{H}(\phi)$  étant l'opérateur tangentiel défini précédemment. La première dérivée du tenseur rotation et du vecteur position s'écrivent dans ce cas

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cdot \hat{\Omega} \quad (4.100)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{R} \cdot \hat{\Omega} \cdot \mathbf{X} \quad (4.101)$$

On définit aussi le *tenseur accélération angulaire matérielle*  $\mathbf{A}$ , relié à son correspondant spatiale  $\alpha$  par la relation

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}^T \cdot \alpha \cdot \mathbf{R} \quad (4.102)$$

et au tenseur vitesse angulaire matérielle  $\hat{\Omega}$  par

$$\mathbf{A} = \hat{\dot{\Omega}} + \hat{\Omega} \cdot \hat{\Omega} \quad (4.103)$$

où  $\hat{\dot{\Omega}}$  est le tenseur antisymétrique associé au *vecteur accélération angulaire matérielle*  $\hat{\dot{\Omega}}$  par

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\dot{\Omega}} \cdot \hat{\Omega} = 0 \\ \text{et} \\ \hat{\dot{\Omega}} \cdot \mathbf{V} = \hat{\dot{\Omega}} \times \mathbf{V} \quad \text{pour tout } \mathbf{V} \text{ de la configuration de référence} \end{array} \right. \quad (4.104)$$



La dérivée seconde par rapport au temps du tenseur rotation et le vecteur accélération s'écrivent dans ce cas

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{R}} &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{A} \\ &= \mathbf{R} \cdot \dot{\hat{\Omega}} + \mathbf{R} \cdot \hat{\Omega} \cdot \hat{\Omega}\end{aligned}\quad (4.105)$$

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{x}} &= \ddot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{X} \\ &= (\mathbf{R} \cdot \dot{\hat{\Omega}} + \mathbf{R} \cdot \hat{\Omega} \cdot \hat{\Omega}) \cdot \mathbf{X} \\ &= \mathbf{R} \cdot (\dot{\hat{\Omega}} \times \mathbf{X} + \hat{\Omega} \times (\hat{\Omega} \times \mathbf{X}))\end{aligned}\quad (4.106)$$

#### 4.10 Variations du champ de rotation

L'utilisation de l'algorithme de *Newton-Raphson* nécessite la linéarisation des quantités cinématiques impliquées dans les équations d'équilibre, donc du champ de rotation. Considérons, encore une fois, le vecteur  $\mathbf{x}$  obtenu par rotation du vecteur de référence  $\mathbf{X}$ .

$$\mathbf{x} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{X} \quad (4.107)$$

Le *déplacement virtuel* associé au mouvement décrit par cette transformation est obtenu avec le calcul de la *variation*  $\delta\mathbf{x}$  du champ  $\mathbf{x}$ .

$$\delta\mathbf{x} = \delta\mathbf{R} \cdot \mathbf{X} \quad (4.108)$$

où  $\delta\mathbf{R}$  est la variation du tenseur de rotation  $\mathbf{R}$ . D'autre part, la variation  $\delta\mathbf{x}$  peut être définie en termes du vecteur *variation angulaire spatiale*  $\delta\hat{\boldsymbol{\theta}}$

$$\delta\mathbf{x} = \delta\hat{\boldsymbol{\theta}} \times \mathbf{x} \quad (4.109)$$

$$\delta\mathbf{x} = \hat{\delta\boldsymbol{\theta}} \cdot \mathbf{x} \quad (4.110)$$

$$\delta\mathbf{x} = \hat{\delta\boldsymbol{\theta}} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{X} \quad (4.111)$$

par conséquent, il suit que

$$\delta\mathbf{R} = \hat{\delta\boldsymbol{\theta}} \cdot \mathbf{R} \quad (4.112)$$

Il est important de noter que le champ du vecteur variation angulaire spatiale  $\delta\hat{\boldsymbol{\theta}}$ , qui est analogue à la vitesse angulaire spatiale  $\boldsymbol{\omega}$  en dynamique, est différent de

la variation du vecteur rotation  $\phi$ . Ces deux quantités sont reliées via l'opérateur tangentiel  $\mathbf{H}(\phi)$

$$\delta\theta = \mathbf{H}(\phi) \cdot \delta\phi \quad (4.113)$$

Ces quantités seront utilisées dans l'équation du travail virtuel comme on le verra ultérieurement. On aura aussi besoin de calculer leurs variations dans le but d'évaluer la *matrice tangente (jacobienne)*. Soit  $d(\delta\mathbf{x})$  un *incrément infinitésimal* du champ virtuel (c'est aussi la seconde variation du vecteur position  $\mathbf{x}$ ). De la relation (4.111) on peut écrire

$$d(\delta\mathbf{x}) = d(\delta\theta) \times \mathbf{x} + \delta\theta \times d\mathbf{x} \quad (4.114)$$

où  $d\mathbf{x}$  est l'incrément infinitésimal du champ  $\mathbf{x}$

$$d\mathbf{x} = d\theta \times \mathbf{x} \quad (4.115)$$

Le calcul de la variation de  $\delta\theta$  génère une expression non symétrique en la variation  $\delta\theta$  et l'incrément infinitésimale  $d\theta$ . Cependant, il est montré par Simo [Sim92] que la définition correcte de l'*opérateur hessien*, qui est la dérivée covariante de la forme faible des équations d'équilibre, a seulement besoin de la partie symétrique (par rapport aux variations) de la seconde variation. Donc sans perdre la généralité, on peut écrire

$$\begin{aligned} d(\delta\mathbf{x}) &= \frac{1}{2}[\delta\theta \times d\mathbf{x} + d\theta \times \delta\mathbf{x}] \\ &= \frac{1}{2}[\delta\theta \times (d\theta \times \mathbf{x}) + d\theta \times (\delta\theta \times \mathbf{x})] \\ &= -(\delta\theta \cdot d\theta) \mathbf{x} + \frac{1}{2}[(\delta\theta \cdot \mathbf{x}) d\theta + (d\theta \cdot \mathbf{x}) \delta\theta] \end{aligned} \quad (4.116)$$

De la même manière, la seconde variation du tenseur de rotation peut s'écrire comme

$$d(\delta\mathbf{R}) = \frac{1}{2}[\delta\hat{\theta} \cdot d\hat{\theta} \cdot \mathbf{R} + d\hat{\theta} \cdot \delta\hat{\theta} \cdot \mathbf{R}] \quad (4.117)$$

### Remarques

1. Si on utilise le tenseur variation matérielle  $\delta\hat{\Theta}$  et le vecteur variation matérielle  $\delta\Theta$  (analogue à la vitesse matérielle  $\Omega$  en dynamique) à la place de leurs correspondants spatiaux, les variations du tenseur rotation  $\mathbf{R}$  et du vecteur position  $\mathbf{x}$  s'écrivent dans ce cas

$$\delta\mathbf{R} = \mathbf{R} \cdot \delta\hat{\Theta} \quad (4.118)$$

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{x} &= \mathbf{R} \cdot \delta \hat{\Theta} \cdot \mathbf{X} \\ &= \mathbf{R} \cdot (\delta \Theta \times \mathbf{X})\end{aligned}\quad (4.119)$$

et

$$d(\delta \mathbf{R}) = \frac{1}{2} [\mathbf{R} \cdot \delta \hat{\Theta} \cdot d\hat{\Theta} + \mathbf{R} \cdot d\hat{\Theta} \cdot \delta \hat{\Theta}] \quad (4.120)$$

$$\begin{aligned}d(\delta \mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \mathbf{R} \cdot [\delta \Theta \times (d\Theta \times \mathbf{X}) + d\Theta \times (\delta \Theta \times \mathbf{X})] \\ &= -\mathbf{R} \cdot (\delta \Theta \cdot d\Theta) \mathbf{X} + \frac{1}{2} \mathbf{R} \cdot [(\delta \Theta \cdot \mathbf{X}) d\Theta + (d\Theta \cdot \mathbf{X}) \delta \Theta] \quad (4.121)\end{aligned}$$

2. Dans certains cas de linéarisation nous avons à évaluer la dérivée  $\mathbf{H}_{,S}$  de l'opérateur tangentiel par rapport à une variable donnée  $S$  (spatiale ou temporelle). Il est montré que cette dérivée est donnée par [ISB<sup>+</sup>96, Dam96]:

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_{,S} &= \frac{\phi_{,S}}{\phi} \left( \cos \phi - \frac{\sin \phi}{\phi} \right) \mathbf{I} + \frac{1}{\phi} \left( 1 - \frac{\sin \phi}{\phi} \right) (\phi_{,S} \otimes \mathbf{e} + \mathbf{e} \otimes \phi_{,S}) + \\ &\quad \frac{\phi_{,S}}{\phi} \left( \frac{3 \sin \phi}{\phi} - \cos \phi - 2 \right) \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \left( \frac{1 - \cos \phi}{\phi^2} \right) \tilde{\phi}_{,S} - \\ &\quad \frac{\phi_{,S}}{\phi} \left( \frac{2(1 - \cos \phi)}{\phi^2} - \frac{\sin \phi}{\phi} \right) \tilde{\phi}\end{aligned}$$

où  $\phi = \|\phi\|$  et  $\mathbf{e} = \phi/\phi$ . Notons par ailleurs que  $\lim_{\phi \rightarrow 0} \mathbf{H}_{,S} = \mathbf{0}$ .

3. Dans le cas particulier où le vecteur de référence  $\mathbf{X}$  et son transformé  $\mathbf{x}$  sont situés dans le plan<sup>2</sup>  $(Z_1, Z_2)$ , la transformation orthogonale  $\mathbf{R}$  permettant de les associer est définie par:

$$\mathbf{R} \equiv \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

---

<sup>2</sup> $(Z_1, Z_2, Z_3)$  étant le système cartésien global idéalisé par la base euclidienne  $[\mathbf{i}^1, \mathbf{i}^2, \mathbf{i}^3]$ . Dans ce cas  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{x}$  et  $\phi$  sont définis par:

$$\mathbf{X} \equiv [X_1 \ X_2 \ 0]^T, \quad \mathbf{x} \equiv [x_1 \ x_2 \ 0]^T \quad \text{et} \quad \phi \equiv [0 \ 0 \ \phi]^T.$$

de sorte que:

$$\delta \mathbf{R} \equiv \delta o \begin{bmatrix} -\sin o & -\cos o & 0 \\ \cos o & -\sin o & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$d\delta \mathbf{R} \equiv \delta o \, do \begin{bmatrix} -\cos o & \sin o & 0 \\ -\sin o & -\cos o & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

où  $o$  est la rotation autour de l'axe  $Z_3$ . Ces variations s'expriment aussi sous la forme:

$$\delta \mathbf{R} = \tilde{\phi} \cdot \mathbf{R}, \quad d(\delta \mathbf{R}) = \frac{1}{2} [\tilde{\phi} \cdot d\tilde{\phi} \cdot \mathbf{R} + d\tilde{\phi} \cdot \tilde{\phi} \cdot \mathbf{R}] \quad (4.122)$$

#### 4.11 Conclusion du chapitre

Cette revue des grandes rotations et de la cinématique des corps rigides est loin d'être complète. Elle a été volontairement limitée aux choix de paramétrisation et aux concepts de base nécessaires pour introduire les chapitres subséquents.

Par souci de clarté, un point de vue purement algébrique a été adopté au lieu d'un point de vue plus général et plus abstrait où les rotations sont considérées comme étant des objets non linéaires appartenant au groupe orthogonal de *Lie*, comme présenté par Simo et al. [Sim85, SVQ86, SF89] et d'autres auteurs [NOC91, AP93, IF95]. L'application des ces notions dans le contexte des milieux continus sera limitée à l'analyse statique des corps flexibles orientés de types poutre et coque.

## Chapitre 5

# Discrétisation et algorithme de résolution des équations non linéaires d'équilibre

### 5.1 Introduction

Jusqu'à présent, nous avons considéré le corps solide comme un milieu continu caractérisé par un ensemble de variables cinématiques et mécaniques. Comme on peut le constater, les équations obtenues sont très compliquées et la recherche exacte des variables inconnues est très difficile à réaliser. À la place, on essaie de trouver une solution numérique représentative du champ inconnu moyennant une technique d'approximation permettant de remplacer le système continu par un système discrétisé équivalent.

Dans le présent travail, nous recourons à la méthode des éléments finis que nous considérons bien connue [ZT91, DT81, Bat82, BD90b]. Nous admettons que le champ inconnu est celui des déplacements (translations et rotations) et les éléments finis correspondants sont les modèles déplacements ou cinématiques, de type isoparamétrique. Nous consacrons une partie de ce chapitre à la discrétisation spatiale des variables inconnues (au sens général défini plus haut) et de leur variation, et à l'influence de cette hypothèse sur l'équation du travail virtuel. L'autre partie est dédiée à la résolution proprement dite du système fondamental issu des équations aux dérivés partielles, aux

stratégies adoptées pour piloter la résolution ainsi qu'aux critères et paramètres de contrôle de la convergence.

## 5.2 Discrétisation spatiale par éléments finis

Nous avons vu au chapitre 2 que l'équilibre global du solide dans la configuration actuelle  $C_t$  peut être exprimé par le principe des travaux virtuels sous la forme standard:

$$W = W_{int} - W_{ext} = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{D} dV - \int_S \mathbf{f}_S \cdot \delta \mathbf{v} dS - \int_V \mathbf{f}_V \cdot \delta \mathbf{v} dV = 0 \quad (5.1)$$

où  $W_{int}$  et  $W_{ext}$  sont respectivement le *travail virtuel interne* et *externe*. En suivant la discussion du chapitre (2), le travail virtuel interne est remplacé par l'intégrale sur le volume du référence  $V_0$  du travail virtuel  $\boldsymbol{\tau}_c : \delta \boldsymbol{\varepsilon}_c$  défini sur la configuration  $C_0$  en fonction d'une mesure de déformations choisie  $\boldsymbol{\varepsilon}_c$  et son conjuguée, la mesure de contraintes  $\boldsymbol{\tau}_c$ :

$$W_{int} = \int_{V_0} \boldsymbol{\tau}_c : \delta \boldsymbol{\varepsilon}_c dV_0 \quad (5.2)$$

Si nous introduisons le système de coordonnées paramétriques  $(S^1, S^2, S^3)$  et les vecteurs de base  $G_\alpha = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial S^\alpha}$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ), associés au corps solide dans sa configuration de référence, le travail virtuel interne s'exprime aussi sous la forme:

$$W_{int} = \int_{V_0} \tau^{\alpha\beta} \delta \varepsilon_{\alpha\beta} dV_0$$

avec

$$\boldsymbol{\tau}_c = \tau^{\alpha\beta} \mathbf{G}_\alpha \otimes \mathbf{G}_\beta, \quad \delta \boldsymbol{\varepsilon}_c = \delta \varepsilon_{\alpha\beta} \mathbf{G}^\alpha \otimes \mathbf{G}^\beta$$

Pour faciliter les manipulations matricielles lors de la discrétisation par éléments finis, nous définissons les vecteurs conjugués:

$$\boldsymbol{\tau} = [\tau^{11} \ \tau^{22} \ \tau^{33} \ \tau^{12} \ \tau^{13} \ \tau^{23}]$$

et

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = [\delta \varepsilon_{11} \ \delta \varepsilon_{22} \ \delta \varepsilon_{33} \ 2\delta \varepsilon_{12} \ 2\delta \varepsilon_{13} \ 2\delta \varepsilon_{23}]$$

tels que

$$\boldsymbol{\tau}_c : \delta \boldsymbol{\varepsilon}_c = \boldsymbol{\tau} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon}$$

Il vient alors

$$W_{int} = \int_{V_0} \boldsymbol{\tau} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV_0$$

Ainsi, l'expression (5.1) du travail virtuel se réécrit:

$$W = W_{int} - W_{ext} = \int_{V_0} \boldsymbol{\tau} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV_0 - \int_S \mathbf{f}_S \cdot \delta \mathbf{v} dS - \int_V \mathbf{f}_V \cdot \delta \mathbf{v} dV = 0 \quad (5.3)$$

Cette forme intégrale fait intervenir implicitement la position géométrique actuelle  $\mathbf{x}$  de la particule matérielle, étant donné que le champ de contraintes est fonction de la position via la relation de comportement

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}))$$

et qu'en général les vecteurs forces peuvent dépendre de l'état de déformation du corps solide (*charges suivieuses* [Hib79, Leb85])

$$\mathbf{f}_S = \mathbf{f}_S(\mathbf{x}), \quad \mathbf{f}_V = \mathbf{f}_V(\mathbf{x})$$

Cependant, nous pouvons toujours décrire la position  $\mathbf{x}$  de la particule matérielle en fonction de sa position initiale  $\mathbf{X}$  occupée dans  $C_0$  et du champ de déplacements  $\mathbf{u}$  (au sens général: translations, rotations) entre  $C_0$  et  $C_t$ . La recherche de l'équilibre du corps solide consiste ainsi à trouver la *fonction solution*  $\mathbf{u}$  qui annule la forme variationnelle en déplacements (5.3) pour tout  $\delta \mathbf{v}$  cinématiquement admissible. À ce stade la *méthode des éléments finis* intervient pour construire une solution approchée de la fonction solution  $\mathbf{u}$  et obtenir des valeurs numériques représentatives des contraintes et des déformations.

La forme variationnelle (5.3), définie sur le milieu continu, est remplacée par une forme *discrétisée* permettant de conserver l'équilibre dans un sens moyen sur un ensemble de divisions  $e$  du corps solide, dites *éléments finis* de sorte qu'à tout instant  $t$ :

$$V = \sum_{e=1}^{nel} V^e \quad (5.4)$$

et

$$W = \sum_{e=1}^{nel} (W_{int}^e - W_{ext}^e) = 0 \quad (5.5)$$

avec

$$W_{int}^e = \int_{V_0^e} \boldsymbol{\tau} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV_0^e, \quad W_{ext}^e = \int_{S^e} \mathbf{f}_S \cdot \delta \mathbf{v} dS^e + \int_{V^e} \mathbf{f}_V \cdot \delta \mathbf{v} dV^e$$

Nous choisissons dans ce travail de développer des éléments finis cinématiquement admissibles, de type *isoparamétrique*. Ainsi, en vue de calculer les *formes intégrales élémentaires*  $W_{int}^e$  et  $W_{ext}^e$ , nous utilisons les mêmes *fonctions d'interpolation* pour représenter  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{u}$  et  $\delta \mathbf{v}$  sur chaque élément  $e$

$$\mathbf{X} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{X}^e, \quad \mathbf{u} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{u}^e \quad \text{et} \quad \delta \mathbf{v} = \mathbf{N} \cdot \delta \mathbf{v}^e \quad (5.6)$$

$\mathbf{N}$  est la matrice des fonctions d'interpolation, exprimées à l'aide des variables paramétriques  $S^\alpha$  ou à l'aide des coordonnées normalisées  $\xi^\alpha$  (de l'élément de référence [BD90b]),  $\mathbf{X}^e$ ,  $\mathbf{u}^e$  et  $\delta\mathbf{v}^e$  sont constitués respectivement de l'ensemble des valeurs *nodales* (au niveau de l'élément) des vecteurs  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{u}$  et  $\delta\mathbf{v}$ . La déformation  $\delta\epsilon$  associée au champ de vitesses virtuelles  $\delta\mathbf{v}$  s'exprime ainsi sous la forme linéaire:

$$\delta\epsilon = \mathbf{B} \cdot \delta\mathbf{v}^e \quad (5.7)$$

où  $\mathbf{B}$  est une matrice qui dépend en général de la position courante  $\mathbf{x}$  de la particule matérielle considérée. Cette matrice est obtenue à partir des fonctions d'interpolation, après avoir choisi la mesure de déformations. L'introduction de ces relations dans l'équation (5.5) donne l'expression discrétisée de  $W$ :

$$W = \sum_{e=1}^{nel} (W_{int}^e - W_{ext}^e) = \bigcup_{e=1}^{nel} \delta\mathbf{v}^e \cdot (\mathbf{f}_{int}^e - \mathbf{f}_{ext}^e) = \bigcup_{e=1}^{nel} -\delta\mathbf{v}^e \cdot \mathbf{r}^e = 0 \quad (5.8)$$

dans laquelle  $\bigcup_{e=1}^{nel}$  dénote le symbole d'assemblage par élément finis et  $\mathbf{r}^e$  le *résidu élémentaire* d'équilibre. Ce vecteur est constitué des *forces internes*  $\mathbf{f}_{int}^e$  provenant de  $\boldsymbol{\tau} \cdot \delta\epsilon$  et des *forces externes*  $\mathbf{f}_{ext}^e$  provenant de  $\mathbf{f}_S$  et  $\mathbf{f}_V$ :

$$\mathbf{f}_{int}^e = \int_{V_0^e} \mathbf{B}^T \cdot \boldsymbol{\tau} dV_0^e, \quad \mathbf{f}_{ext}^e = \int_{S^e} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{f}_S dS^e + \int_{V^e} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{f}_V dV^e$$

Si nous introduisons les vecteurs globaux  $\mathbf{U}$  et  $\delta\mathbf{V}$  désignant respectivement l'ensemble de toutes les variables élémentaires  $\mathbf{u}^e$  et  $\delta\mathbf{v}^e$ , la forme discrétisée (5.8) s'écrit après assemblage

$$W = -\delta\mathbf{V} \cdot \mathbf{R}(\mathbf{U}) = 0 \quad (5.9)$$

avec

$$\mathbf{R} = \bigcup_{e=1}^{nel} \mathbf{r}^e = \bigcup_{e=1}^{nel} \mathbf{f}_{ext}^e - \bigcup_{e=1}^{nel} \mathbf{f}_{int}^e = \mathbf{F}_{ext} - \mathbf{F}_{int}$$

appelé *résidu global* d'équilibre. Sachant que la relation (5.9) doit être vérifiée pour tout vecteur  $\delta\mathbf{V}$  cinématiquement admissible, nous déduisons finalement:

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}) = \mathbf{F}_{ext}(\mathbf{U}) - \mathbf{F}_{int}(\mathbf{U}) = 0 \quad (5.10)$$

Cette relation constitue ce qu'on appelle le *système fondamental* de la méthode des éléments finis en déplacements; elle exprime l'équilibre à l'instant  $t$  entre les forces appliquées au solide et les contraintes sous forme discrétisée spatialement par éléments finis. Étant fortement non linéaire tant sur le plan géométrique que matériel, la résolution du système (5.10) nécessite un algorithme de résolution adapté, que nous étudierons dans ce qui suit.



## 5.3 Résolution des équations fondamentales

### 5.3.1 Généralités

La loi de comportement élastoplastique que nous envisageons utiliser est de type incrémental: elle dépend du chemin parcouru. La résolution du système non linéaire (5.10) exclut dans ce cas l'utilisation d'une *approche directe*, qui consiste à chercher la réponse de la structure à un niveau donné de sollicitation externe par des méthodes mathématiques itératives [SBF68, Ode72]. La préférence est donnée à l'*approche incrémentale* [Ode72], qui consiste à appliquer le niveau de sollicitation par incréments successifs à l'aide d'un *paramètre de charge* normalisé  $\lambda$ , en recherchant à chaque étape la réponse de la structure. Il en résulte une série de courbes retraçant l'évolution des déplacements en fonction du chargement (Figure 5.1), autorisant ainsi l'étude de la stabilité de la structure à tous les niveaux de charges.

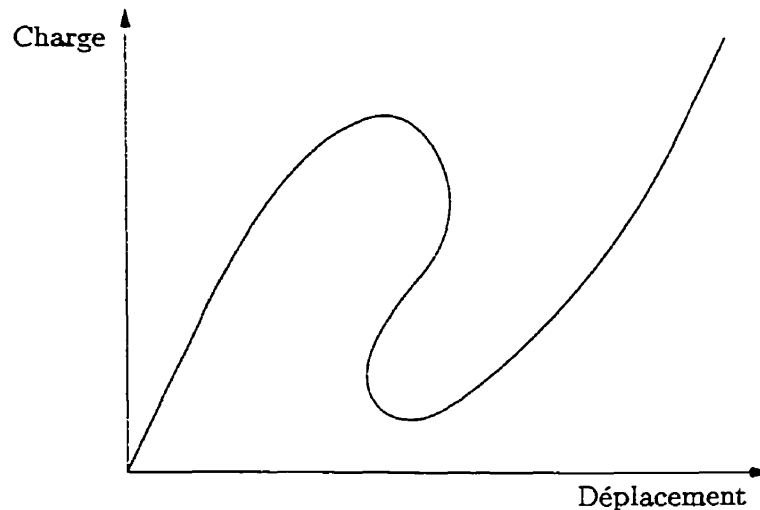


Figure 5.1: Courbe caractéristique charge-déplacement

Cependant, plusieurs types de problèmes sont difficilement résolubles si le processus incrémental est contrôlé par l'accroissement du paramètre de charge. C'est le cas des problèmes d'instabilité, où la réponse charge-déplacement montre un type de comportement semblable à celui esquissé sur la figure 5.1, pour lequel la charge et/ou le déplacement peut diminuer au cours du temps. Dans ce cas, d'autres alternatives sont utilisées pour pallier à cette difficulté, telle l'incrémentation du déplacement ou de la longueur d'arc. Nous commençons tout de suite par introduire brièvement la méthode incrémentale pour ensuite présenter dans les sous-sections qui suivent, quelques expressions relatives à la méthode que nous avons privilégiée pour résoudre les équations

non linéaires et les stratégies de la résolution non linéaire.

L'idée de base de la technique incrémentale est en fait de *linéariser* les équations non linéaires. Cela peut être obtenu soit par l'emploi d'un principe incrémental (qui correspond au calcul de la variation de  $W$ ), soit par un développement en série de *Taylor* des équations non linéaires, au voisinage d'une solution connue, limitée aux termes linéaires. On peut montrer que la méthode de *Newton-Raphson*, utilisée pour résoudre directement les équations non linéaires, fournit les équations linéaires de la méthode incrémentale.

### 5.3.2 Expressions relatives à la résolution par la méthode de Newton-Raphson

L'utilisation de la méthode incrémentale nous amène à considérer comme connue la configuration  $C_t$  du solide à l'instant  $t$  et à rechercher la configuration  $C_{t+\Delta t}$  en équilibre sous le chargement extérieur  $\mathbf{F}_{ext}(t + \Delta t)$  appliqué à l'instant  $t + \Delta t$ . L'algorithme itératif de *Newton-Raphson* consiste à construire une suite d'approximations  $C_{t+\Delta t}^i$  de la configuration d'équilibre recherchée  $C_{t+\Delta t}$ , soit à trouver une solution "améliorée"  $\mathbf{u}^{i+1}$  telle que:

$$W(\mathbf{u}^{i+1}) = W(\mathbf{u}^i + d\mathbf{u}^i) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{u}^{(i=0)} = \mathbf{u}(t)$$

La linéarisation de l'expression de  $W$  au voisinage de  $\mathbf{u}^i$  permet de déduire l'équation à résoudre à chaque itération, tant que la convergence n'est pas satisfaite:

$$W(\mathbf{u}^i) + dW(\mathbf{u}^i, d\mathbf{u}^i) = 0 \quad (5.11)$$

dans laquelle

$$dW = dW_{int} - dW_{ext} \quad (5.12)$$

avec

$$dW_{int} = \int_{V_0} (d\boldsymbol{\tau} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\tau} \cdot d\delta \boldsymbol{\varepsilon}) dV_0$$

et

$$dW_{ext} = \int_S (d\mathbf{f}_S \cdot \delta \mathbf{v} + \mathbf{f}_S \cdot \delta \mathbf{v} dJ_S \frac{1}{J_S}) dS + \int_V (d\mathbf{f}_V \cdot \delta \mathbf{v} + \mathbf{f}_V \cdot \delta \mathbf{v} dJ_V \frac{1}{J_V}) dV$$

les rapports  $J_V = |dV/dV_0|$  et  $J_S = |dS/dS_0|$  expriment respectivement le changement de volume et d'aire d'un élément différentiel du corps solide, entre la configuration de référence et la configuration courante. Nous supposons que la variation des efforts

extérieurs en fonction du champ de déplacements peut s'exprimer symboliquement sous forme

$$d\mathbf{f}_S + \mathbf{f}_S dJ_S \frac{1}{J_S} = \mathbf{Q}_S \cdot d\mathbf{u}, \quad d\mathbf{f}_V + \mathbf{f}_V dJ_V \frac{1}{J_V} = \mathbf{Q}_V \cdot d\mathbf{u}$$

Par ailleurs, nous supposons que la loi constitutive nous permet d'écrire

$$d\boldsymbol{\tau} = \mathbf{C} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}$$

Remplaçons à présent dans l'équation (5.12)  $dW_{int}$  et  $dW_{ext}$  par la somme des  $dW_{int}^e$  et  $dW_{ext}^e$  correspondant à chaque élément  $e$ , tout en tenant compte de ces dernières relations:

$$\begin{aligned} d\mathbb{W} &= \sum_{e=1}^{nel} (dW_{int}^e - dW_{ext}^e) \\ &= \sum_{e=1}^{nel} \int_{V_0^e} (\delta\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{C} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\tau} \cdot d\delta\boldsymbol{\varepsilon}) dV_0^e - \\ &\quad \sum_{e=1}^{nel} \int_{S^e} \delta\mathbf{v} \cdot \mathbf{Q}_S \cdot d\mathbf{u} dS^e - \sum_{e=1}^{nel} \int_{V^e} \delta\mathbf{v} \cdot \mathbf{Q}_V \cdot d\mathbf{u} dV^e \end{aligned} \quad (5.13)$$

En utilisant sur chaque élément les approximations (5.6, 5.7) de  $\delta\mathbf{v}$  et de  $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$  et des expressions analogues de  $d\mathbf{u}$  et  $d\boldsymbol{\varepsilon}$  en fonction de  $d\mathbf{u}^e$ , nous obtenons l'expression discrétisée suivante de  $d\mathbb{W}$ :

$$d\mathbb{W} = \sum_{e=1}^{nel} (dW_{int}^e - dW_{ext}^e) = \bigcup_{e=1}^{nel} \delta\mathbf{v}^e \cdot \mathbf{k}^e \cdot d\mathbf{u}^e \quad (5.14)$$

où  $\mathbf{k}^e$  est la *matrice de rigidité tangente élémentaire*, composée de trois matrices élémentaires: une *matrice de rigidité matérielle* notée  $\mathbf{k}_m^e$ , une *matrice de rigidité géométrique* notée  $\mathbf{k}_g^e$  et une *matrice de charge suiveuse* notée  $\mathbf{k}_\lambda^e$

$$\mathbf{k}^e = \mathbf{k}_m^e + \mathbf{k}_g^e + \mathbf{k}_\lambda^e$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_m^e &= \int_{V_0^e} \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} dV_0^e \\ \mathbf{k}_g^e &= \int_{V_0^e} \mathbf{B}_g^T \cdot \mathbf{C}_g \cdot \mathbf{B}_g dV_0^e \\ \mathbf{k}_\lambda^e &= - \int_{S^e} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{Q}_S \cdot \mathbf{N} dS^e - \int_{V^e} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{Q}_V \cdot \mathbf{N} dV^e \end{aligned}$$

Dans le cas où les efforts extérieurs ne dépendent pas de la déformée du solide, la matrice  $\mathbf{k}_\lambda^e$  est nulle. Par contre, si les efforts extérieurs dépendent de la déformée (comme dans le cas d'une charge hydrostatique), la contribution de la matrice  $\mathbf{k}_\lambda^e$  dans la matrice de rigidité tangente  $\mathbf{k}^e$  est essentielle. Dans nos travaux, nous admettons qu'il n'y a qu'un type de chargement indépendant de l'état de déformation. Il vient:

$$\mathbf{k}^e = \mathbf{k}_m^e + \mathbf{k}_g^e \quad (5.15)$$

La matrice de rigidité tangente globale  $\mathbf{K}$  se construit par assemblage des matrices de rigidité élémentaires  $\mathbf{k}^e$ :

$$\mathbf{K} = \bigcup_{e=1}^{nel} \mathbf{k}^e$$

tel que, si  $d\mathbf{U}$  est le vecteur global des corrections nodales

$$dW = \bigcup_{e=1}^{nel} \delta \mathbf{v}^e \cdot \mathbf{k}^e \cdot d\mathbf{u}^e = \delta \mathbf{V} \cdot \mathbf{K}(\mathbf{U}) \cdot d\mathbf{U} \quad (5.16)$$

Finalement, la substitution dans l'équation (5.11) de l'expression de  $W$  par (5.10) et de l'expression de  $dW$  par (5.16), nous permet d'obtenir la relation

$$-\delta \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}^i + \delta \mathbf{V} \cdot \mathbf{K}^i \cdot d\mathbf{U}^i = 0$$

où  $\mathbf{R}^i = \mathbf{R}(\mathbf{U}^i)$  et  $\mathbf{K}^i = \mathbf{K}(\mathbf{U}^i)$  sont respectivement le résidu d'équilibre et la matrice tangente globaux évalués à l'itération  $i$ . Cela conduit au système matriciel suivant:

$$\begin{cases} \mathbf{K}^i \cdot d\mathbf{U}^i = \mathbf{R}^i \\ \mathbf{U}^{i+1} = \mathbf{U}^i + d\mathbf{U}^i \end{cases} \quad (5.17)$$

définissant l'algorithme de base de la méthode de *Newton-Raphson standard*. Nous avons privilégié cette méthode par rapport aux méthodes du type *quasi-Newton*, *gradient conjugué préconditionné*, ou autres [Faf87], pour sa grande robustesse maintes fois démontrée et aussi pour la nécessité de connaître la matrice tangente "exacte" pour l'étude des instabilités et le calcul des zones post-critiques.

### 5.3.3 Stratégies de résolution

#### Introduction

Certains types de problèmes non linéaires entraînent parfois des *phénomènes d'instabilité*, où la réponse charge-déplacement montre une rigidité négative et la structure doit, afin

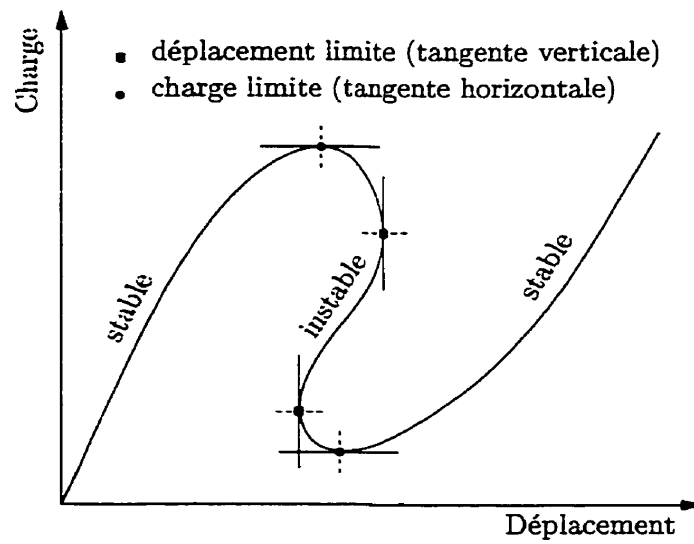
de demeurer en équilibre, libérer de l'énergie et passer subitement d'une configuration à une autre (Figure 5.2). Un bel exemple de ce type de comportement est le flambement des colonnes métalliques, que l'ingénieur a dû comprendre et considérer pour le dimensionnement de ces pièces.

L'emploi simultané de composants structuraux toujours plus élancés (et/ou plus minces) et de matériaux toujours plus résistants, afin de satisfaire les exigences accrues de l'optimisation du poids et des formes, rend les structures d'autant plus sensibles aux phénomènes d'instabilités.

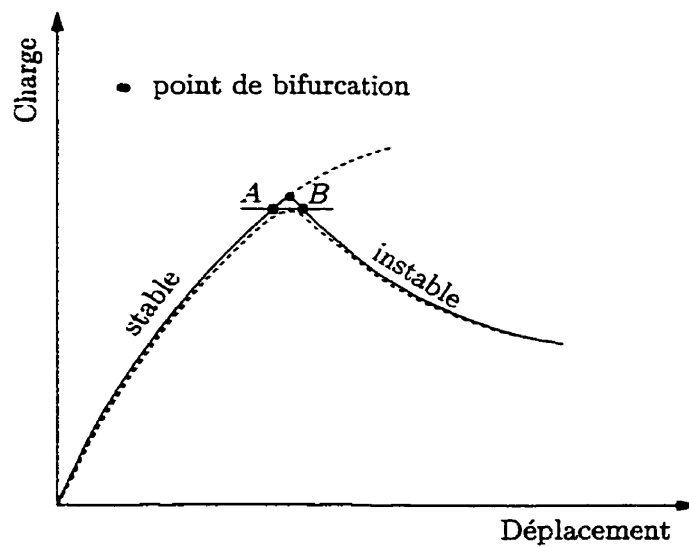
Même si l'ingénieur possède actuellement des techniques d'évaluation du *seuil de stabilité* d'une structure ("charge critique", "charge de ruine", "force portante") [Faf87, Fre78], il reste qu'il ne pourra évaluer l'économie et la sécurité de cette structure que s'il peut en prédire le comportement jusqu'à sa ruine. L'objectif de calculer les zones post-critiques est devenu ces dernières années un aspect essentiel dans l'étude de comportement des structures pour le dimensionnement de diverses composantes [Cri97a, Cri97b, Faf87, Opp82] et ne peut être atteint que par une analyse non linéaire accompagnée de bonnes techniques de résolution.

On peut montrer que le principe incrémental du travail virtuel n'est rien d'autre que l'expression du *critère de stabilité*, et que la matrice tangente globale du principe discrétisé est précisément celle associée à la forme quadratique qui en découle; le seuil de stabilité sera donc atteint lorsque la matrice tangente globale cessera d'être définie positive [Faf87]. Pratiquement parlant lorsque son déterminant  $D$  s'annule. Tant que la structure est stable, le déterminant  $D$  est positif; si  $D$  devient négatif, alors la structure devient instable. Plus généralement, le changement de signe indique la transition d'une forme d'équilibre (stable/instable) à l'autre (instable/stable). Cependant, on classe le phénomène d'instabilité selon le type du *point stationnaire*; si ce point est un point *limite* (*extremum*), on dit qu'il y a présence d'instabilité par point limite ou *cloquage* (Figure 5.2.a). Mais si le point stationnaire est anguleux, de type *bifurcation* (*branchement*), l'instabilité est dite par *bifurcation* (Figure 5.2.b).

Plusieurs approches s'offrent pour le calcul automatique des zones pré et post-cloquages [Faf87, Ako87]. Une d'entre elles est la méthode de *déplacement imposé* [BD79, PS81], qui fournit, dans certains cas simples, la solution, même si la charge décroît au moment où le déplacement augmente. Par contre, si le comportement du système est schématisé par une courbe du même type que celle de la figure 5.2.a, le pilotage en déplacement échoue dès l'approche des points limites en déplacement [Faf87]. Une alternative intéressante qui semble la plus performante est la méthode



a) Instabilité par cloquage



b) Instabilité par bifurcation

Figure 5.2: Type d'instabilité

de *Riks* [Cri80, Cri81, RO83]. Cette méthode, dont nous présentons une variante qui nous a été utile dans ce travail, appartient à la classe des méthodes de type longueur d'arc, où l'on retrouve les techniques de pilotage les plus réussies et les plus générales pour traiter tous les types de problèmes non linéaires. Il n'en demeure pas moins que ces méthodes sont inefficaces dans le cas de bifurcation, due à la discontinuité de la tangente au point anguleux (Figure 5.2.b). Une solution réside dans la transformation du point de bifurcation en point limite, en donnant une "imperfection" à la structure au voisinage  $A$  du point anguleux, par exemple à l'aide de d'une petite force perturbatrice; il est alors possible d'atteindre une configuration en équilibre  $B$  sur la branche instable (Figure 5.2.b). D'autres techniques, dont celle de Walker [Wal69] et de Riks [Rik79], ont été proposées pour solutionner ce type d'instabilité. De plus, une étude comparative assez complète et détaillée sur les algorithmes de résolution d'équations non linéaires et le calcul des zones post-cloquages et post-bifurcations a été faite par Fafard [Faf87].

Enfin, une remarque essentielle s'impose avant de clore cette brève introduction; s'il est clair que la convergence vers l'équilibre peut être mise en défaut au "passage des points stationnaires", il n'en reste pas moins que le calcul exact du résidu d'équilibre est essentiel pour pouvoir passer convenablement ces extrema; de plus, il est évident qu'un point stationnaire ne peut se détecter, et par suite être franchi, que si l'on travaille avec une matrice tangente exacte [Fre78].

### Algorithme de Riks modifié

Sous l'hypothèse d'un chargement conservatif variant selon un seul paramètre  $\lambda$ , le vecteur global des sollicitations externes s'écrit à tout moment:

$$\mathbf{F}_{ext} = \lambda \mathbf{P}$$

où  $\mathbf{P}$  est le vecteur global des forces de *référence* appliquées sur la structure. Ainsi, le système fondamental à résoudre à chaque instant (équation 5.10) se réécrit:

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}, \lambda) = \lambda \mathbf{P} - \mathbf{F}_{int}(\mathbf{U}) = 0 \quad (5.18)$$

La méthode de Riks considère le paramètre de charge comme inconnue supplémentaire du problème et propose, pour contrôler l'évolution de la solution, un autre paramètre de pilotage correspondant à un déplacement  $s$  sur l'arc de la *courbe d'équilibre* (courbe charge-déplacements), de sorte que

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}(s) \quad \text{et} \quad \lambda = \lambda(s)$$





Ce nouvel état est caractérisé par

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}, \lambda) = \mathbf{R}(\mathbf{U}^0 + \Delta \mathbf{U}, \lambda^0 + \Delta \lambda) = \mathbf{0}$$

En développant cette relation en série de Taylor limitée aux termes linéaires et en tenant compte de (5.18) et (5.19), nous obtenons:

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}, \lambda) = -\mathbf{K}^0 \cdot \Delta \mathbf{U} + \Delta \lambda \mathbf{P} = \mathbf{0}$$

où  $\mathbf{K}^0 = \mathbf{K}(\mathbf{U}^0)$  est la matrice tangente évaluée au début du pas. À l'aide de cette relation, nous exprimons une première approximation de  $\Delta \mathbf{U}$  et de  $\Delta \tilde{\mathbf{U}}$  en fonction de  $\Delta \lambda$ :

$$\Delta \mathbf{U}^0 = \Delta \lambda \mathbf{U}_P^0, \quad \Delta \tilde{\mathbf{U}}^0 = \Delta \lambda \tilde{\mathbf{U}}_P^0 \quad (5.21)$$

dans lesquelles

$$\mathbf{U}_P^0 = (\mathbf{K}^0)^{-1} \cdot \mathbf{P} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{U}}_P^0 = \mathbf{U}_P^0 / \bar{U} \quad (5.22)$$

En remplaçant  $\Delta \tilde{\mathbf{U}}^0$  de l'équation (5.21) dans (5.20), nous trouvons une première approximation  $\Delta \lambda$

$$\Delta \lambda^0 = \frac{\pm \Delta s}{(\tilde{\mathbf{U}}_P^0 \cdot \tilde{\mathbf{U}}_P^0 + 1)^{1/2}} \quad (5.23)$$

Le signe de  $\Delta \lambda^0$  (direction de la réponse le long de la tangente) est choisi tel que la projection de  $(\Delta \tilde{\mathbf{U}}^0; \Delta \lambda^0) = \Delta \lambda^0 (\tilde{\mathbf{U}}_P^0; 1)$  sur la solution au pas précédant  $(\Delta \tilde{\mathbf{U}}^{(-1)}; \Delta \lambda^{(-1)})$  soit positive:

$$\Delta \lambda^0 (\tilde{\mathbf{U}}_P^0; 1) : (\Delta \tilde{\mathbf{U}}^{(-1)}; \Delta \lambda^{(-1)}) = \Delta \lambda^0 (\tilde{\mathbf{U}}_P^0 \cdot \Delta \tilde{\mathbf{U}}^{(-1)} + \Delta \lambda^{(-1)}) > 0 \quad (5.24)$$

Connaissant  $\Delta \lambda^0$ , nous pouvons trouver une première approximation de  $\Delta \mathbf{U}$  avec (5.21). La valeur de la première approximation de  $(\mathbf{U}; \lambda)$  est donnée par:

$$(\mathbf{U}^1; \lambda^1) = (\mathbf{U}^0 + \Delta \mathbf{U}^0; \lambda^0 + \Delta \lambda^0)$$

correspondant au point  $A^1$  sur la figure (5.3). Généralement, la solution  $(\mathbf{U}^1; \lambda^1)$  ne satisfait pas l'équation fondamentale (5.18); autrement dit:

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}^1, \lambda^1) \neq \mathbf{0}$$

À ce stade, nous faisons intervenir la méthode itérative de Newton-Raphson pour rechercher une correction  $(d\mathbf{U}; d\lambda)$  à cette solution dans le plan passant par  $A^1$  et orthogonal à la tangente  $(\tilde{\mathbf{U}}_P^0; 1)$  (Figure 5.3). L'algorithme nécessaire à cette fin se résume à la suite d'opérations suivantes:

- Initialisation:  $\Delta\lambda^i = \Delta\lambda^0$ ,  $\Delta\mathbf{U}^i = \Delta\lambda^0 \mathbf{U}_p^0$
- Itérations d'équilibre: pour chaque itération  $i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ )

1. Évaluer  $(\mathbf{U}^i; \lambda^i)$ :

$$(\mathbf{U}^i; \lambda^i) = (\mathbf{U}^0 + \Delta\mathbf{U}^i; \lambda^0 + \Delta\lambda^i)$$

2. Construire  $\mathbf{F}_{int}^i$ ,  $\mathbf{K}^i$ :

$$\mathbf{F}_{int}^i = \bigcup_{e=1}^{nel} \mathbf{f}_{int}^e \Big|_{\mathbf{U}^i}, \quad \mathbf{K}^i = \bigcup_{e=1}^{nel} (\mathbf{k}_m^e + \mathbf{k}_g^e) \Big|_{\mathbf{U}^i}$$

3. Vérifier l'équilibre:

$$\mathbf{R}^i = \mathbf{R}(\mathbf{U}^i, \lambda^i) = \lambda^i \mathbf{P} - \mathbf{F}_{int}^i$$

Si toutes les composantes de  $\mathbf{R}^i$  sont suffisamment proches de 0, l'équilibre entre les forces nodales extérieures ( $\lambda^i \mathbf{P}$ ) et intérieures ( $\mathbf{F}_{int}^i$ ) est atteint. Le champ de déplacements  $\mathbf{U}^i$  caractérisant la configuration du solide en cet instant est considéré "valable". Cependant, avant d'accepter la solution  $(\mathbf{U}^i; \lambda^i)$ , il faut aussi vérifier si la correction  $d\mathbf{U}^i$  du champ de déplacements est suffisamment petite relativement à l'incrément total  $\Delta\mathbf{U}^i$ . Si c'est le cas, le processus itératif a convergé et la solution  $(\mathbf{U}^i; \lambda^i)$ , est acceptée. Si ce n'est pas le cas, ou si  $\mathbf{R}^i \neq \mathbf{0}$ , le processus est poursuivi.

4. Résoudre:

$$\mathbf{K}^i \cdot \mathbf{U}_p^i = \mathbf{P}, \quad \mathbf{K}^i \cdot d\mathbf{U}_R^i = \mathbf{R}^i$$

et trouver les vecteurs déplacements  $\mathbf{U}_p^i$  et  $d\mathbf{U}_R^i$

5. Trouver la correction  $(d\mathbf{U}^i; d\lambda^i)$  à ajouter à l'incrément  $(\Delta\mathbf{U}^i; \Delta\lambda^i)$ :

$$(d\mathbf{U}^i; d\lambda^i) = (d\mathbf{U}_R^i + d\lambda^i \mathbf{U}_p^i; d\lambda^i) \quad (5.25)$$

Cette correction exige que le vecteur joignant les points  $A^i$  et  $A^{i+1}$ , soit orthogonal à la tangente  $(\tilde{\mathbf{U}}_p^0; 1)$  (Figure 5.3). Ce qui se traduit par l'équation:

$$(\mathbf{0}; -\rho^i) + (d\tilde{\mathbf{U}}_R^i; \rho^i) + d\lambda^i (\tilde{\mathbf{U}}_p^i; 1) : (\tilde{\mathbf{U}}_p^0; 1) = 0$$

dans laquelle  $\rho^i = \mathbf{R}^i \cdot \mathbf{P} / \bar{P}^2$  désigne la projection de  $\tilde{\mathbf{R}}^i$  sur  $\tilde{\mathbf{P}}$ . À l'aide de cette équation, nous trouvons la correction  $d\lambda^i$ :

$$d\lambda^i = -\frac{d\mathbf{U}_R^i \cdot \tilde{\mathbf{U}}_P^0}{\tilde{\mathbf{U}}_P^i \cdot \tilde{\mathbf{U}}_P^0 + 1} \quad (5.26)$$

et par suite, la correction  $d\mathbf{U}^i$  est obtenue à l'aide de (5.25):

$$d\mathbf{U}^i = d\mathbf{U}_R^i + d\lambda^i \mathbf{U}_P^i \quad (5.27)$$

6. Actualiser:

$$\Delta \mathbf{U}^{i+1} = \Delta \mathbf{U}^i + d\mathbf{U}^i$$

$$\Delta \lambda^{i+1} = \Delta \lambda^i + d\lambda^i$$

$$i = i + 1$$

et retourner à (1) pour la prochaine itération.

### Remarques

- Dans un problème élastoplastique, l'utilisation de l'algorithme de Riks tel que défini précédemment, fournit, si l'écoulement plastique a lieu, une direction de déformation "non représentative" de la tangente à la courbe d'équilibre. Pour remédier à cela, la mise à jour de  $\mathbf{U}_P^0$  est effectuée après chaque itération d'équilibre. Le calcul de  $d\lambda^i$  grâce à l'équation (5.26) est alors remplacé par:

$$d\lambda^i = -\frac{d\mathbf{U}_R^i \cdot \tilde{\mathbf{U}}_P^{i-1}}{\tilde{\mathbf{U}}_P^i \cdot \tilde{\mathbf{U}}_P^{i-1} + 1} \quad (5.28)$$

faisant en sorte que la recherche de l'équilibre soit dans un plan orthogonal à la dernière tangente obtenue ( $\tilde{\mathbf{U}}_P^{i-1}; 1$ ), au lieu de la tangente correspondant au début du pas ( $\tilde{\mathbf{U}}_P^0; 1$ ).

- La valeur de l'incrément  $\Delta s$  de la longueur d'arc est initialement suggérée par l'utilisateur et ajustée automatiquement dans les pas subséquents de façon à tenir compte des difficultés de convergence dues aux courbures locales de la courbe charge-déplacements. Dans cet ordre d'idées, nous discutons dans ce qui suit des critères de convergence et de l'algorithme utilisé pour automatiser la résolution.

### 5.3.4 Critères et contrôle de la convergence

#### Critères de convergence

Dans les calculs itératifs, on teste ordinairement la convergence à l'aide d'un rapport de deux scalaires ou de deux normes si l'on compare des vecteurs; le dénominateur rend le rapport non dimensionnel, tandis que le numérateur décroît progressivement s'il y a convergence. Ainsi, l'équilibre du solide est jugé satisfaisant quand la norme du résidu d'équilibre est suffisamment petite comparativement à la norme du vecteur forces externes

$$\frac{\|\mathbf{R}\|}{\|\mathbf{F}_{ext}\|} \leq \epsilon_r \quad \text{ou} \quad \|\mathbf{R}\| \leq \epsilon_r \|\mathbf{F}_{ext}\|$$

et pour garantir que la solution obtenue constitue une bonne mesure du champ de déplacements  $\mathbf{U}$ , il faut s'assurer aussi que la norme de la dernière correction  $d\mathbf{U}$  est suffisamment petite relativement à l'incrément total  $\Delta\mathbf{U}$

$$\frac{\|d\mathbf{U}\|}{\|\Delta\mathbf{U}\|} \leq \epsilon_u \quad \text{ou} \quad \|d\mathbf{U}\| \leq \epsilon_u \|\Delta\mathbf{U}\|$$

Dans ces expressions, dites respectivement *critère de forces* et *critère de déplacements*,  $\epsilon_r$ ,  $\epsilon_u$  sont les *précisions* demandées par l'utilisateur et  $\|\mathbf{v}\|$  est la norme du vecteur  $\mathbf{v}$ , choisie indifféremment parmi les trois normes classiques, à savoir

$$\|\mathbf{v}\|_1 = \sum_n |v_n| \quad \text{la norme absolue}$$

$$\|\mathbf{v}\|_2 = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})^{1/2} \quad \text{la norme euclidienne}$$

$$\|\mathbf{v}\|_\infty = \max_n |v_n| \quad \text{la norme du maximum}$$

Dans nos travaux, nous utilisons la norme du maximum et nous retenons les deux critères pour décider de la "convergence" de la solution pour un incrément donné. Cependant, pour éviter de comparer des grandeurs présentant des ordres de grandeur différents, nous réunissons toutes les variables de même "type" dans un seul groupe, dit *champ*, auquel nous associons un *flux conjugué* [HKS95]. Par exemple, dans une analyse structurale (couplée éventuellement à une autre analyse tel un transfert de chaleur), nous distinguons le champ de translations du champ de rotations (du champ de températures, etc.) dont les flux conjugués respectifs sont les forces et les moments (flux de chaleurs, etc.). Les tests de convergence sont alors vérifiés pour tous les champs actifs dans le problème et la solution n'est acceptée que si chaque champ actif  $\alpha$ , satisfait les deux critères de convergence précédents, qui se réécrivent:

- Critère de forces

$$R_{max}^{\alpha} \leq \epsilon_r^{\alpha} F_{max}^{\alpha} \quad (5.29)$$

- Critère de déplacements

$$dU_{max}^{\alpha} \leq \epsilon_u^{\alpha} \Delta U_{max}^{\alpha} \quad (5.30)$$

où nous avons introduit, pour chaque champ  $\alpha$ , les mesures suivantes pour décider si un incrément a "convergé" ou non:

$R_{max}^{\alpha}$  La plus grande composante du résidu d'équilibre associé au champ  $\alpha$ .

$F_{max}^{\alpha}$  La plus grande composante du flux courant associé au champ  $\alpha$ .

$\epsilon_r^{\alpha}$  La tolérance sur le rapport  $R_{max}^{\alpha}$  à son correspondant  $F_{max}^{\alpha}$ .

$dU_{max}^{\alpha}$  La plus grande correction nodale de type  $\alpha$ , fournie par l'itération courante de Newton-Raphson.

$\Delta U_{max}^{\alpha}$  Le plus grand accroissement nodal de type  $\alpha$  dans l'incrément

$\epsilon_u^{\alpha}$  La tolérance sur le rapport de  $dU_{max}^{\alpha}$  à son correspondant  $\Delta U_{max}^{\alpha}$ .

Une erreur sur le résidu inférieure à  $\frac{1}{2}\%$  permet, dans la majorité des calculs non linéaires en ingénierie, d'obtenir de bons résultats. Une précision  $\epsilon_r^{\alpha}$  de 0.005 est alors admise par défaut dans le critère de forces (5.29); néanmoins l'utilisateur peut toujours lui assigner une autre valeur. Si l'équilibre est réalisé au sens de l'inégalité (5.29), la solution est acceptée si le critère (5.30) est satisfait également ou si la correction à la prochaine itération, qu'on estime égale à [HKS95]:

$$dU_{est}^{\alpha} = \frac{(R_{max}^{\alpha})^i}{\min\{(R_{max}^{\alpha})^{i-1}, (R_{max}^{\alpha})^{i-2}\}} dU_{max}^{\alpha}$$

vérifie le même critère:

$$dU_{est}^{\alpha} \leq \epsilon_u^{\alpha} \Delta U_{max}^{\alpha}$$

Les indices  $i$ ,  $i-1$ ,  $i-2$  réfèrent au numéro d'itération et  $(R_{max}^{\alpha})^0$  réfère à la plus grande composante du résidu associé au champ  $\alpha$ , suite à la première itération de l'incrément. À moins qu'elle soit choisie par l'utilisateur, nous avons attribué à la précision  $\epsilon_u^{\alpha}$  une valeur par défaut égale à  $10^{-2}$ .

### Ajustement automatique du paramètre imposé

Les valeurs successives du paramètre imposé (incrément de charge, de déplacement ou de la longueur d'arc) peuvent être définies a priori par l'utilisateur ou être modifiées ou ajustées d'un pas à un autre automatiquement suivant le degré de non-linéarité du problème [BHKS78] et les caractéristiques de convergence du pas précédent [Cri81, RO83, Faf87]. Dans le programme ABAQUS, *Hibbitt et Karlsson* [HKS95] utilisent, pour contrôler l'incrémentation, un schéma automatique fondé sur une vaste expérience avec divers problèmes. Pour résoudre un problème non linéaire, l'analyste a la possibilité dans ABAQUS de spécifier l'incrémentation à suivre ou de laisser le code choisir son propre schéma d'incrémentation, en se basant sur les tolérances spécifiées par l'utilisateur. Dans ce cas, ABAQUS se sert principalement des valeurs maximales des résidus obtenus au cours des itérations. En comparant les valeurs successives de ces grandeurs, ABAQUS détermine si la convergence devrait se produire après un nombre d'itérations n'excédant pas le maximum alloué. Dans le cas où la convergence de la solution est jugée probable après un nombre d'itérations raisonnable, le processus itératif est poursuivi. Si ABAQUS juge que la convergence a peu de chances de se produire, il réduit automatiquement la taille du paramètre imposé et tente à nouveau de trouver la solution convergée. Si elle semble échouer encore, il reprend les itérations en réduisant une fois de plus la taille de l'incrément. Ce processus est répété tant que la solution n'est pas trouvée, sous réserve que la taille de l'incrément reste supérieure à la taille minimale précisée par l'utilisateur et le nombre de tentatives inférieur à une valeur prédéfinie dans le code. Enfin, si les incréments successifs sont résolus en un nombre minimal d'itérations, ABAQUS peut éventuellement augmenter la taille de l'incrément, sans toutefois dépasser la taille maximale imposée par l'utilisateur.

Nous nous rapportons dans ce travail à cette approche fiable et efficace. Les *paramètres de contrôle* que nous introduirons au fur et à mesure sont destinés à contrôler le schéma d'incrémentation. Les valeurs qui leur sont assignées par défaut sont choisies dans l'intention d'optimiser la précision et l'efficacité de la solution d'un grand éventail de problèmes non linéaires. Si ces valeurs ne semblent pas contenter l'utilisateur, il peut toujours opter pour les siennes.

On se donne un incrément (de charge, de déplacement ou de la longueur d'arc). Si après  $I_D = 4$  itérations, la convergence de la solution n'est pas encore atteinte, nous commençons à suivre de près le comportement des valeurs maximales  $R_{max}^\alpha$  des résidus. Parfois, ces valeurs n'auront pas tendance à diminuer d'une itération à une autre durant la séquence d'itérations, ce qui devrait être le cas si l'état initial se situe

à l'intérieur du "rayon de convergence" de la méthode de Newton-Raphson. L'itération devrait être abandonnée si les résidus ne réussissent pas à décroître entre deux itérations consécutives. Ainsi, si

$$\min\{(R_{max}^\alpha)^i, (R_{max}^\alpha)^{i-1}\} > (R_{max}^\alpha)^{i-2}$$

l'incrément est considéré trop grand. Sa taille est réduite de  $D_D = 25\%$  afin de recommencer la recherche de la solution à partir de la fin du pas précédent.

Dans certains cas, même si le taux de convergence est uniforme, elle nous paraît improbable, dans le sens où l'incrément semble nécessiter beaucoup d'itérations par rapport à ce qu'on s'est fixé comme maximum. Si nous ne parvenons pas à obtenir la convergence après  $I_U = 8$  itérations, nous procédons comme suit:

Étant donné que le taux de convergence est uniforme, nous supposons

$$\frac{(R_{max}^\alpha)^8}{(R_{max}^\alpha)^7} = \frac{(R_{max}^\alpha)^9}{(R_{max}^\alpha)^8} = \dots = \frac{(R_{max}^\alpha)^i}{(R_{max}^\alpha)^{i-1}} = \kappa_\alpha < 1$$

soit

$$(R_{max}^\alpha)^i = \kappa_\alpha (R_{max}^\alpha)^{i-1} = \kappa_\alpha^2 (R_{max}^\alpha)^{i-2} = \dots = \kappa_\alpha^{(i-7)} (R_{max}^\alpha)^7$$

Par ailleurs, la configuration d'équilibre est considérée atteinte lorsque

$$(R_{max}^\alpha)^i \leq \epsilon_r^\alpha F_{max}^\alpha$$

de telle sorte qu'à l'itération  $i$ , l'hypothèse précédente prédit la convergence du champ  $\alpha$  à l'itération  $n_\alpha$  pour laquelle

$$\epsilon_r^\alpha F_{max}^\alpha = \kappa_\alpha^{(n_\alpha-i)} (R_{max}^\alpha)^i = \left( \frac{(R_{max}^\alpha)^i}{(R_{max}^\alpha)^{i-1}} \right)^{(n_\alpha-i)} (R_{max}^\alpha)^i$$

et par conséquent

$$n_\alpha = i + \frac{\ln(\epsilon_r^\alpha F_{max}^\alpha / (R_{max}^\alpha)^i)}{\ln((R_{max}^\alpha)^i / (R_{max}^\alpha)^{i-1})}$$

Évidemment, nous devons aussi avoir

$$\kappa_\alpha = (R_{max}^\alpha)^i / (R_{max}^\alpha)^{i-1} < 1 \quad \text{ou} \quad \ln((R_{max}^\alpha)^i / (R_{max}^\alpha)^{i-1}) < 0$$

sans quoi nous supposons que la solution diverge et  $n_\alpha$  excède le nombre maximum d'itérations  $I_M$  permis dans l'incrément; par défaut  $I_M = 16$ . Nous introduisons à présent le maximum  $n$  des itérations  $n_\alpha$ . Suivant la valeur de  $n$ , les cas que voici peuvent se présenter:

1. si  $n > I_M$ , le pas courant est repris avec le même incrément mais réduit de  $D_U = 50\%$ .
2. si  $n \leq I_M$ , les itérations sur le pas courant sont poursuivies.

Il s'avère parfois utile d'augmenter les valeurs assignées par défaut aux paramètres  $I_D$  et  $I_U$  afin d'éviter une réduction prématurée de la taille de l'incrément imposé. Par exemple, dans des analyses complexes incluant différentes sortes de non-linéarités (géométriques, matérielles et de contact) et où on peut éprouver de sérieuses difficultés de convergence, il est profitable à l'utilisateur de choisir  $I_D = 8$  et  $I_U = 10$  [HKS95].

Par ailleurs, pour tirer profit des pas précédents, l'efficacité de réussir la résolution des équations non linéaires est exploitée dans la sélection de la taille du prochain incrément. Ainsi, si dans deux incréments consécutifs, la convergence est atteinte en moins de  $I_F = 5$  itérations, ce qui est "assez rapide", la taille de l'incrément est augmentée par un facteur de  $D_F = 1.5$  pour le prochain pas. Par contre, si un incrément prend plus que  $I_S = 10$  itérations pour converger, la convergence est qualifiée de "lente" et le prochain pas est entamé avec un incrément réduit à  $D_S = 0.75$  fois l'incrément courant.

Soulignons pour terminer, que l'ajustement automatique de l'incrément est conditionné par le nombre de tentatives pour réussir la convergence qui ne doit pas dépasser un maximum de  $TE_M = 5$  tentatives à chaque pas (valeur prise par défaut mais pouvant être modifiée) et par la taille de l'incrément qui ne doit pas déborder de l'intervalle  $[INC_{min}, INC_{max}]$  fixé par l'utilisateur pour ces propres analyses.

## 5.4 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre nous avons émis les hypothèses de base et introduit les principales expressions et notations relatives à la discrétisation par la méthode des éléments finis du modèle variationnel en déplacements (5.1) et à la résolution par la méthode de Newton-Raphson du système fondamental (5.10) obtenu suite à la discrétisation.

Le méthode de résolution choisie n'est évidemment pas unique et, sans que les principes du problème ne changent, d'autres techniques peuvent être utilisées pour résoudre le système (5.10), toutefois notre choix est justifié par la nécessité de connaître la matrice tangente exacte pour l'étude des instabilités.

En ce qui concerne le pilotage de la résolution, nous avons mis l'accent sur la méthode de pilotage en longueur d'arc de Riks, puisque en réalité, elle inclut le pilotage



en charge imposé et en déplacement imposé. Nous avons montré comment déterminer efficacement, grâce à cette technique, l'état d'équilibre statique pendant les phases instables de la réponse, sans pour autant perdre de vue les difficultés de convergence qui peuvent survenir lors du calcul des zones post-bifurcation.

Un autre point qui ressort de ce chapitre est la notion de “champ/flux conjugué”, introduite pour classer les différentes variables “cinématiques/mécaniques” selon leur type respectif. Cette notion est fort utile dans les problèmes à grands déplacements et à grandes rotations ou dans des analyses impliquant des variables à unités différentes ou à ordre de grandeur différents (température, potentiel électrique, ..., etc.). En pareil cas, il convient de tester la convergence de chaque champ actif dans le problème avant d'accepter la solution.

Notre but de se doter des outils et des techniques de base nécessaires à l'élaboration des modèles de poutre et de coque est enfin atteint. Nous nous abstiendrons ici de discuter les hypothèses, le champ d'application et les mérites de chacun de ces modèles. Cela sera fait dans les deux chapitres subséquents et plus concrètement dans les chapitres “Résultats numériques” et “Applications industrielles”. Cependant, vu le champ d'application escompté de ces modèles, nous choisirons comme mesure de déformations le tenseur de *Green-Lagrange* et comme mesure de contraintes son conjugué, le tenseur de *Piola-Kirchhoff de seconde espèce* et nous interpréterons le vecteur  $\delta \mathbf{v}$  (noté désormais  $\delta \mathbf{u}$ ) comme des déplacements virtuels au lieu des vitesses virtuelles.

## Chapitre 6

# Théorie des poutres

### 6.1 Introduction

Une partie de ce chapitre est relative à la présentation générale des relations qui caractérisent la théorie des poutres courbes tridimensionnelles fléchissant dans deux plans mutuellement orthogonaux, en tenant compte des effets de membrane, de cisaillement transversal et de torsion sans gauchissement autour d'un axe de référence définissant la poutre. Ce modèle généralise les modèles classiques de *Euler-Bernoulli* [Sal88, Tim56] et constitue ce qu'on appelle parfois le modèle de poutre de *Timoshenko* [Tim22, Tim56, Tim68] basé sur l'hypothèse des sections droites pour définir le champ de déplacements: les sections planes initialement normales à l'axe de la poutre restent planes, mais pas nécessairement normales à l'axe. Ce modèle de poutre basé sur une formulation *lagrangienne totale* en petites déformations est généralement très utile pour l'analyse non linéaire élastique et élastoplastique en grands déplacements et en grandes rotations des structures tridimensionnelles, constituées de poutres épaisses à sections pleines où les déformations de cisaillement transversal peuvent être importantes. Cependant, si ces déformations ne sont pas négligées, il est supposé qu'elles ne peuvent produire de gauchissement dans les sections et que la réponse au cisaillement transversal est purement élastique; seulement les effets de membrane, de flexion et de

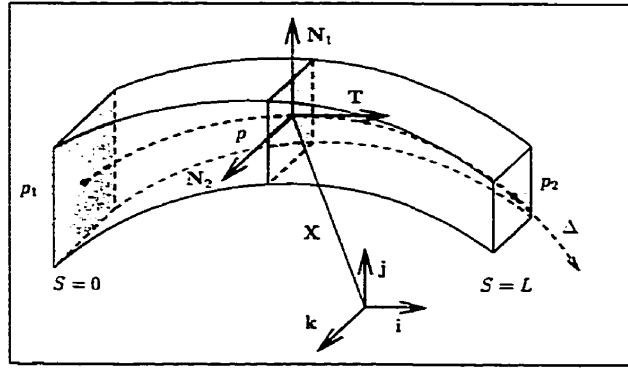


Figure 6.1: Géométrie de la poutre

torsion sur les déformations plastiques sont considérés.

L'autre partie du chapitre est consacrée à la discrétisation par éléments finis, soit la formulation des éléments finis linéaires et quadratiques, l'interpolation et l'actualisation des champs de déplacements et de rotations et enfin, la discrétisation de la forme variationnelle en déplacement permettant de définir le vecteur résidu et la matrice de rigidité tangente. Ces éléments finis, considérés utiles pour l'analyse élastique et élastoplastique des poutres épaisses, ont été formulés de façon à pouvoir traiter efficacement les poutres minces pour lesquelles l'influence des déformations de cisaillement transversal est négligeable.

## 6.2 Aspects géométriques et cinématiques

### 6.2.1 Définitions géométriques

Géométriquement, une poutre est un solide défini par un ensemble de sections transversales connectées par une ligne courbe orientée, que nous nomons *ligne de référence* définissant l'axe curviligne de la poutre noté  $\Delta$  (Voir figure 6.2.1), telle que la plus courte distance de n'importe quelle particule du solide à l'axe  $\Delta$  soit relativement petite par rapport à la longueur et au rayon de courbure de la ligne. Une configuration donnée de la poutre est alors décrite par un champ vectoriel donnant la position d'un point matériel de l'axe de la poutre et une base mobile orthonormale, qui physiquement modélise la section transversale passant par ce point.

Considérons la poutre dans sa configuration initiale et soit  $p$  un point matériel situé sur l'axe curviligne  $\Delta$ . Nous associerons de façon bijective le point  $p$  à son abscisse curviligne  $S$ ; lorsque  $S$  décrit le segment  $[0, L]$ ,  $p$  décrit l'arc  $p_1, p_2$ . Nous pouvons alors

se donner la ligne de référence par la représentation paramétrique:

$$\mathbf{X}(S) \equiv \begin{Bmatrix} X(S) \\ Y(S) \\ Z(S) \end{Bmatrix}$$

où  $X, Y, Z$  sont les coordonnées du vecteur position  $\mathbf{X}$  du point  $p$ , relativement à la base cartésienne  $[\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}]$ . L'élément différentiel en  $p$  s'écrit en fonction de  $dS$ :

$$d\mathbf{X} = \mathbf{S} dS$$

où  $\mathbf{S}$  dénote le vecteur unitaire tangent en  $p$  à la ligne de référence:

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial S} = \frac{\partial X}{\partial S} \mathbf{i} + \frac{\partial Y}{\partial S} \mathbf{j} + \frac{\partial Z}{\partial S} \mathbf{k}$$

Nous avons donc:

$$dS^2 = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = dX^2 + dY^2 + dZ^2$$

Nous attachons au point  $p$ , dans sa configuration initiale, la base orthonormale  $\mathbf{A}^0(S) \equiv [\mathbf{T}, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2]$  dont les vecteurs de base sont choisis tels que,  $\mathbf{N}_1$  et  $\mathbf{N}_2$  soient dans le plan de la section transversale et  $\mathbf{T}$  normale à ce plan. Nous supposons que la section transversale au point  $p$  est initialement perpendiculaire à l'axe de la poutre  $\mathbf{S}$ , ce qui laisse supposé que  $\mathbf{T}$  est initialement choisi tangent à la ligne de référence:

$$\mathbf{T} = \mathbf{S} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial S}$$

A présent, appelons  $[\tilde{\mathbf{A}}]$  la matrice qui fait correspondre aux trois vecteurs  $\mathbf{T}, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$  les trois vecteur dérivés, telle que l'on ait:

$$\frac{\partial}{\partial S} \begin{Bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{N}_2 \end{Bmatrix} = [\tilde{\mathbf{A}}] \begin{Bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{N}_2 \end{Bmatrix}$$

La matrice  $[\tilde{\mathbf{A}}]$  est antisymétrique. En effet, nous avons:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} = 1, \quad \mathbf{T} \cdot \mathbf{N}_\alpha = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{N}_\alpha \cdot \mathbf{N}_\beta = \delta_\alpha^\beta \quad (\text{symbole de Kronecker})$$

L'indice  $\alpha$  et d'autres indices grecques minuscules que nous utiliserons dans ce chapitre, varient de 1 à 2. En dérivant ces dernières formules, il vient:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial S} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial S} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial S} \cdot \mathbf{N}_\alpha + \mathbf{T} \cdot \frac{\partial \mathbf{N}_\alpha}{\partial S} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{N}_\alpha}{\partial S} \cdot \mathbf{N}_\beta + \mathbf{N}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{N}_\beta}{\partial S} = 0 \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} \tilde{A}_{11} + \tilde{A}_{11} = 0 \\ \tilde{A}_{1(\alpha+1)} + \tilde{A}_{(\alpha+1)1} = 0 \\ \tilde{A}_{(\alpha+1)(\beta+1)} + \tilde{A}_{(\beta+1)(\alpha+1)} = 0 \end{cases}$$

La matrice  $[\tilde{\mathbf{A}}]$  étant antisymétrique, elle est définie par ses trois composantes strictes  $\tilde{A}_{12}$ ,  $\tilde{A}_{13}$ ,  $\tilde{A}_{23}$ . Nous posons:

$$\tilde{A}_{12} = B_2, \quad \tilde{A}_{13} = -B_1 \quad \text{et} \quad \tilde{A}_{23} = B$$

$B_\alpha$  et  $B$  sont des scalaires nommés respectivement, *courbures* et *torsion* de la poutre [Lar88]. Il vient ainsi:

$$\frac{\partial}{\partial S} \begin{Bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{N}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & B_2 & -B_1 \\ -B_2 & 0 & B \\ B_1 & -B & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{N}_2 \end{Bmatrix}$$

Le gradient de la direction  $\mathbf{N}_\alpha$  par rapport à l'abscisse curviligne  $S$ , s'écrit alors:

$$\frac{\partial \mathbf{N}_\alpha}{\partial S} = \epsilon_\alpha^\beta (-B_\beta \mathbf{T} + B \mathbf{N}_\beta)$$

avec

$$B_\alpha = \epsilon_\alpha^\beta \mathbf{T} \cdot \frac{\partial \mathbf{N}_\beta}{\partial S} \quad \text{et} \quad B = \mathbf{N}_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{N}_1}{\partial S} = -\mathbf{N}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{N}_2}{\partial S}$$

où nous avons introduit le *symbole de permutation*  $\epsilon_\alpha^\beta$ , défini par:

$$\epsilon_1^1 = \epsilon_2^2 = 0, \quad \epsilon_1^2 = -\epsilon_2^1 = 1$$

Dans la configuration actuelle, nous pouvons toujours définir au point  $p$ , une base orthonormale  $\mathbf{A}(S) \equiv [\mathbf{t}, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]$  et faire correspondre les trois vecteurs de cette base aux trois vecteurs de base  $\mathbf{T}, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$  par une transformation orthogonale  $\mathbf{R}$ , telle que l'on ait:

$$\mathbf{t} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{T} \quad \text{et} \quad \mathbf{n}_\alpha = \mathbf{R} \cdot \mathbf{N}_\alpha$$

Si  $\phi(S)$  dénote le vecteur rotation au point  $p$ , le tenseur orthogonal  $\mathbf{R}$  peut être défini, comme déjà vu au chapitre 4, en termes de  $\phi(S)$  par:

$$\mathbf{R} = \exp(\tilde{\phi}) = \cos \phi \mathbf{I} + \frac{\sin \phi}{\phi} \tilde{\phi} + \frac{1 - \cos \phi}{\phi^2} \phi \otimes \phi$$

où  $\phi = \|\phi\|$  et  $\tilde{\phi}$  est le tenseur antisymétrique défini par les propriétés:

$$\tilde{\phi} \cdot \phi = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{\phi} \cdot \mathbf{v} = \phi \times \mathbf{v} \quad \text{pour tout vecteur } \mathbf{v}$$

Alternativement, l'*algèbre quaternion* peut être utilisé pour spécifier l'orientation de la base actuelle  $\mathbf{A}(S)$ . Dans ce cas, le tenseur orthogonal  $\mathbf{R}$  est remplacé par le *quaternion* unitaire  $\mathbf{r} = (r_0, \mathbf{r})$ , où

$$r_0 = \cos(\phi/2), \quad \text{et} \quad \mathbf{r} = \frac{\sin(\phi/2)}{\phi} \phi$$

$\mathbf{R}$  est alors donné par

$$\mathbf{R} = (2r_0^2 - 1) \mathbf{I} + 2r_0 \hat{\mathbf{r}} + 2 \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}$$

et l'orientation des vecteurs directeurs suit donc la règle non linéaire:

$$\begin{cases} \mathbf{t} &= (2r_0^2 - 1) \mathbf{T} + 2r_0 \mathbf{r} \times \mathbf{T} + 2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{T}) \mathbf{r} &= \mathbf{r} \circ \mathbf{T} \circ \mathbf{r}^\dagger \\ \mathbf{n}_\alpha &= (2r_0^2 - 1) \mathbf{N}_\alpha + 2r_0 \mathbf{r} \times \mathbf{N}_\alpha + 2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{N}_\alpha) \mathbf{r} &= \mathbf{r} \circ \mathbf{N}_\alpha \circ \mathbf{r}^\dagger \end{cases}$$

Enfin, nous considérons que la ligne de référence dans la configuration actuelle est décrite par la même coordonnée curviligne  $S$ . Si alors, nous désignons par  $\mathbf{x}(S)$ , le vecteur position, dans cette configuration, du point matériel  $p$ , nous pouvons définir le vecteur unitaire tangent à la ligne de référence en  $p$  par:

$$\mathbf{s} = \lambda^{-1} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial S}$$

où  $\lambda$  est l'*élongation axiale* suivant  $\mathbf{s}$ , donnée par:

$$\lambda = \left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial S} \right\|$$

En plus, nous pouvons comme précédemment définir les courbures et la torsion par:

$$b_\alpha = \epsilon_\alpha^j \mathbf{t} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}_j}{\partial S} \quad \text{et} \quad b = \mathbf{n}_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{n}_1}{\partial S} = -\mathbf{n}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{n}_2}{\partial S}$$

Ce qui nous permet de les combiner pour exprimer le gradient de la direction  $\mathbf{n}_\alpha$  par rapport à  $S$

$$\frac{\partial \mathbf{n}_\alpha}{\partial S} = \epsilon_\alpha^j (-b_j \mathbf{t} + b \mathbf{n}_j)$$

### 6.2.2 Hypothèses cinématiques

Nous avons supposé que la section transversale de la poutre au point  $p$  est cette partie du plan définie par les vecteurs unitaires orthogonaux  $\mathbf{N}_1$  et  $\mathbf{N}_2$ , initialement perpendiculaire à l'axe de la poutre défini dans la configuration de référence par le vecteur tangent  $\mathbf{T} = \mathbf{S}$ . La théorie des poutres de *Timoshenko* (Timoshenko 1956) adoptée suppose que ce plan reste plan dans la configuration déformée, mais pas nécessairement normal à la ligne moyenne. En outre, nous supposons que la section transversale peut subir dans son plan une expansion homogène définie par un facteur  $f$ , dit *facteur de dilatation*, dépendant de l'élongation axiale de la poutre. Ces hypothèses nous permettent d'énoncer qu'un point matériel  $q$  de la section transversale initialement situé à la position

$$\hat{\mathbf{X}}(S, S^1, S^2) = \mathbf{X}(S) + S^\alpha \mathbf{N}_\alpha(S), \quad \alpha = 1, 2 \quad (6.1)$$

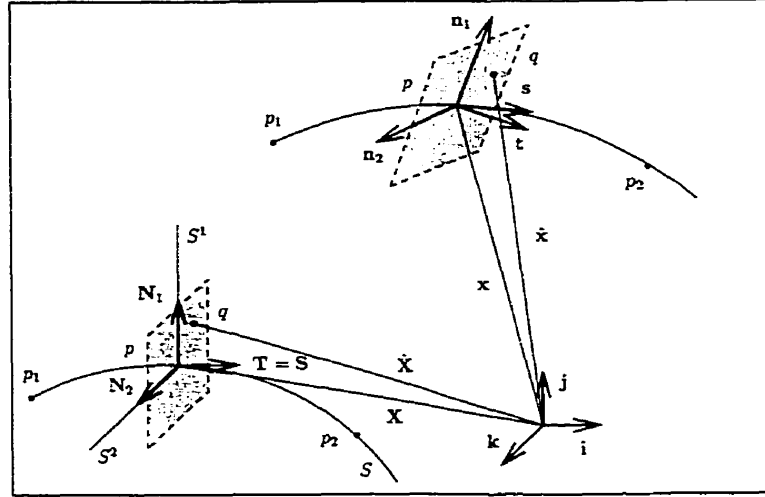


Figure 6.2: Cinématique de la poutre

est transformé dans la configuration actuelle à la position

$$\hat{\mathbf{x}}(S, S^1, S^2) = \mathbf{x}(S) + f(S)S^\alpha \mathbf{n}_\alpha(S), \quad \alpha = 1, 2 \quad (6.2)$$

Ces expressions sont fonctions de l'abscisse curviligne  $S$  et les coordonnées matérielles  $(S^1, S^2)$  de la section transversale, associées respectivement aux directions  $\mathbf{N}_1$  et  $\mathbf{N}_2$  dans la configuration de référence (6.2).

Le gradient de la position actuelle du point  $q$  de la section transversale par rapport à la coordonnée curviligne  $S$  est:

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial S} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial S} + f S^\alpha \frac{\partial \mathbf{n}_\alpha}{\partial S}$$

où nous avons négligé la dérivée de  $f$  par rapport à  $S$ . Avec cette approximation et les définitions établies précédemment

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial S} = \lambda \mathbf{s} + f S^\alpha \epsilon_\alpha^\beta (-b_\beta \mathbf{t} + b \mathbf{n}_\beta)$$

Les gradients par rapport à  $S^\alpha$  sont:

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial S^\alpha} = f \mathbf{n}_\alpha$$

Par ailleurs, l'élément de volume actuel  $dV$  en  $q$  s'écrit en fonction de  $dS$ ,  $dS^1$  et  $dS^2$ :

$$dV = \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial S} \cdot \left( \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial S^1} \times \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial S^2} \right) dS dS^1 dS^2 = [\lambda f^2 (\mathbf{s} \cdot \mathbf{t}) - f^3 S^\alpha \epsilon_\alpha^\beta b_\beta] dS dS^1 dS^2$$

Dans la configuration de référence, nous avons les expressions suivantes des gradients

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial S} &= \mathbf{T} + S^\alpha \epsilon_\alpha^j (-B_j \mathbf{T} + B \mathbf{N}_\beta) \\ \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial S^\alpha} &= \mathbf{N}_\alpha\end{aligned}$$

L'élément de volume initiale  $dV^0$  est donné par la relation paramétrique:

$$dV^0 = R dS dS^1 dS^2$$

où  $R$  est égale à

$$R = \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial S} \cdot \left( \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial S^1} \times \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial S^2} \right) = 1 - S^\alpha \epsilon_\alpha^\beta B_\beta$$

### Remarques

- Nous considérons dans cette étude des poutres à sections pleines et/ou fermées. Pour le comportement en torsion, nous considérons en particulier des sections pleines circulaires pour lesquelles la rigidité de torsion est du même ordre de grandeur que le moment d'inertie polaire de la section. Nous négligeons par conséquent les effets de gauchissement dus au cisaillement transversal puisque nous supposons que les sections restent planes au cours du mouvement.
- Nous admettons que la longueur de la fibre longitudinale ne varie pas à travers la section transversale. Ceci permet d'approcher l'élément de volume dans la configuration initiale et courante par:

$$dV^0 \approx dS dS^1 dS^2 \quad \text{et} \quad dV \approx \lambda f^2 dS dS^1 dS^2$$

Par contre, nous admettons que la section transversale peut subir une expansion homogène de sorte que le produit de l'aire et la longueur entre deux particules matérielles situées sur la ligne de référence demeure constante au cours du temps. Cela revient à supposer que le matériau est incompressible:

$$\frac{dV}{dV^0} = 1$$

soit

$$f = \lambda^{-\frac{1}{2}}$$



Cette condition traduit la quasi incompressibilité du matériau. Pour éviter d'éventuelles difficultés numériques mentionnées par Batoz et Dhatt [BD90c] (précision et convergence), nous introduisons une variable artificielle  $\nu_e$ , dite *coefficient de Poisson effectif*, dont l'effet est de contrôler le degré d'incompressibilité du matériau de sorte que

$$f = \lambda^{-\nu_e} \quad \text{et} \quad 0 < \nu_e < \frac{1}{2}$$

Pour  $\nu_e = 0$ , la section transversale est inextensible.

- Par abus de langage, nous avons appelé les entités  $b_\alpha$ , courbures de la poutre dans la configuration déformée. Strictement parlant, les courbures sont définies par [Lar88]:

$$\rho_\alpha = \epsilon_\alpha^j \mathbf{s} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}_\beta}{\partial S} = \epsilon_\beta^\alpha \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial S} \cdot \mathbf{n}_\beta$$

en choisissant le vecteur tangent unitaire  $\mathbf{s}$  comme premier vecteur de base de  $\mathbf{A}(S)$  (modèle classique basé sur l'hypothèse de conservation des normales). Tout de même, nous pouvons toujours approcher les courbures  $\rho_\alpha$  par les  $b_\alpha$ , puisque dans le contexte des petites déformations  $\mathbf{s} \cdot \mathbf{t} \approx 1$ .

- Rappelons, que dans le cas particulier des poutres planes, la flexion est effectuée dans un seul plan. La poutre peut être ainsi définie par une ligne de référence courbe décrite par l'abscisse curviligne  $S$  et un ensemble de fibre transversales, rectilignes de longueur  $h(S)$ . Une configuration arbitraire de la poutre est par conséquent décrite par le vecteur position  $\mathbf{x}(S)$ , du point générique  $p$  de la ligne de référence et de l'orientation dans le plan du vecteur unitaire  $\mathbf{n}(S)$ , s'étendant sur la fibre transversale passant par  $p$ . Effectuées toujours dans le même plan et autour du même axe, les rotations individuelles du vecteur  $\mathbf{n}$ , se superposent linéairement en additionnant tout simplement leurs vecteurs rotations correspondants (voir chapitre 4):

$$\boldsymbol{\phi} = \sum \boldsymbol{\phi}^i$$

où  $\boldsymbol{\phi}$  est le vecteur rotation composé des vecteurs rotations individuelles  $\boldsymbol{\phi}^i$ . En outre, la courbure dans ce cas est définie par [BD90c]:

$$\rho = -\mathbf{s} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial S} = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial S} \cdot \mathbf{n}$$

dans laquelle  $\mathbf{s}$  représente le vecteur unitaire tangent à l'axe de la poutre.

### 6.2.3 Gradient de déformation

Le gradient de déformation reliant la configuration déformée de la poutre à sa configuration de référence est donné par

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial \hat{\mathbf{X}}} = \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial S} \otimes \frac{\partial S}{\partial \hat{\mathbf{X}}} + \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial S^\alpha} \otimes \frac{\partial S^\alpha}{\partial \hat{\mathbf{X}}}$$

où  $\frac{\partial S}{\partial \hat{\mathbf{X}}}$  et  $\frac{\partial S^\alpha}{\partial \hat{\mathbf{X}}}$  désignent les vecteurs de la base duale (contravariante), qui s'expriment d'après les notions de la sous-section 2.2.1 par:

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{\mathbf{X}}} = R^{-1} \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial S^1} \times \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial S^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial S^\alpha}{\partial \hat{\mathbf{X}}} = R^{-1} \epsilon_\beta^\alpha \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial S} \times \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial S^\beta}$$

avec

$$R = \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial S} \cdot \left( \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial S^1} \times \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial S^2} \right)$$

En tenant compte des résultats de la sous-section précédente, nous trouvons:

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{\mathbf{X}}} = R^{-1} \mathbf{T}$$

$$\frac{\partial S^\alpha}{\partial \hat{\mathbf{X}}} = \mathbf{N}_\alpha - R^{-1} S^\beta \epsilon_\beta^\alpha B \mathbf{T}$$

ce qui permet d'expliciter l'expression du gradient de déformation  $\mathbf{F}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = R^{-1} [ & \lambda \mathbf{s} \otimes \mathbf{T} - f S^\alpha \epsilon_\alpha^\beta b_\beta \mathbf{t} \otimes \mathbf{T} + \\ & f S^\alpha \epsilon_\alpha^\beta (b - B) \mathbf{n}_\beta \otimes \mathbf{T} + R f \mathbf{n}_\beta \otimes \mathbf{N}_\beta ] \end{aligned} \quad (6.3)$$

et déduire ses composantes dans la base mixte:

$$F_{11} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} = R^{-1} [\lambda (\mathbf{s} \cdot \mathbf{t}) - f S^\alpha \epsilon_\alpha^\beta b_\beta]$$

$$F_{(\alpha+1)1} = \mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} = R^{-1} [\lambda (\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}_\alpha) + f S^\beta \epsilon_\beta^\alpha (b - B)]$$

$$F_{1(\alpha+1)} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_\alpha = 0$$

$$F_{(\alpha+1)(\beta+1)} = \mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_\beta = f \delta_{\alpha\beta}$$

### 6.2.4 Mesure de déformation

La mesure de déformation adoptée est celle de Green-Lagrange, bien appropriée pour la description lagrangienne des poutres en grands mouvements mais en petites déformations. Le tenseur de déformation de Green-Lagrange est défini par

$$\boldsymbol{\epsilon}^G = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I})$$

qui, avec l'équation (6.3), prend la forme

$$\begin{aligned}
 \epsilon^G = & \frac{1}{2} \{ R^{-2} [\lambda^2 - 2\lambda f S^\alpha \epsilon_\alpha^j (s \cdot t) b_j + 2\lambda f S^\alpha \epsilon_\alpha^\beta (b - B)(s \cdot n_\beta) \\
 & - f^2 S^\alpha S^\delta \epsilon_\alpha^j \epsilon_\delta^j b_j b_j + f^2 S^\alpha S^\alpha (b - B)^2] - 1 \} \mathbf{T} \otimes \mathbf{T} + \\
 & \frac{1}{2} R^{-1} [\lambda f (s \cdot n_\beta) + f^2 S^\alpha \epsilon_\alpha^j (b - B)] \mathbf{T} \otimes \mathbf{N}_\beta + \\
 & \frac{1}{2} R^{-1} [\lambda f (s \cdot n_\beta) + f^2 S^\alpha \epsilon_\alpha^j (b - B)] \mathbf{N}_\beta \otimes \mathbf{T} + \\
 & \frac{1}{2} (f^2 - 1) \mathbf{N}_\beta \otimes \mathbf{N}_\beta
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

Les composantes du tenseur de Green-Lagrange sont ensuite évaluées dans la base  $[\mathbf{T}, \mathbf{N}_\alpha]_{\alpha=1,2}$  en retenant que les termes linéaires en  $S^1$  et  $S^2$  et en considérant  $R^{-2} \approx 1 + 2S^\alpha \epsilon_\alpha^j B_j$  et  $R^{-1} \approx 1 + S^\alpha \epsilon_\alpha^j B_j$ . Par ailleurs, nous admettons que  $s \cdot t \approx 1$  et  $s \cdot n_\alpha \ll 1$ . Avec ces hypothèses, nous obtenons les composantes suivantes:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11} &= \mathbf{T} \cdot \epsilon^G \cdot \mathbf{T} = \frac{1}{2} (\lambda^2 - 1) - S^\beta \epsilon_\beta^\alpha (\lambda f b_\alpha - \lambda^2 B_\alpha) \\
 \varepsilon_{(\alpha+1)1} &= \mathbf{N}_\alpha \cdot \epsilon^G \cdot \mathbf{T} = \frac{1}{2} [\lambda f (s \cdot n_\alpha) + f^2 S^\beta \epsilon_\beta^\alpha (b - B)] \\
 \varepsilon_{1(\alpha+1)} &= \mathbf{T} \cdot \epsilon^G \cdot \mathbf{N}_\alpha = \varepsilon_{(\alpha+1)1} \\
 \varepsilon_{(\alpha+1)(\beta+1)} &= \mathbf{N}_\alpha \cdot \epsilon^G \cdot \mathbf{N}_\beta = \frac{1}{2} (f^2 - 1) \delta_{\alpha\beta}
 \end{aligned}$$

Nous ajustons légèrement l'expression de  $\varepsilon_{11}$ . Au lieu de multiplier la courbure initiale  $B_\beta$  par  $\lambda^2$ , nous la multiplions par  $\lambda f$ . Un tel changement n'affecte pratiquement pas le calcul de la courbure. Nous obtenons ainsi

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2} (\lambda^2 - 1) - \lambda f S^\beta \epsilon_\beta^\alpha (b_\alpha - B_\alpha)$$

Nous supposons qu'il n'y a pas de contraintes dans les directions  $(\alpha + 1)(\beta + 1)$ . Les déformations dans ces directions ne contribuent donc pas au travail virtuel interne et ne seront pas ainsi considérées dans les développements qui suivent. Par ailleurs, nous introduisons les *déformations généralisées* suivantes:

$$\begin{aligned}
 e &= \frac{1}{2} (\lambda^2 - 1) && : \text{déformation de membrane} \\
 \kappa_\alpha &= \lambda (b_\alpha - B_\alpha) && : \text{déformations de flexion} \\
 \gamma_\alpha &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial S} \cdot \mathbf{n}_\alpha && : \text{déformations de cisaillement transversal} \\
 \kappa &= b - B && : \text{déformation de torsion}
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

La substitution de ces relations dans l'expression de la déformation de Green-Lagrange permet d'obtenir les déformations:

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} &= e - f S^\beta \epsilon_\beta^\alpha \kappa_\alpha \\ \gamma_{(\alpha+1)1} &= f \gamma_\alpha + f^2 S^\beta \epsilon_\beta^\alpha \kappa \\ \gamma_{1(\alpha+1)} &= \gamma_{(\alpha+1)1} \end{cases} \quad (6.6)$$

### 6.2.5 Variation des déformations

#### Première variation

La première variation des déformations est obtenue par linéarisation des expressions des déformations, équations (6.6), dans lesquelles nous négligeons les termes contenant la variation  $\delta f$ :

$$\begin{cases} \delta \varepsilon_{11} &\approx \delta e - f S^\beta \epsilon_\beta^\alpha \delta \kappa_\alpha \\ \delta \gamma_{(\alpha+1)1} &\approx f \delta \gamma_\alpha + f^2 S^\beta \epsilon_\beta^\alpha \delta \kappa \end{cases} \quad (6.7)$$

où il est simple de montrer que

$$\begin{aligned} \delta e &= \lambda \mathbf{s} \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{x}}{\partial S} \\ \delta \kappa_\alpha &= \lambda \mathbf{n}_\alpha \cdot \frac{\partial \delta \boldsymbol{\theta}}{\partial S} \\ \delta \gamma_\alpha &= \mathbf{n}_\alpha \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{x}}{\partial S} - \lambda \epsilon_\alpha^\beta \mathbf{n}_\beta \cdot \delta \boldsymbol{\theta} \\ \delta \kappa &= \mathbf{t} \cdot \frac{\partial \delta \boldsymbol{\theta}}{\partial S} \end{aligned}$$

où dans l'expression de  $\delta \gamma_\alpha$  nous avons supposé que  $\mathbf{s} \approx \mathbf{t}$  et négligé  $\delta \lambda (b_\alpha - B_\alpha)$  dans  $\delta \kappa_\alpha$ . Dans ces relations,  $\delta \mathbf{x}$  représente la variation du déplacement et  $\delta \boldsymbol{\theta}$  la variation angulaire spatiale, reliée à la variation de la rotation  $\delta \boldsymbol{\phi}$  via l'opérateur tangentiel  $\mathbf{H}(\boldsymbol{\phi})$ , comme déjà vu au chapitre 4.

#### Seconde variation

Nous aurons besoin lors de l'évaluation de la variation du travail virtuel de la seconde variation des déformations. Celle-ci s'obtient de la première variation:

$$\begin{cases} d\delta \varepsilon_{11} &\approx d\delta e - f S^\beta \epsilon_\beta^\alpha d\delta \kappa_\alpha \\ d\delta \gamma_{(\alpha+1)1} &\approx f d\delta \gamma_\alpha + f^2 S^\beta \epsilon_\beta^\alpha d\delta \kappa \end{cases} \quad (6.8)$$

où nous démontrons, en tenant compte des notions du chapitre 4, que

$$\begin{aligned}
 d\delta e &= \frac{\partial \delta \mathbf{x}}{\partial S} \cdot \frac{\partial d\mathbf{x}}{\partial S} \\
 d\delta \kappa_\alpha &= \frac{\partial \delta \mathbf{x}}{\partial S} \cdot \mathbf{s} \otimes \mathbf{n}_\alpha \cdot \frac{\partial d\boldsymbol{\theta}}{\partial S} + \frac{\partial \delta \boldsymbol{\theta}}{\partial S} \cdot \mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{s} \cdot \frac{\partial d\mathbf{x}}{\partial S} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \lambda \epsilon_\alpha^3 \left[ \frac{\partial \delta \boldsymbol{\theta}}{\partial S} \cdot (\mathbf{n}_\beta \otimes \mathbf{t} - \mathbf{t} \otimes \mathbf{n}_\beta) \cdot d\boldsymbol{\theta} - \delta \boldsymbol{\theta} \cdot (\mathbf{n}_\beta \otimes \mathbf{t} - \mathbf{t} \otimes \mathbf{n}_\beta) \cdot \frac{\partial d\boldsymbol{\theta}}{\partial S} \right] \\
 d\delta \gamma_\alpha &= \epsilon_\alpha^3 \left[ \frac{\partial \delta \mathbf{x}}{\partial S} \cdot (\mathbf{n}_\beta \otimes \mathbf{t} - \mathbf{t} \otimes \mathbf{n}_\beta) \cdot d\boldsymbol{\theta} - \delta \boldsymbol{\theta} \cdot (\mathbf{n}_\beta \otimes \mathbf{t} - \mathbf{t} \otimes \mathbf{n}_\beta) \cdot \frac{\partial d\mathbf{x}}{\partial S} \right] \\
 &\quad + \frac{1}{2} \lambda \delta \boldsymbol{\theta} \cdot (\mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{t} + \mathbf{t} \otimes \mathbf{n}_\alpha) \cdot d\boldsymbol{\theta} \\
 d\delta \kappa &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \delta \boldsymbol{\theta}}{\partial S} \cdot (\mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_2 - \mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{n}_1) \cdot d\boldsymbol{\theta} - \delta \boldsymbol{\theta} \cdot (\mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_2 - \mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{n}_1) \cdot \frac{\partial d\boldsymbol{\theta}}{\partial S} \right]
 \end{aligned}$$

où encore une fois nous avons supposé  $\mathbf{s} \approx \mathbf{t}$  dans  $d\delta \gamma_\alpha$  et négligé  $d\delta \lambda(b_\alpha - B_\alpha)$  dans  $d\delta \kappa_\alpha$ .

## 6.3 Aspects cinétiques

### 6.3.1 Expression du principe des travaux virtuels

Le principe des travaux virtuels traduisant l'équilibre de la poutre s'exprime par la forme variationnelle:

$$W = W_{int} - W_{ext} = 0 \quad (6.9)$$

expression dans laquelle,  $W_{ext}$  représente le travail virtuel des forces externes et  $W_{int}$  le travail virtuel interne qui s'écrit, en prenant comme configuration de référence la configuration initiale de la poutre (*description lagrangienne totale*):

$$W_{int} = \int_{V^0} \mathbf{S} : \delta \boldsymbol{\epsilon}^G dV^0$$

où  $\mathbf{S}$  est le tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff de seconde espèce, conjugué à  $\boldsymbol{\epsilon}^G$  et que nous noterons  $\boldsymbol{\sigma}$  dans ce qui suit pour éviter la confusion avec les coordonnées paramétriques  $(S, S^\alpha)$

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma^{11} \mathbf{T} \otimes \mathbf{T} + \sigma^{(\alpha+1)1} \mathbf{N}_\alpha \otimes \mathbf{T} + \sigma^{1(\alpha+1)} \mathbf{T} \otimes \mathbf{N}_\alpha + \sigma^{(\alpha+1)(\beta+1)} \mathbf{N}_\alpha \otimes \mathbf{N}_\beta$$

Comme nous avons supposé qu'il n'y a pas de contraintes dans les directions  $(\alpha+1)(\beta+1)$ , le travail virtuel interne s'écrit

$$W_{int} = \int_L \int_A (\sigma^{11} \delta \varepsilon_{11} + \sigma^{(\alpha+1)1} \delta \gamma_{(\alpha+1)1}) dS dA \quad (6.10)$$

où  $dA = dS^1 dS^2$  représente l'élément d'aire initiale de la section transversale. La substitution des définitions des *déformations virtuelles* permet de réduire l'expression de  $W_{int}$  à

$$W_{int} = \int_L (N \delta e + M^\alpha \delta \kappa_\alpha + T^\alpha \delta \gamma_\alpha + M_t \delta \kappa) dS$$

où nous avons introduit les *efforts généralisés*:

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma^{11} dA && : \text{effort de membrane} \\ M^\alpha &= \int_A -f S^j \epsilon_j^\alpha \sigma^{11} dA && : \text{moments de flexion} \\ T^\alpha &= \int_A f \sigma^{(\alpha+1)1} dA && : \text{efforts tranchants} \\ M_t &= \int_A f^2 S^j \epsilon_j^\alpha \sigma^{(\alpha-1)1} dA && : \text{moment de torsion} \end{aligned} \quad (6.11)$$

Pour compacter la représentation du travail virtuel interne, nous définissons les vecteurs conjugués:

$$\mathbf{F} \equiv [N \ M^1 \ M^2 \ T^1 \ T^2 \ M_t]^T, \quad \mathbf{E} \equiv [e \ \kappa_1 \ \kappa_2 \ \gamma_1 \ \gamma_2 \ \kappa]^T$$

et l'opérateur différentiel:

$$\mathbf{B} \equiv \begin{bmatrix} \lambda \mathbf{s}^T \frac{\partial}{\partial S} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda \mathbf{n}_1^T \cdot (\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial S} + \mathbf{H} \frac{\partial}{\partial S}) \\ \mathbf{0} & \lambda \mathbf{n}_2^T \cdot (\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial S} + \mathbf{H} \frac{\partial}{\partial S}) \\ \mathbf{n}_1^T \frac{\partial}{\partial S} & -\lambda \mathbf{n}_2^T \cdot \mathbf{H} \\ \mathbf{n}_2^T \frac{\partial}{\partial S} & \lambda \mathbf{n}_1^T \cdot \mathbf{H} \\ \mathbf{0} & \mathbf{t}^T \cdot (\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial S} + \mathbf{H} \frac{\partial}{\partial S}) \end{bmatrix}$$

reliant les vecteurs virtuels  $\delta \mathbf{E}$  et  $\delta \mathbf{u} \equiv [\delta \mathbf{x} \ \delta \phi]^T$ , via la relation:

$$\delta \mathbf{E} = \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{u}$$

L'expression de  $W_{int}$  prend ainsi la forme condensée:

$$W_{int} = \int_L \delta \mathbf{E} \cdot \mathbf{F} dS = \int_L \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{F} dS \quad (6.12)$$

### 6.3.2 Variation du travail virtuel interne

Pour résoudre la forme variationnelle (6.9) par la méthode de *Newton-Raphson*, nous avons besoin de calculer sa variation dans le but de former la matrice de rigidité tangente, donc de calculer la variation du travail virtuel interne et externe. La variation du travail virtuel externe est nulle sous la condition que le chargement ne dépend pas de l'état de déformation: celle du travail virtuel interne suit de l'équation (6.10)

$$\begin{aligned} dW_{int} = & \int_L \int_A \left[ d\sigma^{11} \delta \varepsilon_{11} + d\sigma^{(\alpha+1)1} \delta \gamma_{(\alpha+1)1} + \sigma^{11} (d\delta e - \lambda f S^\beta \epsilon_\beta^\alpha d\delta \kappa_\alpha) \right. \\ & \left. + \sigma^{(\alpha+1)1} (\lambda f d\delta \gamma_\alpha + f^2 S^j \epsilon_j^\alpha d\delta \kappa) \right] dS dA \end{aligned}$$

Comme nous le verrons ultérieurement, les incréments infinitésimaux de contraintes,  $d\sigma^{11}$  et  $d\sigma^{(\alpha+1)1}$ , s'obtiennent de la loi de comportement, qui les relie aux incréments infinitésimaux de déformations,  $d\varepsilon_{11}$  et  $d\gamma_{(\alpha+1)1}$ . Ces derniers sont approchés par les mêmes relations (6.7), en remplaçant l'opérateur  $\delta$  par  $d$ . Par ailleurs, l'introduction des incréments des efforts généralisés, définis par:

$$\begin{aligned} dN &= \int_A d\sigma^{11} dA \\ dM^\alpha &= \int_A -f S^j \epsilon_j^\alpha d\sigma^{11} dA \\ dT^\alpha &= \int_A f d\sigma^{(\alpha+1)1} dA \\ dM_t &= \int_A f^2 S^j \epsilon_j^\alpha d\sigma^{(\alpha+1)1} dA \end{aligned} \tag{6.13}$$

permet d'exprimer la variation de travail virtuel par la relation:

$$\begin{aligned} dW_{int} = & \int_L (dN \delta e + dM^\alpha \delta \kappa_\alpha + dT^\alpha \delta \gamma_\alpha + dM_t \delta \kappa \\ & + N d\delta e + M^\alpha d\delta \kappa_\alpha + T^\alpha d\delta \gamma_\alpha + M_t d\delta \kappa) dS \end{aligned}$$

En considérant les expressions des secondes variations, cette relation peut s'écrire aussi sous la forme compacte suivante:

$$dW_{int} = \int_L [\delta \mathbf{u} \cdot (\mathbf{B}^T \cdot d\mathbf{F}) + \delta \mathbf{u} \cdot (\mathbf{B}_g^T \cdot \bar{\mathbf{C}}_g \cdot \mathbf{B}_g) \cdot d\mathbf{u}] dS \tag{6.14}$$

composée de deux parties: une *partie matérielle* obtenue par une perturbation des efforts généralisés  $\mathbf{F}$  et une *partie géométrique* résultant d'une perturbation de la géométrie et obtenue par linéarisation des déformations virtuelles généralisées  $\delta \mathbf{E}$ , dans

laquelle  $\bar{\mathbf{C}}_g$  est donné par

$$\bar{\mathbf{C}}_g \equiv \begin{bmatrix} NI & \epsilon_\alpha^j T^\alpha (\Xi_{\beta t} - \Xi_{\beta t}^T) & M^\alpha \Xi_{\alpha s}^T \\ -\epsilon_\alpha^j T^\alpha (\Xi_{jt} - \Xi_{jt}^T) & \frac{1}{2} \lambda T^\alpha (\Xi_{\alpha t} + \Xi_{\alpha t}^T) & -\frac{1}{2} \left[ \lambda \epsilon_\alpha^\beta M^\alpha (\Xi_{\beta t} - \Xi_{\beta t}^T) + M_t (\Xi_{12} - \Xi_{12}^T) \right] \\ M^\alpha \Xi_{\alpha s} & \frac{1}{2} \left[ \lambda \epsilon_\alpha^j M^\alpha (\Xi_{\beta t} - \Xi_{\beta t}^T) + M_t (\Xi_{12} - \Xi_{12}^T) \right] & 0 \end{bmatrix}$$

alors que l'opérateur différentiel  $\mathbf{B}_g$  est défini par

$$\mathbf{B}_g \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{I} \frac{\partial}{\partial S} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H} \\ \mathbf{0} & \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial S} + \mathbf{H} \frac{\partial}{\partial S} \end{bmatrix}$$

où les notations suivantes sont introduites

$$\Xi_{\alpha s} = \mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{s}, \quad \Xi_{\alpha t} = \mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{t} \quad \text{et} \quad \Xi_{12} = \mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_2$$

Afin d'exprimer la partie matérielle et compléter ainsi la description du modèle, nous devons spécifier la relation reliant les efforts et déformations généralisés. Ceci nous amène à la section suivante portant sur la loi constitutive du matériau.

## 6.4 Lois de comportement

### 6.4.1 Modèle élastique linéaire isotrope

Dans le cas où la structure est supposée constituée d'un matériau élastique isotrope, la loi de comportement exprimant la relation entre le tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff et le tenseur de déformations de Green-Lagrange est donnée par:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^{el} : \boldsymbol{\epsilon}^G$$

$\mathbf{C}^{el}$  étant le module tangent élastique, défini au chapitre 3 par:

$$\mathbf{C}^{el} = 2G \mathfrak{S} + \left(K - \frac{2G}{3}\right) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}$$



Compte tenu des hypothèses, la loi de comportement s'écrit

$$\begin{Bmatrix} \sigma^{11} \\ \sigma^{21} \\ \sigma^{31} \end{Bmatrix} = [\mathbf{C}^{el}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \gamma_{21} \\ \gamma_{31} \end{Bmatrix}$$

et le module élastique se réduit à

$$\mathbf{C}^{el} \equiv \text{diag}[E, G, G]$$

Les relations (6.5 et 6.11) nous permettent ainsi de relier les efforts généralisés aux déformations généralisées via le *module élastique global*  $\bar{\mathbf{C}}^{el}$ :

$$\mathbf{F} = \bar{\mathbf{C}}^{el} \cdot \mathbf{E} \quad \text{et} \quad d\mathbf{F} = \bar{\mathbf{C}}^{el} \cdot d\mathbf{E} \quad (6.15)$$

avec

$$\bar{\mathbf{C}}^{el} \equiv \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}_{mf}^{el} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{C}}_{ct}^{el} \end{bmatrix}$$

où  $\bar{\mathbf{C}}_{mf}^{el}$  définissant le comportement en membrane-flexion s'écrit:

$$\bar{\mathbf{C}}_{mf}^{el} \equiv \begin{bmatrix} EA & fEQ_1 & -fEQ_2 \\ & f^2EI_1 & -f^2EI_{12} \\ \text{sym} & & f^2EI_2 \end{bmatrix}$$

alors que  $\bar{\mathbf{C}}_{ct}^{el}$  contenant les caractéristiques de cisaillement-torsion est définie par:

$$\bar{\mathbf{C}}_{ct}^{el} \equiv \begin{bmatrix} f^2k_1^pGA & 0 & -f^3GQ_1 \\ & f^2k_2^pGA & f^3GQ_2 \\ \text{sym} & & f^4GJ \end{bmatrix}$$

Ces définitions sont propres à un matériau homogène, où  $Q_1$ ,  $Q_2$  et  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_{12}$ , sont respectivement les moments statiques et les moments d'inertie de la section transversale relativement à  $\mathbf{N}^1$  et  $\mathbf{N}^2$ :

$$Q_1 = \int_A S^2 dA, \quad Q_2 = \int_A S^1 dA$$

et

$$I_1 = \int_A (S^2)^2 dA, \quad I_2 = \int_A (S^1)^2 dA, \quad I_{12} = \int_A S^1 S^2 dA,$$

$J$  est l'inertie de torsion<sup>1</sup>. Pour une section circulaire  $J$  est égal au moment d'inertie  $I_p = I_1 + I_2 = \pi R^4/2$ , où  $R$  est le rayon.

Rappelons que dans ce cas, l'axe de référence  $S$  est défini comme étant l'axe neutre s'il passe par les centres de gravité des sections transversales ( $Q_1 = Q_2 = 0$  pour chaque section) et les axes  $S^1$  et  $S^2$  sont dits *axes principaux d'inertie* si le produit d'inertie  $I_{12}$  est nul. Si c'est le cas, le découplage des effets de membrane et de flexion sera réalisé. Les relations reliant les moments statiques et d'inertie aux coordonnées du centre de gravité et inerties principales sont données en annexe B.  $k_1^p$  et  $k_2^p$  sont les *paramètres de pénalité*, introduits pour limiter l'influence du cisaillement transversal dans les poutres minces et assurer une représentation acceptable de l'hypothèse de conservation des normales ( $\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}_\alpha = 0$ : souvent associée aux noms de *Navier*, *Bernoulli* et *Euler* [Sal88, Tim56]). Les paramètres de pénalité sont définis par:

$$k_1^p = k_1(1 + q \frac{L_e^2 A}{12I_2})^{-1}, \quad k_2^p = k_2(1 + q \frac{L_e^2 A}{12I_1})^{-1}$$

où  $L_e$  est la longueur de l'élément,  $k_1, k_2$  sont les coefficients de correction de cisaillement transversal [BD90c] et  $q$  un facteur numérique, pris égal à  $0.25 \times 10^{-4}$  [HKS95]. Cependant, avec l'hypothèse d'une section pleine, nous prenons comme paramètres de pénalité:

$$k_1^p = k_2^p = k^p = k(1 + q \frac{L_e^2 A}{12I})^{-1}$$

où  $I = \max(I_1, I_2)$  et  $k$  le coefficient de correction de cisaillement transversal ( $k = \frac{5}{6}$  pour une section rectangulaire et  $k = \frac{6}{7}$  pour une section circulaire [BD90c]).

L'utilité de ce choix des facteurs  $k_1^p$  et  $k_2^p$  est que, pour les éléments "courts" (Ici "court" est basé sur la comparaison de la longueur de l'élément avec les dimensions de la section transversale), les éléments se comportent comme des poutres "épaisses" [Tim56], mais, plus les éléments sont minces plus les rigidités du cisaillement transversal  $k_\alpha^p G$  agissent comme des paramètres de pénalité, forçant la section transversale à rester normale à l'axe de la poutre. Le rôle à jouer par  $q$  est uniquement d'éviter les problèmes numériques dus à une pénalisation excessive ( $q = 0.25 \times 10^{-4}$  est proposé [HKS95]). Ce concept est introduit par plusieurs auteurs [HTK77, MH78, HL81a, Hug87, ZL88, ZTPO90] et discuté avec plus de détails par Hughes [HTK77].

<sup>1</sup>La référence [BD90c] donne la valeur de  $J$  pour quelques sections pleines.

Pour le modèle élastique en description lagrangienne totale, l'expression du travail virtuel interne et de son taux, équation (6.12) et (6.14), s'écrivent alors:

$$W_{int} = \int_L \delta \mathbf{u} \cdot (\mathbf{B}^T \cdot \bar{\mathbf{C}}^{el} \cdot \mathbf{E}) dS \quad (6.16)$$

et

$$dW_{int} = \int_L \delta \mathbf{u} \cdot (\mathbf{B}^T \cdot \bar{\mathbf{C}}^{el} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B}_g^T \cdot \bar{\mathbf{C}}_g \cdot \mathbf{B}_g) \cdot d\mathbf{u} dS \quad (6.17)$$

où les forces généralisées sont calculées sous forme totale.

### 6.4.2 Modèle élastoplastique

Nous avons vu au chapitre 3 que la loi décrivant le comportement élastoplastique est de type incrémentale et nous avons défini le module tangent élastoplastique,  $\mathbf{C}$ , reliant  $[d\sigma^{11} d\sigma^{12} d\sigma^{13}]^T$  à  $[d\varepsilon_{11} d\varepsilon_{12} d\varepsilon_{13}]^T$ :

$$\mathbf{C} \equiv \begin{bmatrix} \frac{3}{2}Q - R\sigma_{11}^2 & -R\sigma_{11}\sigma_{12} & -R\sigma_{11}\sigma_{13} \\ & \frac{1}{2}Q - R\sigma_{12}^2 & -R\sigma_{12}\sigma_{13} \\ \text{sym} & & \frac{1}{2}Q - R\sigma_{13}^2 \end{bmatrix}. \quad (6.18)$$

Nous voudrions suivre l'envahissement progressif par la plasticité, de la section transversale de la poutre. À cet effet, il convient d'utiliser la méthode de *plastification progressive*. L'intégration numérique du résidu et de la matrice de rigidité doit être alors effectuée non seulement suivant la longueur de la poutre, mais aussi dans la section transversale. En plus de la quadrature de *Gauss* utilisée pour l'intégration suivant la ligne de référence, nous choisissons la technique de *Lobatto* ([Hil56]) pour la discrétisation de la section droite, identique à celle de *Gauss* mais utilisant des points d'intégration sur les fibres extrêmes, là, où le plus souvent, débute la plastification. Vingt-cinq points de *Lobatto* (cinq points d'intégration par direction) semblent un minimum sur la section, auquel cas la distribution des contraintes peut suivre une loi polynomiale du septième degré ([Ako87], [Fre78], [Guo87]).

Le processus d'intégration numérique est schématisé comme suit:

1. Sur la section, à chaque point d'intégration, nous évaluons l'incrément de déformation, calculons les contraintes réelles et construisons le module tangent élastoplastique et puis nous effectuons l'intégration dans la section pour obtenir les efforts généralisés et le module tangent élastoplastique global.

2. Suivant la longueur, l'intégration s'effectue comme dans le cas élastique. Il suffit de remplacer le module élastique global dans l'équation (6.17) par le module élastoplastique global.

Nous négligeons l'effet du cisaillement transversal sur les déformations plastiques; alors le comportement de la section dû au cisaillement transversal est toujours supposé élastique:

$$T^\alpha = f^2 k^p G A \gamma_\alpha, \quad dT^\alpha = f^2 k^p G A d\gamma_\alpha$$

et les incréments infinitésimaux de déformations approchés par:

$$d\varepsilon_{11} = de - f S^\beta \epsilon_\beta^\alpha d\kappa_\alpha, \quad d\gamma_{(\alpha+1)1} = f^2 S^\beta \epsilon_\beta^\alpha d\kappa$$

Ces approximations permettent de déduire l'expression du *module tangent élastoplastique global*,  $\bar{\mathbf{C}}$ , reliant  $d\mathbf{F}$  à  $d\mathbf{E}$ :

$$\bar{\mathbf{C}} \equiv \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}_{mf} & 0 & \bar{\mathbf{C}}_{mft} \\ 0 & \bar{\mathbf{C}}_c & 0 \\ \bar{\mathbf{C}}_{mft}^T & 0 & \bar{H}_t \end{bmatrix}$$

où la rigidité  $\bar{H}_t$  est égale à

$$\bar{H}_t = \int_A f^4 [C_{22}(S^2)^2 + C_{33}(S^1)^2] dA$$

et les modules  $\bar{\mathbf{C}}_{mf}$ ,  $\bar{\mathbf{H}}_{mft}$  et  $\bar{\mathbf{C}}_c$  sont définis par<sup>2</sup>:

$$\bar{\mathbf{C}}_{mf} \equiv \begin{bmatrix} \int_A C_{11} dA & \int_A f C_{11} S^2 dA & \int_A -f C_{11} S^1 dA \\ & \int_A f^2 C_{11} (S^2)^2 dA & \int_A -f^2 C_{11} S^1 S^2 dA \\ \text{sym} & & \int_A f^2 C_{11} (S^1)^2 dA \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{C}}_{mft} \equiv \begin{Bmatrix} \int_A f^2 [-C_{12} S^2 + C_{13} S^1] dA \\ \int_A f^2 [-C_{22} S^2 + C_{23} S^1] dA \\ \int_A f^2 [-C_{23} S^2 + C_{33} S^1] dA \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{\mathbf{C}}_c \equiv \begin{bmatrix} f^2 k^p G A & 0 \\ 0 & f^2 k^p G A \end{bmatrix}$$

Une fois intégré sur la section, le module tangent élastoplastique global  $\bar{\mathbf{C}}$  et les forces généralisées  $\mathbf{F}$  sont substitués dans l'expression du travail virtuel interne, équation (6.12):

$$W_{int} = \int_L \delta \mathbf{u} \cdot (\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{F}) dS \quad (6.19)$$

<sup>2</sup>Les composantes  $C_{ij}$  sont les composantes du module tangent  $\mathbf{C}$  défini par l'expression 6.18.

et de son taux. équation (6.14):

$$dW_{int} = \int_L \delta \mathbf{u} \cdot (\mathbf{B}^T \cdot \bar{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B}_g^T \cdot \bar{\mathbf{C}}_g \cdot \mathbf{B}_g) \cdot d\mathbf{u} dS \quad (6.20)$$

pour ensuite être intégrés suivant la ligne de référence, comme dans le modèle élastique.

## 6.5 Actualisation des entités cinématiques

L'intégration des équations (6.16 à 6.20) doit être effectuée sur la configuration initiale  $C_0$ . Quant à la résolution, elle doit être faite par rapport à la configuration actuelle. En d'autres mots, si  $C_t$  représente la configuration en équilibre à un instant donné  $t$ , pour établir l'équilibre de la poutre soumise à un accroissement de chargement au cours du pas  $[t, t + \Delta t]$ , soit pour rechercher la configuration  $C_{t+\Delta t}$  à la fin du pas, nous devons résoudre la forme variationnelle (6.9) par rapport à cette configuration. A cet effet, nous construisons une suite d'approximations  $C_{t+\Delta t}^i$  de la configuration recherchée  $C_{t+\Delta t}$  en résolvant à chaque itération  $i$ , la forme linéaire:

$$W(\mathbf{u}^i) + dW(\mathbf{u}^i, d\mathbf{u}^i) = 0 \quad (6.21)$$

obtenue par linéarisation du travail virtuel  $W(\mathbf{u})$  au voisinage de la solution approchée  $\mathbf{u}^i$ . Une fois la correction  $d\mathbf{u}^i \equiv [d\mathbf{x}^i, d\boldsymbol{\phi}^i]^T$  obtenue, une nouvelle approximation  $\mathbf{u}^{i+1}$  est alors construite et la résolution est répétée de façon à satisfaire un critère de convergence choisi à l'avance. Nous présentons dans ce qui suit la procédure d'actualisation du champ  $\mathbf{u}$  ainsi que celle des variables cinématiques qui en dépendent telles les directions de la section transversale, les courbures et la torsion.

### 6.5.1 Actualisation de la position et des directions

A la suite de la résolution à l'itération  $i$  de l'équation (6.21), le vecteur position  $\mathbf{x}$  à l'instant  $t + \Delta t$  est actualisé dans le but de construire une nouvelle approximation, définie par:

$$\mathbf{x}^{i+1} = \mathbf{x}^i + d\mathbf{x}^i$$

ou encore par:

$$\mathbf{x}^{i+1} = \mathbf{x}(t) + \Delta \mathbf{x}$$

en désignant par  $\Delta \mathbf{x}$  l'incrément du déplacement (la correction cumulée sur le pas de temps  $[t, t + \Delta t]$ :  $\Delta \mathbf{x} \equiv \sum_{c=0}^i d\mathbf{x}^c$ ).

La nouvelle approximation du vecteur rotation  $\phi$  à l'instant  $t + \Delta t$  est obtenue par extraction à partir du quaternion  $\mathbf{r}^{i+1} = (r_0^{i+1}, \mathbf{r}^{i+1})$ , résultant du produit  $d\mathbf{r}^i \circ \mathbf{r}^i$  des deux quaternions correspondant respectivement aux vecteurs rotations  $d\phi^i$  et  $\phi^i$ :

$$\mathbf{r}^{i+1} = d\mathbf{r}^i \circ \mathbf{r}^i = \left( \cos \frac{d\phi^i}{2}, \frac{d\phi^i}{d\phi^i} \sin \frac{d\phi^i}{2} \right) \circ \left( \cos \frac{\phi^i}{2}, \frac{\phi^i}{\phi^i} \sin \frac{\phi^i}{2} \right)$$

qui s'écrit encore, si  $\Delta\mathbf{r}$  dénote l'incrément total du quaternion (la correction cumulée sur le pas de temps:  $\Delta\mathbf{r} \equiv \prod_{c=0}^i d\mathbf{r}^c$ ), correspondant à l'incrément de rotation  $\Delta\phi$

$$\mathbf{r}^{i+1} = \Delta\mathbf{r} \circ \mathbf{r}(t) = \left( \cos \frac{\Delta\phi}{2}, \frac{\Delta\phi}{\Delta\phi} \sin \frac{\Delta\phi}{2} \right) \circ \left( \cos \frac{\phi(t)}{2}, \frac{\phi(t)}{\phi(t)} \sin \frac{\phi(t)}{2} \right)$$

d'où:

$$\phi^{i+1} = 2 \frac{\mathbf{r}^{i+1}}{\|\mathbf{r}^{i+1}\|} \tan^{-1} \left[ \frac{\|\mathbf{r}^{i+1}\|}{r_0^{i+1}} \right]$$

L'actualisation de la position d'un point sur la ligne de référence et l'orientation en ce point de la section transversale est ainsi réalisée grâce aux relations:

$$\begin{cases} \mathbf{x} &= \mathbf{X} + \Delta\mathbf{x} \\ \mathbf{n}_\alpha &= \Delta\mathbf{r} \circ \mathbf{N}_\alpha \circ \Delta\mathbf{r}^\dagger \\ \mathbf{t} &= \Delta\mathbf{r} \circ \mathbf{T} \circ \Delta\mathbf{r}^\dagger \end{cases} \quad (6.22)$$

dans lesquelles nous utilisons les notations:

$$\mathbf{X} \equiv \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{N}_\alpha \equiv \mathbf{n}_\alpha(t) \quad \text{et} \quad \mathbf{T} \equiv \mathbf{t}(t)$$

### Remarques

- Nous rappelons que l'actualisation des directions, exprimée par les relations (6.22), a déjà été explicitée dans le chapitre 4:

$$\mathbf{n}_\alpha = \exp(\hat{\Delta\phi}) \cdot \mathbf{N}_\alpha = (2(\Delta r_0)^2 - 1) \mathbf{N}_\alpha + 2\Delta r_0 \Delta\mathbf{r} \times \mathbf{N}_\alpha + 2(\Delta\mathbf{r} \cdot \mathbf{N}_\alpha) \Delta\mathbf{r}$$

et

$$\mathbf{t} = \exp(\hat{\Delta\phi}) \cdot \mathbf{T} = (2(\Delta r_0)^2 - 1) \mathbf{T} + 2\Delta r_0 \Delta\mathbf{r} \times \mathbf{T} + 2(\Delta\mathbf{r} \cdot \mathbf{T}) \Delta\mathbf{r}$$

- Nous notons que pour le mouvement en entier, les nouvelles directions de la section transversale peuvent s'exprimer aussi par:

$$\mathbf{n}_\alpha = \mathbf{r} \circ \mathbf{N}_\alpha \circ \mathbf{r}^\dagger, \quad \mathbf{t} = \mathbf{r} \circ \mathbf{T} \circ \mathbf{r}^\dagger$$

où cette fois-ci:

$$\mathbf{N}_\alpha \equiv \mathbf{n}_\alpha(t=0) \quad \text{et} \quad \mathbf{T} \equiv \mathbf{t}(t=0)$$

avec

$$\mathbf{r} \equiv \prod_{p=1}^n \Delta \mathbf{r}^{(p)}$$

notant le produit des quaternions  $\Delta \mathbf{r}^{(p)}$  correspondant à l'incrément du pas  $p$ .

### 6.5.2 Actualisation de la courbure et de la torsion

La courbure et la torsion étant fonction de la dérivée  $\frac{d\mathbf{n}_\alpha}{dS}$ :

$$b_\alpha = \epsilon_\alpha^j \mathbf{t} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}_\beta}{\partial S}, \quad b = \mathbf{n}_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{n}_1}{\partial S} = -\mathbf{n}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{n}_2}{\partial S}$$

leur évaluation à chaque itération, nécessite l'actualisation de la dérivée de la normale  $\mathbf{n}_\alpha$  par rapport à  $S$ . De la règle d'actualisation de  $\mathbf{n}_\alpha$ , équation (6.22), nous obtenons:

$$\frac{\partial \mathbf{n}_\alpha}{\partial S} = \frac{\partial \Delta \mathbf{r}}{\partial S} \circ \mathbf{N}_\alpha \circ \Delta \mathbf{r}^\dagger + \Delta \mathbf{r} \circ \mathbf{N}_\alpha \circ \frac{\partial \Delta \mathbf{r}^\dagger}{\partial S} + \Delta \mathbf{r} \circ \frac{\partial \mathbf{N}_\alpha}{\partial S} \circ \Delta \mathbf{r}^\dagger$$

D'où tout calcul fait, nous trouvons:

$$\frac{\partial \mathbf{n}_\alpha}{\partial S} = \Delta \boldsymbol{\rho} \times \mathbf{n}_\alpha + \epsilon_\alpha^\beta (-B_\beta \mathbf{t} + B \mathbf{n}_\beta) \quad (6.23)$$

avec

$$B_\alpha = b_\alpha(t), \quad B = b(t)$$

et

$$\Delta \boldsymbol{\rho} = \mathbf{H}(\Delta \phi) \cdot \frac{\partial \Delta \phi}{\partial S}$$

où  $\mathbf{H}$  est l'opérateur tangentiel, défini au chapitre 4:

$$\mathbf{H}(\Delta \phi) = \frac{\sin \Delta \phi}{\Delta \phi} \mathbf{I} + \frac{(1 - \cos \Delta \phi)}{\Delta \phi^2} \Delta \hat{\phi} + \frac{1}{\Delta \phi^2} \left[ 1 - \frac{\sin \Delta \phi}{\Delta \phi} \right] \Delta \phi \otimes \Delta \phi$$

L'actualisation de la courbure et la torsion est ainsi réalisée par:

$$b_\alpha = \epsilon_\alpha^\beta \mathbf{t} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}_\beta}{\partial S} = \Delta \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{n}_\alpha + B_\alpha \quad (6.24)$$

et

$$b = \mathbf{n}_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{n}_1}{\partial S} = \Delta \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{t} + B \quad (6.25)$$

ou encore, si nous considérons la somme sur tous les incréments:

$$b_\alpha = \sum_{p=1}^n \Delta \boldsymbol{\rho}^{(p)} \cdot \mathbf{n}_\alpha^{(p)} + B_\alpha$$

et

$$b = \sum_{p=1}^n \Delta \rho^{(p)} \cdot \mathbf{t}^{(p)} + B$$

où cette fois-ci

$$B_\alpha = b_\alpha(t = 0), \quad B = b(t = 0)$$

## 6.6 Discrétisation par éléments finis

La discrétisation par éléments finis de la poutre permet de diviser sa longueur  $L$  en sous-longueurs notées  $L_e$  et d'approcher à chaque itération la forme linéaire (6.21) par la forme discrète suivante:

$$\sum_{e=1}^{nel} (W^e + dW^e) \Big|_{\mathbf{u}^i} = 0$$

de telle sorte que:

$$\sum_{e=1}^{nel} W^e = \bigcup_{e=1}^{nel} \delta \mathbf{u}^e \cdot (\mathbf{f}_{int}^e - \mathbf{f}^e) \quad (6.26)$$

et

$$\sum_{e=1}^{nel} dW^e = \bigcup_{e=1}^{nel} \delta \mathbf{u}^e \cdot \mathbf{k}^e \cdot d\mathbf{u}^e \quad (6.27)$$

où  $\bigcup_{e=1}^{nel}$  désigne le symbole d'assemblage par éléments finis. Dans ces équations,  $\mathbf{f}^e$ ,  $\mathbf{f}_{int}^e$  et  $\mathbf{k}^e$  représentent respectivement, le vecteur des forces externes, le *résidu interne* et la *matrice de rigidité tangente* élémentaires à l'itération  $i$ .

Nous consacrons alors cette section à l'interpolation des variables cinématiques, à l'évaluation du vecteur résidu interne et de la matrice de rigidité tangente, d'un élément typique  $e$  de dimensions finis (longueur  $L_e$  et section  $A$ ), choisi du domaine initiale  $V_0$  de la poutre. Mais avant d'exposer ces différents aspects, il est nécessaire de noter:

- Étant donné que la forme variationnelle contient les variables déplacements et rotation ainsi que leurs premières dérivées, les fonctions d'interpolation de ces champs doivent être de continuité  $C^0$ . Les fonctions linéaires de type *Lagrange* sont alors le minimum ordre d'interpolation requis.
- La position initiale  $\mathbf{X}$ , du point situé sur la ligne de référence, est interpolée par les mêmes fonctions utilisées pour l'interpolation des déplacements et rotations. Les directions initiales  $\mathbf{N}_\alpha$  de la section transversale sont dans une première étape interpolées en fonction des normales aux nœuds pour ensuite, être orthogonalisées



à la tangente  $\mathbf{S}$  de l'axe de la poutre de sorte à obtenir  $\mathbf{T} = \mathbf{S}$  en chaque point d'intégration.

- Deux types d'éléments finis isoparamétriques sont considérés, soit un élément de poutre à deux nœuds et un point d'intégration, interpolé par des fonctions linéaires:

$$N_I(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi_I \xi), \quad I = 1, 2 \quad \text{et} \quad \xi_I = \mp 1$$

et un autre, quadratique à trois nœuds, utilisant deux points d'intégration et les fonctions d'interpolation suivantes:

$$N_1(\xi) = -\frac{\xi}{2}(1 - \xi), \quad N_2(\xi) = (1 - \xi^2) \quad \text{et} \quad N_3(\xi) = \frac{\xi}{2}(1 + \xi)$$

où  $\xi$  est une coordonnée paramétrique, variant de  $-1$  à  $1$  le long de l'élément.

### 6.6.1 Approximation de la configuration initiale

Soit un élément fini à  $N$  nœuds, la position initiale d'un point situé sur l'axe de l'élément est interpolé à partir des positions nodales  $\mathbf{X}^I$ :

$$\mathbf{X} = N_I(\xi) \mathbf{X}^I, \quad I = 1, N \quad (6.28)$$

La tangente à l'axe est alors approchée par

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial S} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi} / \frac{\partial S}{\partial \xi} = J^{-1} \frac{\partial N_I}{\partial \xi} \mathbf{X}^I \quad (6.29)$$

où

$$J = \frac{\partial S}{\partial \xi} = \left\| \frac{\partial N_I}{\partial \xi} \mathbf{X}^I \right\|$$

Les normales  $\mathbf{N}_\alpha$  de la section transversale sont interpolées en fonction des normales aux nœuds  $\mathbf{N}_\alpha^I$  définies par l'utilisateur. Cependant, l'utilisation d'une simple interpolation du type

$$\mathbf{N}_\alpha = N_I(\xi) \mathbf{N}_\alpha^I$$

ne permet pas d'obtenir au point d'intégration une base orthonormale  $\mathbf{A}^0(\xi) \equiv [\mathbf{T}, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2]$  telle que  $\mathbf{T} = \mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2$  et  $\mathbf{T} = \mathbf{S}$ . Dans ce but, nous approchons d'abord les normales au point d'intégration par l'interpolation

$$\bar{\mathbf{N}}_\alpha = N_I(\xi) \mathbf{N}_\alpha^I$$

ensuite nous utilisons la procédure de *Gram-Schmidt* pour orthonormaliser ces vecteurs par rapport à  $\mathbf{S}$  et par rapport à eux mêmes: nous obtenons ainsi

$$\mathbf{N}_\alpha = (\tilde{\mathbf{N}}_\alpha + \epsilon_\alpha^j \tilde{\mathbf{N}}_j \times \mathbf{S}) / \|(\tilde{\mathbf{N}}_\alpha + \epsilon_\alpha^j \tilde{\mathbf{N}}_j \times \mathbf{S})\| \quad (6.30)$$

avec

$$\tilde{\mathbf{N}}_\alpha = (\tilde{\mathbf{N}}_\alpha - \mathbf{S} \otimes \mathbf{S} \cdot \tilde{\mathbf{N}}_\alpha) / \|(\tilde{\mathbf{N}}_\alpha - \mathbf{S} \otimes \mathbf{S} \cdot \tilde{\mathbf{N}}_\alpha)\|$$

Les courbures et la torsion initiales au point d'intégration sont calculées à partir des  $\tilde{\mathbf{N}}_\alpha$  par les interpolations

$$B_\alpha = \epsilon_\alpha^j \mathbf{T} \cdot \frac{\partial \tilde{\mathbf{N}}_j}{\partial S} = J^{-1} \epsilon_\alpha^j \mathbf{T} \cdot \frac{\partial N_I}{\partial \xi} \mathbf{N}_j^I \quad (6.31)$$

$$B = \frac{1}{2} \epsilon_\alpha^j \tilde{\mathbf{N}}_j \cdot \frac{\partial \tilde{\mathbf{N}}_\alpha}{\partial S} = \frac{1}{2} J^{-1} \epsilon_\alpha^j \tilde{\mathbf{N}}_j \cdot \frac{\partial N_I}{\partial \xi} \mathbf{N}_\alpha^I \quad (6.32)$$

où nous prenons la torsion moyenne, puisqu'en générale

$$\tilde{\mathbf{N}}_2 \cdot \frac{\partial \tilde{\mathbf{N}}_1}{\partial S} \neq -\tilde{\mathbf{N}}_1 \cdot \frac{\partial \tilde{\mathbf{N}}_2}{\partial S}$$

Le gradient des normales peut ainsi être évalué par

$$\frac{\partial \mathbf{N}_\alpha}{\partial S} = \epsilon_\alpha^j (-B_j \mathbf{T} + B \mathbf{N}_j)$$

Cette procédure de dérivation de  $\mathbf{N}_\alpha$  et  $\frac{\partial \mathbf{N}_\alpha}{\partial S}$  est suivie seulement pour la configuration initiale. Elle n'est pas unique, mais fournit des valeurs qui satisfont la condition d'orthonormalité de la base  $\mathbf{A}^0(\xi)$ . Pour les configuration subséquentes,  $\mathbf{n}_\alpha$  et  $\frac{\partial \mathbf{n}_\alpha}{\partial S}$  sont obtenues par intégration des relations cinématiques, soit par les règles d'actualisation (6.22 et 6.23).

### 6.6.2 Interpolation des déplacements et rotations

Nous supposons que la variation au cours du temps, de la position de l'axe de la poutre est indépendante de la variation des directions de sa section transversale. Les déplacements et les rotations au cours du pas de temps  $\Delta t$  sont ainsi interpolés indépendamment:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{x} &= N_I(\xi) \Delta \mathbf{x}^I \\ \Delta \phi &= N_I(\xi) \Delta \phi^I \end{aligned} \quad (6.33)$$

Les corrections  $d\mathbf{x}$  et  $d\phi$ , le champ de déplacements virtuels  $\delta\mathbf{x}$  ainsi que les rotations  $\delta\phi$ , sont interpolés à partir des variables nodales par les mêmes fonctions d'interpolation:

$$d\mathbf{x} = N_I(\xi) d\mathbf{x}^I, \quad d\phi = N_I(\xi) d\phi^I \quad (6.34)$$

et

$$\delta\mathbf{x} = N_I(\xi) \delta\mathbf{x}^I, \quad \delta\phi = N_I(\xi) \delta\phi^I \quad (6.35)$$

Par ailleurs, la règle d'actualisation des quaternions aux nœuds:

$$\Delta \mathbf{r}_{nouv}^I = d\mathbf{r}^I \circ \Delta \mathbf{r}^I = \left( \cos \frac{d\phi^I}{2}, \frac{d\phi^I}{d\phi^I} \sin \frac{d\phi^I}{2} \right) \circ \left( \cos \frac{\Delta\phi^I}{2}, \frac{\Delta\phi^I}{\Delta\phi^I} \sin \frac{\Delta\phi^I}{2} \right)$$

nous permet d'évaluer les incréments de rotation:

$$\Delta\phi_{nouv}^I = 2 \frac{\Delta \mathbf{r}_{nouv}^I}{\|\Delta \mathbf{r}_{nouv}^I\|} \tan^{-1} \left[ \frac{\|\Delta \mathbf{r}_{nouv}^I\|}{\Delta r_{0nouv}^I} \right]$$

Aux points d'intégration, ces incréments sont obtenus par interpolation, équation (6.33), moyennant lesquels nous actualisons les directions de la section transversale, les courbures et la torsion aux points d'intégration, comme déjà illustré par les équations (6.20 à 6.24).

### 6.6.3 Résidu interne et matrice de rigidité élémentaire

Le résidu interne, équation (6.26), est défini en considérant l'expression du travail virtuel interne sur un élément, équation (6.16 ou 6.19), soit:

$$W_{int}^e = \int_{L_e} \delta \mathbf{u} \cdot (\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{F}) dS$$

L'introduction dans cette équation des interpolations (6.35) permet ainsi d'écrire:

$$W_{int}^e = \delta \mathbf{u}^e \cdot \mathbf{f}_{int}^e$$

avec

$$\delta \mathbf{u}^e \equiv \left[ \dots \left| \begin{array}{cc} \delta \mathbf{x}^I & \delta \phi^I \end{array} \right| \dots \right]^T \quad I = 1, N$$

et

$$\mathbf{f}_{int}^e = \int_{L_e} \mathbf{B}^{eT} \cdot \mathbf{F} dS \quad (6.36)$$

$N$  est le nombre de nœuds de l'élément et  $\mathbf{B}^e$  l'opérateur différentiel élémentaire défini par:

$$\mathbf{B}^e \equiv \left[ \begin{array}{c|c|c} \lambda \mathbf{s}^T \frac{\partial N_I}{\partial S} & 0 & \\ \hline 0 & \lambda \mathbf{n}_1^T \cdot (N_I \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial S} + \mathbf{H} \frac{\partial N_I}{\partial S}) & \\ \hline 0 & \lambda \mathbf{n}_2^T \cdot (N_I \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial S} + \mathbf{H} \frac{\partial N_I}{\partial S}) & \\ \hline \dots & \dots & \dots I = 1, N \\ \hline \mathbf{n}_1^T \frac{\partial N_I}{\partial S} & -\lambda N_I \mathbf{n}_2^T \cdot \mathbf{H} & \\ \hline \mathbf{n}_2^T \frac{\partial N_I}{\partial S} & \lambda N_I \mathbf{n}_1^T \cdot \mathbf{H} & \\ \hline 0 & \mathbf{t}^T \cdot (N_I \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial S} + \mathbf{H} \frac{\partial N_I}{\partial S}) & \end{array} \right]$$

La matrice de rigidité tangente définie par l'équation (6.27) est obtenue en substituant les interpolations (6.33 et 6.35) dans l'expression du taux de travail virtuel interne, équation (6.17 ou 6.20), considéré sur un seul élément, soit:

$$dW_{int}^e = \delta \mathbf{u}^e \cdot \mathbf{k}^e \cdot d\mathbf{u}^e = \delta \mathbf{u}^e \cdot (\mathbf{k}_m^e + \mathbf{k}_g^e) \cdot d\mathbf{u}^e$$

où les matrices de rigidité matérielle  $\mathbf{k}_m^e$  et géométrique  $\mathbf{k}_g^e$  sont données par les expressions suivantes:

$$\mathbf{k}_m^e = \int_{L_e} \mathbf{B}^{eT} \cdot \bar{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{B}^e dS \quad (6.37)$$

et

$$\mathbf{k}_g^e = \int_{L_e} \mathbf{B}_g^{eT} \cdot \bar{\mathbf{C}}_g \cdot \mathbf{B}_g^e dS \quad (6.38)$$

avec

$$\mathbf{B}_g^e \equiv \left[ \begin{array}{c|c|c} \mathbf{I} \frac{\partial N_I}{\partial S} & 0 & \\ \hline 0 & N_I \mathbf{H} & \\ \hline \dots & \dots & \dots \\ \hline 0 & N_I \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial S} + \mathbf{H} \frac{\partial N_I}{\partial S} & \end{array} \right] \quad \text{et} \quad d\mathbf{u}^e \equiv \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ dx^I \\ d\phi^I \\ \vdots \end{array} \right\}$$

## 6.7 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons présenté le développement d'un modèle de poutre courbe tridimensionnelle obtenu par l'introduction d'une cinématique basée sur l'hypothèse de

*Timoshenko* et sur la théorie dite de *premier ordre*. Les éléments linéaire et quadratique qui en découlent permettent l'analyse non linéaire par éléments finis des structures tridimensionnelles constituées d'assemblage de poutres minces ou épaisses. La paramétrisation des grandes rotation par le vecteur rotation a permis d'obtenir un champ cinématique "exact" et a facilité considérablement la mise en œuvre de la formulation lagrangienne totale de ces éléments.

La très grande performance de ces éléments est démontrée au chapitre 8 à travers une brochette de tests pratiques sélectionnés dans la littérature.

## Chapitre 7

# Théorie des coques

### 7.1 Introduction

Les coques jouent un rôle très important dans l'analyse de nombreux types de structures. La géométrie de tels corps orientés favorise le choix d'une cinématique particulière par rapport à la cinématique générale d'un solide. D'une façon générale, deux approches sont utilisées pour la dérivation des théories des coques. Dans la première approche, la coque est traitée comme un solide tridimensionnel; on parle alors de l'espace de la coque. Cependant, les équations de base sont réduites, via des hypothèses sur le champ de déplacements et l'intégration à travers l'épaisseur, à des équations bidimensionnelles reliées à une surface de référence communément choisie au milieu de la coque (surface moyenne ou médiane). Cette *approche tridimensionnelle dégénérée* introduite en 1968 par Ahmad et al. [AIZ68, AIZ70] a dominé, pendant plusieurs années, les théories des coques et a été adoptée, due à sa simplicité par plusieurs analystes. Les travaux de Ramm [Ram77], Parisch [Par79, Par91], Hughes et al. [HL81a, HL81b, HC83], Bathe et al [BB80, DB84] et Mahe et Sourisseau [MS93], parmi plusieurs autres, constituent des exemples représentatifs de cette méthodologie dans le cas non linéaire. Dans la seconde approche, la coque est considérée, dès le départ, comme un domaine tridimensionnel, dit milieu ou surface

de *Cosserat*, dans lequel les degrés de liberté en translations aussi bien qu'en rotations sont assignés à chaque point du domaine. Cette *approche directe*, qui trouve son point de départ dans les travaux des frères Cosserat [CC09], a été initiée par Ericksen et Truesdell [ET58], élaborée ensuite par Green, Cohen et leurs collègues [GNW65, CD66, GZ68, GN74] et reformulée et appliquée tout récemment par Simo et ses collaborateurs [SF89, SFR89, SFR90, SRF90a, SRF90b, SK92, Sim93]. Parce qu'elle permet de traiter aisément les grands déplacements et les grandes rotations entre autres, l'approche directe est en train de devenir très populaire.

Dans ce chapitre, nous présentons un modèle de coque basé sur l'hypothèse cinématique des section droites et de non variation de l'épaisseur (Reissner/Mindlin/Naghdi [Rei74, Nag63]) et l'hypothèse de contraintes planes. Ce modèle permet l'analyse non linéaire statique, en grands déplacements et en grandes rotations mais en petites déformations élastoplastiques, des coques de forme générale discrétisées par éléments finis. La formulation proposée est inspirée de l'approche *géométriquement exacte* proposée par Simo [SF89]. Une partie de ce chapitre est consacrée à l'établissement des relations cinématiques et mécaniques qui caractérisent les coques de formes arbitraires. Les expressions de déformation réelles et virtuelles d'un point quelconque sont établies en fonction des composantes du vecteur déplacement de la surface moyenne et des rotations de son vecteur directeur. Les relations cinématiques déformations-déplacements, les relations de comportement entre contraintes et déformations et entre efforts résultants et déformations généralisées ainsi que l'expression du travail virtuel interne sont présentés sous forme matricielle pour faciliter la formulation des modèles élément finis.

Dans l'autre partie du chapitre, nous abordons l'aspect numérique et technique. Nous présentons l'approximation par éléments finis adoptée et dégageons les expressions explicites du résidu interne et de la matrice tangente consistante pour un élément fini typique. Quelques pages sont consacrées à l'actualisation des entités cinématiques et à la notion de rigidité fictive associée à la rotation autour du vecteur directeur [Par91, FS92].

## 7.2 Aspects géométriques et cinématiques

### 7.2.1 Définitions géométriques

Une coque est un solide limité par deux surfaces parallèles. Géométriquement, un tel domaine peut être défini par une surface courbe  $\Pi$  dite *surface de référence* et un ensemble de fibres transversales, de longueur  $h$  éventuellement variable en chacun des

points de la surface  $\Pi$ , mais restant petites en comparaison avec ses dimensions et son rayon de courbure minimum figure (7.1). Une configuration arbitraire de la coque est alors définie par les données de la position de chacun des points de la surface de référence et des vecteurs unitaires, dits *vecteurs directeurs*, liés à chacun de ces points.

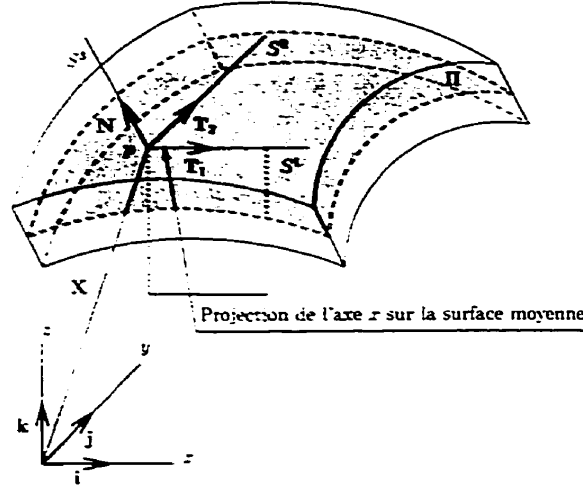


Figure 7.1: Géométrie de la coque

Il est fréquent et commode de considérer la *surface moyenne*, dite aussi *surface médiane*, comme surface de référence et décrire cette surface par deux coordonnées paramétriques  $S^1$  et  $S^2$  suivant deux vecteurs unitaires orthogonaux  $S_1$  et  $S_2$  choisis dans la configuration initiale de la coque. Ainsi, si  $p$  est un point matériel quelconque de la surface moyenne de référence, le vecteur position de  $p$  dans la configuration initiale est défini par  $\mathbf{X}(S^1, S^2)$  et dans la configuration actuelle par  $\mathbf{x}(S^1, S^2)$ . Quant aux vecteurs unitaires tangents à la ligne  $S^\alpha$ , respectivement à ces configurations, il sont définis par:

$$\mathbf{S}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial S^\alpha}$$

et

$$\mathbf{s}_\alpha = \lambda_\alpha^{-1} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial S^\alpha} \quad \text{où} \quad \lambda_\alpha = \left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial S^\alpha} \right\|$$

où l'indice  $\alpha$  et d'autres indices grecques minuscules, que nous utiliserons dans ce chapitre pour décrire les quantités reliées à la surface moyenne varient de 1 à 2. Nous attachons au point  $p$  dans la configuration initiale une base orthonormale mobile  $\mathbf{A}^0(S^1, S^2)$ , engendrée par les vecteurs de base  $\mathbf{T}_1$ ,  $\mathbf{T}_2$  et  $\mathbf{N}$ , choisis tels que:

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{S}_1, \quad \mathbf{T}_2 = \mathbf{S}_2 \quad \text{et} \quad \mathbf{N} = \mathbf{T}_1 \times \mathbf{T}_2$$



et auxquels nous associerons les vecteurs  $\mathbf{t}_1$ ,  $\mathbf{t}_2$  et  $\mathbf{n}$ , définissant dans la configuration actuelle la base orthonormale  $\mathbf{A}(S^1, S^2)$ , obtenue par une transformation orthogonale de la base  $\mathbf{A}^0(S^1, S^2)$ :

$$\mathbf{t}_1 = \mathbf{R} \cdot \mathbf{T}_1 \quad \mathbf{t}_2 = \mathbf{R} \cdot \mathbf{T}_2 \quad \text{et} \quad \mathbf{n} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{N}$$

C'est dans la base orthonormale  $\mathbf{A}^0(S^1, S^2)$  que sera formulé le principe des travaux virtuels et c'est suivant ses vecteurs de base que seront définies les mesures physiques de déformations et de contraintes. Pour une définition plus explicite de ces vecteurs, considérons les vecteurs de base covariants  $\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^1}$  et  $\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^2}$ , tangents en  $p$  aux directions définies par les coordonnées paramétriques gaussiennes  $\xi^1$  et  $\xi^2$ . Le vecteur  $\mathbf{N}$  est choisi comme étant le vecteur unitaire normal au plan tangent  $(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^1}, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^2})$  en  $p$ :

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^1} \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^2} / \left\| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^1} \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^2} \right\|$$

Ce vecteur permet de définir la coordonnée paramétrique  $S^3 \in [-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]$  suivant la fibre transversale dans la configuration initiale et par le fait même, l'orientation de la coque dans cette configuration. La surface située à l'abscisse  $\frac{h}{2}$  dans le sens positif de  $\mathbf{N}$  est la surface supérieure de la coque et l'autre est sa surface inférieure. Pour la définition de  $\mathbf{T}_1 = \mathbf{S}_1$  et  $\mathbf{T}_2 = \mathbf{S}_2$ , nous adoptons la convention suivante:

$$\mathbf{T}_2 = \begin{cases} \frac{\mathbf{N} \times \mathbf{i}}{\|\mathbf{N} \times \mathbf{i}\|} & \text{si } \mathbf{N} \cdot \mathbf{i} < \cos 0.1^\circ \\ \frac{\mathbf{N} \times \mathbf{k}}{\|\mathbf{N} \times \mathbf{k}\|} & \text{si } \mathbf{N} \cdot \mathbf{i} \geq \cos 0.1^\circ \end{cases}$$

et

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2 \times \mathbf{N}$$

où  $\mathbf{i}$  et  $\mathbf{k}$  sont respectivement les vecteurs unitaires suivant les axes globaux  $x$  et  $z$  (figure 7.1). Ainsi, la direction locale  $S^1$  est par défaut la projection de l'axe global  $x$  sur la surface moyenne. Si l'axe  $x$  est presque normale à la surface, la ligne  $S^1$  est alors la projection sur la surface de l'axe global  $z$ . La direction  $S^2$  est choisie de sorte que  $(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{N})$  forme un trièdre droit.

L'élément différentiel  $d\mathbf{X}$  au point  $p$  s'écrit par conséquent:

$$d\mathbf{X} = \mathbf{T}_\alpha dS^\alpha = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^\beta} d\xi^\beta \quad (7.1)$$

ce qui permet de déduire la transformation géométrique entre les coordonnées paramétriques  $S^\alpha$  et  $\xi^\beta$ :

$$\frac{\partial}{\partial S^\beta} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial S^\beta} \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha}$$

où

$$\left[ \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial S^\beta} \right] = \left[ \frac{\partial S^\alpha}{\partial \xi^\beta} \right]^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \cdot \partial \mathbf{X} / \partial \xi^1 & \mathbf{T}_1 \cdot \partial \mathbf{X} / \partial \xi^2 \\ \mathbf{T}_2 \cdot \partial \mathbf{X} / \partial \xi^1 & \mathbf{T}_2 \cdot \partial \mathbf{X} / \partial \xi^2 \end{bmatrix}^{-1}$$

### 7.2.2 Hypothèses cinématiques

La théorie des coques que nous considérons dans ce chapitre est fondée sur l'hypothèse cinématique des sections droites et de non variation de l'épaisseur. Selon cette hypothèse, souvent associée aux noms de *Reissner*, *Mindlin* et *Naghdi*, une fibre transversale de longueur  $h$ , initialement rectiligne et normale à la surface moyenne reste rectiligne (mais pas nécessairement normale à la surface moyenne) et ne subit aucune élongation au cours du temps. Un point matériel  $q$  de la fibre transversale initialement situé à la position

$$\hat{\mathbf{X}}(S^1, S^2, S^3) = \mathbf{X}(S^1, S^2) + S^3 \mathbf{N}(S^1, S^2) \quad (7.2)$$

est transformé dans la configuration actuelle à la position

$$\hat{\mathbf{x}}(S^1, S^2, S^3) = \mathbf{x}(S^1, S^2) + S^3 \mathbf{n}(S^1, S^2) \quad (7.3)$$

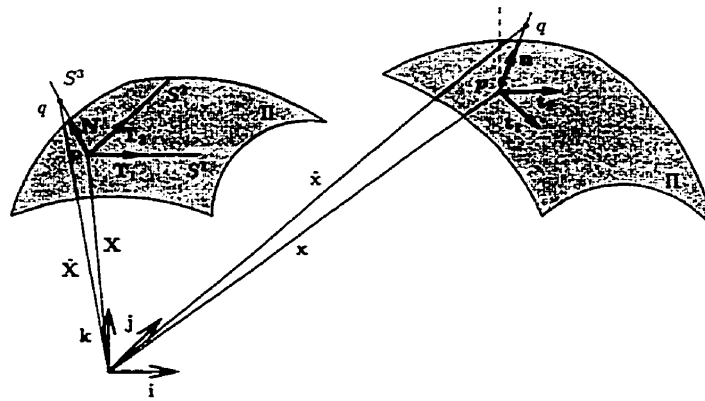


Figure 7.2: Cinématique de la coque

Connue sous le nom de *cinématique de la surface de Cosserat à un seul vecteur directeur inextensible*, une telle cinématique permet donc de décrire le mouvement de

la coque en entier. simplement par la connaissance en chaque instant du couple  $(\mathbf{x}, \mathbf{n})$ , ou plus explicitement, du champ de déplacement:  $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$  et du champ de rotation  $\phi$  définissant la transformation orthogonale  $\mathbf{R}$ , reliant les vecteurs directeurs  $\mathbf{n}$  et  $\mathbf{N}$ :

$$\mathbf{n} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{N} \quad \text{et} \quad \mathbf{R} = \exp(\tilde{\phi})$$

où  $\tilde{\phi}$  et le tenseur antisymétrique défini par les propriétés:

$$\tilde{\phi} \cdot \phi = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{\phi} \cdot \mathbf{v} = \phi \times \mathbf{v} \quad \text{pour tout vecteur } \mathbf{v}$$

et  $\exp(\tilde{\phi})$  est la le tenseur orthogonal défini en termes du vecteur rotation  $\phi$  par

$$\exp(\tilde{\phi}) = \cos \phi \mathbf{I} + \frac{\sin \phi}{\phi} \tilde{\phi} + \frac{1 - \cos \phi}{\phi^2} \phi \otimes \phi$$

La cinématique au cours du temps de la coque est alors décrite par le couple  $(\mathbf{x}, \mathbf{n})$  représentant respectivement la position de la surface moyenne et le champ de vecteurs directeurs aux points de la surface moyenne, cinématique connue sous le nom de *cinématique de la surface de Cosserat à un seul vecteur directeur inextensible*.

Avec ces hypothèses, les gradients de la position actuelle du point  $q$  par rapport aux coordonnées paramétriques  $S^i|_{i=1,2,3}$  sont donc

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial S^\alpha} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial S^\alpha} + S^3 \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial S^\alpha} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial S^3} = \mathbf{n}$$

Dans la configuration initiale nous avons les expressions suivantes:

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial S^\alpha} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial S^\alpha} + S^3 \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial S^\alpha} = \mathbf{T}_\alpha - S^3 B_{\alpha\beta} \mathbf{T}_\beta \quad \text{et} \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial S^3} = \mathbf{N}$$

nous permettant à leurs tour d'obtenir les vecteurs contravariants:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S^\alpha}{\partial \hat{\mathbf{X}}} &= R^{-1} \epsilon_\beta^\alpha \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial S^3} \times \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial S^\beta} = \mathbf{T}_\alpha + S^3 B_{\beta\alpha} \mathbf{T}_\beta + O(S^2) \\ \frac{\partial S^3}{\partial \hat{\mathbf{X}}} &= R^{-1} \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial S^1} \times \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial S^2} = \mathbf{N} \end{aligned}$$

avec  $R$  égal à

$$R = \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial S^3} \cdot \left( \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial S^1} \times \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial S^2} \right) = 1 - S^3 B_{\alpha\alpha} + O(S^2)$$

$\epsilon_\alpha^\beta$  désigne le *symbole de permutation* et  $B_{\alpha\beta}$  les composantes du *tenseur des courbure*  $\mathbf{B}$  de la surface moyenne initiale:

$$\epsilon_1^1 = -\epsilon_2^2 = 0, \quad \epsilon_1^2 = -\epsilon_2^1 = 1$$

et

$$B_{\alpha\beta} = \mathbf{T}_\alpha \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{T}_\beta = -\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial S^\alpha} \cdot \mathbf{T}_\beta = \mathbf{N} \cdot \frac{\partial \mathbf{T}_\alpha}{\partial S^\beta} = B_{\beta\alpha}$$

### Remarques

- Nous adoptons une *formulation lagrangienne totale*, dans laquelle la configuration initiale de la coque est choisie comme référence. L'élément de volume initial  $dV^0$ , donnée par la relation paramétrique:

$$dV^0 = R dS^1 dS^2 dS^3 \quad \text{où} \quad R = \left( \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial S^1} \times \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial S^2} \right) \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial S^3}$$

sera approché par:

$$dV^0 = dS^1 dS^2 dS^3 = dA dS^3$$

en admettant que la longueur de la fibre longitudinale, c'est-à-dire parallèle à la surface moyenne, ne varie pas beaucoup à travers l'épaisseur.

- Pour spécifier l'orientation du vecteur directeur  $\mathbf{n}$ , nous utilisons l'algèbre quaternion. La transformation orthogonale  $\mathbf{R} = \exp(\tilde{\phi})$  est remplacée dans ce cas par le *quaternion* unitaire  $\mathbf{r} = (r_0, \mathbf{r})$ , de sorte que

$$r_0 = \cos(\phi/2), \quad \text{et} \quad \mathbf{r} = \frac{\sin(\phi/2)}{\phi} \phi$$

ce qui permet d'exprimer le tenseur rotation par:

$$\exp(\tilde{\phi}) = (2r_0^2 - 1) \mathbf{I} + 2r_0 \hat{\mathbf{r}} + 2 \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}$$

et le vecteur directeur par:

$$\mathbf{n} = \mathbf{r} \circ \mathbf{N} \circ \mathbf{r}^\dagger = (2r_0^2 - 1) \mathbf{N} + 2r_0 \mathbf{r} \times \mathbf{N} + 2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{N}) \mathbf{r}$$

### 7.2.3 Mesure de déformation

Valable pour les grandes rotations mais petites déformations et bien approprié pour une description lagrangienne totale, le tenseur de *Green-Lagrange*  $\boldsymbol{\epsilon}^G$  est retenu comme mesure de déformation des coques. Il est défini en terme du gradient de déformation  $\mathbf{F}$  par:

$$\boldsymbol{\epsilon}^G = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I})$$

ou aussi, en fonction de ses composantes covariantes par:

$$\epsilon^G = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial S^i} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial S^j} - \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial S^i} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial S^j} \right) \frac{\partial S^i}{\partial \hat{\mathbf{X}}} \otimes \frac{\partial S^j}{\partial \hat{\mathbf{X}}}, \quad i, j = 1, 2, 3$$

Ce tenseur sera rapporté à la base orthonormale  $\mathbf{A}^0 \equiv [\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{N}]$  dans le but de définir les mesures physiques de déformations, soit les déformations de membrane, de flexion et de cisaillement transversal de la surface de référence. Ainsi:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^G = \varepsilon_{\alpha\beta} \mathbf{T}_\alpha \otimes \mathbf{T}_\beta + \varepsilon_{\alpha 3} \mathbf{T}_\alpha \otimes \mathbf{N} + \varepsilon_{3\alpha} \mathbf{N} \otimes \mathbf{T}_\alpha + \varepsilon_{33} \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} \quad (7.4)$$

où nous obtenons, compte tenu des résultats de la section précédente et en négligeant tous les termes de second ordre et plus en  $S^3$ :

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \mathbf{T}_\alpha \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^G \cdot \mathbf{T}_\beta = \frac{1}{2} [g_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta} + S^3 (B_{\alpha\gamma} g_{\gamma\beta} + B_{\beta\gamma} g_{\gamma\alpha} - 2b_{\alpha\beta})]$$

$$\varepsilon_{\alpha 3} = \mathbf{T}_\alpha \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^G \cdot \mathbf{N} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial S^\alpha} \cdot \mathbf{n} + S^3 B_{\alpha\gamma} \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial S^\gamma} \cdot \mathbf{n} \right) \right]$$

$$\varepsilon_{3\alpha} = \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^G \cdot \mathbf{T}_\alpha = \varepsilon_{\alpha 3}$$

$$\varepsilon_{33} = \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^G \cdot \mathbf{N} = 0$$

expressions dans lesquelles nous avons introduit les variables cinématiques  $g_{\alpha\beta}$  et  $b_{\alpha\beta}$  définies par:

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial S^\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial S^\beta} = g_{\beta\alpha}$$

dénotant le *métrique* de la surface moyenne déformée et

$$b_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial S^\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial S^\beta} + \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial S^\beta} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial S^\alpha} \right) = b_{\beta\alpha}$$

désignant l'approximation des courbures de cette surface, puisque  $\mathbf{n}$  n'est pas tout à fait normal à la surface moyenne dans la configuration actuelle. Nous introduisons à présent les *déformations généralisées* suivantes:

$$\begin{aligned} e_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (g_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}) && : \text{déformations de membrane} \\ \kappa_{\alpha\beta} &= B_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta} + B_{\alpha\gamma} e_{\gamma\beta} + B_{\beta\gamma} e_{\gamma\alpha} && : \text{déformations de flexion} \\ \gamma_{\alpha 3} &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial S^\alpha} \cdot \mathbf{n} && : \text{déformations de} \\ &&& \text{cisaillement transversal} \end{aligned} \quad (7.5)$$

La substitution de ces expressions dans les composantes de  $\boldsymbol{\varepsilon}^G$ , nous permet de définir les déformations:

$$\begin{cases} \varepsilon_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta} + S^3 \kappa_{\alpha\beta} \\ \varepsilon_{\alpha 3} = \frac{1}{2} \gamma_{\alpha 3} = \varepsilon_{3\alpha} \end{cases} \quad (7.6)$$

où nous avons négligé dans l'expression de  $\varepsilon_{\alpha 3}$ , le terme  $S^3 B_{\alpha\gamma} \gamma_{\gamma 3}$ . Notons au passage que  $\varepsilon_{33} = 0$ , dû au fait que la fibre transversale est supposée inextensible. Même si cette

composante n'est pas nulle, sa contribution au travail virtuel ne sera pas considérée, puisque nous admettons qu'il n'y a pas de contrainte selon la normale à la surface moyenne.

#### 7.2.4 Variations des déformations

##### Premières variations

La linéarisation des relations (7.6), nous permet d'obtenir les premières variations des déformations, soit

$$\begin{cases} \delta \varepsilon_{\alpha\beta} = \delta e_{\alpha\beta} + S^3 \delta \kappa_{\alpha\beta} \\ \delta \varepsilon_{\alpha 3} = \frac{1}{2} \delta \gamma_{\alpha 3} \end{cases} \quad (7.7)$$

où les variations des déformations généralisées sont données par les expressions:

$$\begin{aligned} \delta e_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left( \lambda_\beta \mathbf{s}_\beta \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{x}}{\partial S^\alpha} + \lambda_\alpha \mathbf{s}_\alpha \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{x}}{\partial S^\beta} \right) \\ \delta \kappa_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial S^\beta} \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{x}}{\partial S^\alpha} + \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial S^\alpha} \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{x}}{\partial S^\beta} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left( \lambda_\beta \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial S^\alpha} \times \mathbf{s}_\beta + \lambda_\alpha \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial S^\beta} \times \mathbf{s}_\alpha \right) \cdot \delta \boldsymbol{\theta} \\ &+ \frac{1}{2} \left( \lambda_\beta \mathbf{n} \times \mathbf{s}_\beta \cdot \frac{\partial \delta \boldsymbol{\theta}}{\partial S^\alpha} + \lambda_\alpha \mathbf{n} \times \mathbf{s}_\alpha \cdot \frac{\partial \delta \boldsymbol{\theta}}{\partial S^\beta} \right) + B_{\alpha\gamma} \delta e_{\gamma\beta} + B_{\beta\gamma} \delta e_{\gamma\alpha} \\ \delta \gamma_{\alpha 3} &= \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{x}}{\partial S^\alpha} + \lambda_\alpha \mathbf{n} \times \mathbf{s}_\alpha \cdot \delta \boldsymbol{\theta} \end{aligned}$$

qui s'écrivent aussi sous la forme:

$$\begin{cases} \delta \mathbf{E} = \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{u} \\ \delta \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{B}_\gamma \cdot \delta \mathbf{u} \end{cases}$$

exprimant moyennant les opérateurs différentiels  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{B}_\gamma$ , la dépendance des déformations virtuelles généralisées  $\delta \mathbf{E}$  et  $\delta \boldsymbol{\gamma}$  aux déplacements virtuels généralisés  $\delta \mathbf{u}$ . Ces entités sont définis par:

$$\delta \mathbf{u} \equiv [\delta \mathbf{x} \ \delta \boldsymbol{\phi}]^T, \quad \delta \mathbf{E} \equiv [\delta e_{11} \ \delta e_{22} \ 2\delta e_{12} \ \delta \kappa_{11} \ \delta \kappa_{22} \ 2\delta \kappa_{12}]^T, \quad \delta \boldsymbol{\gamma} \equiv [\delta \gamma_{13} \ \delta \gamma_{23}]^T$$

et les opérateurs différentiels par:

$$\mathbf{B} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{B}_x & \mathbf{B}_\phi \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{B}_\gamma \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{n}^T \frac{\partial}{\partial S^1} & (\lambda_1 \mathbf{n} \times \mathbf{s}_1)^T \cdot \mathbf{H} \\ \mathbf{n}^T \frac{\partial}{\partial S^2} & (\lambda_2 \mathbf{n} \times \mathbf{s}_2)^T \cdot \mathbf{H} \end{bmatrix}$$

avec

$$\mathbf{B}_x \equiv \begin{bmatrix} \lambda_1 \mathbf{s}_1^T \frac{\partial}{\partial S^1} \\ \lambda_2 \mathbf{s}_2^T \frac{\partial}{\partial S^2} \\ \lambda_2 \mathbf{s}_2^T \frac{\partial}{\partial S^1} + \lambda_1 \mathbf{s}_1^T \frac{\partial}{\partial S^2} \\ (\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial S^1} + 2\lambda_1 B_{11} \mathbf{s}_1 + \lambda_2 B_{12} \mathbf{s}_2)^T \frac{\partial}{\partial S^1} + \lambda_1 B_{12} \mathbf{s}_1^T \frac{\partial}{\partial S^2} \\ (\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial S^2} + 2\lambda_2 B_{22} \mathbf{s}_2 + \lambda_1 B_{12} \mathbf{s}_1)^T \frac{\partial}{\partial S^2} + \lambda_2 B_{12} \mathbf{s}_2^T \frac{\partial}{\partial S^1} \\ (\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial S^2} + \lambda_2(B_{11} + B_{22}) \mathbf{s}_2 + 2\lambda_1 B_{12} \mathbf{s}_1)^T \frac{\partial}{\partial S^1} \\ + (\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial S^1} + \lambda_1(B_{11} + B_{22}) \mathbf{s}_1 + 2\lambda_2 B_{12} \mathbf{s}_2)^T \frac{\partial}{\partial S^2} \end{bmatrix}$$

et

$$\mathbf{B}_\phi \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ (\lambda_1 \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial S^1} \times \mathbf{s}_1)^T \cdot \mathbf{H} + (\lambda_1 \mathbf{n} \times \mathbf{s}_1)^T \cdot (\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial S^1} + \mathbf{H} \frac{\partial}{\partial S^1}) \\ (\lambda_2 \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial S^2} \times \mathbf{s}_2)^T \cdot \mathbf{H} + (\lambda_2 \mathbf{n} \times \mathbf{s}_2)^T \cdot (\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial S^2} + \mathbf{H} \frac{\partial}{\partial S^2}) \\ (\lambda_2 \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial S^1} \times \mathbf{s}_2 + \lambda_1 \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial S^2} \times \mathbf{s}_1)^T \cdot \mathbf{H} \\ + (\lambda_2 \mathbf{n} \times \mathbf{s}_2)^T \cdot (\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial S^1} + \mathbf{H} \frac{\partial}{\partial S^1}) \\ + (\lambda_1 \mathbf{n} \times \mathbf{s}_1)^T \cdot (\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial S^2} + \mathbf{H} \frac{\partial}{\partial S^2}) \end{bmatrix}$$

$\mathbf{H}$  étant l'opérateur tangentiel reliant la variation angulaire spatiale  $\delta\theta$  à la variation de la rotation  $\delta\phi$ , comme déjà vu au chapitre 4.

## Secondes variations

Des expressions des premières variations des déformations, nous obtenons

$$\begin{cases} d\delta\epsilon_{\alpha\beta} = d\delta e_{\alpha\beta} + S^3 d\delta\kappa_{\alpha\beta} \\ d\delta\epsilon_{\alpha 3} = \frac{1}{2}d\delta\gamma_{\alpha 3} \end{cases} \quad (7.8)$$

où il est facile de montrer, en tenant compte des notions vues au chapitre 4, que

$$\begin{aligned} d\delta e_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial\delta\mathbf{x}}{\partial S^\alpha} \cdot \frac{\partial d\mathbf{x}}{\partial S^\beta} + \frac{\partial\delta\mathbf{x}}{\partial S^\beta} \cdot \frac{\partial d\mathbf{x}}{\partial S^\alpha} \right] \\ d\delta\kappa_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{2} \left[ \frac{\partial\delta\mathbf{x}}{\partial S^\alpha} \cdot \frac{\partial\mathbf{n}}{\partial S^\beta} \times d\boldsymbol{\theta} - \delta\boldsymbol{\theta} \cdot \frac{\partial\mathbf{n}}{\partial S^\beta} \times \frac{\partial d\mathbf{x}}{\partial S^\alpha} + \right. \\ &\quad \frac{\partial\delta\mathbf{x}}{\partial S^\beta} \cdot \frac{\partial\mathbf{n}}{\partial S^\alpha} \times d\boldsymbol{\theta} - \delta\boldsymbol{\theta} \cdot \frac{\partial\mathbf{n}}{\partial S^\alpha} \times \frac{\partial d\mathbf{x}}{\partial S^\beta} + \\ &\quad \frac{\partial\delta\mathbf{x}}{\partial S^\alpha} \cdot \mathbf{n} \times \frac{\partial d\boldsymbol{\theta}}{\partial S^\beta} - \frac{\partial\delta\boldsymbol{\theta}}{\partial S^\beta} \cdot \mathbf{n} \times \frac{\partial d\mathbf{x}}{\partial S^\alpha} + \\ &\quad \left. \frac{\partial\delta\mathbf{x}}{\partial S^\beta} \cdot \mathbf{n} \times \frac{\partial d\boldsymbol{\theta}}{\partial S^\alpha} - \frac{\partial\delta\boldsymbol{\theta}}{\partial S^\alpha} \cdot \mathbf{n} \times \frac{\partial d\mathbf{x}}{\partial S^\beta} \right] \\ &\quad + \frac{1}{4} \delta\boldsymbol{\theta} \cdot \left[ \lambda_\alpha(\mathbf{s}_\alpha \otimes \frac{\partial\mathbf{n}}{\partial S^\beta} + \frac{\partial\mathbf{n}}{\partial S^\beta} \otimes \mathbf{s}_\alpha) + \right. \\ &\quad \left. \lambda_\beta(\mathbf{s}_\beta \otimes \frac{\partial\mathbf{n}}{\partial S^\alpha} + \frac{\partial\mathbf{n}}{\partial S^\alpha} \otimes \mathbf{s}_\beta) + 4b_{\alpha\beta} \mathbf{I} \right] \cdot d\boldsymbol{\theta} \\ &\quad + \frac{1}{4} \lambda_\beta \left[ \delta\boldsymbol{\theta} \cdot (\mathbf{s}_\beta \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{s}_\beta) \cdot \frac{\partial d\boldsymbol{\theta}}{\partial S^\alpha} + \frac{\partial\delta\boldsymbol{\theta}}{\partial S^\alpha} \cdot (\mathbf{s}_\beta \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{s}_\beta) \cdot \delta\boldsymbol{\theta} \right] \\ &\quad + \frac{1}{4} \lambda_\alpha \left[ \delta\boldsymbol{\theta} \cdot (\mathbf{s}_\alpha \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{s}_\alpha) \cdot \frac{\partial d\boldsymbol{\theta}}{\partial S^\beta} + \frac{\partial\delta\boldsymbol{\theta}}{\partial S^\beta} \cdot (\mathbf{s}_\alpha \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{s}_\alpha) \cdot \delta\boldsymbol{\theta} \right] \\ &\quad + B_{\alpha\gamma} d\delta e_{\gamma\beta} + B_{\beta\gamma} d\delta e_{\gamma\alpha} \\ d\delta\gamma_{\alpha 3} &= -\frac{\partial\delta\mathbf{x}}{\partial S^\alpha} \cdot \mathbf{n} \times d\boldsymbol{\theta} + \delta\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n} \times \frac{\partial d\mathbf{x}}{\partial S^\alpha} + \\ &\quad \frac{1}{2} \lambda_\alpha \delta\boldsymbol{\theta} \cdot (\mathbf{s}_\alpha \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{s}_\alpha) \cdot d\boldsymbol{\theta} \end{aligned}$$

où nous avons supposé  $\gamma_{\alpha 3} \approx 0$  dans les expressions de  $\delta\kappa_{\alpha\beta}$  et  $\delta\gamma_{\alpha 3}$ .



### 7.3 Aspects cinétiques

#### 7.3.1 Expression du travail virtuel interne

En description lagrangienne totale, le travail virtuel interne s'exprime par:

$$W_{int} = \int_{V^0} \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon}^G dV^0$$

où  $V^0$  est le volume initial de la coque,  $\boldsymbol{\sigma}$  le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff de seconde espèce et  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}^G$  le tenseur de déformations virtuelles, défini par la variation des déformations de Green-Lagrange. Exprimée dans la base paramétrique  $\mathbf{A}^0(S^1, S^2)$ , l'expression du travail virtuel interne s'écrit:

$$W_{int} = \int_A \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma^{\alpha\beta} \delta \varepsilon_{\alpha\beta} + \sigma^{\alpha 3} \delta \gamma_{\alpha 3}) dA dS^3 \quad (7.9)$$

où nous avons retenu l'hypothèse des contraintes planes et approché l'élément de volume initial par  $dV^0 \approx dS^1 dS^2 dS^3 = dA dS^3$ . La substitution des définitions des déformations virtuelles dans l'équation (7.9), permet de définir les *efforts généralisés* et réduire l'expression de  $W_{int}$  à:

$$W_{int} = \int_A (\delta \mathbf{E} \cdot \mathbf{F} + \delta \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{T}) dA = \int_A \delta \mathbf{u} \cdot (\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{F} + \mathbf{B}_\gamma^T \cdot \mathbf{T}) dA \quad (7.10)$$

tels que:

$$\mathbf{F} \equiv [N^{11} \ N^{22} \ N^{12} \ M^{11} \ M^{22} \ M^{12}]^T, \quad \mathbf{T} \equiv [T^1 \ T^2]^T$$

dont les composantes définissent les efforts résultants suivant:

$$\begin{aligned} N^{\alpha\beta} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma^{\alpha\beta} dS^3 & : \text{efforts de membrane} \\ M^{\alpha\beta} &= \int_{-h/2}^{h/2} S^3 \sigma^{\alpha\beta} dS^3 & : \text{moments de flexion} \\ T^\alpha &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma^{\alpha 3} dS^3 & : \text{efforts tranchants} \end{aligned} \quad (7.11)$$

#### 7.3.2 Variation du travail virtuel interne

La procédure de résolution de *Newton-Raphson* nécessite le calcul de la matrice de rigidité tangente. Cette matrice est composée de deux parties, une résultant du modèle matériel et l'autre du changement de la géométrie. Retournant à l'équation (7.9) et calculant la variation du travail virtuel interne, nous obtenons après quelques manipulations l'expression suivante

$$\begin{aligned} dW_{int} &= \int_A (dN^{\alpha\beta} \delta e_{\alpha\beta} + dM^{\alpha\beta} \delta \kappa_{\alpha\beta} + dT^\alpha \delta \gamma_{\alpha 3} \\ &+ N^{\alpha\beta} d\delta e_{\alpha\beta} + M^{\alpha\beta} d\delta \kappa_{\alpha\beta} + T^\alpha d\delta \gamma_{\alpha 3}) dA \end{aligned} \quad (7.12)$$

où

$$\begin{aligned} dN^{\alpha\beta} &= \int_{-h/2}^{h/2} d\sigma^{\alpha\beta} dS^3 \\ dM^{\alpha\beta} &= \int_{-h/2}^{h/2} S^3 d\sigma^{\alpha\beta} dS^3 \\ dT^\alpha &= \int_{-h/2}^{h/2} d\sigma^{\alpha 3} dS^3 \end{aligned} \quad (7.13)$$

représentent les incréments des efforts généralisés. La première partie de l'intégrale (7.12) forme la rigidité matérielle, alors que la seconde partie, la rigidité géométrique. Si nous supposons une loi constitutive découplée telle que

$$\begin{Bmatrix} d\sigma^{11} \\ d\sigma^{22} \\ d\sigma^{12} \end{Bmatrix} = [\mathbf{C}] \begin{Bmatrix} d\varepsilon_{11} \\ d\varepsilon_{22} \\ 2d\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} d\sigma^{13} \\ d\sigma^{23} \end{Bmatrix} = [\mathbf{C}_\gamma] \begin{Bmatrix} d\gamma_{13} \\ d\gamma_{23} \end{Bmatrix} \quad (7.14)$$

Ceci permet la représentation suivantes des incréments des efforts généralisés:

$$d\mathbf{F} = \bar{\mathbf{C}} \cdot d\mathbf{E}, \quad d\mathbf{T} = \bar{\mathbf{C}}_\gamma \cdot d\boldsymbol{\gamma} \quad (7.15)$$

avec

$$\bar{\mathbf{C}} \equiv \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \mathbf{C} & S^3 \mathbf{C} \\ S^3 \mathbf{C} & (S^3)^2 \mathbf{C} \end{bmatrix} dS^3 \quad \text{et} \quad \bar{\mathbf{C}}_\gamma \equiv \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{C}_\gamma dS^3$$

Par conséquent, en considérant les relations (7.15) et les expressions des secondes variations des déformations généralisées, le taux du travail virtuel interne s'écrit sous la forme condensée:

$$\begin{aligned} dW_{int} &= \int_A \delta \mathbf{u} \cdot (\mathbf{B}^T \cdot \bar{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B}_\gamma^T \cdot \bar{\mathbf{C}}_\gamma \cdot \mathbf{B}_\gamma \\ &\quad + \mathbf{B}_g^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}_g) \cdot d\mathbf{u} dA \end{aligned} \quad (7.16)$$

dont la partie géométrique est exprimée en fonction l'opérateur  $\mathbf{B}_g$  et le tenseur  $\bar{\mathbf{C}}_g$  définis par:

$$\mathbf{B}_g \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{I} \frac{\partial}{\partial S^1} & 0 \\ \mathbf{I} \frac{\partial}{\partial S^2} & 0 \\ 0 & \mathbf{H} \\ 0 & \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial S^1} + \mathbf{H} \frac{\partial}{\partial S^1} \\ 0 & \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial S^2} + \mathbf{H} \frac{\partial}{\partial S^2} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{C} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{xx} & \mathbf{C}_{x\theta} \\ \mathbf{C}_{x\theta}^T & \mathbf{C}_{\theta\theta} \end{bmatrix}$$

avec

$$\mathbf{C}_{\alpha\alpha} \equiv \begin{bmatrix} [N^{11} + 2B_{11}M^{11} & [(N^{12} + B_{12}(M^{11} + M^{22}) \\ + 2B_{12}M^{12}] \mathbf{I} & + (B_{11} + B_{22})M^{12}] \mathbf{I} \\ \text{sym} & [N^{22} + 2B_{22}M^{22} \\ & + 2B_{12}M^{12}] \mathbf{I} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_{\alpha\theta} \equiv - \begin{bmatrix} M^{11} \frac{\partial \hat{\mathbf{n}}}{\partial S^1} + M^{12} \frac{\partial \hat{\mathbf{n}}}{\partial S^2} + T^{13} \hat{\mathbf{n}} & M^{11} \hat{\mathbf{n}} & M^{12} \hat{\mathbf{n}} \\ M^{22} \frac{\partial \hat{\mathbf{n}}}{\partial S^2} + M^{12} \frac{\partial \hat{\mathbf{n}}}{\partial S^1} + T^{23} \hat{\mathbf{n}} & M^{12} \hat{\mathbf{n}} & M^{22} \hat{\mathbf{n}} \end{bmatrix}$$

et

$$\mathbf{C}_{\theta\theta} \equiv \begin{bmatrix} \frac{1}{2}[M^{12}(\lambda_1 \Sigma_{12} + \lambda_2 \Sigma_{21} + 4b_{12}\mathbf{I}) & \frac{1}{2}[M^{11}\lambda_1 \Xi_1 & \frac{1}{2}[M^{22}\lambda_2 \Xi_2 \\ + M^{11}(\lambda_1 \Sigma_{11} + 2b_{11}\mathbf{I}) & + M^{12}\lambda_2 \Xi_2] & + M^{12}\lambda_1 \Xi_1] \\ + M^{22}(\lambda_2 \Sigma_{22} + 2b_{22}\mathbf{I}) \\ + T^{13}\lambda_1 \Xi_1 + T^{23}\lambda_2 \Xi_2] \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \text{sym} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

où les tenseurs suivants sont introduits

$$\Sigma_{\alpha\beta} = \mathbf{s}_\alpha \otimes \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial S^\beta} + \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial S^\beta} \otimes \mathbf{s}_\alpha, \quad \Xi_\alpha = \mathbf{s}_\alpha \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{s}_\alpha$$

$\hat{\mathbf{n}}$  et  $\frac{\partial \hat{\mathbf{n}}}{\partial S^\alpha}$  sont les tenseurs antisymétriques associés respectivement aux vecteurs  $\mathbf{n}$  et  $\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial S^\alpha}$ , de sorte que:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{n} \times \mathbf{v} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{n}}}{\partial S^\alpha} \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial S^\alpha} \times \mathbf{v}$$

pour tout vecteur  $\mathbf{v}$ .

## 7.4 Lois de comportement

### 7.4.1 Modèle élastique linéaire isotrope

Dans le cas d'un matériau élastique isotrope, la loi constitutive (7.14) exprimant les relations contraintes-déformations s'écrit:

$$\begin{Bmatrix} d\sigma^{11} \\ d\sigma^{22} \\ d\sigma^{12} \end{Bmatrix} = [\mathbf{C}^{el}] \begin{Bmatrix} d\varepsilon_{11} \\ d\varepsilon_{22} \\ 2d\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} d\sigma^{13} \\ d\sigma^{23} \end{Bmatrix} = [\mathbf{C}_\gamma^{el}] \begin{Bmatrix} d\gamma_{13} \\ d\gamma_{23} \end{Bmatrix}$$

où  $\mathbf{C}^{el}$  et  $\mathbf{C}_\gamma^{el}$  sont les modules tangents élastiques définis par:

$$\mathbf{C}^{el} \equiv \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ & 1 & 0 \\ \text{sym} & & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{C}_\gamma^{el} \equiv \text{diag}[G, G]$$

L'intégration suivant l'épaisseur de ces modules, permet, dans le cas d'un matériau homogène, d'obtenir les modules élastiques globaux suivants:

$$\bar{\mathbf{C}}^{el} \equiv \begin{bmatrix} h\mathbf{C}^{el} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{12}h^3\mathbf{C}^{el} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{\mathbf{C}}_\gamma^{el} \equiv \begin{bmatrix} k^p h G & 0 \\ 0 & k^p h G \end{bmatrix}$$

avec  $k^p$  comme *paramètre de pénalité* ([HTK77], [HL81a], [HL81b]):

$$k^p = k(1 + q \frac{dA}{h^2})^{-1}$$

introduit pour pénaliser les déformations de cisaillement transversal, dans le but de respecter la condition de normalité  $\mathbf{s}_\alpha \cdot \mathbf{n} = 0$  pour les coques de *Love-Kirchhoff*. Le paramètre  $k = 5/6$  est le facteur de correction de cisaillement transversal, qui permet de mieux tenir compte de la répartition réelle des contraintes  $\sigma^{\alpha 3}$  dans l'épaisseur ([BD92], [Hug87]);  $dA$  est l'élément de surface moyenne et  $q$  est un facteur numérique, pris égal à  $0.25 \times 10^{-4}$  [HL81a].

Ainsi, en substituant dans les équations (7.10 et 7.16), les relations efforts-déformations généralisés:

$$\begin{cases} \mathbf{F} &= \bar{\mathbf{C}}^{el} \cdot \mathbf{E} \\ d\mathbf{F} &= \bar{\mathbf{C}}^{el} \cdot d\mathbf{E} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathbf{T} &= \bar{\mathbf{C}}_\gamma^{el} \cdot \boldsymbol{\gamma} \\ d\mathbf{T} &= \bar{\mathbf{C}}_\gamma^{el} \cdot d\boldsymbol{\gamma} \end{cases} \quad (7.17)$$

nous pouvant exprimer le travail virtuel interne du modèle élastique et de son taux sous les formes:

$$W_{int} = \int_A \delta \mathbf{u} \cdot (\mathbf{B}^T \cdot \bar{\mathbf{C}}^{el} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B}_\gamma^T \cdot \bar{\mathbf{C}}_\gamma^{el} \cdot \boldsymbol{\gamma}) dA \quad (7.18)$$

et

$$dW_{int} = \int_A \delta \mathbf{u} \cdot (\mathbf{B}^T \cdot \bar{\mathbf{C}}^{el} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B}_\gamma^T \cdot \bar{\mathbf{C}}_\gamma^{el} \cdot \mathbf{B}_\gamma + \mathbf{B}_g^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}_g) \cdot d\mathbf{u} dA \quad (7.19)$$

#### 7.4.2 Modèle élastoplastique

Dans le cas de l'analyse élastoplastique, nous négligeons les effets des cisaillements transversaux sur les déformations plastiques. Nous retenons ainsi, en ce qui concerne le comportement en cisaillement transversal, une loi constitutive élastique décrite par la relation précédemment établie:

$$\mathbf{T} = \bar{\mathbf{C}}_\gamma^{el} \cdot \boldsymbol{\gamma} \quad \text{et} \quad d\mathbf{T} = \bar{\mathbf{C}}_\gamma^{el} \cdot d\boldsymbol{\gamma} \quad (7.20)$$

Le comportement élastoplastique de la coque est alors dicté par son comportement en membrane et en flexion. Basé sur l'hypothèse des contraintes planes, le calcul matériel utilise les déformations de membrane et de flexion pour définir les déformations en chaque point de la surface parallèle à la surface moyenne. En chaque point de la fibre transversale, nous vérifions le critère de *von Mises*, calculons les contraintes  $\sigma^{\alpha\beta}$  et construisons le module tangent élastoplastique  $\mathbf{C}$ , défini au chapitre 3 par:

$$\mathbf{C} \equiv \begin{bmatrix} 2Q - R\sigma_{11}^2 & Q - R\sigma_{11}\sigma_{22} & -R\sigma_{11}\sigma_{12} \\ Q - R\sigma_{11}\sigma_{22} & 2Q - R\sigma_{22}^2 & -R\sigma_{22}\sigma_{12} \\ -R\sigma_{11}\sigma_{12} & -R\sigma_{22}\sigma_{12} & \frac{1}{2}Q - R\sigma_{12}^2 \end{bmatrix}.$$

Nous effectuons ensuite l'intégration suivant l'épaisseur dans le but d'obtenir les efforts résultants  $\mathbf{F}$  et le module tangent élastoplastique global  $\bar{\mathbf{C}}$  reliant  $d\mathbf{F}$  à  $d\mathbf{E}$ :

$$d\mathbf{F} = \bar{\mathbf{C}} \cdot d\mathbf{E}, \quad \text{où} \quad \bar{\mathbf{C}} \equiv \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \mathbf{C} & S^3 \mathbf{C} \\ S^3 \mathbf{C} & (S^3)^2 \mathbf{C} \end{bmatrix} dS^3 \quad (7.21)$$

Une fois évaluées, les entités globales (7.20 et 7.21) sont remplacées, comme pour le modèle élastique, dans les équations (7.10 et 7.16) pour déduire les expressions suivantes du travail virtuel interne et de son taux:

$$W_{int} = \int_A \delta \mathbf{u} \cdot (\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{F} + \mathbf{B}_\gamma^T \cdot \bar{\mathbf{C}}_\gamma^{el} \cdot \boldsymbol{\gamma}) dA \quad (7.22)$$

et

$$dW_{int} = \int_A \delta \mathbf{u} \cdot (\mathbf{B}^T \cdot \bar{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B}_\gamma^T \cdot \bar{\mathbf{C}}_\gamma^{el} \cdot \mathbf{B}_\gamma + \mathbf{B}_g^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}_g) \cdot d\mathbf{u} dA \quad (7.23)$$

### Remarque

A la différence du modèle élastique, les efforts résultants  $\mathbf{F}$  et le module matériel tangent  $\bar{\mathbf{C}}$  sont calculés numériquement selon le schéma d'intégration de *Lobatto*, identique à celui de *Gauss*, mais avec des points extrêmes placés sur les peaux extérieures où la plastification débute. À titre de comparaison,  $n$  points d'intégration de Gauss ou  $n + 1$  de Lobatto intègrent exactement un polynôme de degré  $2n - 1$ .

## 7.5 Aspects numériques

### 7.5.1 Généralités

Il est question, dans cette section, des techniques d'approximation et de mise à jour grâce auxquelles la solution numérique du problème est obtenue.

La formulation éléments finis courbés de type isoparamétriques est présentée en adaptant les relations établies dans les chapitres précédents au cas d'une coque discrétisée par un ensemble d'éléments quadrilatéraux à six degrés de liberté: composantes cartésiennes de déplacements et de rotations. Le modèle déplacement d'un élément typique  $e$  de dimensions finies (épaisseur  $h$  et surface moyenne  $A_e$ ) est décrit en détail: géométrie, approximation et actualisation des entités cinématiques, définition du résidu interne et de la matrice tangente élémentaire. La notion de rigidité fictive, introduite pour éviter la possibilité de singularité de la matrice de rigidité assemblée est également abordée.

### 7.5.2 Représentation paramétrique de la configuration initiale

La position initiale d'un point situé sur la surface moyenne d'un élément  $e$  défini par  $N$  nœuds est décrite en terme des positions nodales  $\mathbf{X}^I$  et des fonctions d'interpolation  $N_I(\xi^\alpha)$  par l'approximation de type  $C^0$ :

$$\mathbf{X}(\xi^\alpha) = N_I(\xi^\alpha) \mathbf{X}^I, \quad I = 1, N \quad (7.24)$$

où  $\xi^\alpha$  sont les coordonnées de l'élément de référence. Les gradients de la position par rapport à ces coordonnées paramétriques sont alors

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^\alpha} = \frac{\partial N_I}{\partial \xi^\alpha} \mathbf{X}^I$$

Notons que l'indice majuscule  $I$  désigne le nœud de l'élément et la répétition de cet indice implique la sommation sur tous les nœuds de l'élément.

Deux types d'élément sont considérés, un quadrilatère à quatre nœuds (Figure 7.3), représenté par les fonctions d'interpolation bi-linéaires:

$$N_I(\xi^1, \xi^2) = \frac{1}{4}(1 + \xi_I^1 \xi^1)(1 + \xi_I^2 \xi^2), \quad I = 1, 2, 3, 4$$

et un quadrilatère à huit nœuds (Figure 7.3), associé aux fonctions quadratiques incomplètes:

$$N_I(\xi^1, \xi^2) = \frac{1}{4}(-1 + \xi_I^1 \xi^1 + \xi_I^2 \xi^2)(1 + \xi_I^1 \xi^1)(1 + \xi_I^2 \xi^2), \quad I = 1, 3, 5, 7$$

$$N_I(\xi^1, \xi^2) = \frac{1}{2}(1 - (\xi^1)^2)(1 + \xi_I^2 \xi^2), \quad I = 2, 6$$

$$N_I(\xi^1, \xi^2) = \frac{1}{2}(1 - (\xi^2)^2)(1 + \xi_I^1 \xi^1), \quad I = 4, 8$$

où  $\xi_I^1, \xi_I^2$  sont les coordonnées paramétriques du nœud  $I$  (Figure 7.3).

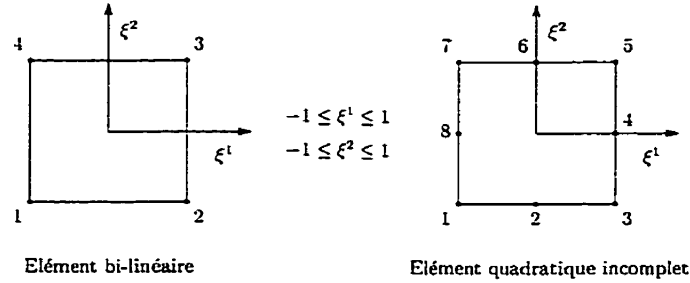


Figure 7.3: Éléments de référence

Le vecteur unitaire normal au point d'intégration à la surface moyenne est obtenu par l'approximation de type  $C^0$ :

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^1} \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^2} \left/ \left\| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^1} \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^2} \right\| \right. \quad (7.25)$$

Par la suite, nous définissons les vecteurs tangents orthonormaux  $\mathbf{T}_\alpha$  et les coordonnées paramétriques  $S^\alpha$  suivant ces vecteurs. Les composantes  $J_{\alpha\beta}$  du jacobien  $\mathbf{J}$  de la transformation géométrique entre  $S^\alpha$  et  $\xi^\beta$  résultent de l'équation 7.1:

$$J_{\alpha\beta} = \frac{\partial S^\alpha}{\partial \xi^\beta} = \mathbf{T}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^\beta} = \mathbf{T}_\alpha \cdot \mathbf{X}^I \frac{\partial N_I}{\partial \xi^\beta}$$

L'inverse de  $\mathbf{J}$  permet d'obtenir les dérivées des coordonnées  $\xi^\alpha$  par rapport à  $S^\beta$ :

$$\left[ \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial S^\beta} \right] = \left[ \frac{\partial S^\alpha}{\partial \xi^\beta} \right]^{-1}$$

ce qui permet d'obtenir:

$$\frac{\partial N_I}{\partial S^\beta} = \frac{\partial N_I}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial S^\beta}$$

La courbure initiale  $B_{\alpha\beta}$  est approchée par la moyenne:

$$B_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial S^\alpha} \cdot \mathbf{T}_\beta + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial S^\beta} \cdot \mathbf{T}_\alpha \right) = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial N_I}{\partial S^\alpha} \bar{\mathbf{N}}^I \cdot \mathbf{T}_\beta + \frac{\partial N_I}{\partial S^\beta} \bar{\mathbf{N}}^I \cdot \mathbf{T}_\alpha \right) \quad (7.26)$$

où nous avons interpolé le vecteur  $\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial S^\alpha}$  à partir des *normales moyennées*  $\bar{\mathbf{N}}^I$  aux nœuds ([BD92]). Cette normale  $\bar{\mathbf{N}}^I$  est calculée comme une valeur moyenne au nœud  $I$  de toutes les normales des éléments connectés à ce nœud (figure 7.4):

$$\bar{\mathbf{N}}^I = \frac{\sum_{e=1}^{nel} \mathbf{N}_{(e)}^I}{\left\| \sum_{e=1}^{nel} \mathbf{N}_{(e)}^I \right\|}$$

$\mathbf{N}_{(e)}^I$  représente la normale discrète de l'élément  $e$  au nœud  $I$ , obtenue à partir de l'équation (7.25), évaluée aux coordonnées  $(\xi_I^1, \xi_I^2)$ .

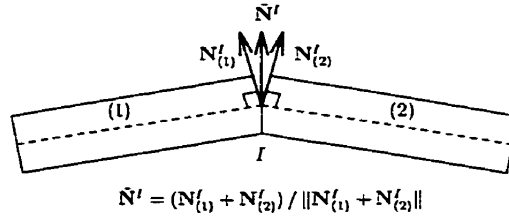


Figure 7.4: Normale moyennée  $\bar{\mathbf{N}}^I$

La procédure suivie pour interpoler le gradient  $\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial S^\alpha}$  est utilisée seulement pour la configuration initiale, dans le but d'approcher raisonnablement la courbure initiale  $B_{\alpha\beta}$ . Dans la configuration déformée,  $\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial S^\alpha}$  n'est pas interpolé à partir des normales aux nœuds, mais plutôt actualisé indépendamment en se basant sur le gradient  $\frac{\partial \Delta \phi}{\partial S^\alpha}$  de l'incrément des rotations, comme nous le verrons ci-après.

### 7.5.3 Interpolation et actualisation des configurations subséquentes

Soulignons d'abord que les composantes du champ de déplacements et du champ de rotations sont données relativement au système cartésien global  $(x, y, z)$  idéalisé par la base orthonormale  $[\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}]$ , fixée dans la configuration initiale ou actuelle. Au début de l'incrément  $[t, t + \Delta t]$ , nous avons la configuration en équilibre  $C_t$  à l'instant  $t$ , représentée par le couple  $(\mathbf{x}^t, \mathbf{n}^t)$ . Dans la procédure de résolution de *Newton-Raphson*, la configuration recherchée  $C_{t+\Delta t}$ , dénotée  $(\mathbf{x}^{t+\Delta t}, \mathbf{n}^{t+\Delta t})$  tout court, est obtenue de



façon itérative, en corrigeant à chaque itération la position  $\mathbf{x}^{t+\Delta t}$  et le vecteur directeur  $\mathbf{n}^{t+\Delta t}$  de tout point de la surface moyenne. La correction  $d\mathbf{u} \equiv [d\mathbf{x}, d\phi]^T$  utilisée à cette fin est interpolée à partir des corrections nodales  $d\mathbf{u}^I \equiv [d\mathbf{x}^I, d\phi^I]^T$  selon le concept isoparamétrique:

$$d\mathbf{x} = N_I(\xi^\alpha) d\mathbf{x}^I, \quad d\phi = N_I(\xi^\alpha) d\phi^I \quad (7.27)$$

La configuration de la coque est alors mise à jour à chaque itération, jusqu'à convergence. Cet aspect est évoqué dans ce qui suit avec plus de détail

### Actualisation de la surface moyenne

Nous désignons par  $\Delta\mathbf{x}$  l'incrément du déplacement, soit la correction cumulée sur le pas de temps  $[t, t+\Delta t]$ :  $\Delta\mathbf{x} \equiv \sum_{c=0}^i d\mathbf{x}^{(c)}$ . Cet incrément est interpolé suivant le même schéma d'interpolation utilisé pour la correction  $d\mathbf{x}$ :

$$\Delta\mathbf{x} = N_I(\xi^\alpha) \Delta\mathbf{x}^I \quad (7.28)$$

La position  $\mathbf{x}^{t+\Delta t}$  de la surface moyenne à l'instant  $t + \Delta t$  est actualisée à partir de la position  $\mathbf{x}^t$  au début du pas et l'incrément  $\Delta\mathbf{x}$  par:

$$\mathbf{x}^{t+\Delta t} = \mathbf{x}^t + \Delta\mathbf{x} \quad (7.29)$$

### Actualisation du champ de rotations

L'incrément de rotation  $\Delta\phi$  sur le pas de temps est interpolé en terme des incréments nodaux  $\Delta\phi^I$  par:

$$\Delta\phi = N_I(\xi^\alpha) \Delta\phi^I \quad (7.30)$$

Chacun de ces incréments nodaux  $\Delta\phi^I$  correspond à la correction cumulée au nœud, obtenue par extraction du quaternion  $\Delta\mathbf{r}^I = (\Delta r_0^I, \Delta\mathbf{r}^I)$ :

$$\Delta\phi^I = 2 \frac{\Delta\mathbf{r}^I}{\|\Delta\mathbf{r}^I\|} \tan^{-1} \left[ \frac{\|\Delta\mathbf{r}^I\|}{\Delta r_0^I} \right]$$

ce quaternion qui est tout d'abord actualisé en suivant la règle:

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{r}^I &= d\mathbf{r}^I \circ \Delta\mathbf{r}_{anc}^I \\ &= (dr_0^I \Delta r_{anc}^I - d\mathbf{r}^I \cdot \Delta\mathbf{r}_{anc}^I, dr_0^I \Delta\mathbf{r}_{anc}^I + \Delta r_{anc}^I d\mathbf{r}^I + d\mathbf{r}^I \times \Delta\mathbf{r}_{anc}^I) \end{aligned}$$

avec

$$dr_0^I = \cos \|d\phi^I/2\|, \quad d\mathbf{r} = \frac{\sin \|d\phi^I/2\|}{\|d\phi^I\|} d\phi^I$$

et

$$\Delta r_{0anc}^I = \cos \|\Delta\phi_{anc}^I/2\|, \quad \Delta\mathbf{r}_{anc} = \frac{\sin \|\Delta\phi_{anc}^I/2\|}{\|\Delta\phi_{anc}^I\|} \Delta\phi_{anc}^I$$

Une fois obtenu, l'incrément de rotation  $\Delta\phi$  au point d'intégration, équation (7.30), est transformé en un quaternion  $\Delta\mathbf{r}$ , défini par:

$$\Delta\mathbf{r} = \left( \cos \frac{\Delta\phi}{2}, \sin \frac{\Delta\phi}{2} \mathbf{e} \right) \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} \Delta\phi &= \|\Delta\phi\| \\ \mathbf{e} &= \Delta\phi / \Delta\phi \end{aligned}$$

grâce auquel l'actualisation de la normale à l'instant  $t + \Delta t$  est actualisée:

$$\mathbf{n}^{t+\Delta t} = \Delta\mathbf{r} \circ \mathbf{n}^t \circ \Delta\mathbf{r}^\dagger = (2(\Delta r_0)^2 - 1) \mathbf{n}^t + 2\Delta r_0 \Delta\mathbf{r} \times \mathbf{n}^t + 2(\Delta\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}^t) \Delta\mathbf{r} \quad (7.31)$$

Le gradient de cette normale actualisée est ensuite calculé par la formule:

$$\frac{\partial \mathbf{n}^{t+\Delta t}}{\partial S^\alpha} = \Delta\boldsymbol{\rho}_\alpha \times \mathbf{n}^{t+\Delta t} + \Delta\mathbf{r} \circ \frac{\partial \mathbf{n}^t}{\partial S^\alpha} \circ \Delta\mathbf{r}^\dagger \quad (7.32)$$

comme montré au chapitre 4, où

$$\Delta\boldsymbol{\rho}_\alpha = \mathbf{H}(\Delta\phi) \cdot \frac{\partial \Delta\phi}{\partial S^\alpha}$$

avec

$$\mathbf{H}(\Delta\phi) = \frac{\sin \Delta\phi}{\Delta\phi} \mathbf{I} + \frac{(1 - \cos \Delta\phi)}{\Delta\phi^2} \Delta\hat{\phi} + \frac{1}{\Delta\phi^2} \left[ 1 - \frac{\sin \Delta\phi}{\Delta\phi} \right] \Delta\phi \otimes \Delta\phi$$

Ce qui nous permet d'évaluer la courbure à l'instant  $t + \Delta t$

$$b_{\alpha\beta}^{t+\Delta t} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{n}^{t+\Delta t}}{\partial S^\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}^{t+\Delta t}}{\partial S^\beta} + \frac{\partial \mathbf{n}^{t+\Delta t}}{\partial S^\beta} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}^{t+\Delta t}}{\partial S^\alpha} \right)$$

Avant de passer à la section suivante, notons que la variation virtuelle  $\delta\mathbf{u} \equiv [\delta\mathbf{x}, \delta\phi]^T$  est interpolée de la même façon que  $\delta\mathbf{u}$ , en utilisant les mêmes fonctions d'interpolation:

$$\delta\mathbf{x} = N_I(\xi^\alpha) \delta\mathbf{x}^I, \quad \delta\phi = N_I(\xi^\alpha) \delta\phi^I \quad (7.33)$$

### 7.5.4 Résidu interne et matrice de rigidité élémentaire

La discrétisation par éléments finis permet de remplacer le travail virtuel interne, défini à l'équation (7.10), par une somme d'intégrales sur chaque élément  $e$  composant le domaine de la coque:

$$W_{int} = \sum_{e=1}^{nel} W_{int}^e = \sum_{e=1}^{nel} \int_{A_e} \delta \mathbf{u} \cdot (\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{F} + \mathbf{B}_\gamma^T \cdot \mathbf{T}) dA$$

Pour déduire le *résidu interne*  $\mathbf{f}_{int}^e$ , nous introduisons dans la forme intégrale élémentaire  $W_{int}^e$  les interpolations définies précédemment telle que:

$$W_{int}^e = \delta \mathbf{u}^e \cdot \mathbf{f}_{int}^e \quad \text{avec} \quad \mathbf{f}_{int}^e = \int_{A_e} (\mathbf{B}^{eT} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{B}_\gamma^{eT} \cdot \mathbf{T}) dA \quad (7.34)$$

$\delta \mathbf{u}^e$  est le vecteur des déplacements nodaux virtuels:

$$\delta \mathbf{u}^e \equiv \left[ \dots \left| \delta \mathbf{x}^I \quad \delta \phi^I \right| \dots I = 1, N \right]^T$$

et  $\mathbf{B}^e$ ,  $\mathbf{B}_\gamma^e$  les opérateurs différentiels relatifs à l'élément:

$$\mathbf{B}^e \equiv \left[ \dots \left| \mathbf{B}_x^e \quad \mathbf{B}_\phi^e \right| \dots \right], \quad \mathbf{B}_\gamma^e \equiv \left[ \dots \left| \begin{array}{cc} \mathbf{n}^T \frac{\partial N_I}{\partial S^1} & N_I (\lambda_1 \mathbf{n} \times \mathbf{s}_1)^T \cdot \mathbf{H} \\ \mathbf{n}^T \frac{\partial N_I}{\partial S^2} & N_I (\lambda_2 \mathbf{n} \times \mathbf{s}_2)^T \cdot \mathbf{H} \end{array} \right| \dots \right]$$

avec

$$\mathbf{B}_x^e \equiv \left[ \begin{array}{c} \lambda_1 \mathbf{s}_1^T \frac{\partial N_I}{\partial S^1} \\ \lambda_2 \mathbf{s}_2^T \frac{\partial N_I}{\partial S^2} \\ \lambda_2 \mathbf{s}_2^T \frac{\partial N_I}{\partial S^1} + \lambda_1 \mathbf{s}_1^T \frac{\partial N_I}{\partial S^2} \\ \left( \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial S^1} + 2\lambda_1 B_{11} \mathbf{s}_1 + \lambda_2 B_{12} \mathbf{s}_2 \right)^T \frac{\partial N_I}{\partial S^1} + \lambda_1 B_{12} \mathbf{s}_1^T \frac{\partial N_I}{\partial S^2} \\ \left( \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial S^2} + 2\lambda_2 B_{22} \mathbf{s}_2 + \lambda_1 B_{12} \mathbf{s}_1 \right)^T \frac{\partial N_I}{\partial S^2} + \lambda_2 B_{12} \mathbf{s}_2^T \frac{\partial N_I}{\partial S^1} \\ \left( \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial S^2} + \lambda_2 (B_{11} + B_{22}) \mathbf{s}_2 + 2\lambda_1 B_{12} \mathbf{s}_1 \right)^T \frac{\partial N_I}{\partial S^1} \\ + \left( \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial S^1} + \lambda_1 (B_{11} + B_{22}) \mathbf{s}_1 + 2\lambda_2 B_{12} \mathbf{s}_2 \right)^T \frac{\partial N_I}{\partial S^2} \end{array} \right]$$

et

$$\mathbf{B}_\phi \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ N_I (\lambda_1 \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial S^1} \times \mathbf{s}_1)^T \cdot \mathbf{H} + (\lambda_1 \mathbf{n} \times \mathbf{s}_1)^T \cdot (N_I \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial S^1} + \mathbf{H} \frac{\partial N_I}{\partial S^1}) \\ N_I (\lambda_2 \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial S^2} \times \mathbf{s}_2)^T \cdot \mathbf{H} + (\lambda_2 \mathbf{n} \times \mathbf{s}_2)^T \cdot (N_I \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial S^2} + \mathbf{H} \frac{\partial N_I}{\partial S^2}) \\ N_I (\lambda_2 \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial S^1} \times \mathbf{s}_2 + \lambda_1 \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial S^2} \times \mathbf{s}_1)^T \cdot \mathbf{H} \\ + (\lambda_2 \mathbf{n} \times \mathbf{s}_2)^T \cdot (N_I \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial S^1} + \mathbf{H} \frac{\partial N_I}{\partial S^1}) \\ + (\lambda_1 \mathbf{n} \times \mathbf{s}_1)^T \cdot (N_I \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial S^2} + \mathbf{H} \frac{\partial N_I}{\partial S^2}) \end{bmatrix}$$

Semblablement, l'introduction des fonctions d'interpolation dans la forme discrète de (7.16), conduit à l'expression algébrique de  $dW_{int}^e$ :

$$dW_{int}^e = \delta \mathbf{u}^e \cdot \mathbf{k}^e - d\mathbf{u}^e \quad \text{avec} \quad \mathbf{k}^e = \mathbf{k}_m^e + \mathbf{k}_g^e \quad (7.35)$$

$$\mathbf{k}_m^e = \int_{A_e} (\mathbf{B}^{eT} \cdot \bar{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{B}^e + \mathbf{B}^{eT}_\gamma \cdot \bar{\mathbf{C}}_\gamma \cdot \mathbf{B}^e_\gamma) dA$$

$$\mathbf{k}_g^e = \int_{A_e} \mathbf{B}_g^{eT} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}_g^e dA$$

$\mathbf{k}^e$  est la *matrice tangente élémentaire*.  $\mathbf{k}_m^e$  représente la contribution matérielle et  $\mathbf{k}_g^e$  la contribution géométrique, dans laquelle:

$$\mathbf{B}_g^e \equiv \begin{bmatrix} \vdots & \mathbf{I} \frac{\partial N_I}{\partial S^1} & 0 & \vdots \\ \vdots & \mathbf{I} \frac{\partial N_I}{\partial S^2} & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & N_I \mathbf{H} & \vdots \\ \vdots & 0 & N_I \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial S^1} + \mathbf{H} \frac{\partial N_I}{\partial S^1} & \vdots \\ \vdots & 0 & N_I \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial S^2} + \mathbf{H} \frac{\partial N_I}{\partial S^2} & \vdots \end{bmatrix}$$

### 7.5.5 Rotation autour du vecteur directeur

La définition des rotations nodales en terme de leurs composantes cartésiennes dans le repère global facilite le couplage avec les éléments de poutres tridimensionnelles et ne nécessite pas entre autres, la transformation de ces variables avant l'assemblage. Cependant la matrice assemblée devient singulière si la normale en un nœud est continue d'un élément à un autre, du fait que les composantes cartésiennes du vecteur rotation ne sont pas indépendantes ([BD92]). Afin d'éviter cette difficulté numérique, nous introduisons en chaque nœud de l'élément une rotation locale mesurant la rotation de la surface moyenne autour de la normale en ce nœud. La déformation associée à cette rotation est ensuite pénalisée moyennant une *rigidité fictive* dans le but de limiter son influence ([FS92], [BD92], [All84], [All88], [All94], [Coo91], [Coo94], [HB89]).

Nous définissons alors en chaque coin  $I_C$  de l'élément la déformation:

$$\gamma_C = \frac{1}{2}(\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{s}_2 - \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{s}_1) \quad (7.36)$$

où

$$\mathbf{t}_\alpha = \mathbf{R} \cdot \mathbf{T}_\alpha, \quad \alpha = 1, 2$$

sont les transformées, par le tenseur rotation  $\mathbf{R}$  au nœud, des vecteurs unitaires initiaux  $\mathbf{T}_\alpha$ , tangents en  $I_C$  aux lignes  $dS^\alpha$ . Ces derniers sont définis en chaque nœud de coin suivant la convention évoquée dans la section 7.2. Ils sont alors différents en  $I_C$  d'un élément à un autre, puisque la surface moyenne interpolée n'est pas continue en général. Les vecteurs  $\mathbf{s}_\alpha$  sont les vecteurs unitaires tangents en  $I_C$  à la surface de référence actuelle:

$$\mathbf{s}_\alpha = \lambda_\alpha^{-1} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial S^\alpha} \quad \text{avec} \quad \lambda_\alpha = \left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial S^\alpha} \right\|$$

En chaque nœud milieu  $I_M$  de l'élément, nous définissons dans la configuration initiale, la normale moyennée  $\bar{\mathbf{N}}$  des deux normales associées aux deux éléments connectés en ce nœud (Figure 7.4) et le vecteur unitaire  $\bar{\mathbf{S}}$ , tangent au côté partagé par ces deux éléments:

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial S}$$

où  $S$  est l'abscisse curviligne suivant le côté (Figure 7.5). Respectivement à ces vecteurs unitaires, nous définissons au nœud  $I_M$ , dans la configuration actuelle, les vecteurs  $\bar{\mathbf{n}}$  et  $\bar{\mathbf{s}}$ , obtenus par la transformation orthogonale  $\mathbf{R}$  (définie en terme du vecteur rotation au nœud  $I_M$ ):

$$\bar{\mathbf{n}} = \mathbf{R} \cdot \bar{\mathbf{N}}, \quad \text{et} \quad \bar{\mathbf{s}} = \mathbf{R} \cdot \bar{\mathbf{S}}$$

La déformation à pénaliser au nœud milieu est alors définie par:

$$\gamma_M = \mathbf{s} \cdot \mathbf{p} \quad (7.37)$$

dans laquelle  $\mathbf{p}$  est le vecteur normal en  $I_M$  au plan formé par  $\bar{\mathbf{n}}$  et  $\bar{\mathbf{s}}$ :

$$\mathbf{p} = \bar{\mathbf{n}} \times \bar{\mathbf{s}}$$

et  $\mathbf{s}$  est le vecteur tangent en  $I_M$  au côté de l'élément dans la configuration actuelle:

$$\mathbf{s} = \lambda^{-1} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial S} \quad \text{avec} \quad \lambda = \left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial S} \right\|$$

### Remarque

Nous rappelons que les différentes variables définissant la déformation  $\gamma_C$  sont associées au nœud de coin  $I_C$ . Ces variables sont approchées par les mêmes fonctions d'interpolation établies précédemment, mais évaluées au nœud  $I_C$ , soit avec les coordonnées paramétriques  $(\xi_{I_C}^1, \xi_{I_C}^2)$ .

Pour le nœud milieu, les vecteurs tels que  $\bar{\mathbf{S}}$  et  $\bar{\mathbf{s}}$ , sont associés au côté  $M$  contenant le nœud  $I_M$ . Ils sont alors interpolés par les fonctions quadratiques:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{N}_1(\xi) = -\frac{\xi}{2}(1 - \xi), \quad \bar{N}_2(\xi) = (1 - \xi^2), \quad \bar{N}_3(\xi) = \frac{\xi}{2}(1 + \xi) \\ \frac{\partial \bar{N}_1}{\partial \xi}(\xi) = -\frac{1}{2}(1 - 2\xi), \quad \frac{\partial \bar{N}_2}{\partial \xi}(\xi) = -2\xi, \quad \frac{\partial \bar{N}_3}{\partial \xi}(\xi) = \frac{1}{2}(1 + 2\xi) \end{array} \right.$$

correspondant à un élément à trois nœuds (figure 7.5).

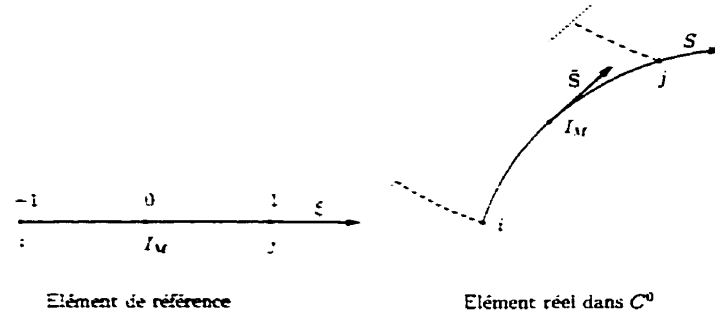
Évaluées au nœud  $I_M$  ( $\xi_{I_M}$ ), ces fonctions prennent les valeurs:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{N}_1^M = 0, \quad N_2^M = 1, \quad N_3^M = 0 \\ \frac{\partial \bar{N}_1^M}{\partial \xi} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{\partial \bar{N}_2^M}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial \bar{N}_3^M}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

Les dérivées des fonctions  $\bar{N}_I$  par rapport à la coordonnée curviligne  $S$  s'expriment au nœud  $I_M$  par:

$$\frac{\partial \bar{N}_1^M}{\partial S} = -\frac{1}{L_M}, \quad \frac{\partial \bar{N}_2^M}{\partial S} = 0, \quad \text{et} \quad \frac{\partial \bar{N}_3^M}{\partial S} = \frac{1}{L_M}$$

où  $L_M = \|\mathbf{X}^j - \mathbf{X}^i\|$  est la longueur initiale du côté  $M$  (nœuds  $i$  et  $j$ ).

Figure 7.5: Côté  $M$  de l'élément (nœuds  $i$  et  $j$ )

Passons maintenant à la pénalisation des déformations  $\gamma_C$  et  $\gamma_M$ , équations 7.36 et 7.37. Pour cela, nous introduisons une *rigidité fictive* de sorte que:

$$\begin{cases} W_C^e &= \sum_{I_C}^n K^{(I_C)} \gamma_C^{(I_C)} \delta \gamma_C^{(I_C)} \\ dW_C^e &= \sum_{I_C}^n K^{(I_C)} d\gamma_C^{(I_C)} \delta \gamma_C^{(I_C)} + K^{(I_C)} \gamma_C^{(I_C)} d\delta \gamma_C^{(I_C)} \end{cases} \quad (7.38)$$

et

$$\begin{cases} W_M^e &= \sum_{I_M}^n K^{(I_M)} \gamma_M^{(I_M)} \delta \gamma_M^{(I_M)} \\ dW_M^e &= \sum_{I_M}^n K^{(I_M)} d\gamma_M^{(I_M)} \delta \gamma_M^{(I_M)} + K^{(I_M)} \gamma_M^{(I_M)} d\delta \gamma_M^{(I_M)} \end{cases} \quad (7.39)$$

$W_C^e$ ,  $dW_C^e$  sont les travaux virtuels élémentaires correspondant respectivement aux déformations  $\gamma_C$ ,  $\gamma_M$  et  $K$  est la rigidité effective introduite pour pénaliser ces dernières au nœud considéré. Son expression est donnée par:

$$K = \alpha G h \Delta A / (1 + q \frac{\Delta A}{h^2})$$

où  $\alpha$  est un coefficient sans dimension [BD92], qui doit être suffisamment petit pour limiter l'influence des rigidités fictives sur le résultat et suffisamment grand pour éviter les singularités ( $\alpha = 10^{-4}$  est proposé):  $q = 0.25 \times 10^{-4}$  est un facteur numérique (Voir [HTK77], pour le choix de ce facteur) et  $\Delta A$  est l'élément de surface assigné au nœud.

La linéarisation des équations 7.36 et 7.37 nous permet de déduire les expressions des déformations virtuelles  $\delta \gamma_C$  et  $\delta \gamma_M$ :

$$\begin{aligned} \delta \gamma_C &= \frac{1}{2} \left[ \lambda_1^{-1} \mathbf{t}_2 \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{s}_1 \otimes \mathbf{s}_1) \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{x}}{\partial S^1} - \right. \\ &\quad \left. \lambda_2^{-1} \mathbf{t}_1 \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{s}_2 \otimes \mathbf{s}_2) \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{x}}{\partial S^2} \right] + (\mathbf{t}_2 \times \mathbf{s}_1 - \mathbf{t}_1 \times \mathbf{s}_2) \cdot \delta \boldsymbol{\theta} \\ \delta \gamma_M &= \lambda^{-1} \mathbf{p} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{s} \otimes \mathbf{s}) \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{x}}{\partial S} + \mathbf{p} \times \mathbf{s} \cdot \delta \boldsymbol{\theta} \end{aligned}$$

puis nous en déduisons les secondes variations:

$$\begin{aligned}
 d\delta\gamma_C = & -\frac{1}{2} \left[ \lambda_1^{-2} \frac{\partial \delta \mathbf{x}}{\partial S^1} \cdot (\mathbf{t}_2 \otimes \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_1 \otimes \mathbf{t}_2) \cdot \frac{\partial d\mathbf{x}}{\partial S^1} - \right. \\
 & \left. \lambda_2^{-2} \frac{\partial \delta \mathbf{x}}{\partial S^2} \cdot (\mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{s}_2 + \mathbf{s}_2 \otimes \mathbf{t}_1) \cdot \frac{\partial d\mathbf{x}}{\partial S^2} \right] \\
 & -\frac{1}{2} \lambda_1^{-1} \left[ \frac{\partial \delta \mathbf{x}}{\partial S^1} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{s}_1 \otimes \mathbf{s}_1) \cdot \mathbf{t}_2 \times d\boldsymbol{\theta} - \right. \\
 & \left. \delta \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{t}_2 \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{s}_1 \otimes \mathbf{s}_1) \cdot \frac{\partial d\mathbf{x}}{\partial S^1} \right] \\
 & -\frac{1}{2} \lambda_2^{-1} \left[ \frac{\partial \delta \mathbf{x}}{\partial S^2} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{s}_2 \otimes \mathbf{s}_2) \cdot \mathbf{t}_1 \times d\boldsymbol{\theta} - \right. \\
 & \left. \delta \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{t}_1 \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{s}_2 \otimes \mathbf{s}_2) \cdot \frac{\partial d\mathbf{x}}{\partial S^2} \right] \\
 & +\frac{1}{4} \delta \boldsymbol{\theta} \cdot (\mathbf{t}_2 \otimes \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_1 \otimes \mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_2 \otimes \mathbf{t}_1) \cdot d\boldsymbol{\theta} \\
 d\delta\gamma_M = & -\lambda^{-2} \frac{\partial \delta \mathbf{x}}{\partial S} \cdot (\mathbf{p} \otimes \mathbf{s} + \mathbf{s} \otimes \mathbf{p}) \cdot \frac{\partial d\mathbf{x}}{\partial S} + \\
 & -\lambda^{-1} \left[ \frac{\partial \delta \mathbf{x}}{\partial S} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{s} \otimes \mathbf{s}) \cdot \mathbf{p} \times d\boldsymbol{\theta} - \right. \\
 & \left. \delta \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{s} \otimes \mathbf{s}) \cdot \frac{\partial d\mathbf{x}}{\partial S} \right] \\
 & +\frac{1}{2} \delta \boldsymbol{\theta} \cdot (\mathbf{p} \otimes \mathbf{s} + \mathbf{s} \otimes \mathbf{p}) \cdot d\boldsymbol{\theta}
 \end{aligned}$$

En vertu de ces relations et des interpolations définies précédemment, les formes 7.38 et 7.39 se réduisent à:

$$\left\{ \begin{array}{l} W_C^e = \sum_{I_C}^{n_C} \delta \mathbf{u}^e \cdot \mathbf{r}_C^e \\ dW_C^e = \sum_{I_C}^{n_C} \delta \mathbf{u}^e \cdot \mathbf{k}_C^e \cdot d\mathbf{u}^e \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} W_M^e = \sum_{I_M}^{n_M} \delta \mathbf{u}^e \cdot \mathbf{r}_M^e \\ dW_M^e = \sum_{I_M}^{n_M} \delta \mathbf{u}^e \cdot \mathbf{k}_M^e \cdot d\mathbf{u}^e \end{array} \right.$$

où apparaissent les résidus et les matrices de rigidités élémentaires. Relativement à tous les coins de l'élément, le résidu interne est défini par la somme suivante:

$$\mathbf{r}_C^e = \sum_{I_C}^{N_C} K^{(I_C)} \gamma_C^{(I_C)} \mathbf{B}_C^{(I_C)} \quad (7.40)$$



et la matrice de rigidité tangente par:

$$\mathbf{k}_C^e = \sum_{I_C}^{N_C} K^{(I_C)} \gamma_C^{(I_C)} \left( \mathbf{B}_C^{(I_C)} \otimes \mathbf{B}_C^{(I_C)} + (\mathbf{B}_{gC}^{(I_C)})^T \cdot \bar{\mathbf{C}}_{gC}^{(I_C)} \cdot \mathbf{B}_{gC}^{(I_C)} \right) \quad (7.41)$$

dans lesquelles  $\mathbf{B}_C$ ,  $\mathbf{B}_{gC}$  et  $\mathbf{C}_{gC}$  sont données par:

$$\mathbf{B}_C \equiv \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ \frac{1}{2} \left[ \lambda_1^{-1} \frac{\partial N_I}{\partial S^1} (\mathbf{I} - \mathbf{s}_1 \otimes \mathbf{s}_1) \cdot \mathbf{t}_2 - \lambda_2^{-1} \frac{\partial N_I}{\partial S^2} (\mathbf{I} - \mathbf{s}_2 \otimes \mathbf{s}_2) \cdot \mathbf{t}_1 \right] \\ N_I \mathbf{H}^T \cdot (\mathbf{t}_2 \times \mathbf{s}_1 - \mathbf{t}_1 \times \mathbf{s}_2) \\ \vdots \end{array} \right\},$$

$$\mathbf{B}_{gC} \equiv \left[ \begin{array}{c|cc|c} & \mathbf{I} \frac{\partial N_I}{\partial S^1} & 0 & \\ \cdots & \mathbf{I} \frac{\partial N_I}{\partial S^2} & 0 & \cdots \\ & 0 & N_I \mathbf{H} & \end{array} \right]$$

et

$$\bar{\mathbf{C}}_{gC} \equiv \frac{1}{2} \left[ \begin{array}{ccc} -\lambda_1^{-2} \Upsilon_{12} & 0 & -\lambda_1^{-1} \Gamma_1 \cdot \hat{\mathbf{t}}_2 \\ 0 & \lambda_2^{-2} \Upsilon_{21} & \lambda_2^{-1} \Gamma_2 \cdot \hat{\mathbf{t}}_1 \\ \lambda_1^{-1} \hat{\mathbf{t}}_2 \cdot \Gamma_1 & -\lambda_2^{-1} \hat{\mathbf{t}}_1 \cdot \Gamma_2 & \frac{1}{2} (\Upsilon_{12} - \Upsilon_{21}) \end{array} \right]$$

où les tenseurs suivants sont introduits

$$\Upsilon_{\alpha\beta} = \mathbf{s}_\alpha \otimes \mathbf{t}_\beta + \mathbf{t}_\beta \otimes \mathbf{s}_\alpha, \quad \Gamma_\alpha = \mathbf{I} - \mathbf{s}_\alpha \otimes \mathbf{s}_\alpha$$

$\hat{\mathbf{t}}_\alpha$  est le tenseurs antisymétrique associé au vecteur  $\mathbf{t}_\alpha$  tel que:

$$\hat{\mathbf{t}}_\alpha \cdot \mathbf{v} = \mathbf{t}_\alpha \times \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v}$$

Semblablement, en sommant sur tous les nœuds milieux de l'élément, nous obtenons le vecteur résidu et la matrice tangente élémentaires, définis par les expressions:

$$\mathbf{r}_M^e = \sum_{I_M}^{N_M} K^{(I_M)} \gamma_M^{(I_M)} \mathbf{B}_M^{(I_M)} \quad (7.42)$$

et

$$\mathbf{k}_M^e = \sum_{I_M}^{N_M} K^{(I_M)} \gamma_M^{(I_M)} \left( \mathbf{B}_M^{(I_M)} \otimes \mathbf{B}_M^{(I_M)} + (\mathbf{B}_{gM}^{(I_M)})^T \cdot \bar{\mathbf{C}}_{gM}^{(I_M)} \cdot \mathbf{B}_{gM}^{(I_M)} \right) \quad (7.43)$$

où les expressions de  $\mathbf{B}_M$ ,  $\mathbf{B}_{gM}$  et  $\bar{\mathbf{C}}_{gM}$  relativement au côté  $ij$  (contenant le nœud  $M$  figure 7.5) sont donnés par:

$$\mathbf{B}_M^{ij} \equiv \begin{Bmatrix} \vdots \\ \lambda^{-1} \frac{\partial \bar{N}_I}{\partial S} (\mathbf{I} - \mathbf{s} \otimes \mathbf{s}) \cdot \mathbf{p} \\ \bar{N}_I \mathbf{H}^T \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{s}) \\ \vdots \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{gM}^{ij} \equiv \begin{bmatrix} \cdots & \mathbf{I} \frac{\partial \bar{N}_I}{\partial S} & 0 & \cdots \\ & 0 & \bar{N}_I \mathbf{H} & \end{bmatrix}$$

et

$$\bar{\mathbf{C}}_{gM}^{ij} \equiv \begin{bmatrix} -\lambda^{-2} (\mathbf{p} \otimes \mathbf{s} + \mathbf{s} \otimes \mathbf{p}) & -\lambda^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{s} \otimes \mathbf{s}) \cdot \hat{\mathbf{p}} \\ \lambda^{-1} \hat{\mathbf{p}} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{s} \otimes \mathbf{s}) & \frac{1}{2} (\mathbf{p} \otimes \mathbf{s} + \mathbf{s} \otimes \mathbf{p}) \end{bmatrix}$$

Les résidus  $\mathbf{r}_C^e$  et  $\mathbf{r}_M^e$  sont ajoutés au résidu interne  $\mathbf{f}_{int}^e$ , défini par l'équation 7.34, telle que:

$$\mathbf{f}_{int}^e = \mathbf{f}_{int}^e + \mathbf{r}_C^e + \mathbf{r}_M^e \quad (7.44)$$

Pareillement, la matrice tangente de l'élément est donnée par la somme:

$$\mathbf{k}^e = \mathbf{k}^e + \mathbf{k}_C^e + \mathbf{k}_M^e \quad (7.45)$$

où  $\mathbf{k}^e$  du second membre est définie par 7.35

## 7.6 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons présenté les développements relatifs à un modèle de coque non linéaire de type Cosserat basé sur une cinématique à un seul vecteur directeur et sur l'hypothèse de Reissner/Mindlin/Naghdi. Ont été exposés aussi, les aspects et les détails associés à la mise en œuvre numérique de la formulation dans le cadre des éléments finis, tels que les détails sur les interpolations choisies, les expressions du résidu et de la matrice tangente et de la procédure de mise à jour du vecteur directeur.

La validité de la formulation et la performance des quadrilatères qu'ont entraînés ces développements seront confrontées, dans le chapitre qui suit, avec les résultats numériques obtenus par un certain nombre d'auteurs suite à leurs analyses non linéaires de coques soumises à des chargements statiques.

## Chapitre 8

# Exemples numériques - Discussions

### 8.1 Introduction

Le présent chapitre a pour but de présenter quelques résultats numériques obtenus pour des problèmes tests choisis dans la littérature pour examiner la performance des éléments finis et algorithmes proposés dans cette thèse.

### 8.2 Validation des éléments de poutre

Dans cette section, nous considérons une série de simulations numériques permettant d'illustrer la performance des éléments de poutres tridimensionnels résultant de la formulation exposée au chapitre 6. Dans les premiers exemples l'attention est dirigée sur les problèmes bidimensionnels, où le champ de rotation est décrit à l'aide d'un seul angle de rotation [SVQ88, Ako87, Faf87, Cic84, Bat81, Cri90, IF92]. L'objectif principal est alors de montrer que la paramétrisation tridimensionnelle du champ de rotation proposée, permet de tenir compte des rotations planes. Les derniers exemples concernant la déformation tridimensionnelle et ils ont déjà été considérés dans des travaux précédents [SVQ88, BB79, PL96, Ibr95, ISB<sup>+</sup>96]. Dépendant des exemples, une loi de comportement élastique ou élastoplastique pourra être considérée.

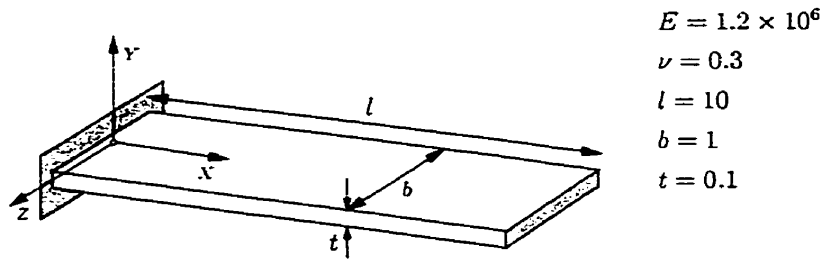


Figure 8.1: Porte-à-faux sous chargement de flexion. Données du problème.

### 8.2.1 Analyse d'un porte-à-faux soumis à un chargement de flexion

L'un des problèmes les plus difficiles à résoudre en analyse non linéaire des structures est celui des porte-à-faux où le mouvement de corps rigide est très important. La flexion des porte-à-faux a fait l'objet de plusieurs études et peut être, à toutes fins pratiques, considérée comme un "benchmark" en analyse non linéaire géométrique. Nous analyserons dans ce qui suit, la grande déflexion et la grande rotation du porte-à-faux illustré à la figure 8.1, que nous soumettons à un chargement de flexion. Dans une première analyse nous nous intéressons au comportement du porte-à-faux vis-à-vis d'un effort de flexion hors plan appliqué à l'extrémité libre et provoquant une grande déflexion mais une rotation modérée de la poutre. Dans une seconde analyse, nous examinons les grands déplacements et les grandes rotations engendrés dans la poutre suite à l'application d'un couple concentré, appliqué lui aussi à l'extrémité libre. Le but recherché à travers ces analyses est l'étude de la performance et la précision des éléments de poutre proposés dans le cas de non-linéarités géométriques avec grands déplacements et grandes rotations.

#### Porte-à-faux avec une charge concentrée

Nous considérons d'abord l'action d'une force transversale  $F$  appliquée au bout libre du porte-à-faux. Ce cas classique a déjà fait l'objet de plusieurs recherches ([BB79, Bat81, Ako87, Faf87, Dam96]). Une solution analytique basée sur la théorie non linéaire avec l'hypothèse de la non-extension de la ligne moyen a été développée par Timoshenko et Gere [TG72]. Nos résultats sont comparés à cette solution et aussi à la solution de Akoussah [Ako87], obtenue en dix pas de chargement (de  $P = 0$  à  $P = 10EI/L^2$ ) à l'aide de 8 éléments de poutre tridimensionnelle en formulation lagrangienne partielle, basé sur la théorie de Marguerre des poutres surbaissées. Comme lui, nous avons discrétisé la poutre en 8 éléments finis quadratiques ( $L3$ ) et 16 éléments finis linéaires

(L2). Le bilan de l'analyse est dressé sous forme de tableau (8.1) et figure (8.2.a), dans lesquels  $U_Y$  dénote le déplacement transversal et  $U_X$  le déplacement axial selon l'axe de la poutre du bout libre. Nous remarquons que ces résultats collent très bien avec

Tableau 8.1: Résultats comparatifs du porte-à-faux soumis à un effort constant.

$F$	<i>Analytique</i>		<i>Akoussah[Ako87]</i>		<i>élément L3</i>		<i>élément L2</i>	
	$U_X$	$U_Y$	$U_X$	$U_Y$	$U_X$	$U_Y$	$U_X$	$U_Y$
1	0.56	3.02	0.56	3.02	0.56	3.02	0.56	3.02
2	1.60	4.94	1.60	4.93	1.61	4.93	1.60	4.93
3	2.55	6.03	2.55	6.04	2.54	6.03	2.54	6.03
4	3.29	6.70	3.29	6.70	3.29	6.70	3.29	6.70
5	3.88	7.14	3.87	7.13	3.88	7.14	3.87	7.14
6	4.34	7.44	4.34	7.44	4.35	7.45	4.34	7.44
7	4.72	7.67	4.72	7.66	4.73	7.67	4.73	7.67
8	5.04	7.85	5.05	7.84	5.05	7.85	5.04	7.85
9	5.31	7.99	5.31	7.98	5.32	7.99	5.31	7.99
10	5.55	8.11	5.54	8.09	5.55	8.11	5.55	8.11

ceux de Akoussah et la solution analytique. La déformée réelle de la poutre est donnée à la figure(8.2.b) pour l'élément quadratique L3, après un et dix pas de chargement.

### Porte-à-faux avec un couple concentré

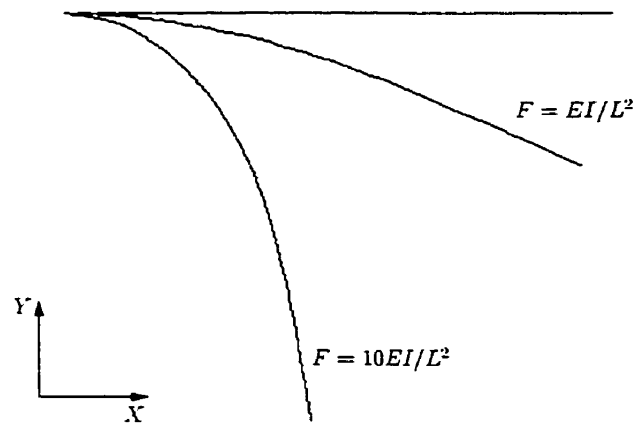
Ici, nous considérons la flexion du porte-à-faux soumis cette fois à un moment concentré  $M$  appliqué au bout libre. La déformée exacte de la poutre est un arc circulaire de rayon  $R = EI/M$ , de sorte que les composantes du déplacement du bout libre se calculent à l'aide de [Ibr97a]:

$$U_X = L - \frac{L}{\phi/2} \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2}$$

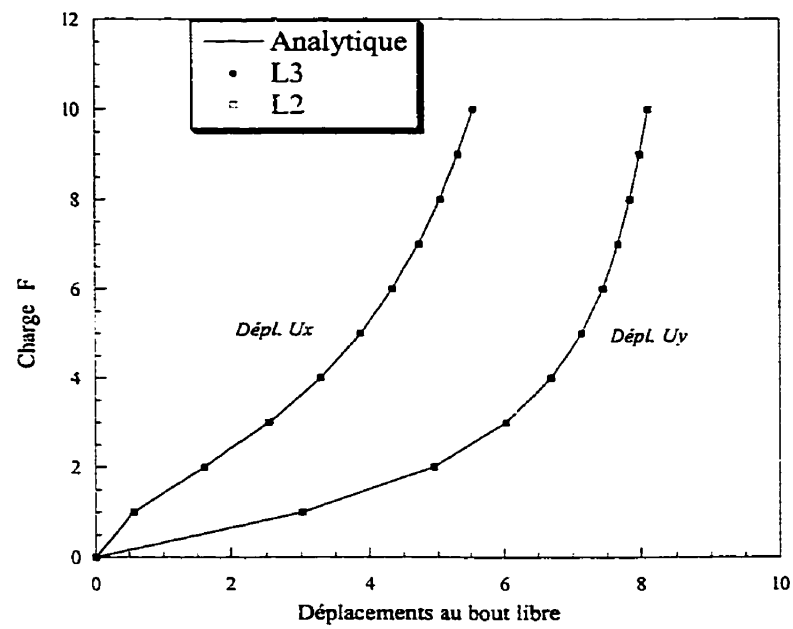
$$U_Y = \frac{L}{\phi/2} \left( \sin \frac{\phi}{2} \right)^2$$

et la rotation par:

$$\phi = \frac{ML}{EI}$$



(a) Séquences de déformation



(b) Courbe charge-déplacement

Figure 8.2: Porte-à-faux avec charge concentrée.

Le moment  $M = 2\pi EI/L = 20\pi$  forcera ainsi la poutre à se courber sous la forme d'un cercle complet. Plusieurs auteurs ont déjà résolu numériquement ce problème ([BB79, Bat81, SVQ86, Ako87, Cri90, Lo92, Ibr97a]) en utilisant différentes propriétés et différents types d'élément. Les résultats, obtenus pour 8 éléments finis linéaires ( $L2$ ) et 4 éléments finis quadratiques ( $L3$ ) en dix pas de chargement, sont présentés au tableau (8.2) en comparaison avec la solution analytique et à ceux de Akoussah [Ako87]. Ce dernier a utilisé 4 éléments finis de poutre tridimensionnel basé sur la théorie de Marguerre des poutres courbes surbaissées, tel que mentionné précédemment, et a considéré un nombre de 10 pas au total. La figure (8.3.a) montre, pour quelques

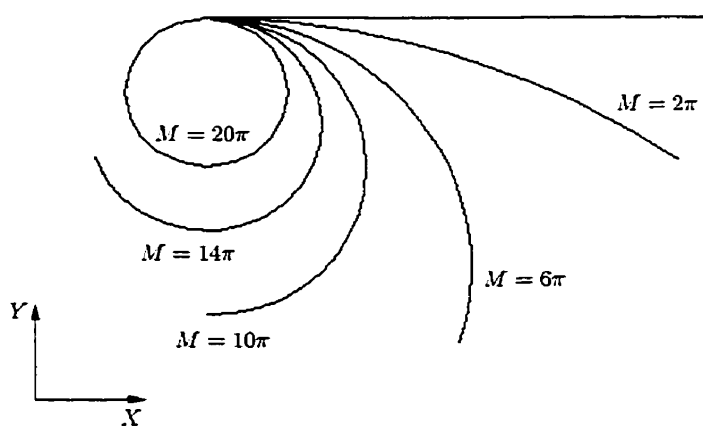
Tableau 8.2: Résultats comparatifs du porte-à-faux avec un moment constant.

$M$	<i>Analytique</i>		<i>Akoussah[Ako87]</i>		<i>élément L3</i>		<i>élément L2</i>	
	$U_X$	$U_Y$	$U_X$	$U_Y$	$U_X$	$U_Y$	$U_X$	$U_Y$
$2\pi$	0.9451	3.0396	0.940	3.040	0.9452	3.0397	0.9427	3.0405
$4\pi$	2.4317	5.4987	2.420	5.500	2.4319	5.4988	2.4241	5.5045
$6\pi$	4.9545	6.9446	4.920	6.970	4.9549	6.9446	4.9431	6.9607
$8\pi$	7.6613	7.1978	7.610	7.270	7.6617	7.1975	7.6520	7.2275
$10\pi$	10.0000	6.3662	9.960	6.500	10.0004	6.3654	10.0004	6.4071
$12\pi$	11.5591	4.7986	11.570	4.980	11.5591	4.7973	11.5739	4.8429
$14\pi$	12.1624	2.9762	12.240	3.160	12.1617	2.9747	12.1899	3.0136
$16\pi$	11.8921	1.3747	12.030	1.520	11.8908	1.3734	11.9234	1.3971
$18\pi$	11.0394	0.3377	11.180	0.410	11.0381	0.3372	11.0611	0.3446
$20\pi$	10.0000	0.0000	10.090	0.002	9.9996	0.0000	9.9996	0.0000

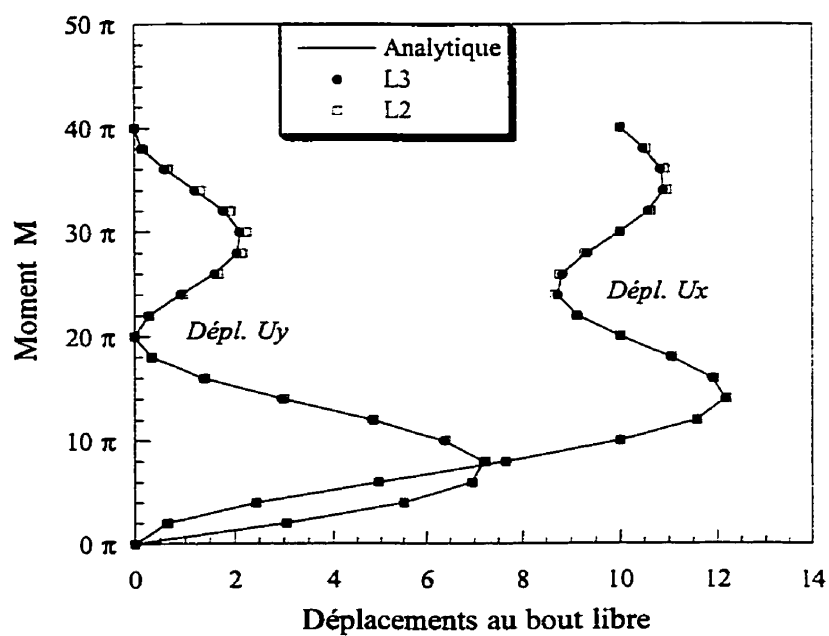
niveaux de chargement, la déformée de la structure, obtenue pour un maillage de 4 éléments quadratiques. À la figure (8.3.b), nous présentons nos résultats obtenues en imposant un moment  $M = 4\pi EI/L = 40\pi$  en 20 pas au total. Cela permet de faire tourner la poutre deux fois sur elle même. Ces résultats, comparés à la solution analytique, démontrent l'excellente performance des éléments  $L2$  et  $L3$ .

### 8.2.2 Arc profond soumis à une charge concentrée

Cet exemple très connu dans la littérature [SVQ86, Ibr95] consiste à étudier le comportement pré et post-flambement d'un arc circulaire encastré d'un côté, simplement



(a) Séquences de déformation



(b) Courbe charge-déplacement

Figure 8.3: Porte-à-faux avec moment concentré.



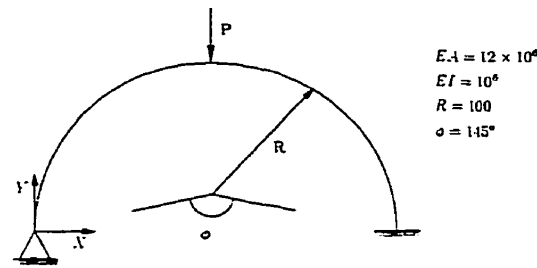
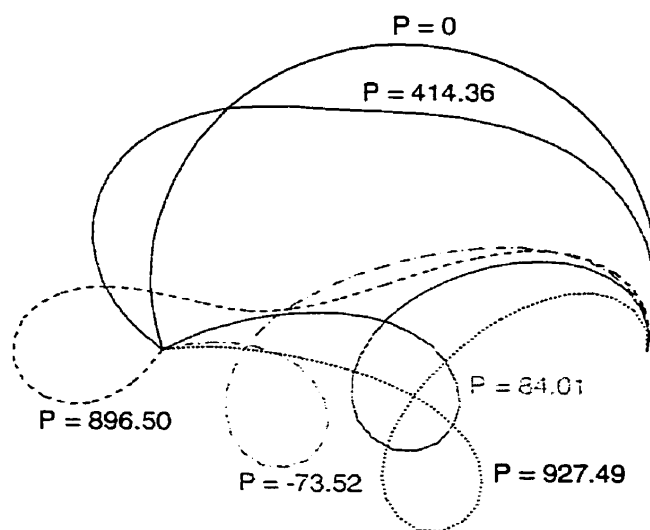


Figure 8.4: Arc profond soumis à une charge concentrée. Données du problème.

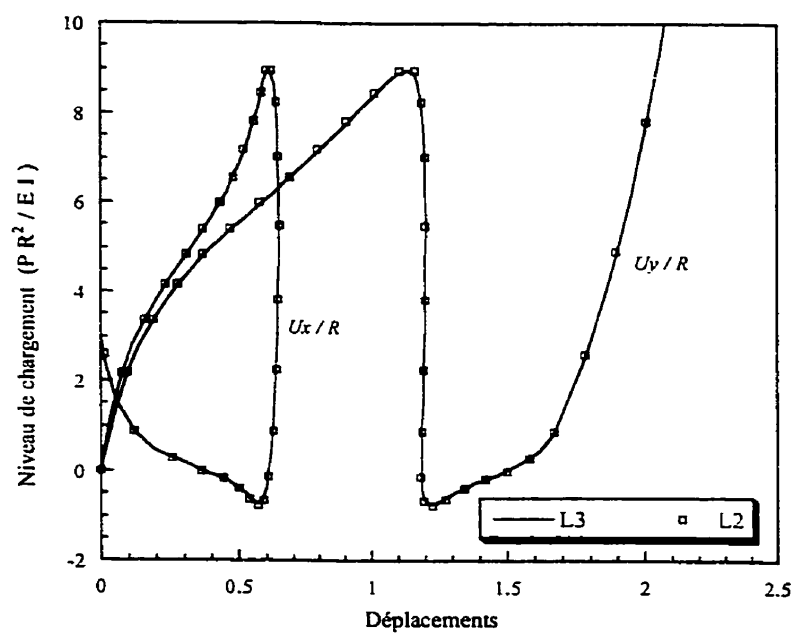
appuyé de l'autre et soumis à une charge concentrée au milieu comme montré à la figure 8.4. La charge critique de référence, basée sur la théorie des poutres d'Euler, est due à DaDeppo et Schmidt [DS75]. La solution montrée à la figure (8.5.a), pour différentes phases de déformation est obtenue avec 20 éléments quadratiques. Au tableau (8.3), la charge critique, obtenue pour un maillage de 20 éléments quadratiques et 40 éléments linéaires, est comparée à la solution de référence et celle obtenue par Ibrahimbegovic et Simo. Le premier a utilisé 20 éléments courbes à 3 nœuds; quant à Simo, il a utilisé 40 éléments linéaires isoparamétriques. Ce dernier a aussi reporté la valeur du second point limite. La valeur trouvée est  $-77.07$ . Nous avons obtenue, respectivement avec les éléments *L3* et *L2*, des valeurs de  $-73.52$  et  $-76.96$ . La valeur des charges critiques résultants de notre analyse confirme la précision de ces deux types d'élément de poutres. La figure (8.5.b) montre graphiquement l'évolution de la charge en fonction des composantes horizontale et verticale du déplacement point d'application de la charge.

Tableau 8.3: Charge critique de l'arc profond.

Modèle	Nombre d'éléments	Charge critique
Référence [DS75]	—	897.0
Ibrahimbegovic [Ibr95]	20	897.3
Simo [SVQ86]	40	905.3
élément <i>L3</i>	20	896.5
élément <i>L2</i>	40	904.5



(a) Séquences de déformation



(b) Courbe charge-déplacement

Figure 8.5: Arc profond soumis à une charge concentrée.

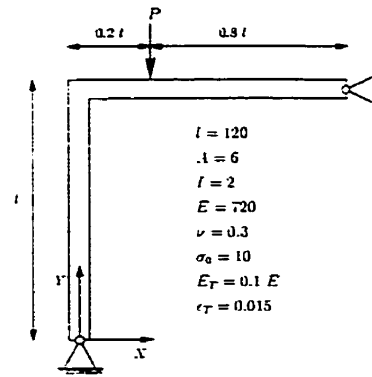


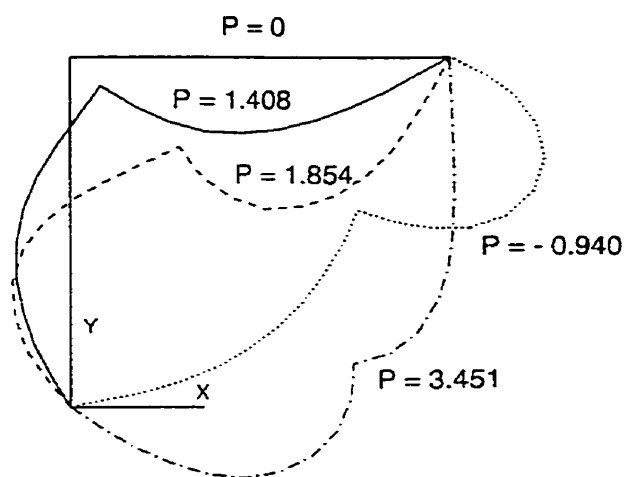
Figure 8.6: Cadre de Lee. Données du problème.

### 8.2.3 Analyse élastique et élastoplastique de cadre de Lee

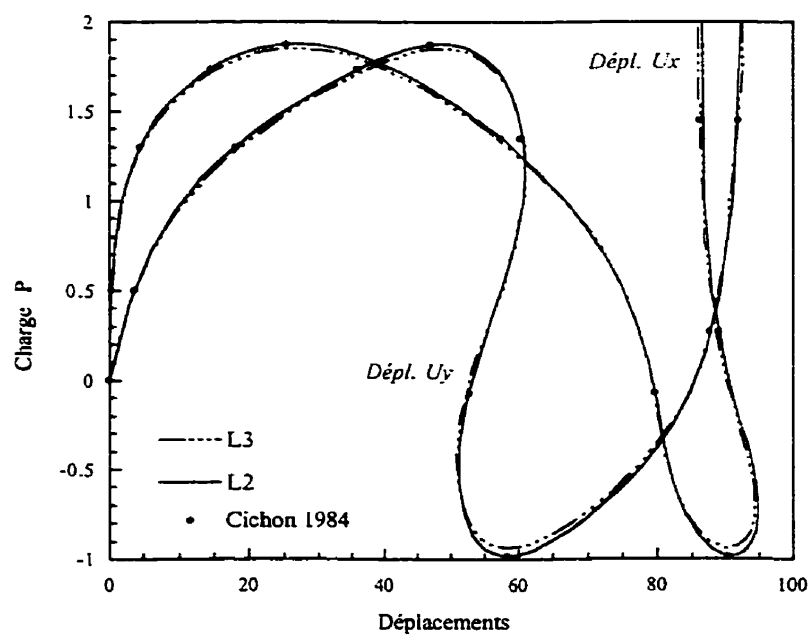
Il s'agit d'un problème de claquement d'un cadre rectangulaire biarticulé, soumis à une charge concentrée (figure 8.6). Ce problème constitue un excellent test sur les performances des éléments en très grands déplacements; le premier point limite ne se produit que pour des déplacements déjà grands. Lee, Manuel et Rossow [LMR68] ont présentés la solution analytique élastique de ce problème. La solution éléments finis est aussi disponible dans les références [Fre78, Cic84, SVQ86, PL96]. Nous avons résolu le problème avec 10 éléments quadratique et 20 éléments linéaires au total. Les comportements élastique et élastoplastique, avec écrouissage isotrope de la structure sont montrés sur les figures 8.7.b et 8.8.b respectivement, en comparaison avec la solution de Cichon [Cic84] où seulement quelques points ont été donnés. La solution analytique élastique n'est pas dessinée, mais elle est en excellent accord avec celle numérique. Les figures 8.7.a et 8.8.a correspondent à diverses déformées du cadre, représentées sur les figures précédentes pour l'élément quadratique. La charge de flambement correspondant aux cas élastique et élastoplastique est trouvée égale à 1.854 et 1.449 respectivement. En utilisant 10 éléments quadratiques, Simo [SVQ86] a obtenu une charge limite élastique de 1.853.

### 8.2.4 Analyse élastique et élastoplastique d'un arc soumis à une charge concentrée

Le comportement élastique et élastoplastique sans écrouissage d'un arc soumis à une charge concentrée est analysé. Les extrémités de l'arc sont encastées; les caractéristiques géométriques et mécaniques sont présentées à la figure 8.9. Étant donnée la symétrie du problème, seule la moitié de l'arc est discrétisé. Ce test a déjà été consi-

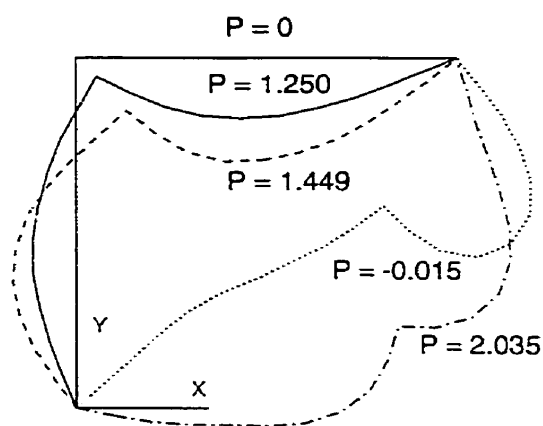


(a) Déformées successives

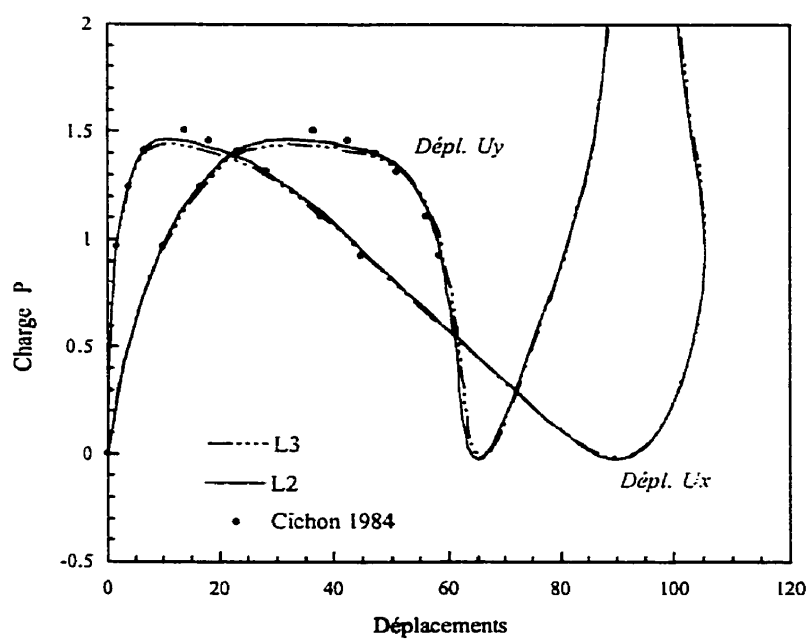


(b) Courbe charge-déplacement

Figure 8.7: Cadre de Lee. Analyse élastique.



(a) Déformées successives



(b) Courbe charge-déplacement

Figure 8.8: Cadre de Lee. Analyse élastoplastique.

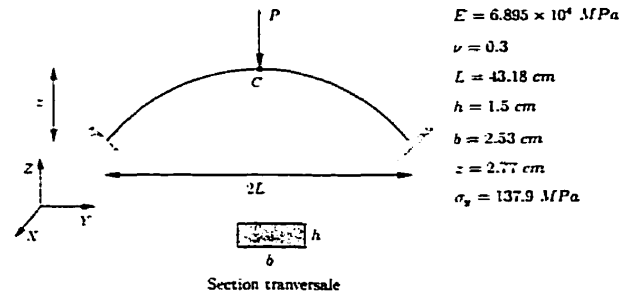


Figure 8.9: Arc soumis à une charge concentrée. Données du problème.

déré par plusieurs auteurs [BG99, EL82, Leb85]. Les résultats, obtenus avec 5 éléments quadratiques et 10 éléments linéaires, sont comparés à ceux de Lebouvier [Leb85] qui a utilisé 10 éléments de poutre en formulation lagrangienne actualisé avec un critère en efforts généralisés, prenant en compte de façon approchée la plastification progressive à travers l'épaisseur. À la figure 8.10, nous avons représenté l'évolution de la flèche au sommet de l'arc en fonction du chargement  $P$ .

### 8.2.5 Analyse tridimensionnelle d'un porte-à-faux courbe

Considérons le porte-à-faux montré à la figure 8.11. Ce problème, consistant à fléchir hors plan un arc circulaire situé dans le plan  $X-Y$ , a déjà été résolu numériquement par un certain nombre d'auteurs [BB79, SVQ86, Ako87, CG88, Cri90, Lo92, Ibr95]. C'est Bathe et Bolourchi [BB79] qui l'ont introduit pour tester la performance de leur élément de poutre dégénéré  $3D$ , en formulation lagrangienne actualisée. À l'exception de Ibrahimbegovic, qui a utilisé un maillage 8 éléments courbes quadratiques, tous ces auteurs ont effectué leur analyse en utilisant 8 éléments linéaires. Pour des fins de comparaison avec les résultats donnés dans les références précitées, nous avons résolu ce problème avec 4 éléments quadratiques et 8 éléments linéaires et en considérant, pour atteindre le niveau de chargement  $P = 600$ , trois incréments de chargements de valeur 300, 150 et 150. Les résultats comparatifs sont résumés au tableau 8.4 pour les niveaux de charge 300, 450 et 600. Mentionnons que Bathe et Bolourchi ont résolu ce problème en 60 pas de chargement.

L'évolution des déplacements en fonction du chargement pour les éléments linéaires  $L2$  et quadratiques  $L3$  est représenté à la figure 8.12 jusqu'à  $P = 3000$ . La figure 8.13 montre la vue en perspective et en projection du porte-à-faux à diverses déformées.

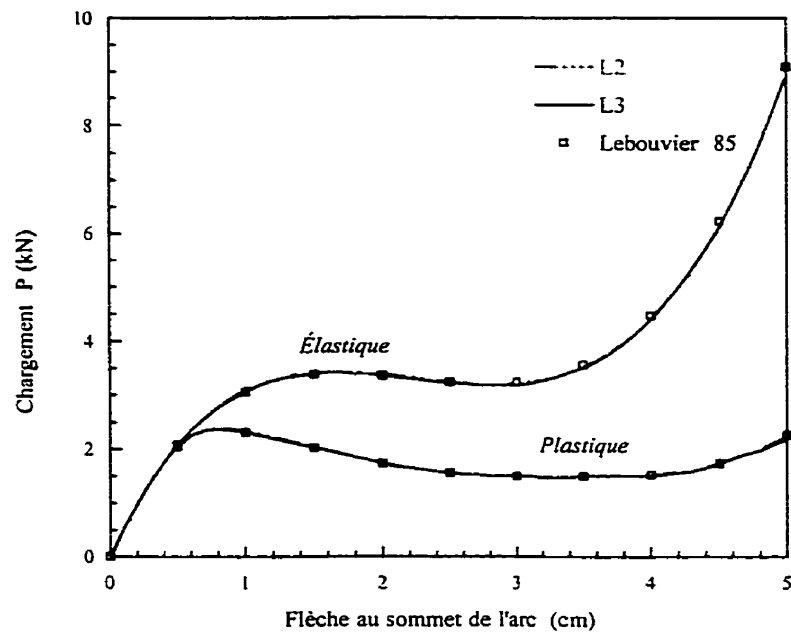


Figure 8.10: Arc soumis à une charge concentrée. Courbe charge-déplacement du sommet.

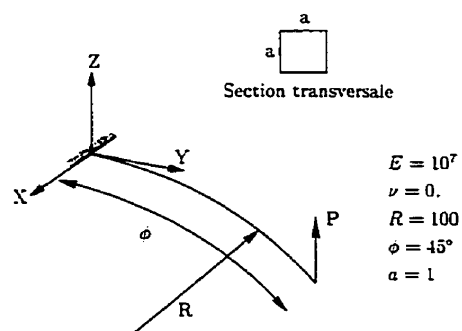


Figure 8.11: Porte-à-faux courbe. Données du problème.

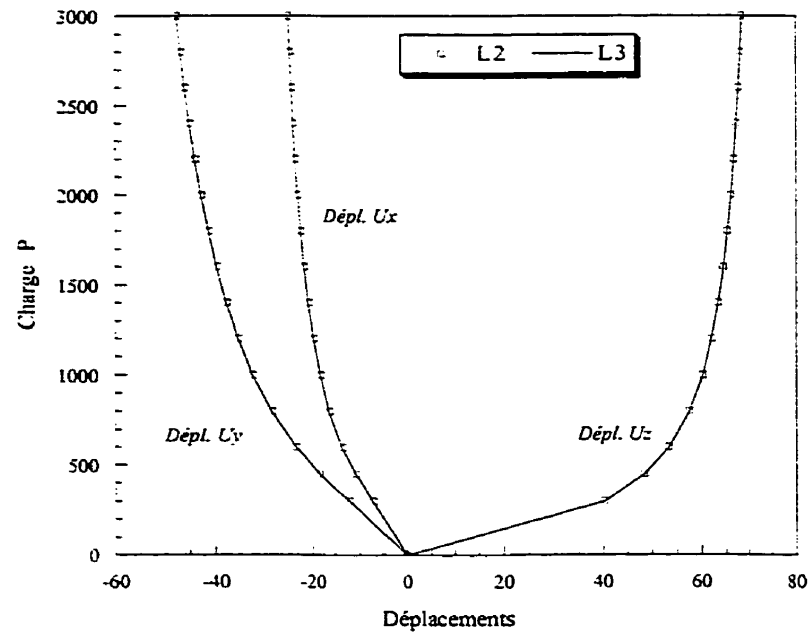


Figure 8.12: Porte-à-faux courbe. Courbe charge-déplacement du bout libre.

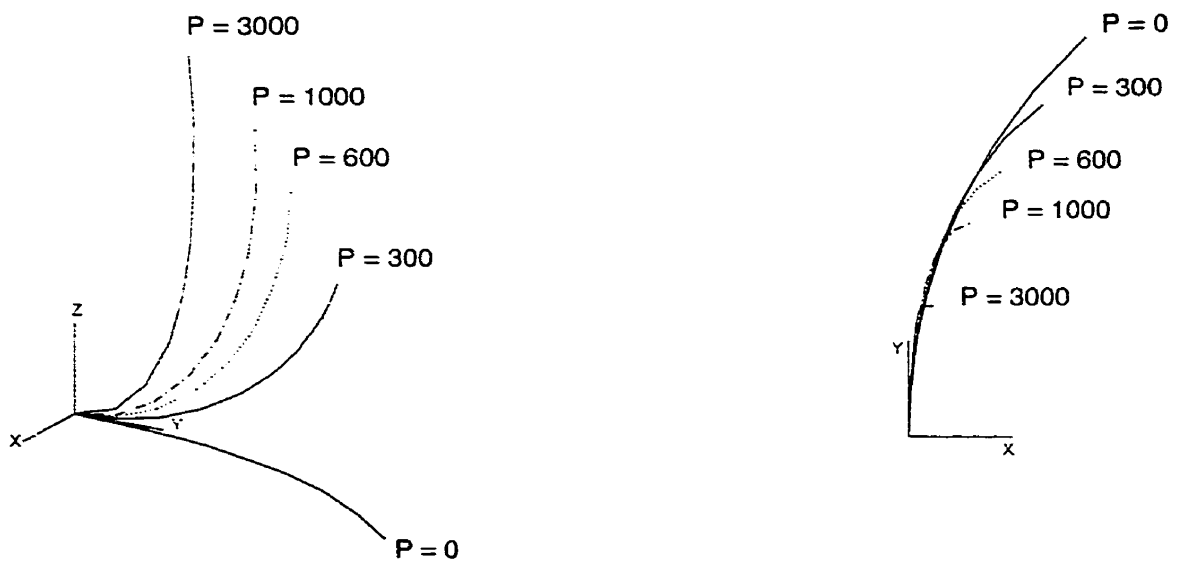


Figure 8.13: Porte-à-faux courbe. Déformées successives.



Tableau 8.4: Résultats comparatifs des déplacements du bout libre.

	Niveau de chargement								
	300			450			600		
	$U_X$	$U_Y$	$U_Z$	$U_X$	$U_Y$	$U_Z$	$U_X$	$U_Y$	$U_Z$
<i>Bathe et al. [BB79]</i>	6.8	11.5	39.5	—	—	—	13.4	23.5	53.4
<i>Simo et al. [SVQ86]</i>	6.97	11.86	40.08	10.68	18.38	48.39	13.51	23.47	53.37
<i>Akoussah [Ako87]</i>	5.7	8.5	35.3	9.15	14.3	44.2	12.0	19.2	50.0
<i>Cardona et al. [CG88]</i>	7.11	12.06	40.35	10.92	18.59	48.59	13.75	23.66	53.50
<i>Crisfield [Cri90]</i>	7.14	12.17	40.53	10.87	18.77	48.79	13.69	23.86	53.71
<i>Lo [Lo92]</i>	7.0	11.9	40.1	10.7	18.4	48.4	13.5	23.5	53.4
<i>Ibrahimbegovic [Ibr95]</i>	—	—	—	—	—	—	13.60	23.75	53.41
<i>élément L2</i>	7.05	11.97	40.27	10.69	18.40	48.41	13.50	23.49	53.39
<i>élément L3</i>	7.11	12.04	40.37	10.78	18.47	48.50	13.60	23.56	53.47

### 8.3 Validation des éléments de coques

Dans cette section, nous présentons quelques résultats obtenus pour des problèmes tests pour la validation des éléments de coques proposés dans cette thèse. Ces tests sont principalement traités dans les références suivantes: [DO77, Faf87, Dam96, SFR89, SFR90, Sim93, CMS92, SCGY90, SB92, BR92].

#### 8.3.1 Plaque en flexion

Dans le but d'évaluer la performance des éléments de coque proposés dans le régime non linéaire avec grands déplacements et grandes rotations, le porte-à-faux étudié dans la section 8.2.1 est repris ici, mais cette fois avec un couple constant  $M$  seulement, appliqué au bout libre. Nous considérons dans cette analyse les mêmes données physiques et géométrique afin de comparer nos résultats à la solution analytique donnée au paragraphe 8.2.1. La plaque est modélisée avec un maillage de  $8 \times 4$  éléments à 4 nœuds ( $Q4$ ) et  $4 \times 2$  éléments à 8 nœuds ( $Q8$ ). Les déformées successives correspondant à ce dernier maillage, pour quelques séquence de chargement, sont illustré sur la figure 8.14.a. Pour chaque type d'élément, un total de dix incréments de chargement de valeur  $\Delta M = 2\pi$  est considéré pour tracer la courbe charge-déplacement de l'extrémité libre de la plaque. Ces courbes et les résultats numériques correspondants sont présentés à figure 8.14.b

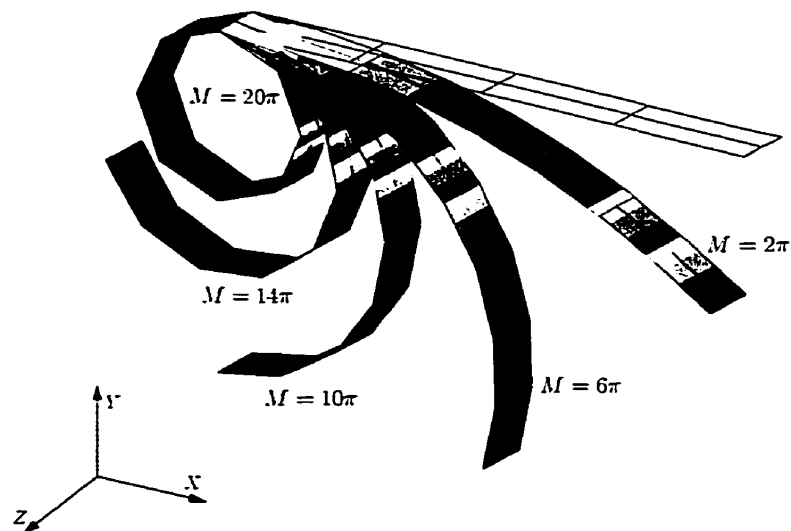
et au tableau 8.5 respectivement. On remarque que les résultats obtenus concordent très bien avec la solution analytique. Ceci révèle la précision et la performance des éléments de coque proposés dans les problèmes de flexion à grands déplacements et grandes rotations.

Tableau 8.5: Plaque en flexion. Résultats comparatifs.

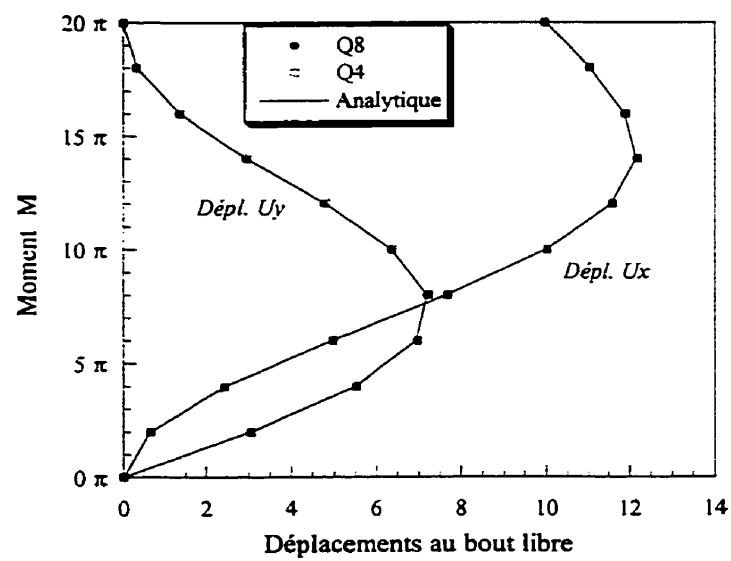
$M$	<i>Analytique</i>		<i>élément Q8</i>		<i>élément Q4</i>	
	$U_X$	$U_Y$	$U_X$	$U_Y$	$U_X$	$U_Y$
$2\pi$	0.6451	3.0396	0.6493	3.0494	0.6469	3.0502
$4\pi$	2.4317	5.4987	2.4469	5.5130	2.4385	5.5183
$6\pi$	4.9545	6.9446	4.9826	6.9546	4.9693	6.9706
$8\pi$	7.6613	7.1978	7.6985	7.1950	7.6866	7.2257
$10\pi$	10.0000	6.3662	10.0380	6.3455	10.0360	6.3891
$12\pi$	11.5590	4.7986	11.5860	4.7611	11.6000	4.8094
$14\pi$	12.1620	2.9762	12.1700	2.9297	12.1990	2.9710
$16\pi$	11.8920	1.3747	11.8780	1.3311	11.9120	1.3562
$18\pi$	11.0390	0.3377	11.0080	0.3092	11.0330	0.3169
$20\pi$	10.0000	0.0000	9.9638	0.0062	9.9645	0.0065

### 8.3.2 Hémisphère pincé

Ce problème, traité dans plusieurs travaux [SFR90, BR92, SCGY90, Pol92, Dam96, Amm97, Dom97], est devenu un test standard pour l'évaluation des éléments de coques avec non-linéarité géométrique. Il a été choisi dans le but de vérifier l'absence du blocage en membrane et l'aptitude des éléments de coque proposés à représenter correctement les mouvements de corps rigide. L'hémisphère, dont les propriétés géométriques et matérielles sont présentées sur la figure 8.15, est soumise à une force de traction dans le sens  $X$  et à une force de compression dans le sens  $Y$  d'intensité  $F = 100$ , appliquée en 10 pas. Étant donné la symétrie du problème, un quart de la structure est discrétisé. Deux maillages réguliers ont été considérés, un de  $8 \times 8$  correspondant à l'élément de coque quadratique à 8 nœuds (Q8) et l'autre de  $16 \times 16$  par coté, correspondant à l'élément de coque linéaire à 4 nœuds (Q4). La déformée finale de l'hémisphère après les 5 pas de chargement est présentée sur la figure 8.16 pour le maillage quadratique  $8 \times 8$ .



(a) Séquences de déformation



(b) Courbe charge-déplacement

Figure 8.14: Plaque en flexion.

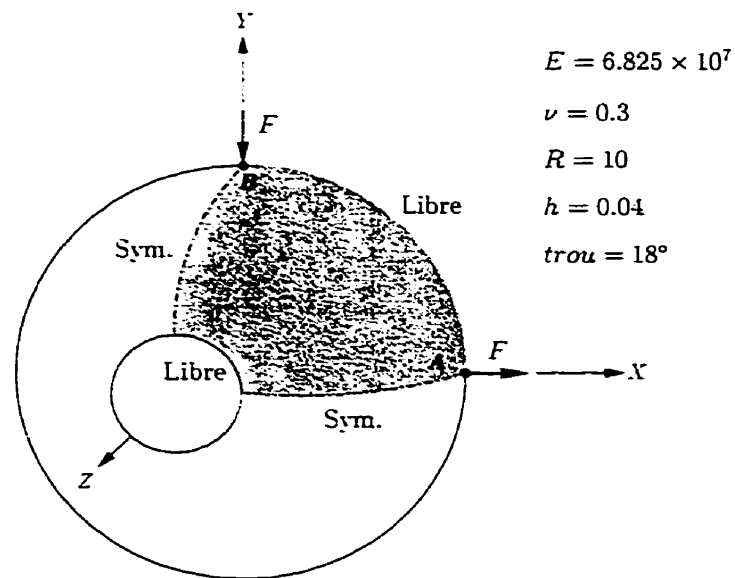


Figure 8.15: Hémisphère pincé. Données du problème.

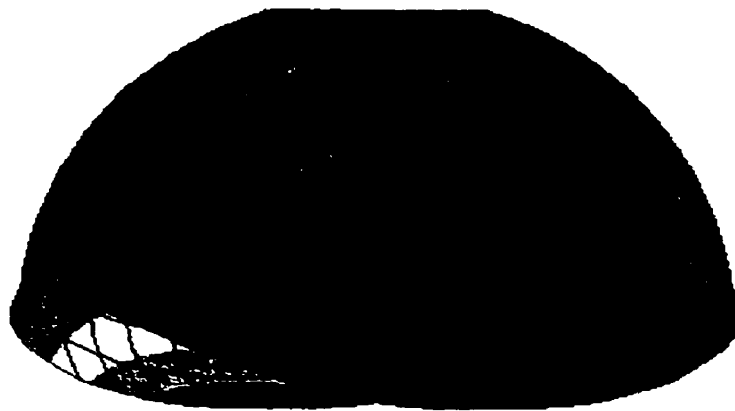


Figure 8.16: Hémisphère pincé. Déformée réelle.

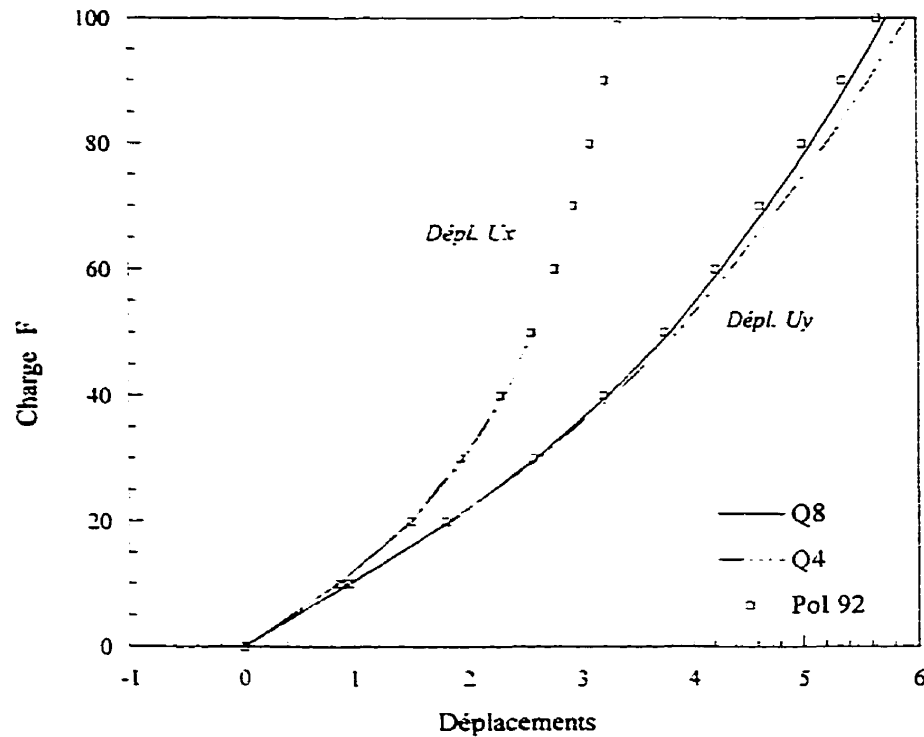


Figure 8.17: Hémisphère pincé. Courbe charge-déplacement.

Les courbes charge-déplacement, selon l'axe  $X$  ( $U_X$ ) et selon l'axe  $Y$  ( $U_Y$ ) des point  $A$  et  $B$  respectivement, sont présentées à la figure 8.17 en comparaison avec la solution de référence de Pol [Pol92]. Ce dernier a utilisé un élément triangulaire de type coque à facette plane ( $DKT18$ ) formulé en description lagrangienne actualisé et a considéré un maillage régulier de  $16 \times 16$  éléments. On remarquera que nos résultats concordent très bien avec ceux de Pol. Notons que les résultats obtenus par Pol sont très comparables avec l'ensemble des résultats extraits des références précitées.

### 8.3.3 Plaque annulaire

Nous considérons une plaque annulaire, encastree d'un coté et soumise à l'autre extrémité à une charge linéique uniformément répartie (fig 8.18).

Cet exemple a été présenté par Basar et Ding [BD90a] pour tester les formulations de grandes rotations des coques. Il a été repris par la suite par plusieurs auteurs [BR92, JCP94, Ibr97b, Dom97]. Nous avons traité ce problème en considérant deux type de maillages, un maillage quadratique de  $2 \times 16$  éléments et un autre linéaire de  $4 \times 32$ . La figure 8.19 illustre la concordance de nos résultats, obtenus en 30 pas de

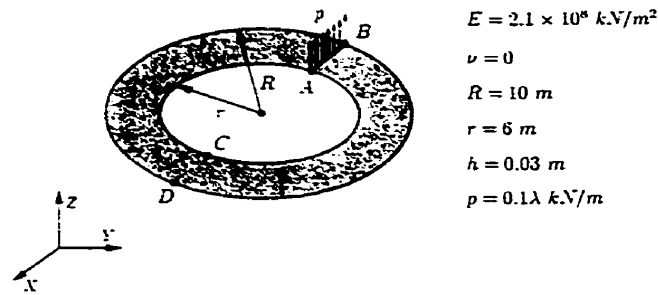


Figure 8.18: Plaque annulaire. Données du problème.

chargement, à ceux de Beuchter et Ramm [BR92] qui ont traité le problème à l'aide d'un élément isoparamétrique dégénéré à 16 nœuds en considérant un maillage de  $2 \times 16$  éléments. Les déformées successives de la plaque, obtenues avec l'élément à 8 nœuds Q8, sont reportées à la figure 8.20 pour les valeurs suivants du paramètre de charge:  $\lambda = 10, 30, 60$ .

### 8.3.4 Poutre en flexion plane

Une poutre plane encastrée à un bout est soumise à une charge de flexion plane  $F = 1000$  à l'extrémité libre est illustrée sur la figure 8.21.

Ce test sert à tester le comportement en membrane des éléments de coques. Il a été proposé par Simo et al. [SFR90] pour évaluer les performance de son élément à 4 nœuds de type Hellinger-Reissner et repris par la suite Wriggers et Gruttmann [WG93] avec un élément à 9 nœuds. Nous avons modélisé la poutre avec 5 éléments à 8 nœuds et 10 éléments à 4 nœuds. Les configurations initiale et déformée finale, obtenue avec l'élément Q8 après 10 pas de chargement, sont illustrées sur la figure 8.22. Les courbes charge-déplacement de l'extrémité libre de la poutre sont présentés sur la figure 8.23 en comparaison avec la solution de numérique de Simo et al. [SFR90]

### 8.3.5 Poutre en L sous chargement de flexion

Ce test, présenté par Simo [Sim93], consiste à fléchir un porte-à-faux en forme de L encastré à une extrémité et soumise à un moment fléchissant  $M$  au bout libre (figure 8.25). Le moment total permettant de courber la poutre sous forme d'un cylindre est  $M_{tot} = 50\pi$ .

Le but de ce test est de démontrer la performance des éléments de coque proposés

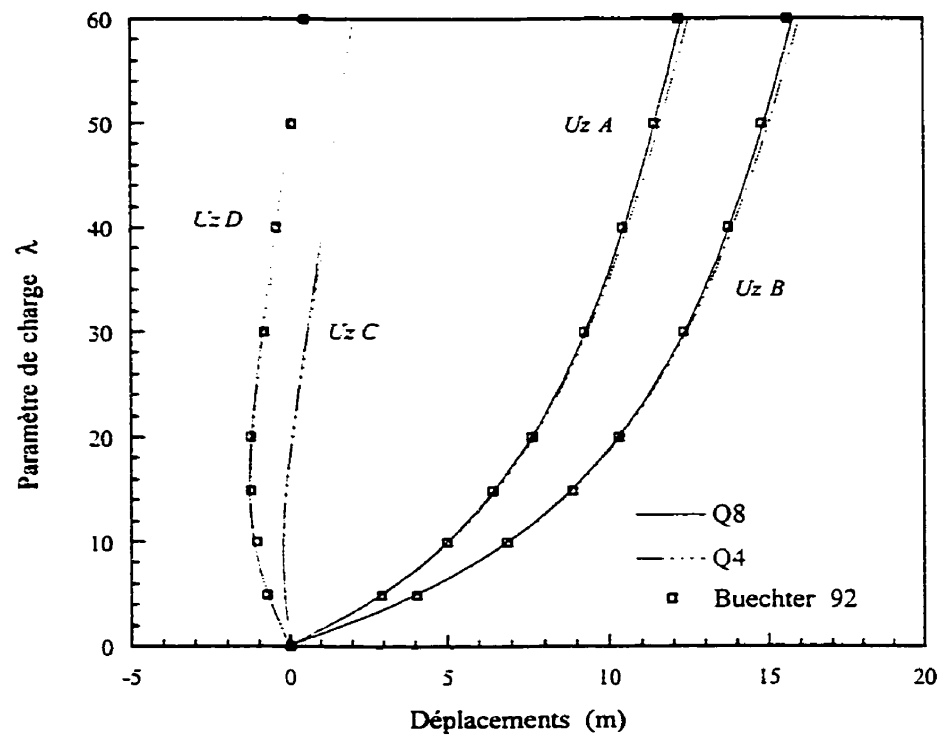


Figure 8.19: Plaque annulaire. Courbe charge-déplacement.

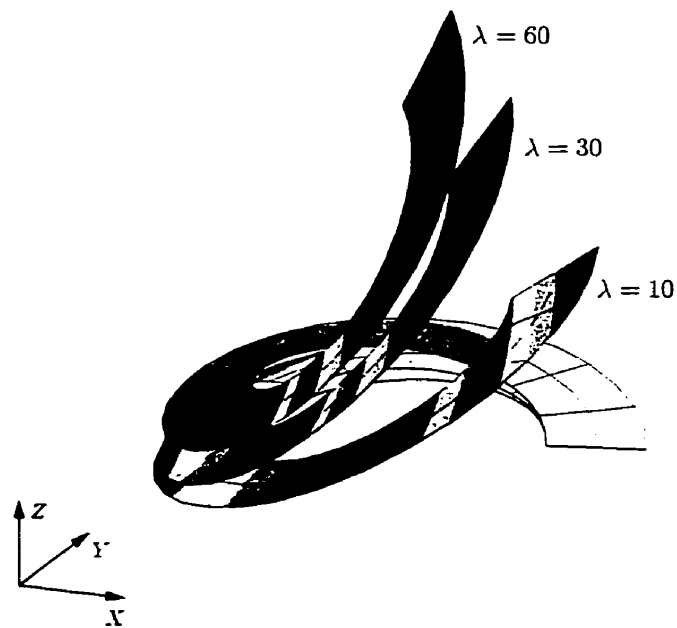


Figure 8.20: Plaque annulaire. Déformées de la structure.

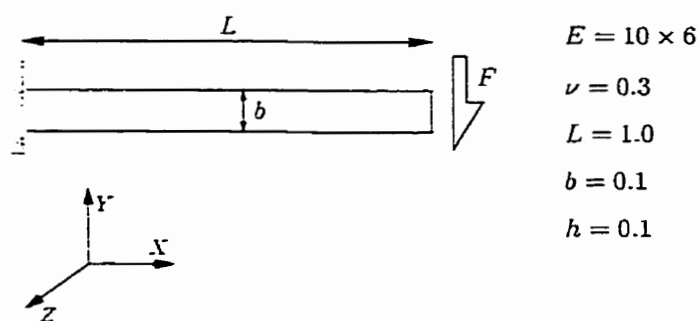


Figure 8.21: Poutre en flexion plane. Données du problème.

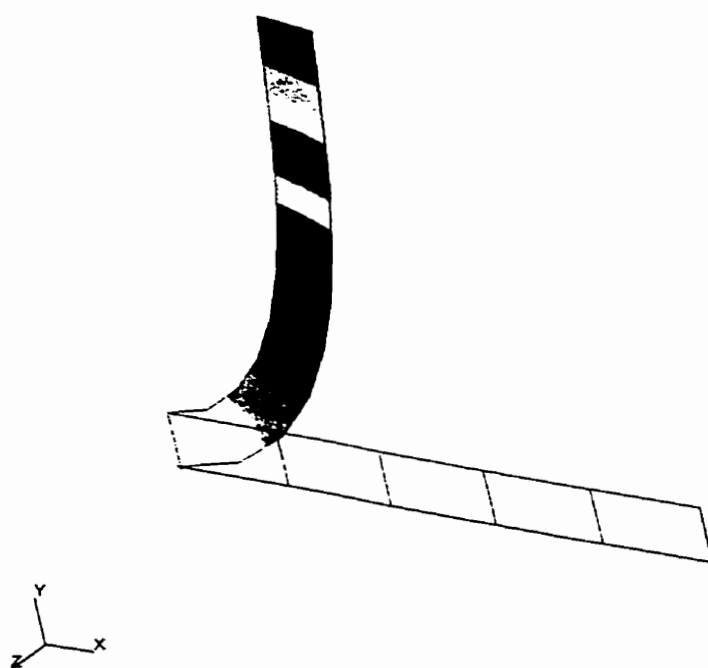


Figure 8.22: Poutre en flexion plane. Configurations initiale et finale.



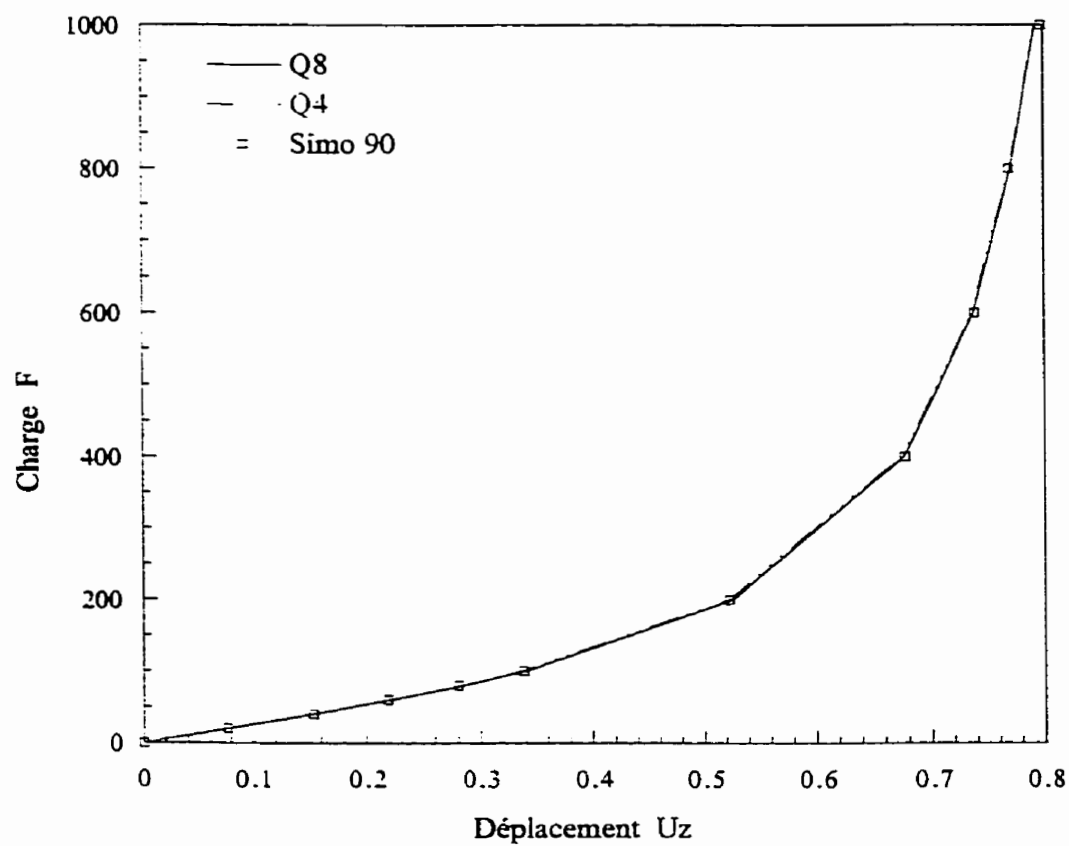


Figure 8.23: Poutre en flexion plane. Courbe charge-déplacement.

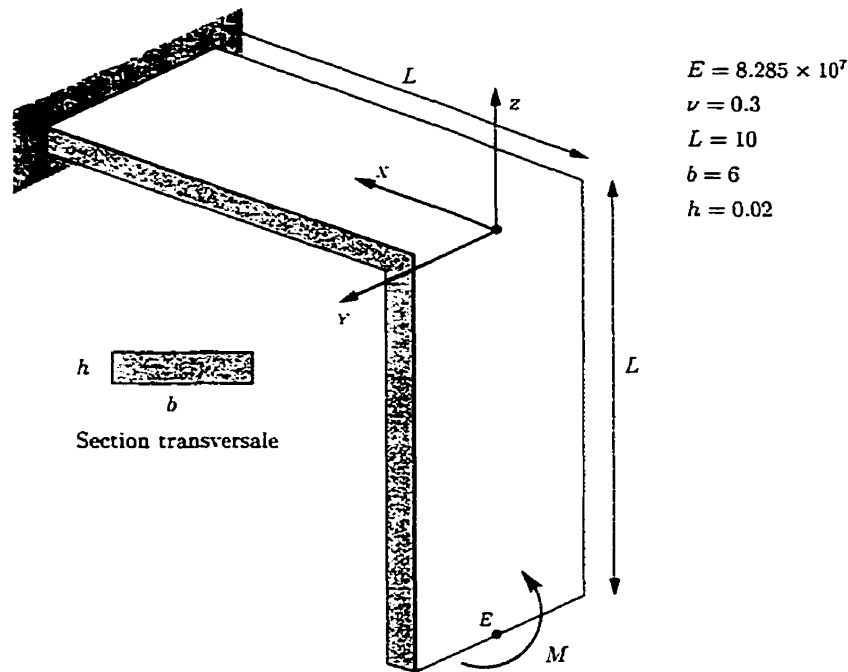


Figure 8.24: Poutre en L sous chargement de flexion. Données du problème.

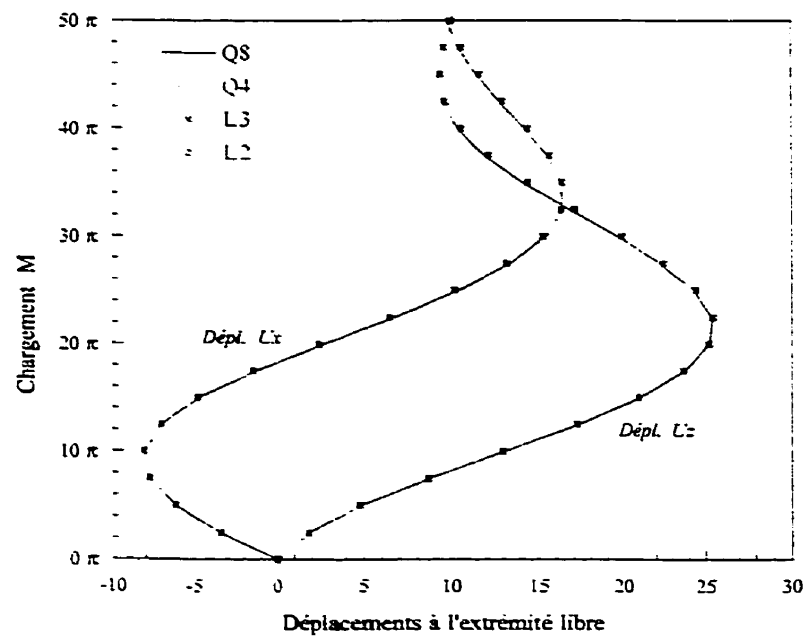
à modéliser les problèmes d'intersection des coques et d'évaluer leur précision dans le cas de non-linéarité géométrique avec grands déplacements et grandes rotations.

Deux maillages réguliers sont adoptés pour modéliser le porte-à-faux; un maillage de  $8 \times 2$  éléments à 8 nœuds et un autre de  $16 \times 4$  éléments à 4 nœuds. L'évolution des déplacements et de la déformée réelle au cours de chargement sont présentés aux figures 8.25.a et 8.25.b respectivement. Ces résultats, obtenus en 20 pas de chargement, sont comparés à ceux obtenus du modèle de poutre 3D à 3 nœuds avec 8 éléments et à 2 nœuds avec 16 au total (Voir chapitre 6). On remarque que les solutions obtenues collent très bien. Les résultats issus du modèle de coque sont alors en parfaite concordance avec la solution élastiques des poutres [Sim93].

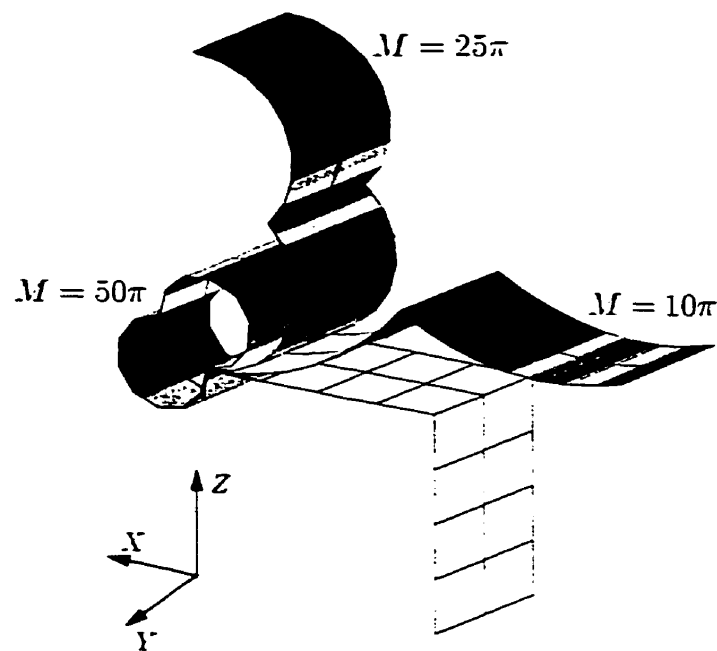
### 8.3.6 Déversement d'une poutre en C

Le Déversement d'une poutre en C encastrée à une extrémité et soumise à une charge concentrée à l'extrémité libre dans le plan de l'âme est analysé. Les caractéristiques géométriques et matérielles de ce problème sont présentées sur la figure 8.26.

Cet exemple a été présenté par Chroscielewski et al. [CMS92] pour tester l'efficacité de leur élément de coque à 9 nœuds à modéliser les plaques pliées. Ils ont utilisé à



(a) Courbe charge-déplacement au bout libre



(b) Déformées successives

Figure 8.25: Poutre en L sous chargement de flexion.

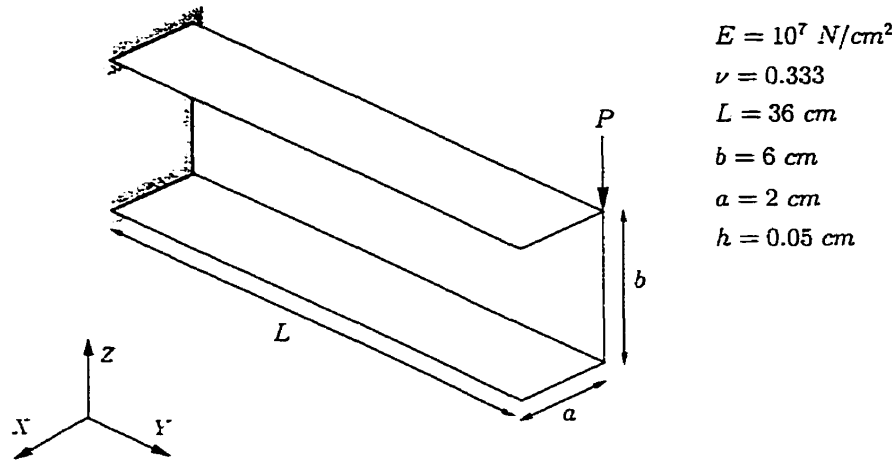


Figure 8.26: Poutre en C. Données du problème.

cette fin un maillage  $10 \times 12$  éléments ( $6 \times 12$  pour l'âme et  $2 \times 12$  pour chaque aile). Parmi les auteurs qui ont repris cet exemple, citons Ibrahimbegovich qui a utilisé  $10 \times 12$  éléments de coque à 9 nœuds, basés sur la théorie des coques avec rotation autour de la normale (*drilling rotation*); Hammadi [Dom97] qui a analysé le problème avec un élément triangulaire dégénérée en utilisant deux maillages:  $30 \times 22$  et  $52 \times 26$  et récemment, Domissy [Dom97] à l'aide d'un élément de coque de type solide et deux maillages:  $12 \times 30 \times 1$  et  $12 \times 15 \times 1$  (1 élément suivant l'épaisseur). Pour des fins de comparaison, nous avons choisi l'élément de coque à 8 nœuds et adopté un maillage régulier de  $10 \times 12$  éléments. Les résultats numériques de cette analyse sont présentés sur la figure 8.26, où nous avons tracé l'évolution du déplacement vertical  $U_Z$  sous le point d'application de la charge  $F$  en comparaison avec Chrosielewski et al. [CMS92]. À la figure 8.28, nous retrouvons les déformées réelles de la poutre correspondant, dans l'ordre, à la charge critique et à au chargement final. Notons la concordance de la charge critique obtenue avec celle trouvée par Chrosielewski et al.. Le plissement de la face supérieure au voisinage de l'encastrement, illustré à la figure 8.28, est aussi retrouvée. Cette zone exigerait un maillage plus raffiné pour avoir des résultats plus précis.

### 8.3.7 Analyse élastoplastique d'une plaque carrée sur appuis simples

Ce test, extrait des références suivantes [DO77, DO66, Faf87, Dam96], consiste à analyser le comportement élastoplastique d'une plaque carrée simplement supportée et soumise à un chargement réparti  $p = 0.04$  comme monté sur la figure 8.29.

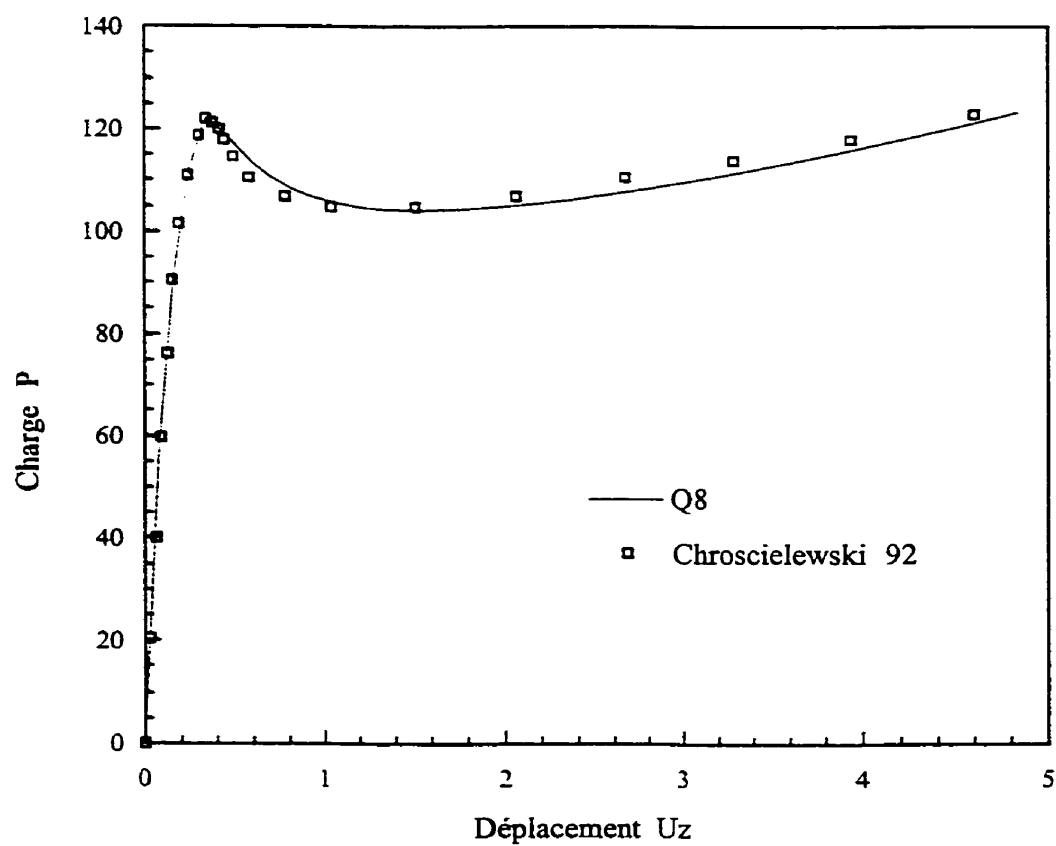
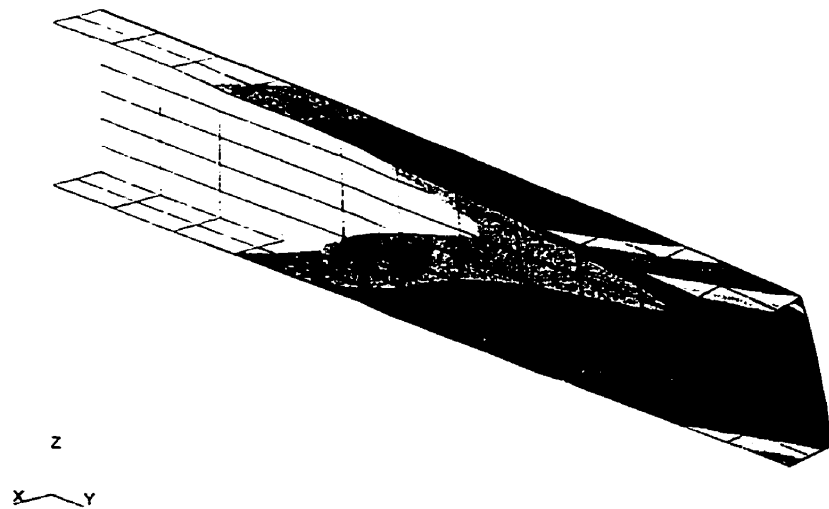
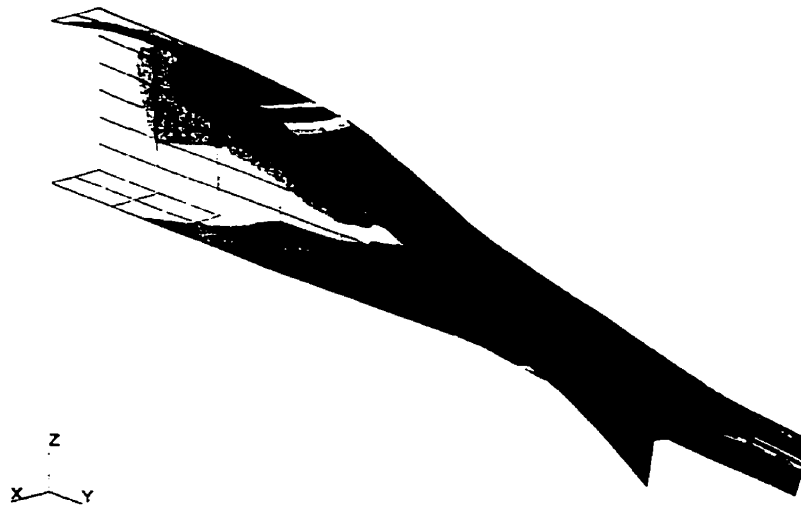


Figure 8.27: Poutre en C. Courbe charge-déplacement sous la charge.



(a) déformée critique



(b) déformée finale

Figure 8.28: Poutre en C. déformées réelles.

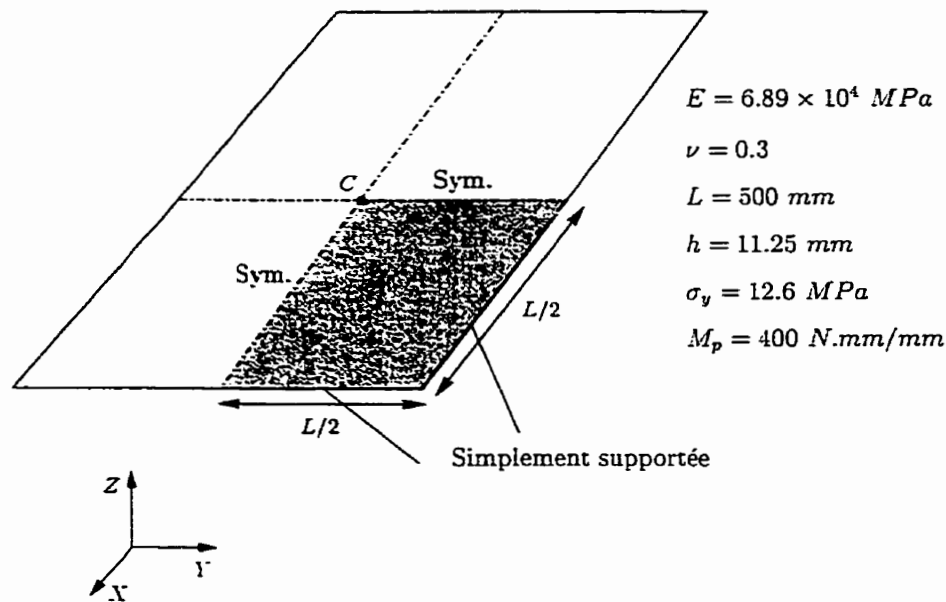


Figure 8.29: Plaque carrée. Données du problème.

Étant donné la symétrie du problème, nous avons seulement discrétisé le quart de la plaque avec un maillage de  $4 \times 4$  éléments à 4 nœuds et  $2 \times 2$  éléments à 8 nœuds. Nous supposons un comportement élasto-plastique parfait avec un critère de von Mises. Ce test est proposé pour des fin de validation de:

- Validation de l'algorithme d'Euler implicite;
- validation des éléments de coque à 4 nœuds ( $Q4$ ) et à 8 nœuds ( $Q8$ ) en élasto-plasticité;
- validation de la méthode d'intégration sur l'épaisseur de Lobatto.

Les résultats numériques seront comparés aux résultats de Fafard [Faf87] qui sont basés sur l'utilisation de l'élément  $DLTP$  (élément triangulaire à 6 nœuds et 27 degrés de liberté) avec une technique d'intégration par couche et à ceux de Dammak [Dam96], obtenues à l'aide d'un élément de coque raffiné  $DDDQ$  à 4 nœuds de type  $DD$  (*Double Director*) et une intégration sur l'épaisseur selon un schéma de Gauss.

Pour fin de comparaison, nous avons analysé cet exemple en 20 pas de chargement avec un total de 10 points de Lobatto sur l'épaisseur. La figure 8.30 illustre les courbes charge-déplacement au centre de la plaque (flèche  $U_z$  au point  $C$ ) pour l'élément à 4 nœuds et à 8 nœuds, en comparaison avec les résultats obtenus par Fafard avec 28

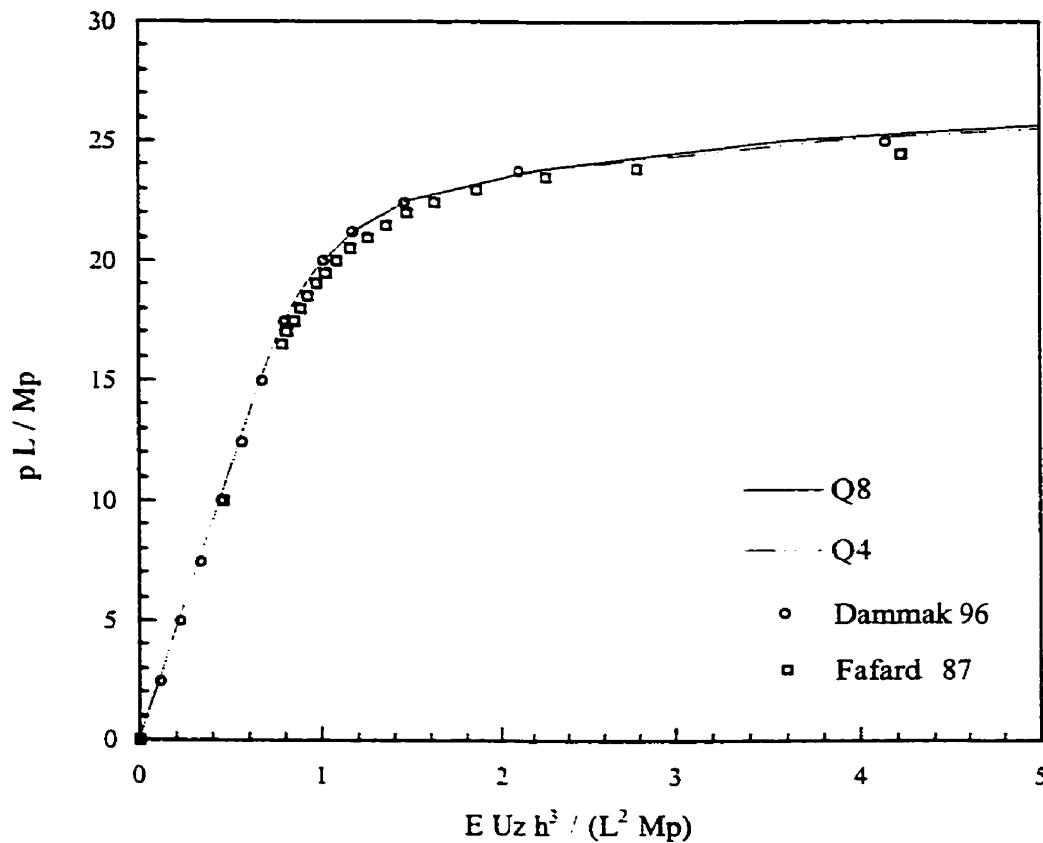


Figure 8.30: Plaque carrée. Courbe charge-déplacement.

couches et Dammak avec 10 points de Gauss. On remarque que les résultats coïncident avec ceux de Dammak et sont très proches de ceux obtenus par Fafard avec le *DLTP*.

Dans une deuxième analyse le même test est repris pour évaluer l'influence du nombre de point d'intégration sur les résultats numériques. Cependant, dans cette analyse toute la charge  $p = 0.04$  est appliquée en un seul pas avec l'introduction d'un léger écrouissage isotrope ( $E_T = 200$ ). Les valeurs obtenues, de la flèche au centre de la plaque, sont rapportés dans le tableau 8.6 en comparaison avec ceux de Dammak [Dam96], obtenus selon le schéma d'intégration de Gauss et en utilisant les éléments *DDDQ*, *MITC4* (élément de coque à 4 nœuds de type Reissner-Mindlin avec un modèle déplacement en membrane-flexion et une partie de cisaillement de type *Assumed Natural Strains*) et *DKQ* (élément de coque à 4 nœuds de type Kirchhoff-Love avec un modèle déplacement en membrane). Nous remarquons que même avec un faible nombre de points d'intégration les éléments *Q4* et *Q8* arrivent à donner d'assez



bons résultats. On notera également un comportement similaire pour tous éléments.

Tableau 8.6: Plaque carrée en flexion. Intégration sur l'épaisseur (1 seul pas).

Schéma d'intégration

$N$	<i>Lobatto</i>		<i>Gauss [Dam96]</i>		
	$Q4$	$Q8$	$DDDQ$	$MITC4$	$DKQ$
5	5.437	5.267	13.39	12.14	13.71
6	3.040	2.855	2.819	2.747	2.845
7	4.673	4.432	6.826	5.931	7.156
8	3.900	3.558	3.332	3.239	3.366
9	4.320	4.049	4.966	4.402	5.178
10	4.024	3.724	3.701	3.570	3.735

### 8.3.8 Analyse élastoplastique d'un arc soumis à une charge concentrée

L'analyse élastique et élastoplastique et de l'arc de la section 8.2.4 est reprise. Les caractéristiques géométriques et mécaniques données sur figure 8.9 sont conservés. Le maillage adopté cette fois-ci est  $5 \times 1$  éléments à 8 nœuds et  $10 \times 1$  éléments à 4 nœuds. La figure 8.31 illustre l'évolution de la flèche au sommet de l'arc en fonction du chargement  $P$  en comparaison avec la solution obtenue par Lebouvier [Leb85]. Pour l'analyse élastoplastique, nous avons choisi 8 points de Lobatto pour intégrer la plastification sur l'épaisseur. L'examen de la courbe charge-déplacement montre encore une fois la précision de la formulation de coque utilisée.

## 8.4 Conclusion du chapitre

dans ce chapitre, une évaluation et une comparaison des modèles de poutre et de coque proposés ont été réalisés à travers quelques tests de validation proposés dans la littérature. Les résultats obtenus, illustrent le degré de précision de ces éléments et leur efficacité à traiter des problèmes variés.

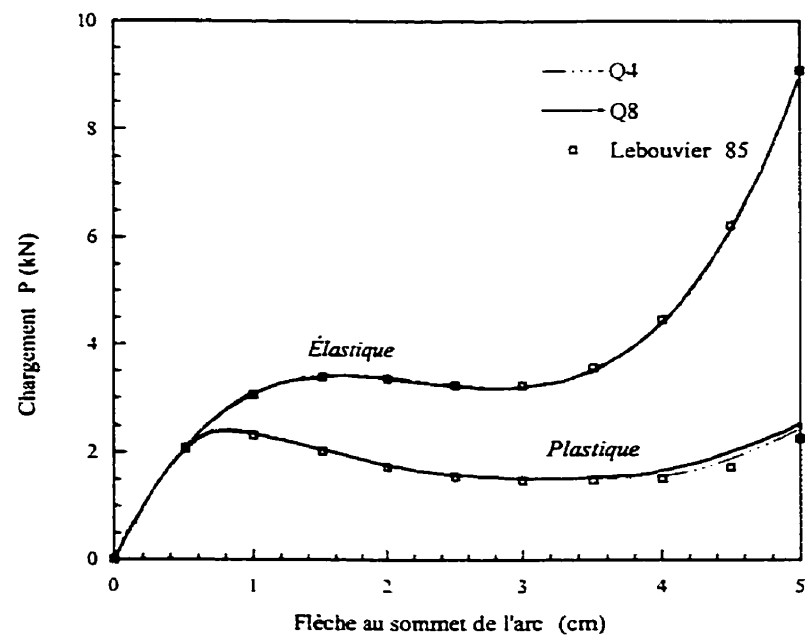


Figure 8.31: Arc soumis à une charge concentrée. Courbe charge-déplacement du sommet.

## Chapitre 9

# Applications aux constructions métalliques industrielles

### 9.1 Analyse non linéaire de panneaux ondulés types

#### 9.1.1 Introduction

Honco inc., une entreprise spécialisée dans la fabrication de panneaux ondulés destinés à la construction civile, a confié au GIREF le mandat d'effectuer une étude par éléments finis portant d'une part, sur l'analyse de la stabilité élastique de panneaux ondulés de longueur variant de 4 à 14 mètres et d'autre part, sur l'analyse non linéaire géométrique et matérielle d'un panneau type de  $L$  mètres de longueur pour évaluer la résistance et le comportement de ce dernier dans la zone post-voilement<sup>1</sup>.

Cette étude visait plus spécifiquement à déterminer:

- La charge limite qui cause le flambement;
- La capacité ultime du panneau en compression;

---

<sup>1</sup>Nous nous abstenons de donner les caractéristiques géométriques et matérielles de la structure, étant donné l'entente conclue garantissant la confidentialité des résultats

- Le comportement post-voilement du panneau:
- S'il existe une résistance post-flambement;
- Le mode de rupture:
- Le niveau de plasticité en trois points du panneau.

La description détaillée de l'étude est donnée dans la référence [Sop98].

### 9.1.2 Méthodologie

Les panneaux fabriqués par Honco sont composés de deux types d'ondulation. L'ondulation principale assure la stabilité globale du panneau. Les ondulations secondaires rigidifient localement le panneau pour augmenter sa résistance au voilement local. L'analyse de la stabilité des panneaux Honco nécessite une bonne modélisation de toutes ces ondulations. Cette contrainte exige une densité de maillage suffisante pour représenter les ondulations et respecter un rapport *longueur/largeur* raisonnable pour les éléments. De plus, une réduction de la densité du maillage sur le panneau dans la direction des ondulations aurait tendance à modifier la géométrie réelle et donc de diminuer de beaucoup la précision des résultats, puisque leur inertie globale et leur rigidité locale seraient passablement modifiées. Afin de limiter au maximum cette contrainte géométrique ainsi que la densité du maillage, il a été proposé plutôt d'analyser, à l'aide d'éléments de coques à huit nœuds<sup>2</sup>, un demi panneau type (fig. 9.1). Des conditions de symétrie ont été imposées sur la ligne de symétrie du panneau. Le maillage comprend 10632 nœuds et 3465 éléments, ce qui a donné un problème de 61951 degrés de liberté. Une seule configuration a été analysée (longueur, largeur et conditions aux limites). Deux types d'analyse ont été réalisées: une étude non linéaire en grands déplacements et en grandes rotations (stabilité) dans le domaine élastique et une étude non linéaire en grands déplacements et en grandes rotations en tenant compte de l'élastoplasticité. Dans ce dernier cas, deux courbes charge-déformations ont été utilisées et donc, deux études élastoplastiques ont été réalisées. Les hypothèses suivantes sont à la base de la méthodologie suivie:

- Petites déformations élastoplastique avec intégration sur l'épaisseur à l'aide de 8 points de type Lobatto;

---

<sup>2</sup>Ces éléments à haute précision tiennent compte des courbures présentes dans les ondulations.

- Critère de von Mises en tenant compte de l'écroutissement;
- Perturbation de la géométrie pour amorcer le flambement à l'aide de petites charges perturbatrices ( $P/10000$  où  $P$  est la charge de compression résultante appliquée sur le panneau):
- Discrétisation de la moitié du panneau en imposant les conditions aux limites de symétrie.

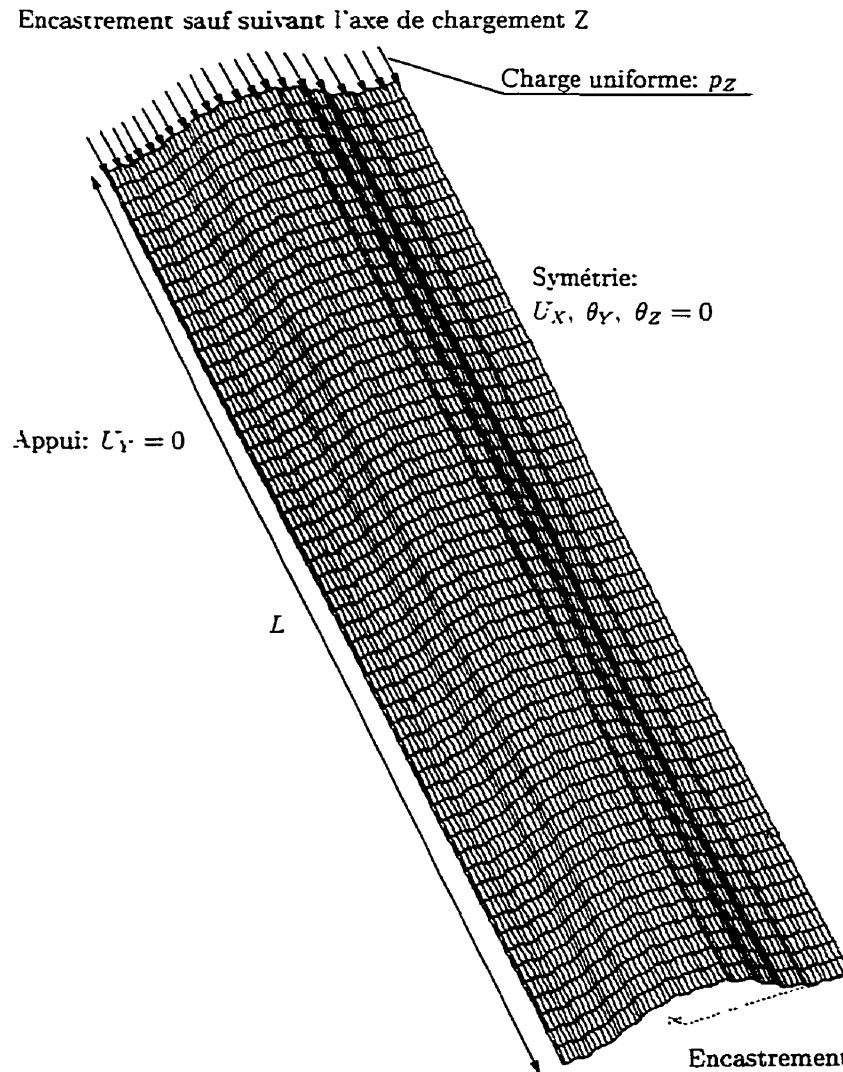


Figure 9.1: Maillage et conditions aux limites appliquées à la demi-largeur d'un panneau ondulé.

Afin de résoudre le problème non linéaire, la méthode de Newton-Raphson avec pilotage de la résolution en longueur d'arc est utilisée. Le pilotage s'est fait dans la zone pré-voilement avec une longueur d'arc plus longue que dans la zone post-voilement. Nous avons utilisé environ 10 pas de charge dans la zone pré-voilement et entre 490 et 590 dans la zone post-voilement permettant ainsi la prédiction de tous les points d'instabilité.

Une première analyse a permis de valider l'étude précédente faite pour Honco [Sop96], basée sur la technique du calcul aux valeurs propres. Cette étude a permis également de déterminer le bon fonctionnement du modèle non linéaire ainsi que l'estimation de la première charge critique et de son mode. La seconde analyse est réalisée dans le domaine géométriquement non linéaire en tenant compte de la plasticité (plateau plastique et écrouissage). À cette fin, deux courbes d'écrouissage, fournies par le client [Sop98], ont été utilisées<sup>3</sup>.

### 9.1.3 Résultats et conclusions

#### Analyse non linéaire élastique

Les résultats de cette étude ont permis de retrouver (à 2% près) la valeur de la charge critique de voilement obtenue de l'analyse simplifiée aux valeurs propres effectuées dans un précédent mandat réalisé par DESSAU SOPRIN [Sop96] et confirmer ainsi la validité de l'approche utilisée dans cette étude en estimant la charge limite par une analyse aux valeurs propres. Les figures (9.3.a) et (9.3.b) illustrent les courbes charge-déplacement (vertical: suivant  $Y$  et transversal: selon  $X$ ) des points  $A$  et  $B$  identifiés sur la figure (9.2).

#### Analyse non linéaire élastoplastique

Pour le Cas 1, soit l'étude basée sur les propriétés mécaniques relatives à la courbe d'écrouissage 1, nous avons tracé les courbes charge-déplacement aux points  $A$  et  $B$  du panneau et ce pour les déplacements selon les axes  $X$ ,  $Y$  et  $Z$ . Ces courbes sont montrées sur les figures (9.4) et (9.5).

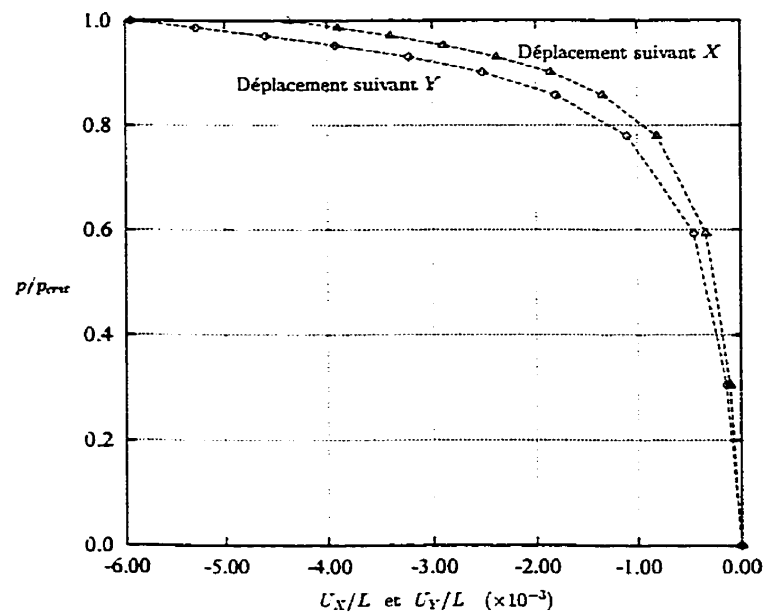
Les principales observations suivantes ont été tirées des figures (9.4) et (9.5):

---

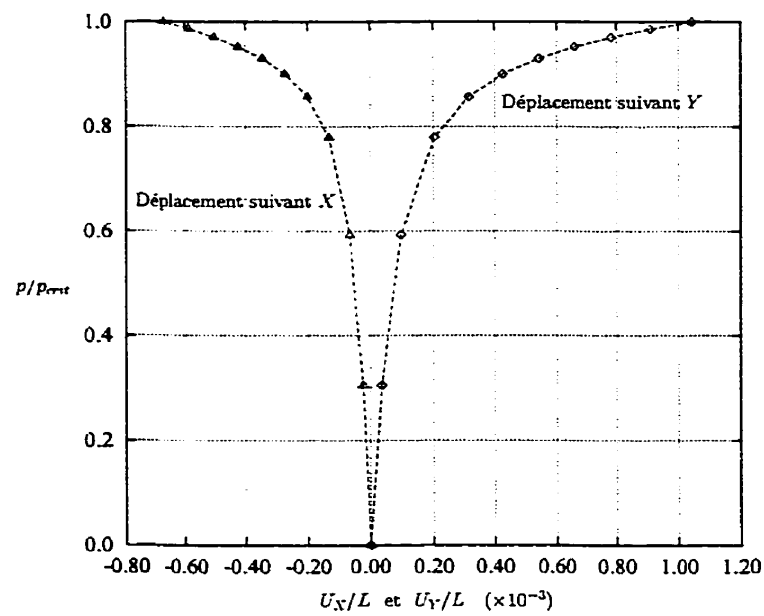
<sup>3</sup>Dans ce qui suit, la première étude basée sur les propriétés mécaniques issues de la première courbe d'écrouissage sera identifiée par le vocable *Cas 1*. Le *Cas 2* correspondra à l'analyse non linéaire élastoplastique avec les propriétés mécaniques relatives à la courbe d'écrouissage 2.



Figure 9.2: Localisation des points suivis lors des analyses non linéaires.



(a) Point A



(b) Point B

Figure 9.3: Courbes charge-déplacement (normalisées) des points A et B. Cas élastique.



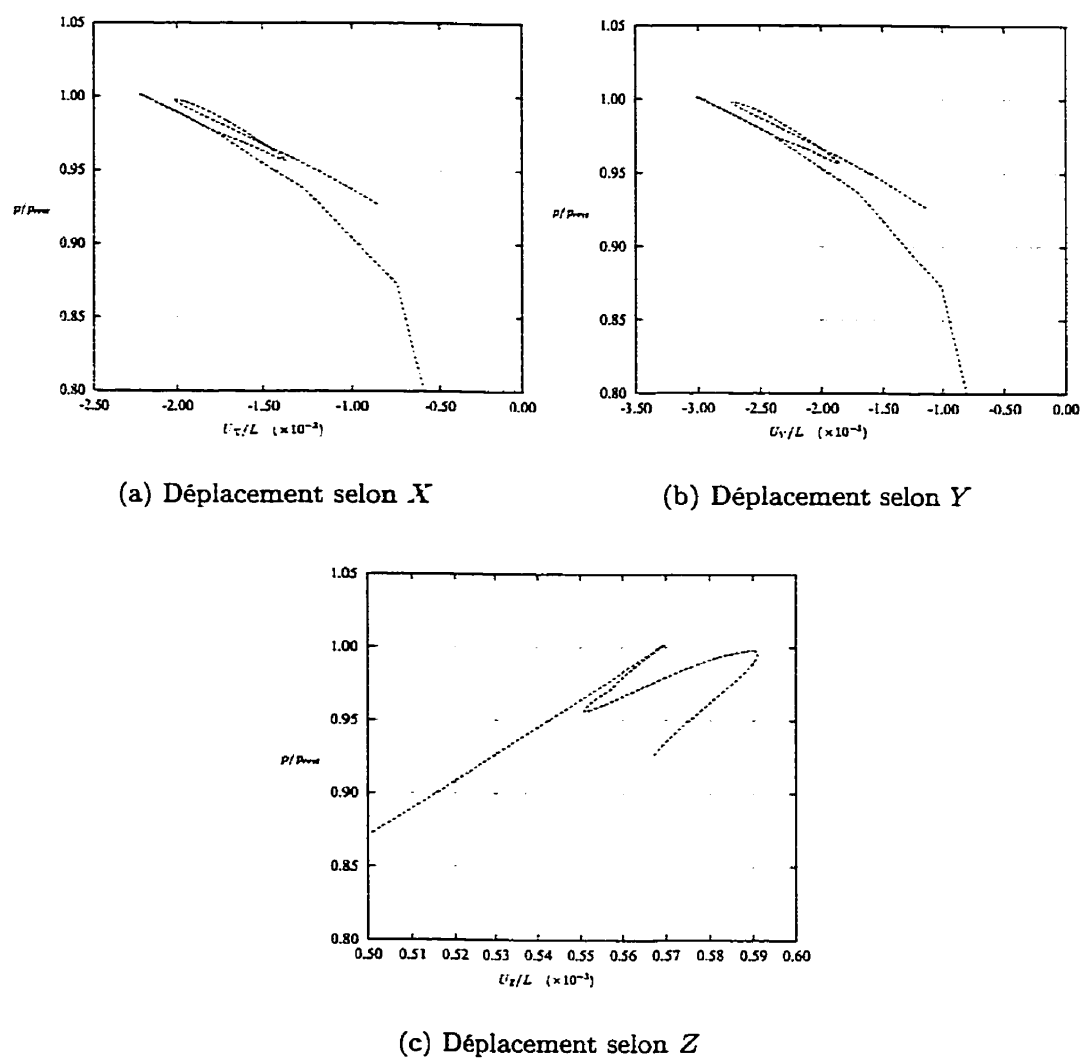


Figure 9.4: Courbes charge-déplacement (normalisées) du point A. Élastoplastique: Cas 1.

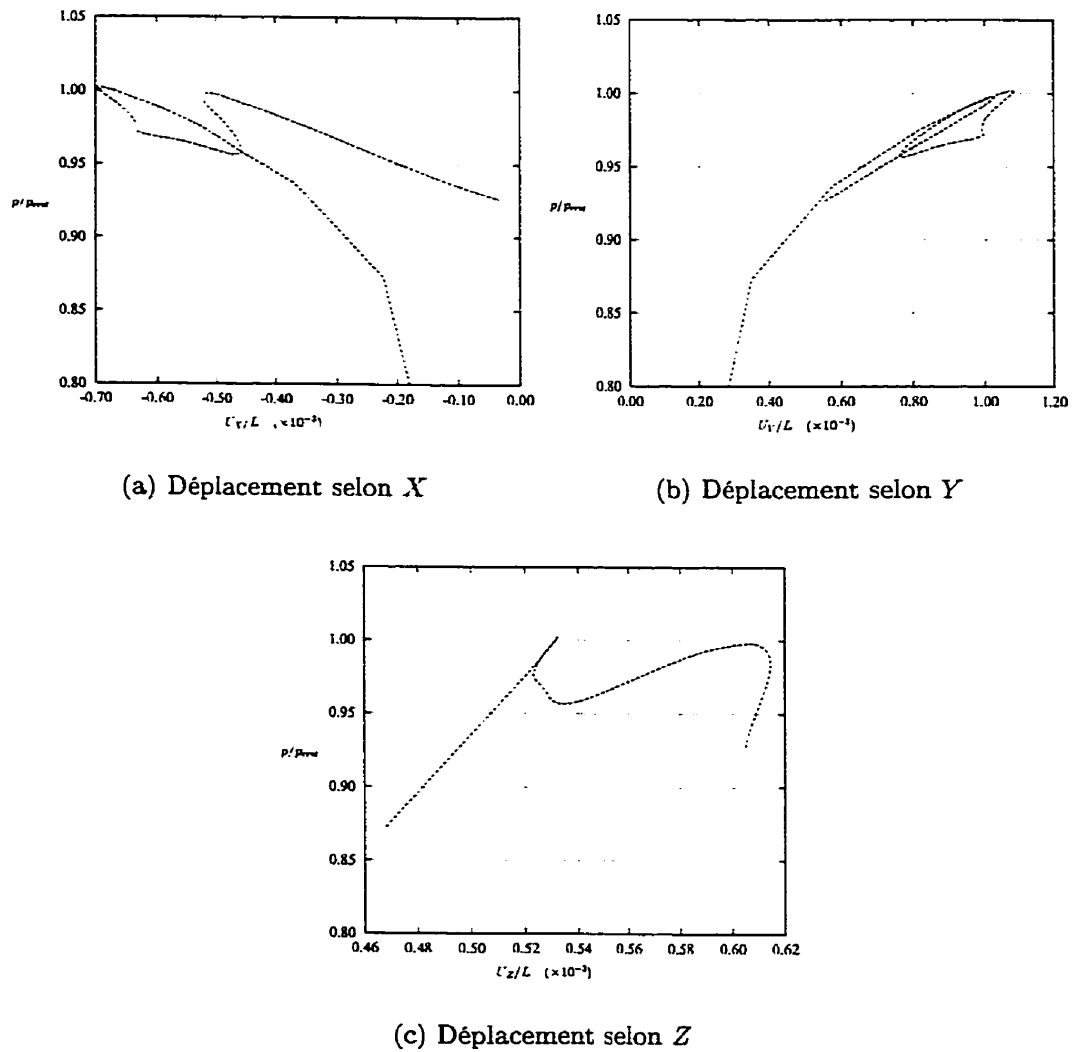


Figure 9.5: Courbes charge-déplacement (normalisées) du point  $B$ . Élastoplastique: Cas 1.

- Pratiquement, la même charge de flambage a été atteinte que celle obtenue de l'analyse simplifiée citée précédemment et celle présentée à la sous-section (9.1.3). Deux zones de voilement apparaissent.
- Il y a une chute de résistance suite à l'apparition de ces voilements. Pour maintenir l'équilibre, la contrainte doit diminuer.
- Par la suite, une résistance post-flambage se manifeste et on observe un gain de rigidité (à un niveau d'environ  $p/p_{crit} = 0.9597$  et donc le panneau peut soutenir une augmentation de la charge.
- On atteint une deuxième charge maximum mais à un niveau légèrement inférieur à celui obtenu lors de l'apparition des premières cloques ( $p/p_{crit} = 0.9966$ ). Ce deuxième extremum correspond à l'apparition de nouvelles cloques dans le panneau.
- Par la suite le chargement décroît et lorsque les calculs ont été arrêtés après environ 190 heures de calcul *CPU*, aucun nouveau gain de rigidité n'était apparu.

L'analyse a été reprise avec des propriétés mécaniques différentes fournies par le client. Nous retrouvons sur les figures (9.6) et (9.7) les courbes charge-déplacement pour les points *A* et *B* du panneau. Les figures (9.8) et (9.9) illustrent les isocouleurs des trois déplacements pour la charge maximale atteinte et pour le dernier pas de l'analyse. On remarque bien sur la figure (9.8) l'apparition des deux cloques principales dues au voilement. Sur la figure (9.9), on remarque que deux autres cloques sont apparues en cours de route. Chacune de ces dernières couvrent une surface plus petite que les deux premières.

Les figures (9.10) et (9.11) donnent les courbes charge-déformations équivalentes et charge-contraintes de von Mises<sup>4</sup> et ce aux points *C*, *D* et *E* identifiés sur la figure (9.2).

Les principales observations suivantes ont été tirées des figures (9.8) à (9.11):

---

<sup>4</sup>La déformation plastique équivalente est non nulle seulement lorsqu'il y a apparition de la plasticité. La contrainte de von Mises est une contrainte unidimensionnelle équivalente aux contraintes multiaxiales. C'est elle qui doit être comparée à la limite de plasticité. Si elle dépasse cette dernière alors il y a plastification.

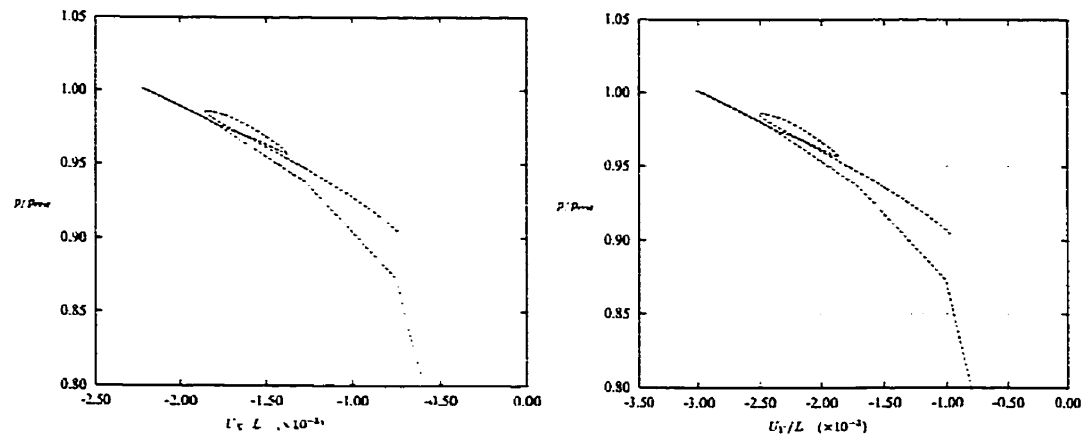
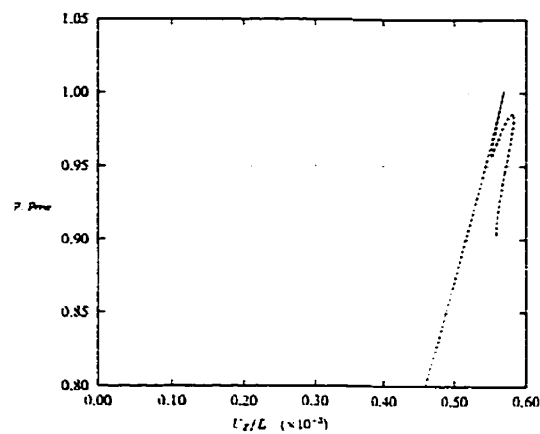
(a) Déplacement selon  $X$ (b) Déplacement selon  $Y$ (c) Déplacement selon  $Z$ 

Figure 9.6: Courbes charge-déplacement (normalisées) du point A. Élastoplastique: Cas 2.

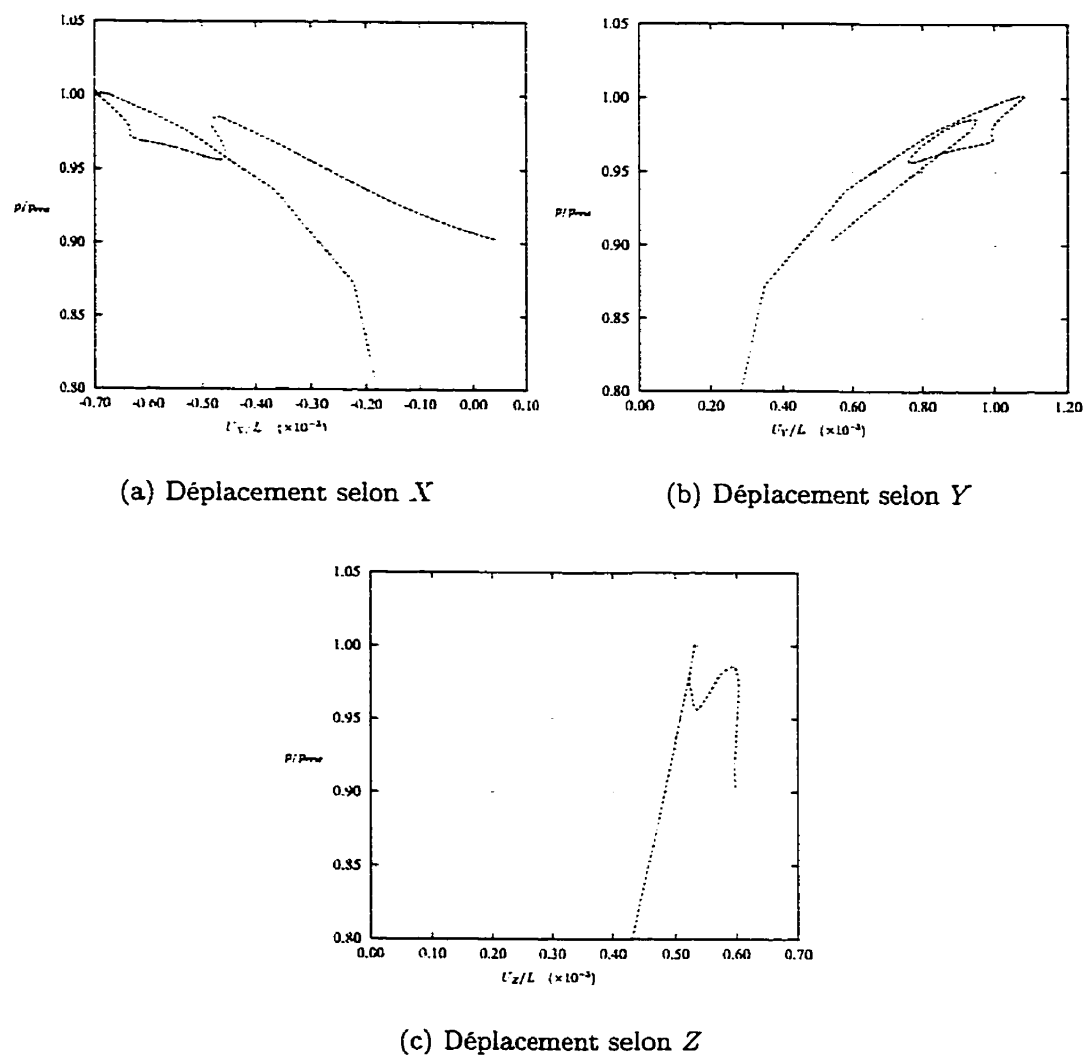


Figure 9.7: Courbes charge-déplacement (normalisées) du point  $B$ . Élastoplastique: Cas 2.

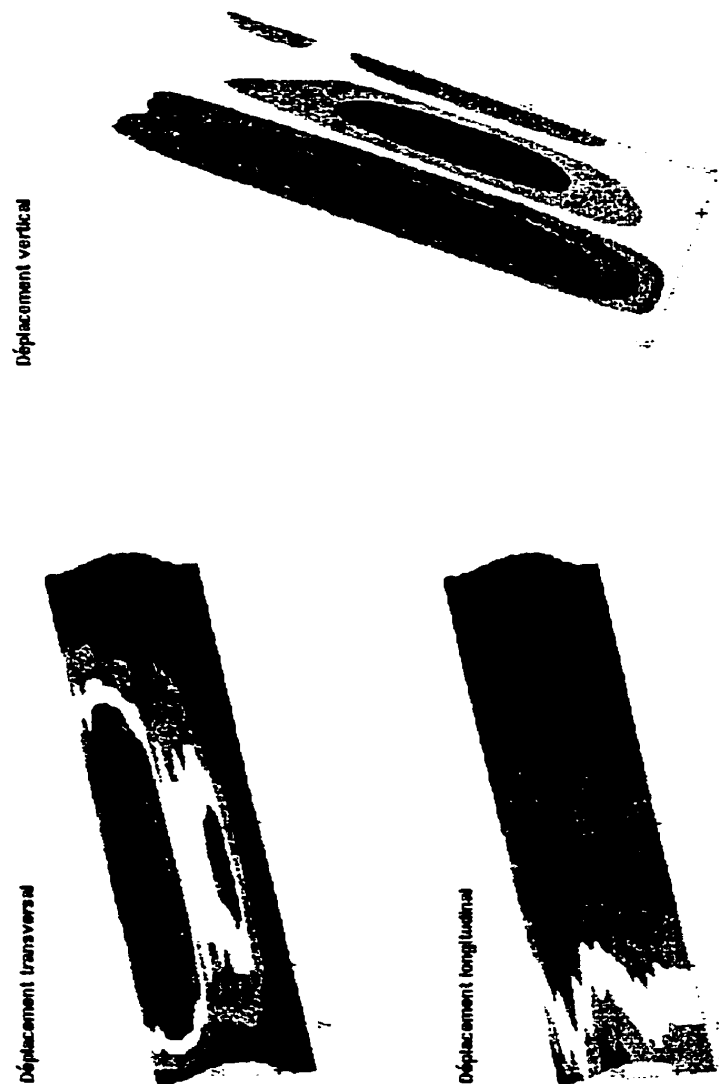


Figure 9.8: Isocouleurs des déplacements selon  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  correspondant à la première charge critique rencontrée. Élastoplastique: Cas 2.

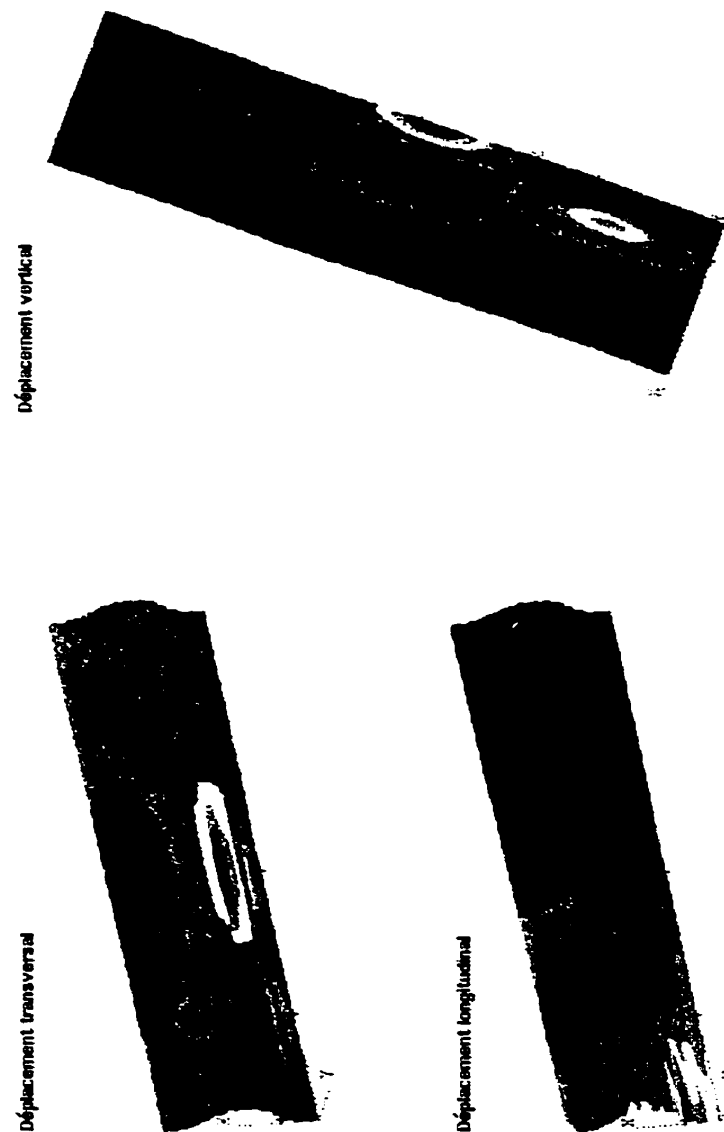


Figure 9.9: Isocouleurs des déplacements selon  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  au dernier pas de l'analyse. Élastoplastique: Cas 2.

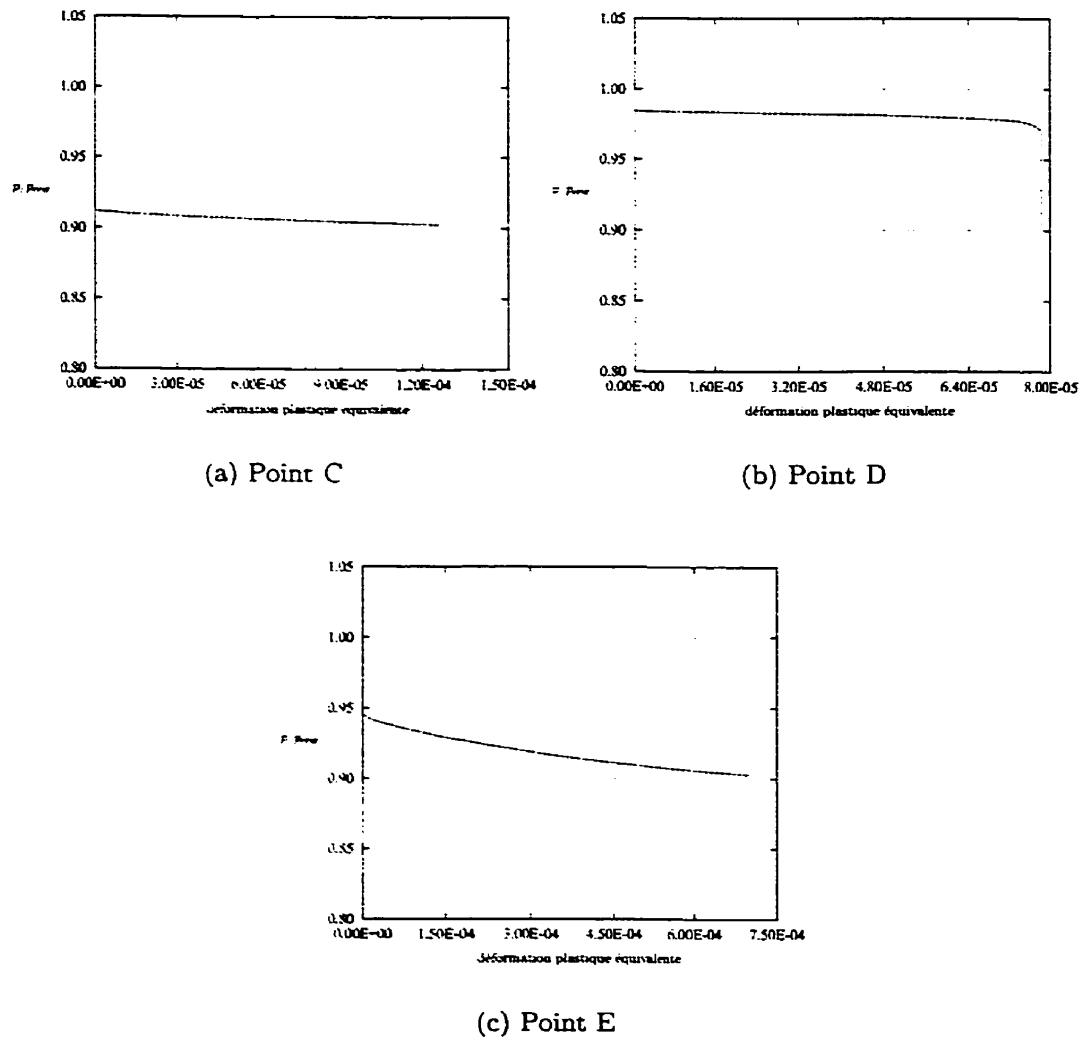


Figure 9.10: Courbes charge-déformation plastique équivalente aux points  $C$ ,  $D$  et  $E$ . Élastoplastique: Cas 2.



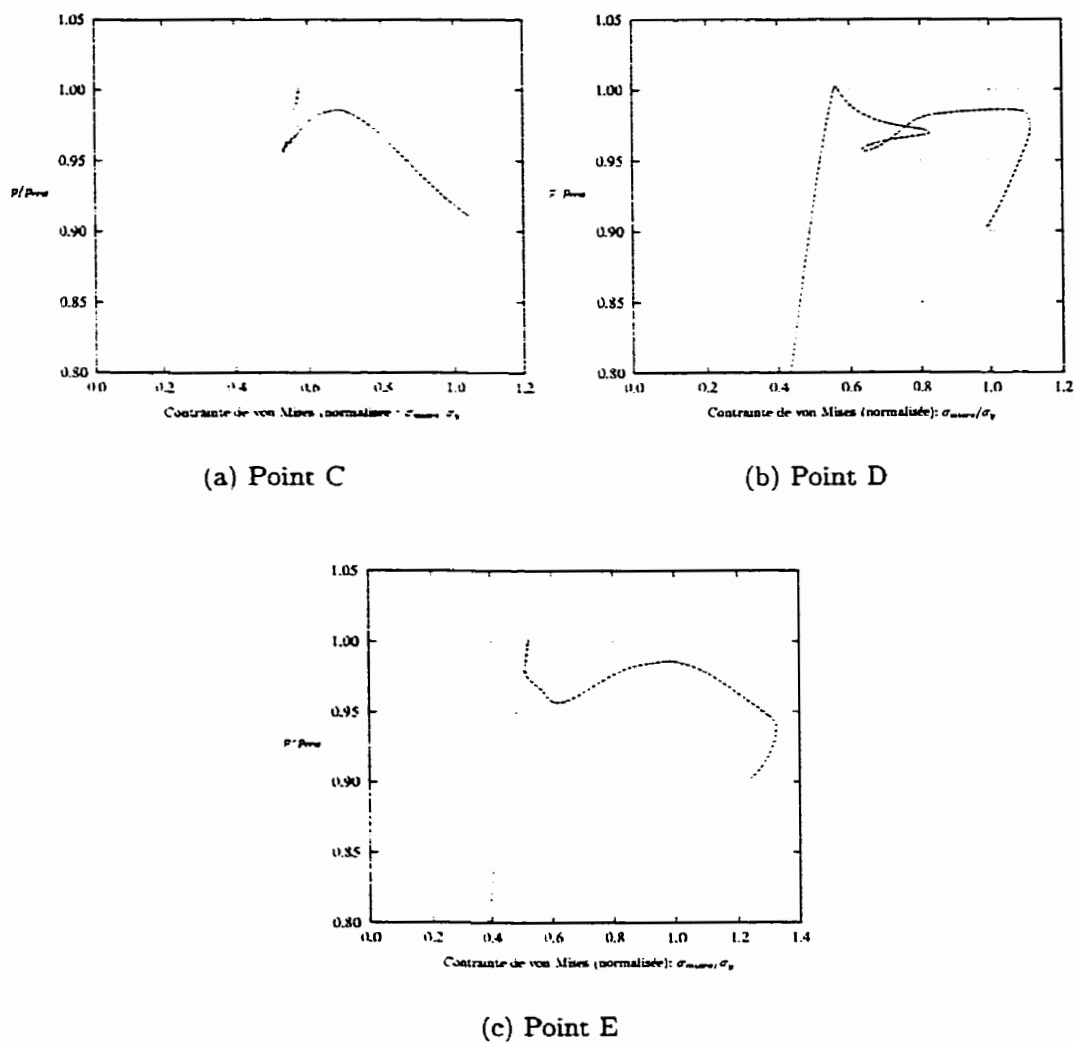


Figure 9.11: Courbes charge-contrainte de von Mises aux points  $C$ ,  $D$  et  $E$ . Élasto-plastique: Cas 2.

- La même charge de flambage a été atteinte que celle obtenue au Cas 1. En fait, le premier point de bifurcation se produit en phase élastique et donc la limite élastique n'a aucune influence.
- Il y a une chute de la résistance suite à l'apparition de ces voilements. Pour maintenir l'équilibre, la contrainte doit diminuer.
- Par la suite, une résistance post-flambage se manifeste et on observe un gain de rigidité (à un niveau d'environ  $p/p_{crit} = 0.9597$ ) et donc le panneau voilé peut soutenir une augmentation de la charge.
- On atteint une deuxième charge maximum mais à un niveau légèrement inférieur à celui obtenu lors de l'apparition des premières cloques ( $p/p_{crit} = 0.9966$ ). Ce deuxième extremum correspond à l'apparition de nouvelles cloques dans le panneau.
- Par la suite le chargement décroît et lorsque les calculs ont été arrêtés après 600 pas de calcul, aucun gain de rigidité n'a été observé.

### Conclusion des analyses non linéaires élastoplastiques

En guise de conclusion, nous pouvons mentionner que la résistance limite ultime du panneau analysé correspond au premier extremum calculé, similaire à celui obtenu des analyses de stabilité aux valeurs propres. Il n'existe donc pas de résistance de post-flambage (ni pour le Cas 1 ni pour le Cas 2 élastoplastiques).

## 9.2 Analyse par éléments finis des tests ROPS

### 9.2.1 Introduction

Un véhicule forestier servant à l'extraction de billes de bois issues de coupes sélectives en forêt est analysé. Afin de satisfaire les critères internationaux de sécurité pour des fins d'exportation, le véhicule doit respecter les normes ISO (*International Standard Organization*). Plus particulièrement, ce véhicule doit se conformer à la norme ISO 8082 concernant la structure de protection au retournement (ROPS<sup>5</sup>) et la norme

---

<sup>5</sup>Roll-Over Protective Structure: Assemblage de membrures ayant pour rôle principal de réduire le risque d'écrasement d'un opérateur maintenu par une ceinture de sécurité en cas de retournement de la machine.

ISO 8083 relative à la structure de protection contre les chutes d'objets (FOPS<sup>6</sup>).

L'étude consiste à vérifier si le véhicule forestier satisfait la norme ISO 8082. Plus spécifiquement, analyse par éléments finis et dans le domaine non linéaire (plasticité et non-linéarité géométrique) d'une partie du véhicule afin de simuler les tests liés au ROPS selon la norme ISO 8082. Cette norme sera satisfaite si les tests prescrits rencontrent des critères précis, à savoir [ddC94]:

- L'ensemble ROPS machine doit supporter une charge latérale au moins égale à:

$$F_H = 70000 \left( \frac{M}{10000} \right)^{1.2} \quad (\text{Newton})$$

$M$  étant la masse maximale du véhicule, exprimée en kilogrammes. La charge latérale est appliquée graduellement et suffisamment lentement pour que les effets dynamiques puissent être ignorés.

- L'énergie absorbée pendant l'application de la charge latérale doit être au moins égale à:

$$U = 13000 \left( \frac{M}{10000} \right)^{1.25} \quad (\text{Joule})$$

- Après suppression de la charge latérale, l'ensemble ROPS/machine doit supporter, pendant une durée de 5 minutes ou jusqu'à ce que cesse la déformation, une charge verticale  $F_V$ , égale à:

$$F_V = 20 M \quad (\text{Newton})$$

$M$  étant exprimée en kilogrammes.

Il n'est pas nécessaire que les exigences de la force latérale et d'énergie soient satisfaites simultanément. Si la force requise est atteinte ou dépassée avant que l'exigence d'énergie soit satisfaite, la force peut diminuer, mais elle doit de nouveau atteindre la valeur requise lorsque l'exigence d'énergie est atteinte ou dépassée. Par ailleurs, il faut se conformer aux directives suivantes:

- Tous les panneaux, vitres, portes normalement amovibles et tout les autres éléments non porteurs doivent être démontés de manière à ne pas fausser l'évaluation de la structure.

---

<sup>6</sup>Falling-Object Protective Structure: Assemblage de membrures disposées de façon à assurer à l'opérateur une protection suffisante contre les chutes d'objets (arbres, rochers).

- Tout élément de la machine pouvant être considéré comme un élément de suspension (caoutchouc, ressort à gaz, hydraulique ou mécanique) doit être éliminé en tant qu'absorbeur d'énergie.
- L'ensemble ROPS châssis de la machine doit être fixé au banc d'essai de sorte que les éléments reliant l'assemblage au banc d'essai ne subissent qu'une déformation minimale pendant les essais. Lors de l'application de la charge latérale, l'ensemble ROPS, châssis ne doit pas être retenu par le banc d'essai autrement que par les fixations initiales. Le châssis doit être directement fixé au banc d'essai au niveau ou à proximité des supports des essieux avant et arrière.
- Aucun élément de l'ensemble ROPS machine ne doit être réparé ou redressé pendant ou entre l'application des charges latérale et verticale.
- Les caractéristiques force déplacement doivent être déterminées en appliquant une charge latérale sur les principales membrures longitudinales supérieures de la ROPS. La charge latérale doit être appliquée par l'intermédiaire d'un dispositif de répartition de charge dont la longueur ne représente pas plus de 80% de la distance horizontale entre les montants avant et arrière de la ROPS. La vitesse de déformation doit être telle que la charge puisse être considérée comme statique. Pour chaque accroissement de charge, le déplacement du point d'application de la charge résultante ainsi que l'intensité de la force doivent être enregistrés et représentés graphiquement.
- Après avoir supprimé la charge latérale, une charge verticale doit être appliquée sur le sommet de la ROPS au moyen d'une poutre de 250 mm de largeur; l'axe transversal de la poutre se trouvant à environ 100 mm en avant de l'axe du positionnement du DLV (volume limite de déformation: volume correspondant à l'opérateur, comme énoncé dans l'ISO 3164).

### 9.2.2 Méthodologie et données de base

L'ensemble des éléments porteurs du véhicule est constitué d'une coque, qui retient le moteur et les réservoirs, et de deux types de poutres: en forme de  $L$ , assemblées par soudure à la coque et permettant de la rigidifier, et en forme de tube, constituant les membrures (longitudinales, transversales et verticales). Les limites élastiques des différents types d'acier constituant les composants structuraux sont résumés dans le tableau (9.1). Tous ces types d'acier ont le même module de Young  $E = 200 \times 10^3 \text{ Mpa}$ .

Tableau 9.1: Limite élastique (en MPa) pour les différents type d'acier utilisés.

	Type d'acier	$\sigma_y$
Coque	A-36	230
Pièces en forme de tube	ASTM G40-17	350
Pièces en forme de L	GSA G40-21-44 W	300

Afin de valider *a priori* que les éléments porteurs du véhicule satisfont les normes ISO, deux analyses ont été considérées, une portant sur le véhicule de la figure 9.12.a, montrant une vue d'ensemble de ce dernier après suppression de ses éléments non porteurs et une autre considérant le véhicule forestier avec une plaque de renforcement située juste derrière le conducteur (figure 9.12.b). Les mêmes conditions citées précédemment doivent être respectées dans cette deuxième analyse.

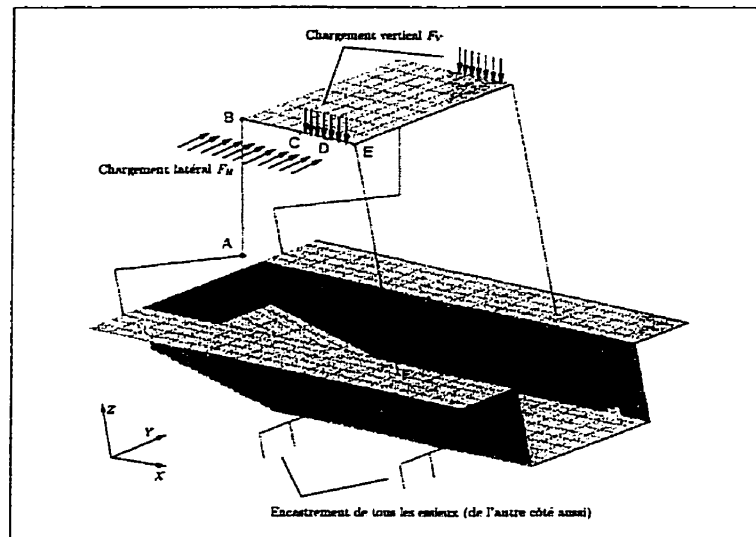
Pour chaque analyse, le test ROPS est effectué numériquement selon les spécifications de la norme ISO:

- Des conditions aux limites d'encastrement sont appliquées au niveaux des points d'attache du châssis;
- Charge latérale appliquée jusqu'au niveau requis suivi d'un déchargement et sauvegarde des résultats <sup>7</sup>.
- En tenant compte des déformations précédentes, de la plastification induite et des contraintes résiduelles internes, application de la charge verticale jusqu'à la charge requise par la norme ISO<sup>8</sup>;
- Vérification des critères de performance de la norme ISO 8082.

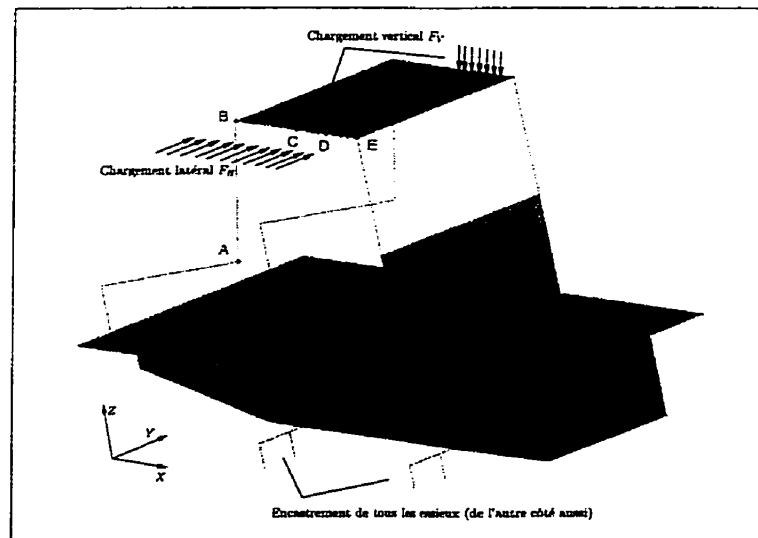
Selon les normes, on doit donc essentiellement respecter les deux critères majeurs suivants:

<sup>7</sup>Cette phase de chargement-déchargement latéral sera identifié dans ce qui suit par le vocable *Phase 1*.

<sup>8</sup>Par opposition à la *Phase 1*, cette phase sera identifiée par le vocable *Phase 2* qui désignera l'analyse du véhicule sous chargement vertical avec prise en compte des déformations et contraintes résiduelles engendrées suite à l'analyse précédente.



(a) Sans plaque de renforcement



(b) Avec plaque de renforcement

Figure 9.12: Véhicule forestier. Conditions aux limites appliquées.

1. La force latérale minimale à atteindre lors du test doit être égale à:

$$F_H = 70000 \left( \frac{M}{10000} \right)^{1.2} = 4.79 \text{ kN}$$

où  $M = 1070 \text{ kg}$  est la masse du véhicule;

2. L'énergie minimale absorbée lors de l'application de la charge (aire sous la courbe charge-déplacement) doit être égale à:

$$U = 13000 \left( \frac{M}{10000} \right)^{1.25} = 795.56 \text{ Joules};$$

3. Après suppression de la charge latérale l'ensemble ROPS/machine doit supporter une charge verticale égale à:

$$F_V = 20 M = 21.4 \text{ kN}$$

jusqu'à ce que cesse la déformation.

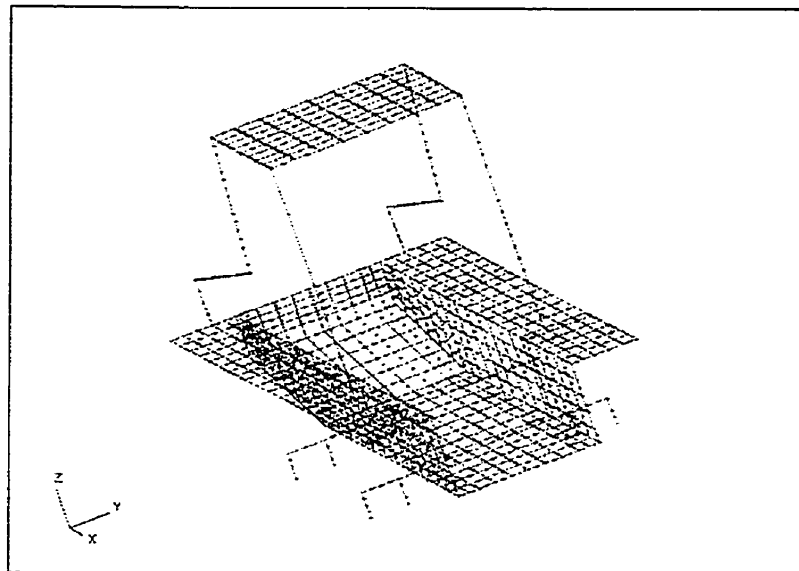
Les hypothèses suivantes sont à la base de la méthodologie suivie:

- Discrétisation du fond du véhicule et toutes les parties planes à l'aide des éléments à 8 nœuds. Les parties "filaires" de la structure seront discrétisées à l'aide des éléments de poutres 3D à 3 nœuds;
- Petites déformations élastoplastiques avec intégration de la plasticité sur l'épaisseur des composantes à l'aide de 8 points de type Lobatto;
- Critère de von Mises avec un comportement élasto-plastique parfait;
- Utilisation de l'algorithme de Newton-Raphson avec pilotage en longueur d'arc pour la résolution du problème non linéaire.

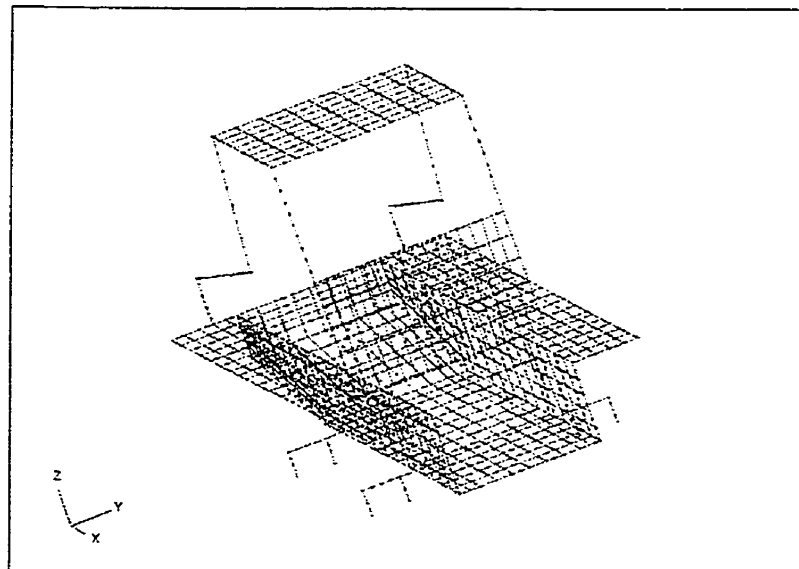
### 9.2.3 Résultats et conclusions

#### Analyse du véhicule sans plaque de renforcement

La modélisation par éléments finis doit respecter toutes les conditions mentionnées à la section 9.2.1 et prendre en compte tous les détails possibles du point de vue géométrie afin de simuler le plus possible le comportement réel du véhicule lors des essais. Un maillage total de 1002 éléments (soit 714 éléments de coque et 288 éléments de poutre) et 2438 nœuds a été nécessaire pour une modélisation adéquate et réaliste,



(a) Sans plaque de renforcement



(b) Avec plaque de renforcement

Figure 9.13: Véhicule forestier. Maillage utilisé.



ce qui équivaut à 14628 degrés de liberté. La figure 9.13.a illustre le maillage adopté dans cette analyse. qui est rappelons le, une analyse non linéaire élastoplastique sans écrouissage.

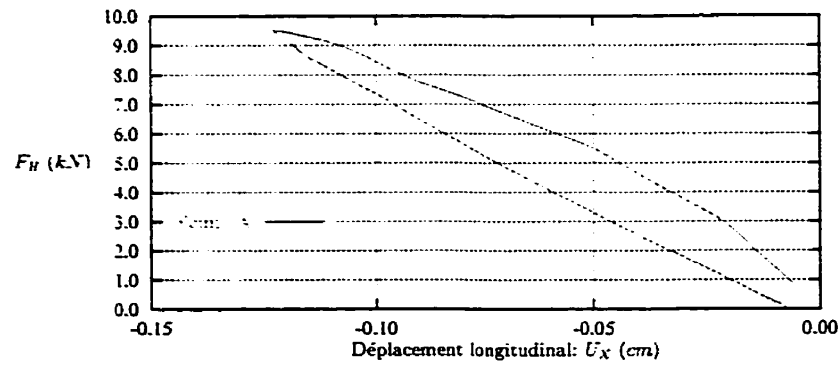
Nous avons tracé les courbes charge-déplacement (longitudinal: selon  $X$ , latéral: selon  $Y$ , et vertical: selon  $Z$ ) aux points  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  et  $F$  du véhicule, pour la Phase 1, soit le chargement latéral de la structure tant que le niveau de chargement n'a pas atteint la valeur  $F_H = 4.79 \text{ kN}$  et l'énergie absorbée n'a pas dépassé 795.56 *Joules* en déchargement par la suite. Ces points sont identifiés sur la figure 9.12. et les courbes relatives aux déplacements de ces points, dans les trois directions, sont montrées sur les figures 9.14, 9.15 et 9.16. L'évolution de l'énergie absorbée lors de l'application de la charge est représentée sur la figure 9.17 pour chacun des points  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  de la membrure supérieure de la ROPS. Cette figure est obtenue selon les résultats numériques de la figure 9.15.b (aire sous la courbe charge-déplacement). Selon cette courbe et le tableau 9.2, le critère d'énergie est respecté ( $U \geq 795.56 \text{ Joules}$ ) pour une charge latérale égale à  $F_H = 9.53 \text{ kN}$ . Cette charge latérale dépasse largement la valeur exigée par la norme (presque le double  $F_H > 4.79 \text{ kN}$ ). Nous pouvons à ce moment, décharger la structure et procéder à la phase 2. Pour cette phase, nous avons appliqué la charge verticale  $F_V = 21.4 \text{ kN}$  en 4 pas de chargement. Nous retrouvons sur les figures 9.18, 9.19 et 9.20 les courbes charge-déplacement des différents points suivis lors de cette analyse. La figure 9.21 illustre par ailleurs les déformées réelles du véhicule après chargement jusqu'au niveau  $F_H = 9.53 \text{ kN}$ , déchargement et chargement vertical jusqu'à  $F_V = 21.4 \text{ kN}$ .

Tableau 9.2: Énergie absorbée (en Joules) pour  $F_H = 9.53 \text{ kN}$ .

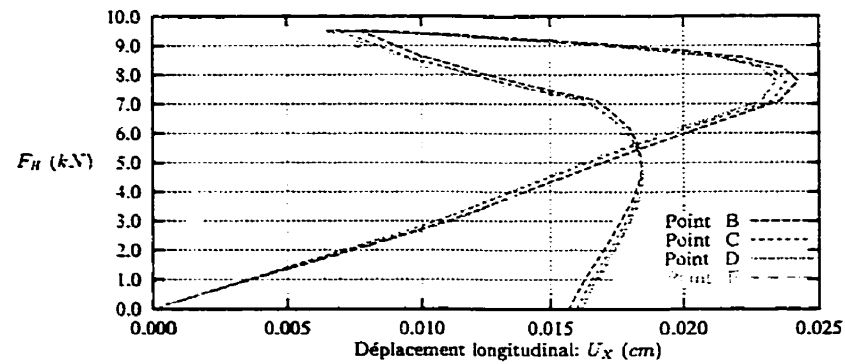
Point B	Point C	Point D	Point E
810.84	814.26	815.63	817.39

### Analyse du véhicule avec plaque de renforcement

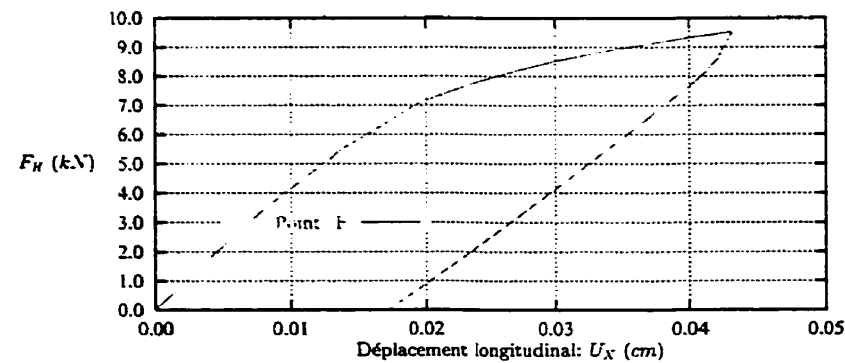
L'analyse a été reprise avec un nouveau design, considérant une plaque de renforcement située juste derrière le conducteur. La modélisation par éléments finis a nécessité un maillage total de 1082 éléments (dont 794 éléments de type coque) et 2691 nœuds ont été nécessaires pour une modélisation adéquate et réaliste, ce qui équivaut à 16146 degrés de liberté. La figure 9.13.b illustre le maillage adopté dans cette analyse non linéaire élastoplastique sans écrouissage.



(a) Point A

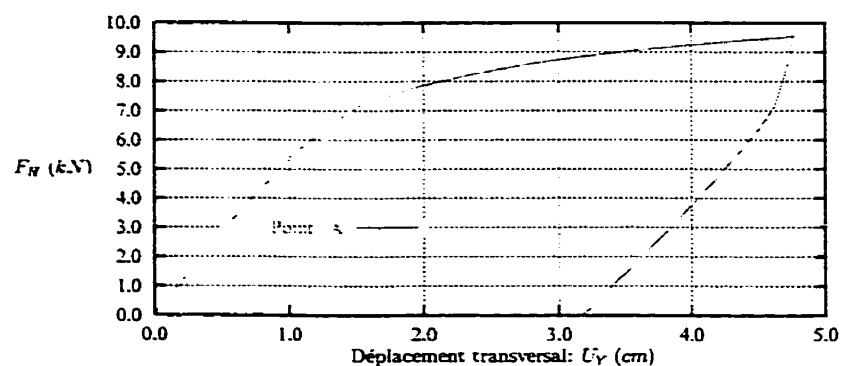


(b) Points B, C, D et E

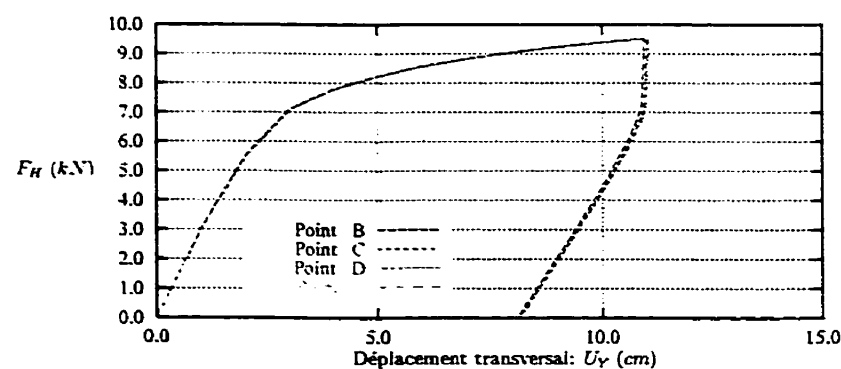


(c) Point F

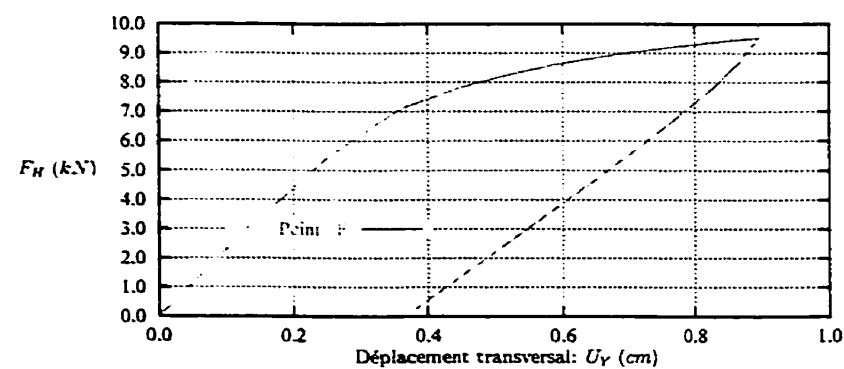
Figure 9.14: Véhicule forestier sans plaque de renforcement. Courbes charge-déplacement longitudinal des points A, B, C, D, E et F. Phase 1.



(a) Point A

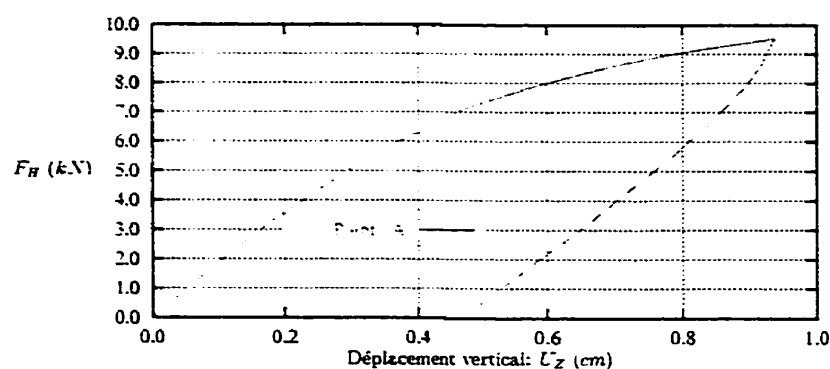


(b) Points B, C, D et E

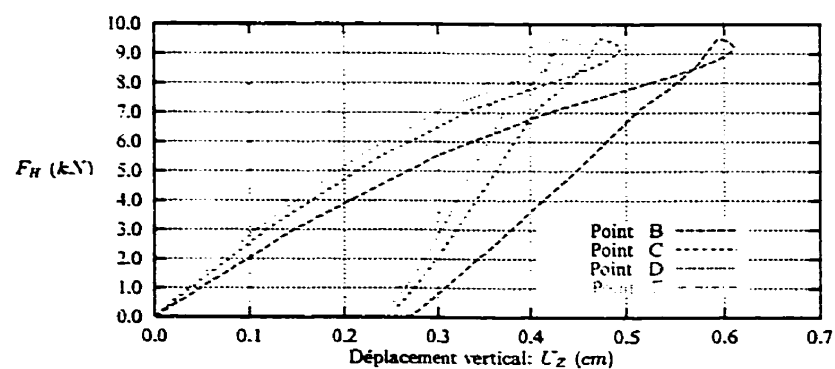


(c) Point F

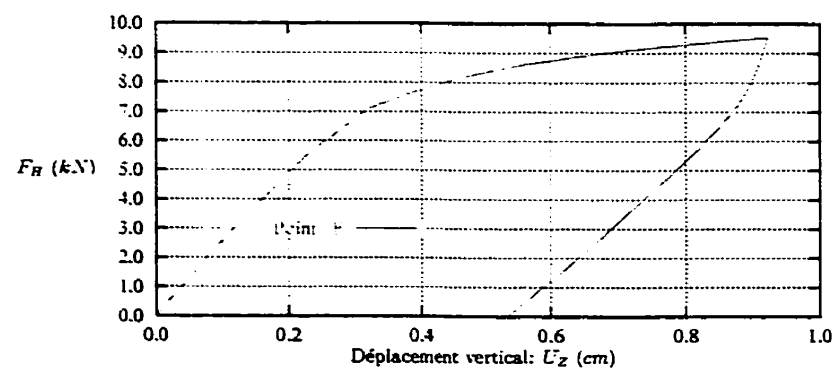
Figure 9.15: Véhicule forestier sans plaque de renforcement. Courbes charge-déplacement latéral des points A, B, C, D, E et F. Phase 1.



(a) Point A



(b) Points B, C, D et E



(c) Point F

Figure 9.16: Véhicule forestier sans plaque de renforcement. Courbes charge-déplacement vertical des points A, B, C, D, E et F. Phase 1.

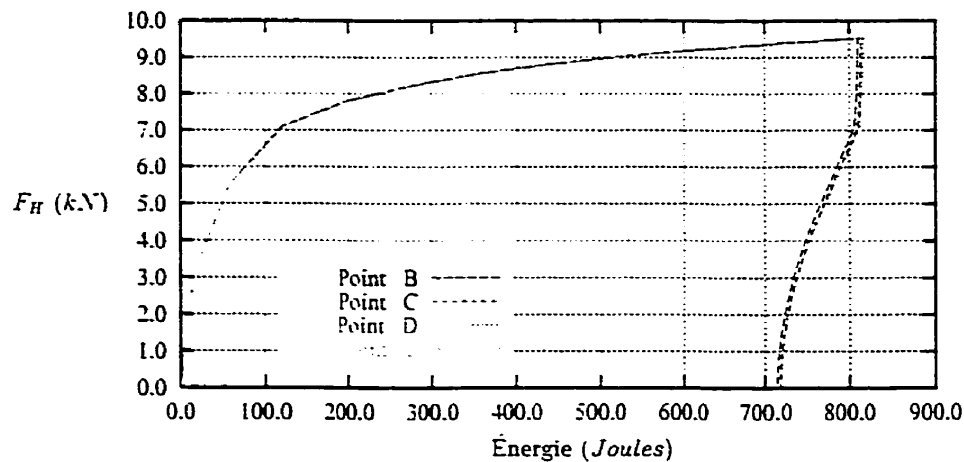


Figure 9.17: Véhicule forestier sans plaque de renforcement. Courbes charge-énergie des points B, C, D et E.

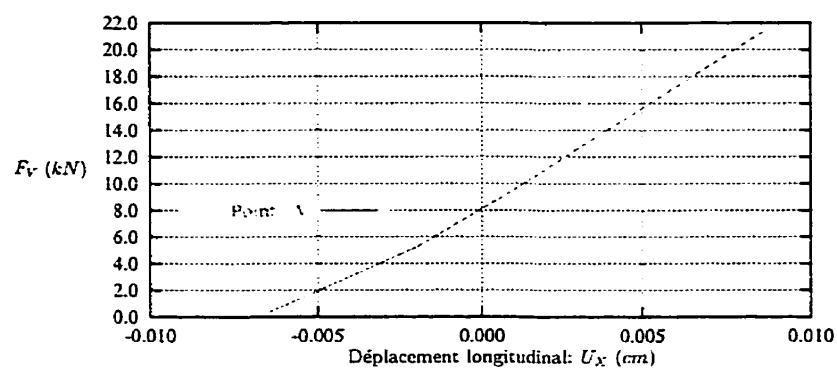
Pour la Phase 1, nous avons tracé les courbes charge-déplacements, selon les directions  $X$ ,  $Y$  et  $Z$ , pour chacun des points  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  et  $F$  identifiés sur la figure 9.12.b. Ces courbes sont présentées sur les figures 9.22, 9.23 et 9.24. L'évolution de l'énergie absorbée (points  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ) au cours de chargement latéral est illustrée sur la figure 9.25, qui est obtenue selon les résultats numériques de la figure 9.23.b.

L'exigence de l'énergie dans ce cas est respectée pour un niveau de charge égale à  $F_H = 20.61 \text{ kN}$ . Au tableau 9.3, nous retrouvons la valeur de l'énergie atteinte aux différents points de la membrure supérieure. Mentionnons aussi qu'avec cette valeur de  $F_H$  le critère de force est aussi satisfait ( $F_H > 4.79 \text{ kN}$ ). La structure est déchargée par la suite pour être sollicitée verticalement par la charge  $F_V = 21.4 \text{ kN}$ , appliquée en 10 pas de chargement.

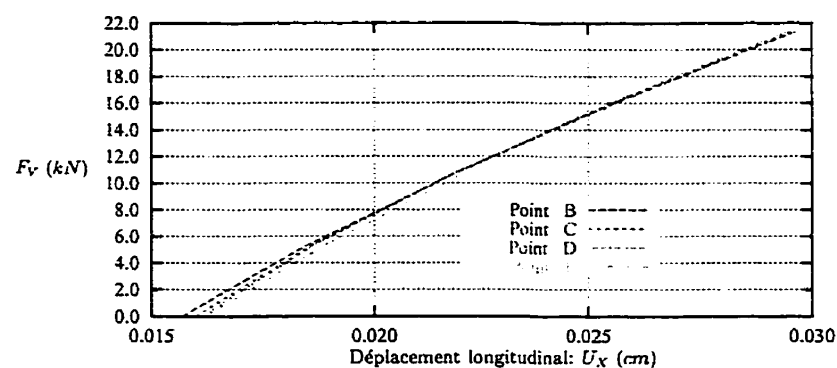
Nous retrouvons sur les figures 9.26, 9.27 et 9.28 les courbes charge-déplacement des différents points précités. La figure 9.29 nous montre les déformées réelles du véhicule après chargement jusqu'au niveau  $F_H = 20.61 \text{ kN}$ , déchargement et chargement vertical jusqu'à  $F_V = 21.4 \text{ kN}$ .

Tableau 9.3: Énergie absorbée (en Joules) pour  $F_H = 21.4 \text{ kN}$ .

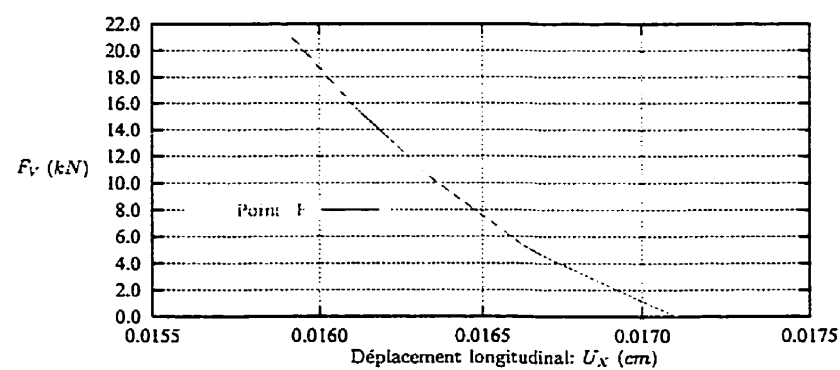
Point B	Point C	Point D	Point E
802.30	806.16	807.51	809.03



(a) Point A

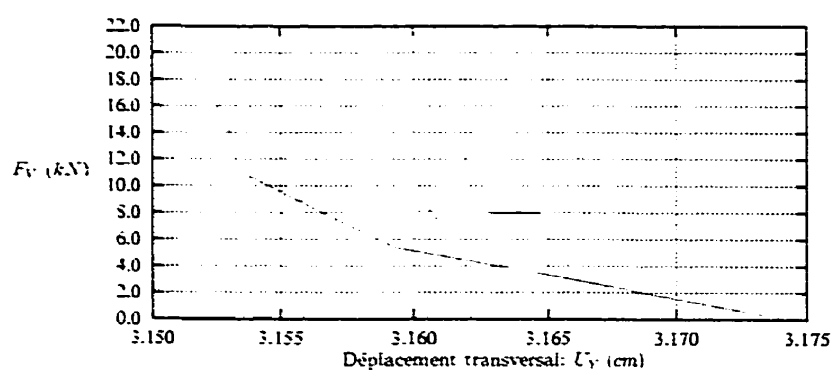


(b) Points B, C, D et E

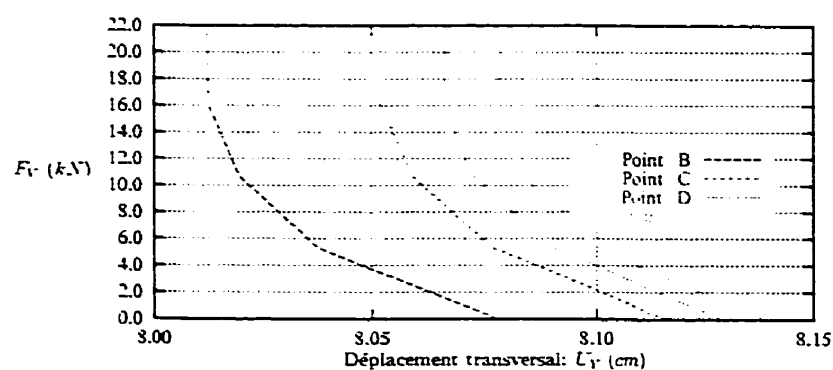


(c) Point F

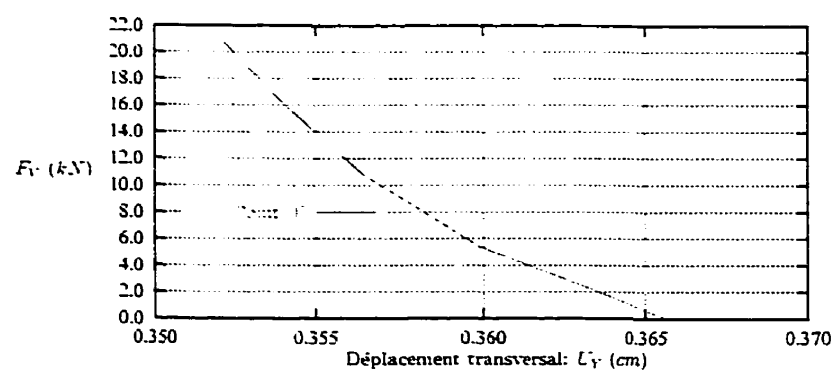
Figure 9.18: Véhicule forestier sans plaque de renforcement. Courbes charge-déplacement longitudinal des points A, B, C, D, E et F. Phase 2.



(a) Point A

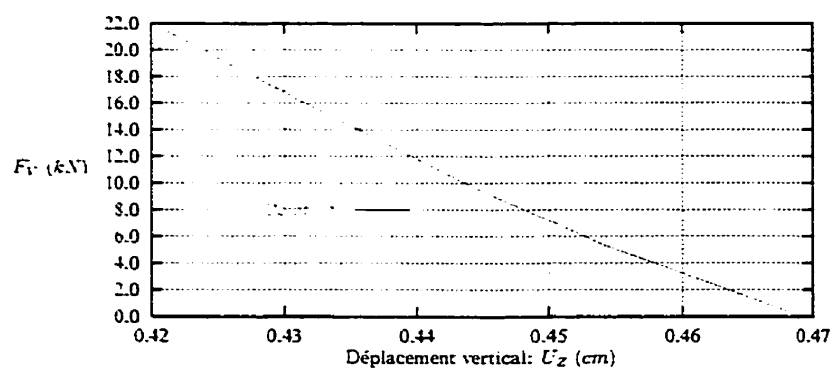


(b) Points B, C, D et E

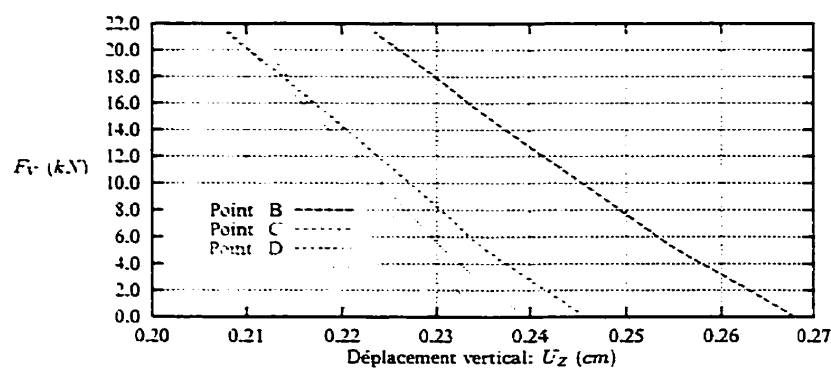


(c) Point F

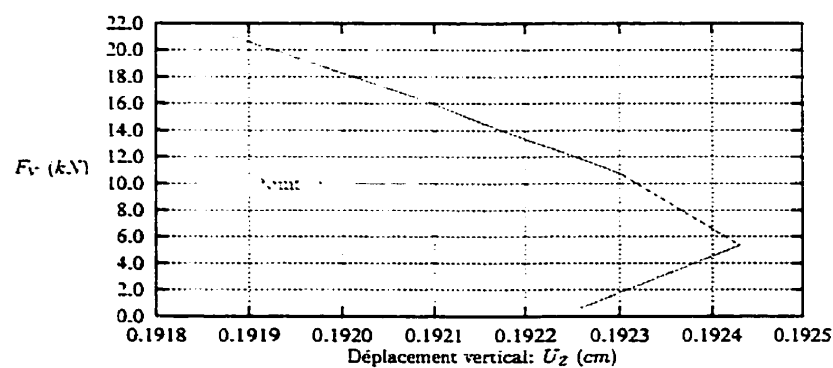
Figure 9.19: Véhicule forestier sans plaque de renforcement. Courbes charge-déplacement latéral des points A, B, C, D, E et F. Phase 2.



(a) Point A



(b) Points B, C, D et E



(c) Point F

Figure 9.20: Véhicule forestier sans plaque de renforcement. Courbes charge-déplacement vertical des points A, B, C, D, E et F. Phase 2.



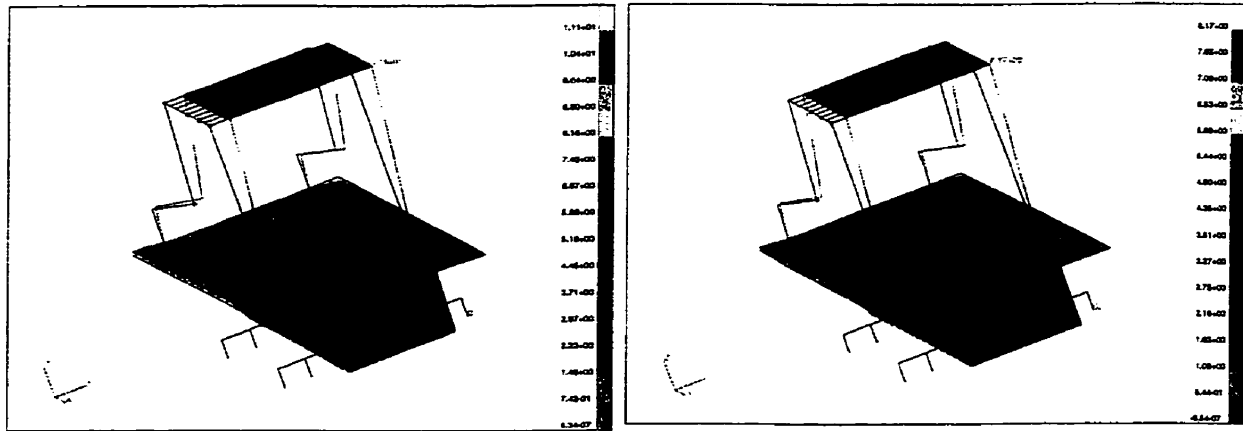
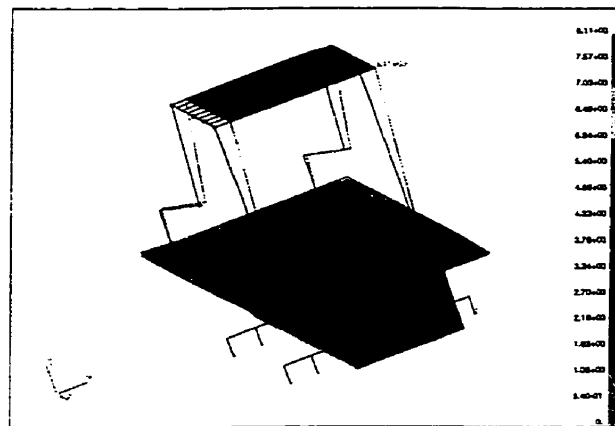
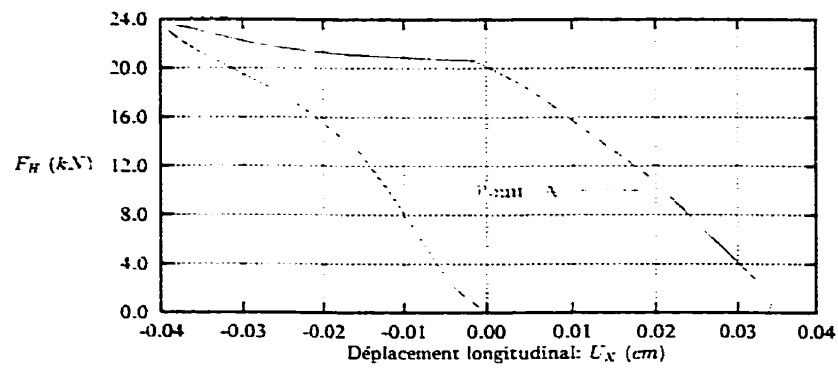
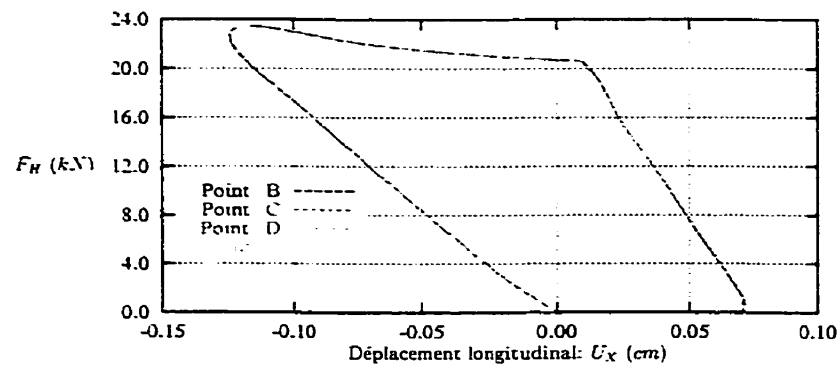
(a) Chargement latéral:  $F_H = 9.53 \text{ kN}$ .(b) Déchargement:  $F_H = 0$ .(c) Chargement vertical:  $F_V = 21.4 \text{ kN}$ .

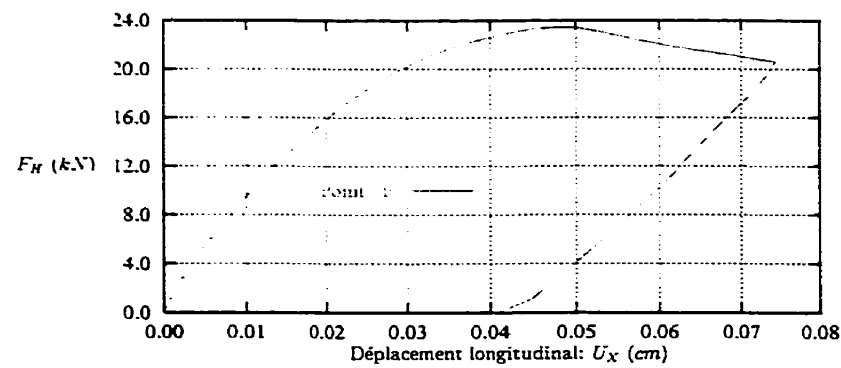
Figure 9.21: Véhicule forestier sans plaque de renforcement Déformées réelles finales.



(a) Point A

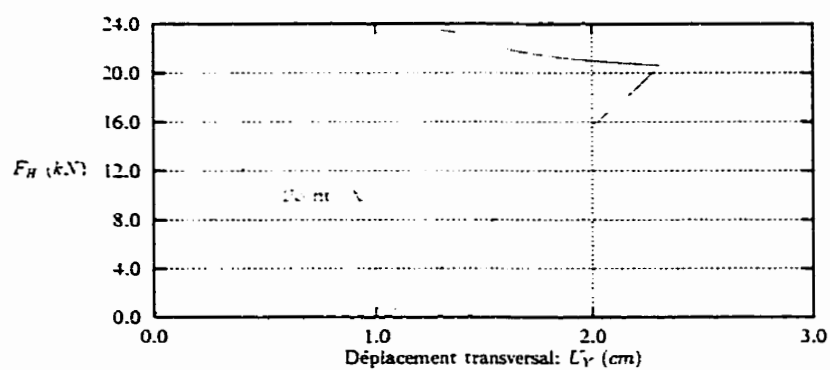


(b) Points B, C, D et E

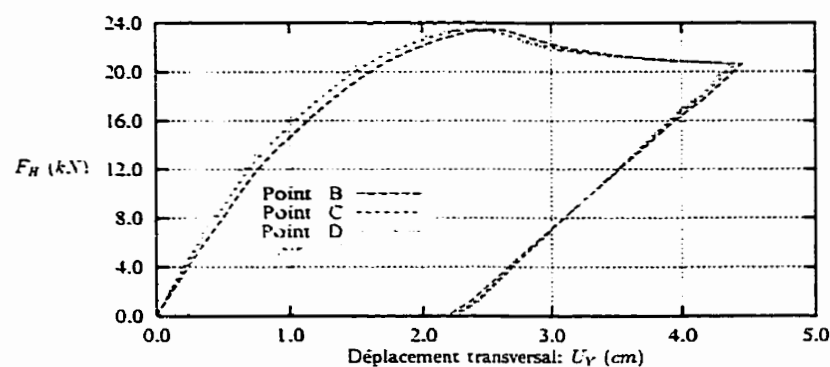


(c) Point F

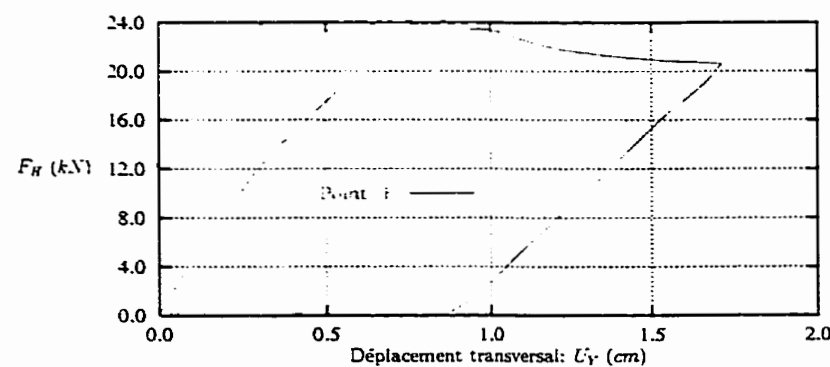
Figure 9.22: Véhicule forestier avec plaque de renforcement. Courbes charge-déplacement longitudinal des points A, B, C, D, E et F. Phase 1.



(a) Point A

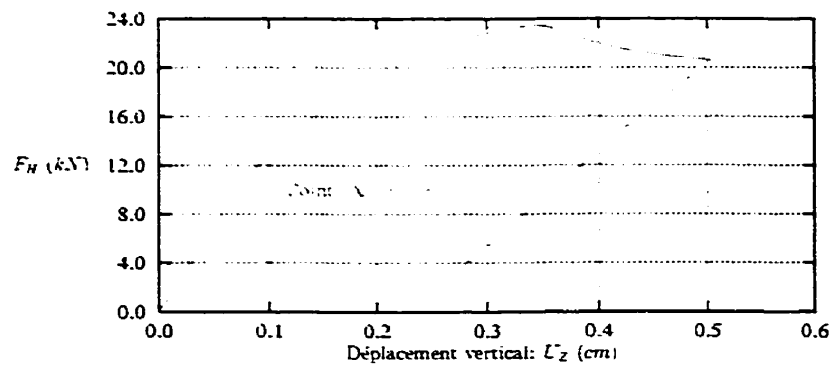


(b) Points B, C, D et E

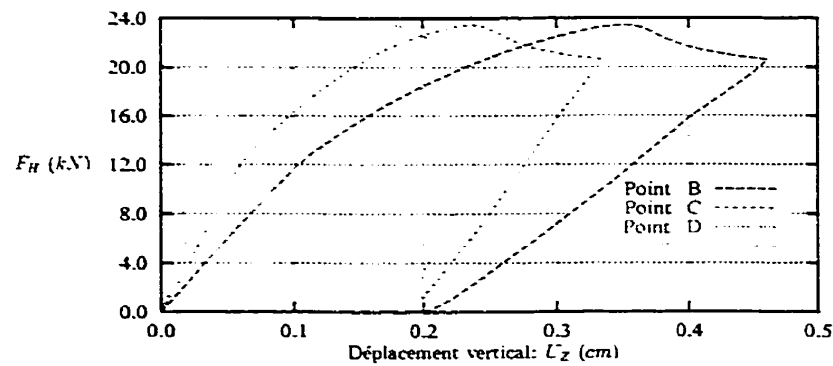


(c) Point F

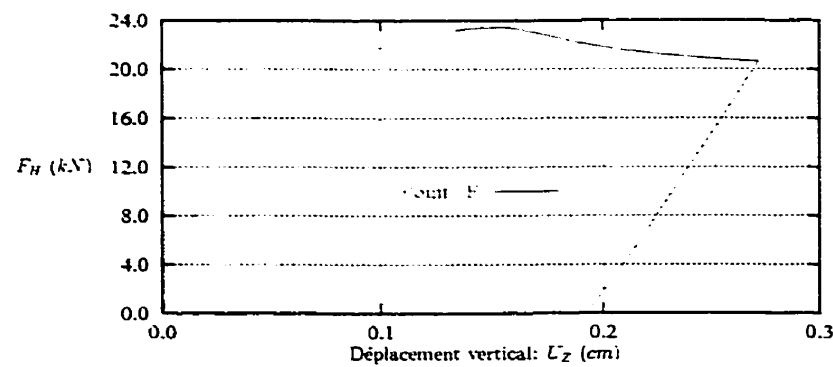
Figure 9.23: Véhicule forestier avec plaque de renforcement. Courbes charge-déplacement latéral des points A, B, C, D, E et F. Phase 1.



(a) Point A



(b) Points B. C. D et E



(c) Point F

Figure 9.24: Véhicule forestier avec plaque de renforcement. Courbes charge-déplacement vertical des points A. B. C. D. E et F. Phase 1.

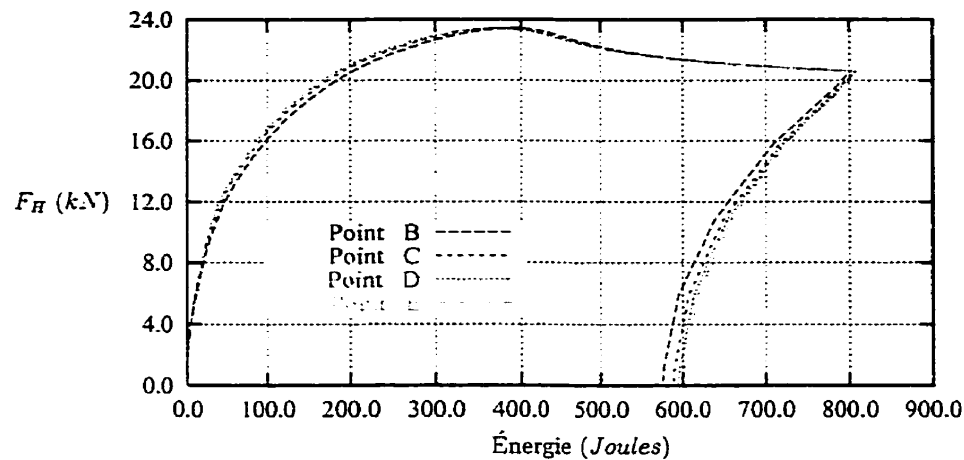


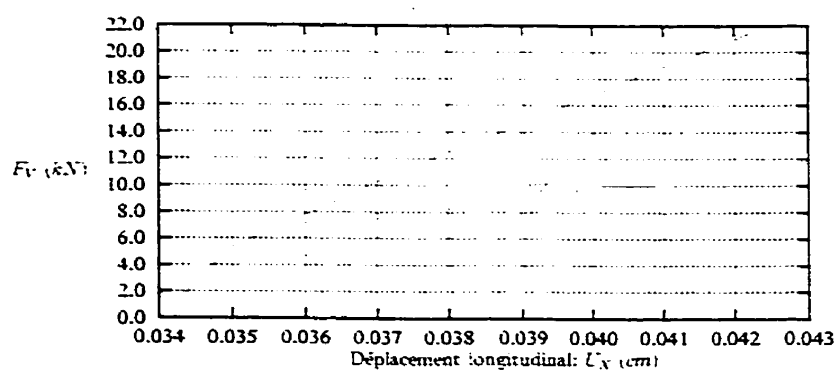
Figure 9.25: Véhicule forestier avec plaque de renforcement. Courbes charge-énergie des points B, C, D et E.

### Conclusion des analyses du ROPS

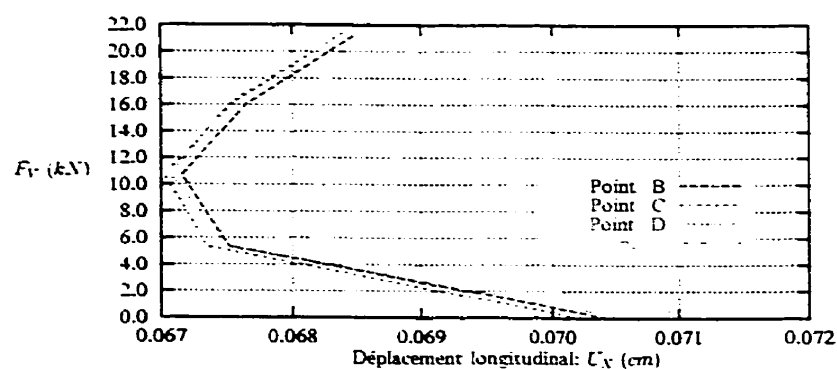
Le bilan global des analyses du ROPS du véhicule forestier est positif:

- Une bonne résistance au chargement latéral avec une bonne absorption de l'énergie de la part du véhicule;
- Malgré les contraintes et les déformations résiduelles induites par le chargement latéral, le véhicule parvient à résister à la charge verticale requise par l'essai;

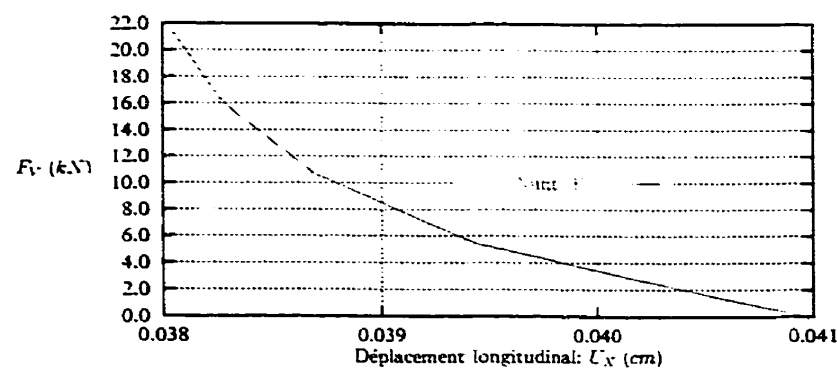
Les calculs effectués ont permis d'avoir une bonne idée du comportement du véhicule lors des essais réels. Remarquons que la présence de la plaque de renforcement a permis d'augmenter la résistance du véhicule; néanmoins sa présence n'est pas requise. Le véhicule est assez robuste. Par ailleurs, il convient de tenir compte de l'écroutissement des matériaux utilisés pour être le plus réaliste possible.



(a) Point A

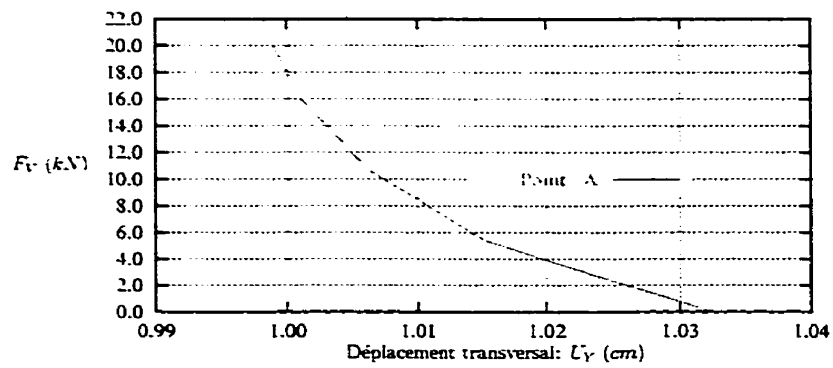


(b) Points B, C, D et E

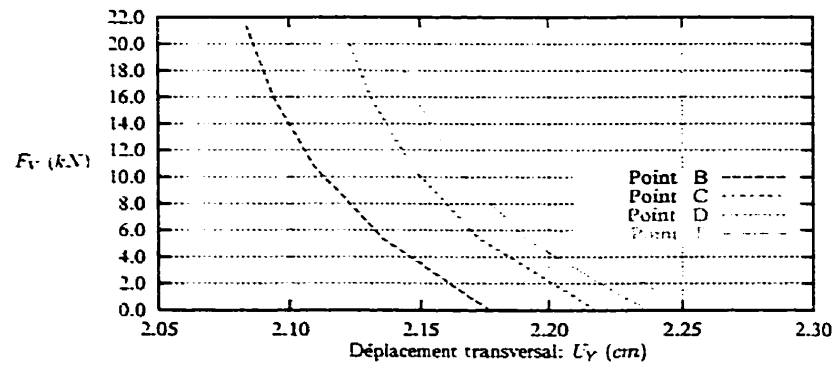


(c) Point F

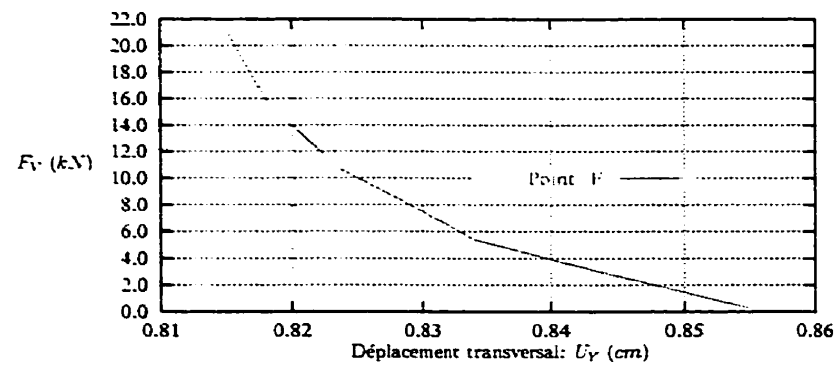
Figure 9.26: Véhicule forestier avec plaque de renforcement. Courbes charge-déplacement longitudinal des points A, B, C, D, E et F. Phase 2.



(a) Point A

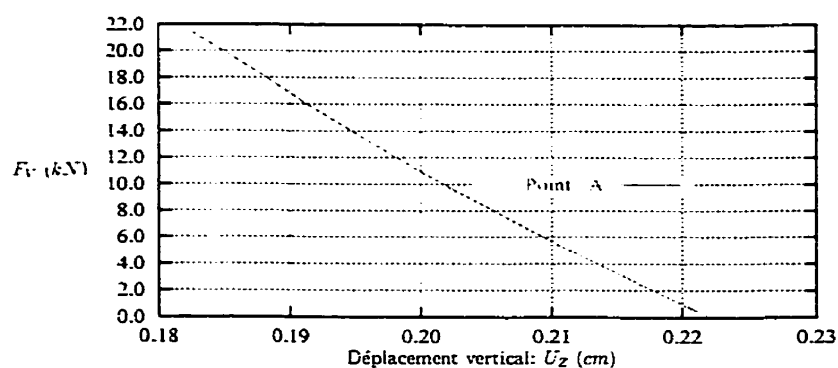


(b) Points B, C, D et E

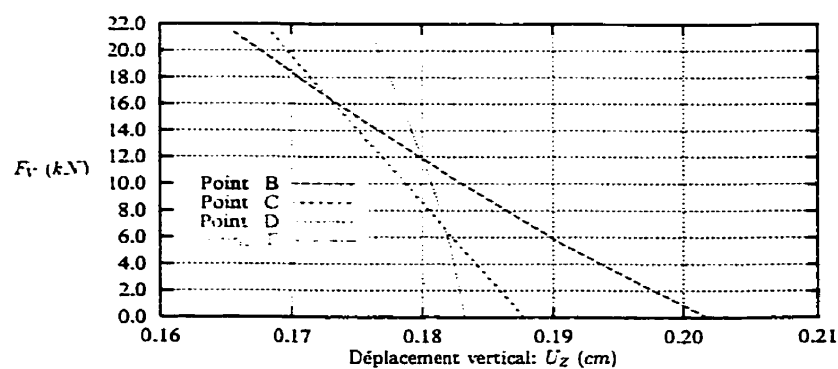


(c) Point F

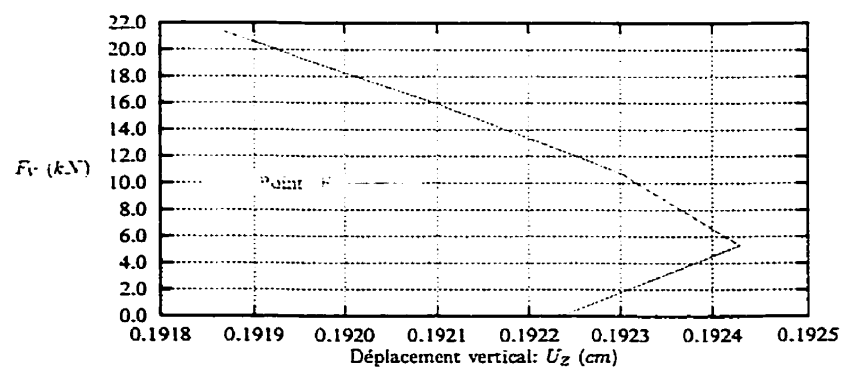
Figure 9.27: Véhicule forestier avec plaque de renforcement. Courbes charge-déplacement latéral des points A, B, C, D, E et F. Phase 2.



(a) Point A



(b) Points B, C, D et E



(c) Point F

Figure 9.28: Véhicule forestier avec plaque de renforcement. Courbes charge-déplacement vertical des points A, B, C, D, E et F. Phase 2.



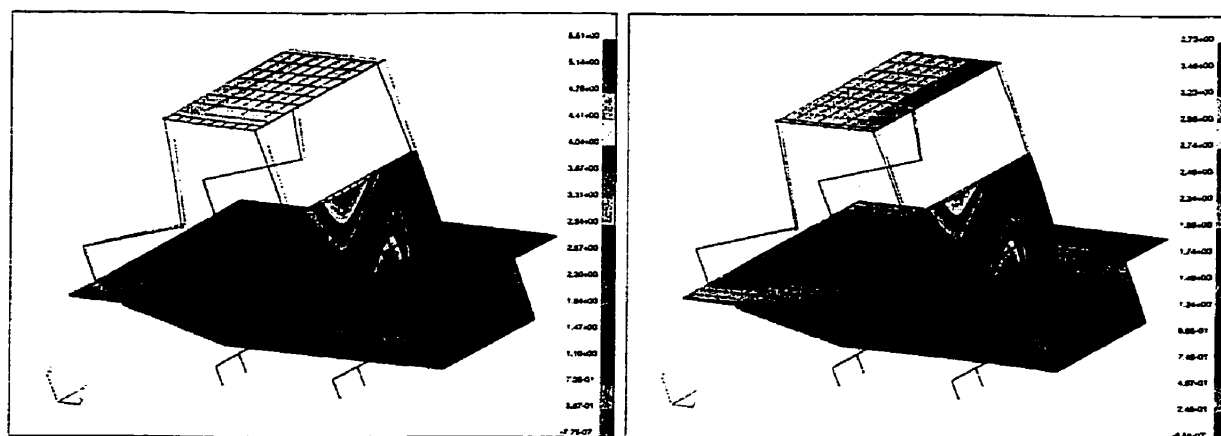
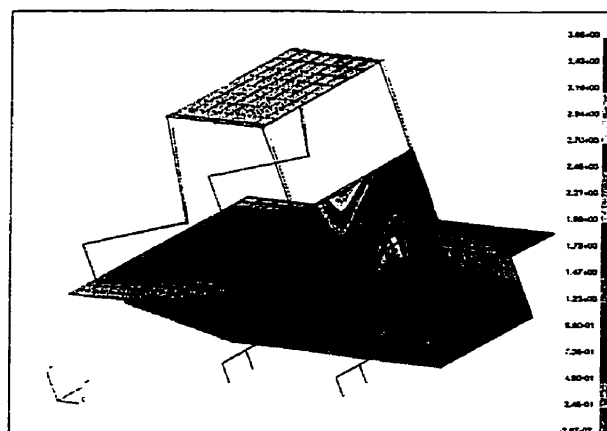
(a) Chargement latéral:  $F_H = 9.53 \text{ kN}$ .(b) Déchargement:  $F_H = 0$ .(c) Chargement vertical:  $F_V = 21.4 \text{ kN}$ .

Figure 9.29: Véhicule forestier avec plaque de renforcement. Déformées réelles finales.

## Chapitre 10

# Conclusion

### 10.1 Rétrospective et conclusion

Un outil d'aide pour l'ingénieur en calcul des structures a été développé et proposé. Cet outil souple et efficace, consiste à

- étudier le comportement statique non linéaire des structures, prenant en compte les grands déplacements, les grandes rotations et les aspects rhéologiques réels;
- simuler le comportement pré et post-flambement de composants structuraux (utilisés dans les constructions métalliques) tout en tenant compte de leur plastification;
- combiner plusieurs type d'analyse. Par exemple, une analyse élastoplastique suivie d'une analyse de stabilité qui tient compte de la plastification, des contraintes et des déformations résiduelles internes engendrées par l'analyse précédente;
- analyser numériquement le comportement des structures métalliques, en considérant les caractéristiques et imperfections propres aux constructions industrielles;

- simuler un essai de laboratoire et calculer le comportement non linéaire d'une structure réelle jusqu'à la ruine, sur la base de la théorie non linéaire de la mécanique des solides à petites déformations élastoplastiques.

L'outil est fondé sur une approche éléments finis permettant d'améliorer sensiblement l'analyse non linéaire de la structure métallique et d'avoir une meilleure compréhension de son comportement global ainsi que du comportement individuel de chacun des éléments qui la constitue. Il a été développé en s'inspirant d'une riche recherche bibliographique. Les modèles associés simples de par leur formulation, se distinguent nettement de ceux proposés par la littérature en terme de facilité de compréhension et surtout efficacité d'utilisation.

La stratégie de calcul proposée est dotée essentiellement des ingrédients suivants:

1. des éléments de types poutre et coque très précis, basés sur une formulation en grandes déplacements et à grandes rotations (*cf.* chapitre 6 et 7);
2. un processus "exact" de mise à jour de la géométrie (translation et rotation) tenant compte de la nature non additive des rotations finies (*cf.* chapitre 4, 6 et 7);
3. des techniques de résolution et des critères de convergence accommodant les rotations ou autres grandeurs présentant des ordres de grandeurs différents (*cf.* chapitre 5);
4. une stratégie d'incrémentation efficace permettant l'ajustement automatique du paramètre de pilotage imposé (*cf.* chapitre 5);
5. une loi de comportement élastoplastique, basée sur le critère de Von Mises avec écrouissage isotrope et intégrée selon un schéma de type *prédiction élastique retour radial*, préservant la convergence quadratique (*cf.* chapitre 3);
6. un algorithme de calcul de la plastification progressive à travers l'épaisseur d'une coque où la section (éventuellement de forme quelconque) d'une poutre (*cf.* chapitre 6 et 7);
7. une procédure de combinaison des analyses et de sauvegarde des calculs pour un usage ultérieur:

8. des possibilités de changer la base de données d'une analyse à une autre (ajout ou suppression des éléments, changement des conditions aux limites, modification des paramètres de résolution, etc.).

Les résultats numériques du chapitre 8, ont montré la fiabilité des éléments proposés. Ils ont permis d'une part, d'illustrer la précision et la performance de ces éléments et d'autre part, la rigueur et l'efficacité de leur formulation. En plasticité, le choix d'une approche "locale", a permis (en plus de tenir compte des contraintes résiduelles dans l'épaisseur ou la section) d'obtenir des résultats précis, comparés à ceux associés à une approche "résultante".

Les applications pratiques du chapitre 9, ont démontré qu'il est possible d'évaluer d'une façon souple, efficace et économique, le comportement non linéaire d'une structure réelle, compte tenu des imperfections.

Par ailleurs, une approche purement algébrique a été adoptée afin de faciliter la compréhension de la cinématique des rotations finies et différentielles (*cf.* chapitre 4). Celle-ci est en effet très accessible aux ingénieurs et souple à mettre en œuvre sur ordinateur.

## 10.2 Recommandations pour de futures extensions

Cette thèse ne prétend pas être complète pour résoudre tous les problèmes d'analyse de structures de type poutres et/ou coques. Pour améliorer davantage le travail présenté et augmenter le potentiel d'utilisation du programme, nous formulons les recommandations suivantes:

- Pour résoudre les problèmes dynamiques, une analyse fréquentielle ou temporelle est souvent utilisée par les ingénieurs en structure. Pour étendre les modèles de coque et de poutre proposés, il faudra développer les matrices masses (consistantes ou diagonales) nécessaires et utiliser des schémas d'intégration adaptés pour les termes d'inertie relatives aux rotations.
- Explorer la voie d'utilisation des grandes rotations dans un contexte de dynamique explicite (crash test permettant de simuler la collision de véhicules).
- Il serait également intéressant de généraliser ces modèles pour l'analyse des structures en grandes déformations.

- La formulation proposée de poutre permet une simulation plus réaliste du comportement des structures tridimensionnelles à sections pleines ou fermées, où les déformations et contraintes axiales dues au gauchissement des sections sont négligées. Il faudra dans l'avenir inclure les effets de gauchissement (selon les hypothèses de type Vlassov ou Bescoter) afin d'étendre la formulation aux sections ouvertes à parois minces.
- Nous avons supposé qu'en cours de déformation, la section transversale de la poutre peut subir une expansion homogène dans son plan (excepté pour le cas où les effets thermiques sont considérés) et nous avons introduit pour la quantifier le facteur de *dilatation*  $f$  que nous avons relié à l'élongation pour maintenir l'hypothèse d'incompressibilité du matériau. Spécialement en grandes déformations<sup>1</sup>, cette façon de faire est très commode et pratique, si on veut mesurer l'expansion de la section transversale de poutre quand elle est tendue ou comprimée suite à une mise en forme par exemple. Ce facteur n'est pas à négliger dans le cadre des grandes déformations. En petites déformations cependant, il est toujours de l'ordre de 1. Son influence ne s'est pas manifestée dans les analyses effectuées dans ce travail.
- Dans certains problèmes, tel que l'emboutissage, la mise en forme des tôles (*sheet metal forming*) et le délaminage des coques composites, l'épaisseur de la coque change inévitablement après déformation. Tenir compte de la variation de l'épaisseur peut être d'une très grande utilité.
- Généraliser les formulations coques proposées aux cas 3D avec des degrés de liberté de translations.

---

<sup>1</sup>Il est à noter que la plupart des matériaux usuels sont incompressibles en grandes déformations.

## Bibliographie

- [ABHK82] J. H. Argyris, B. Boni, U. Hindenlang, and M. Kleiber. Finite element analysis of two- and three-dimensional elasto-plastic frames. the natural approach. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 35:221–248, 1982.
- [AHMS79] J. H. Argyris, O. Hilpert, G. A. Malejannakis, and D. W. Scharpf. On the geometrical stiffness of a beam in space - a consistence v. w. approach. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 20:105–131, 1979.
- [AIZ68] S. Ahmad, B. M. Irons, and O. C. Zienkiewicz. Curved thick shell and membrane elements with particular reference to axi-symmetric problems. In *Proc. Air Force 2nd Conf. on Matrix Meth. in Struct. Mech.* Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, October 1968.
- [AIZ70] S. Ahmad, B. M. Irons, and O. C. Zienkiewicz. Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 2:419–451, 1970.
- [AKK64] J. H. Argyris, S. Kelsey, and H. Kamel. Matrix methods of structural analysis - a precise of recent developement. In B. Fraeijs de Veubeke, editor. *Matrix methods in structural analysis*, pages 1–164. Pergamon Press, 1964.
- [Ako87] K. E. Akoussah. *Analyse non linéaire des structures à parois minces par éléments finis et son application aux bâtiments industriels*. Thèse de doctorat, Université Laval, Québec, 1987.
- [All84] D. J. Allman. A compatible triangle element including vertex rotations for plane elasticity analysis. *Comput. Struct.*, 19:1–8, 1984.
- [All88] D. J. Allman. Quadrilateral finite element including vertex rotations for plane elasticity analysis. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 26:717–730, 1988.
- [All94] D. J. Allman. Basic flat facet finite element for the analysis of general shells. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 37:19–35, 1994.

- [Amm97] S. Ammar. *Méthode asymptotique appliquée à la résolution de problèmes non linéaires en grandes rotations et grands déplacements*. Thèse de doctorat. Université Laval. Québec. 1997.
- [AP93] J. H. Argyris and V. F. Poterasu. Large rotations revisited application of lie algebra. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 103:11–42, 1993.
- [Arg65] J. H. Argyris. Matrix analysis of three-dimensional elastic media - small and large displacements. *AIAA Journal*. 3(1):45–51, 1965.
- [Arg82] J. H. Argyris. An excursion into large rotations. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 32:85–155. 1982.
- [Aya93] R. Ayad. *Éléments finis de plaques et coques en formulation mixte avec projection en cisaillement*. Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne. France. 1993.
- [Bag93] H. Baghdadi. *Modélisation en grandes déformations des solides et des sols. Application aux fondations*. Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne. France. 1993.
- [Bat77] J. L. Batoz. *Analyse non linéaire des coques minces élastiques de formes arbitraires par éléments triangulaires courbés*. Thèse de doctorat, Université Laval. Québec. 1977.
- [Bat81] J. L. Batoz. Grands déplacements et grandes rotations de poutres minces élastique. Technical report. Université de Technologie de Compiègne, France. 1981.
- [Bat82] K. J. Bathe. *Finite element procedures in engineering analysis*. Prentice-Hall, New Jersey, 1982.
- [BB79] K. J. Bathe and S. Bolourchi. Large displacement analysis of three-dimension beam structures. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 14:961–986, 1979.
- [BB80] K. J. Bathe and S. Bolourchi. A geometrical and material nonlinear plate and shell element. *Computers and Structures*, 11:23–48, 1980.
- [BB93a] C. J. Burgoyne and M. G. Brennan. Calculation of elasto-plastic rigidities using the exact ilyushin yield surface. *Int. J. Solids Struct.*, 30:1133–1145, 1993.

- [BB93b] C. J. Burgoyne and M. G. Brennan. Exact ilyushin yield surface. *Int. J. Solids Struct.*, 30:1113–1131, 1993.
- [BC69] C. Brebbia and J. Connor. Geometrically nonlinear finite element analysis. *ASCE J. Eng. Mech. Div.*, 95(EM2):463–483, 1969.
- [BC73] P. G. Bergan and R. W. Clough. Large deflection analysis of plates and shallow shells using the finite element method. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 5(4):543–556, 1973.
- [BCD76] J. L. Batoz, A. Chattopadhyay, and G. Dhatt. Finite element large deflection analysis of shallow shells. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 10(1):39–58, 1976.
- [BD73] J. L. Batoz and G. Dhatt. Buckling of deep shells. In *Proc. Sec. Int. Conf. SMIRT. Berlin*, Sept. 1973.
- [BD75] J. L. Batoz and G. Dhatt. Flambement axisymétrique et asymétrique des coques minces surbaissées. In *Proc. Fifth Canadian Congress of Appl. Mech.*, pages 167–168. Fredericton, N. B., May 1975.
- [BD79] J. L. Batoz and G. Dhatt. Incremental displacement algorithms for non-linear problems. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 14:1262–1267, 1979.
- [BD86a] K. J. Bathe and E. Dvorkin. A formulation of general shell elements - the use of mixed interpolation of tensorial components. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 22:697–722, 1986.
- [BD86b] J. L. Batoz and G. Dhatt. Plaques et coques par éléments finis, analyse linéaire et non linéaire. Technical report, Institut pour la promotion des sciences de l'ingénieur, Paris, France, 1986.
- [BD90a] Y. Basar and Y. Ding. Finite-rotation shell elements for the analysis of finite rotation shell problems. In *Extended abstract lectures, Second World Congress on Computational Mechanics*, pages 27–31. Stuttgart, Germany, Aug. 1990.
- [BD90b] J. L. Batoz and G. Dhatt. *Modélisation des structure par éléments finis, Volume 1. Solides élastiques*. Les Presses de l'université Laval, Sainte-Foy, Québec, 1990.



- [BD90c] J. L. Batoz and G. Dhatt. *Modélisation des structure par éléments finis, Volume 2. Poutres et plaques*. Les Presses de l'université Laval, Sainte-Foy, Québec, 1990.
- [BD92] J. L. Batoz and G. Dhatt. *Modélisation des structure par éléments finis, Volume 3. Coques*. Les Presses de l'université Laval, Sainte-Foy, Québec, 1992.
- [BD97] B. Brank and F. B. Damjanic. On large deformations of thin elasto-plastic shells: Implementation of finite rotation model for quadrilateral shell element. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 40:689–726, 1997.
- [BDG97] P. Boisse, J. L. Daniel, and J. C. Gelin. A  $c^0$  three-node shell element for non-linear structural analysis. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 40:689–726, 1997.
- [BDP75] J. L. Batoz, G. Dhatt, and J. P. Prost. Buckling behaviour of shells using axisymmetrical element and triangular element. In *Proc. Third Int. Conf. on Stuct. Mech. in Reactor Technology, Londres*, Sept. 1975.
- [BG99] T. Belytchko and L. W. Glaum. Application of higher order corotational stretch theories to non-linear finite element analysis. *Comput. Struct.*, 10:175–182, 1999.
- [BH81] K. J. Bathe and L. W. Ho. A simple and effective element for analysis of general shell structures. *Comp. and Struct.*, 13:673–681, 1981.
- [BHKS78] P. G. Bergan, G. Horrigomoe, B. Krakeland, and T. H. Soreide. Solution techniques for non-linear finite element problems. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 12:1677–1696, 1978.
- [BJ83] J. L. Batoz and J. P. Jameux. Large displacements and post-buckling of plane structures. In *European Mechanics Colloquium, Munich*, May. 1983.
- [BJ86] J. L. Batoz and J. P. Jameux. Post-flambement et grands déplacements d'arcs plans. *J. de mécanique théorique et appliquée*, 5(2):235–257, 1986.
- [BN73] Z. P. Bazant and M. E. Nimeiri. Large-deflection spatial buckling of thin-walled beams and frames. *ASCE J. Eng. Mech. Div.*, EM 6, 1973.

- [BO75] K. J. Bathe and H. Ozdemik. Elastic plastic large de formation static and dynamic analysis. *Comp. Struct.* 6:81–92, 1975.
- [BO76] K. J. Bathe and H. Ozdemir. Elastic-plastic large deformation static and dynamic analysis. *Computers Struct.*, 6:81–92, 1976.
- [BOW74] K. J. Bathe, H. Ozdemir, and E. L. Wilson. Static and dynamic geometric and material nonlinear analysis. Technical Report UC SESM 74-4, Univ. California, Berkley, Feb. 1974.
- [BR92] N. Buechter and E. Ramm. Shells theory versus degeneration—a comparison in large rotation finite element analysis. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 34:39–59, 1992.
- [BRR94] N. Buechter, E. Ramm, and D. Roehl. Three-dimensional extension of non-linear shell formulation based of the enhanced assumed strain concept. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 37:2551–2568, 1994.
- [BRW75] K. J. Bathe, E. Ramm, and E. L. Wilson. Finite element formulations for large deformation dynamic analysis. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 9(2):353–386, 1975.
- [CC09] E. Cosserat and F. Cosserat. *Théorie des corps déformables*. Hermann, Paris, 1909.
- [CD66] H. Cohen and C. N. DeSilva. Nonlinear theory of elastic directed surfaces. *J. Math. Phys.*, 7(6):960–966, 1966.
- [CG88] A. Cardona and M. Geradin. A beam finite element non-linear theory with finite rotations. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 26:2403–2438, 1988.
- [Cha87] R. Charlier. *L'analyse statique non linéaire des structures par la méthode des éléments finis et son application à la constuction métallique*. Thèse de doctorat, Université de Liège, Belgique, 1987.
- [Chu88] T. J. Chung. *Continuum mechanics*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1988.
- [Cic84] C. Cichon. Large displacements in-plane analysis of elastic-plastic frames. *Comput. struct.*, 19:737–745, 1984.

- [CMS92] J. Chrosielewski, J. Markowski, and H. Stumpf. Genuinely resultant shell finite elements accounting for geometric and material non-linearity. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 35:63–94, 1992.
- [Coo91] R. D. Cook. Modified formulations for nine-d.o.f. plane triangles that include vertex rotations. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 31:825–835, 1991.
- [Coo94] R. D. Cook. Four-node ‘flat’ shell element: drilling degrees of freedom, membrane-bending coupling, warped geometry, and behavior. *Comput. Struct.*, 50:549–555, 1994.
- [Cri80] M. A. Crisfield. Incremental/iterative solution for non-linear structural analysis. In *Proc. First Int. Conf. Num. Meth. for Non-Linear Problems*, pages 261–290. Swansea, U.K., 1980.
- [Cri81] M. A. Crisfield. A fast incremental/iteration solution procedure that handles snap-through. *Comput. Struct.*, 13:55–62, 1981.
- [Cri90] M. A. Crisfield. A consistent co-rotational formulation for non-linear, three-dimensional, beam elements. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 81:131–150, 1990.
- [Cri97a] M. A. Crisfield. *Non-linear finite element analysis of solids and structures, Volume 1. Essentials*. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, England, 1997.
- [Cri97b] M. A. Crisfield. *Non-linear finite element analysis of solids and structures, Volume 2. Advanced topics*. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, England, 1997.
- [Dab94] J. Dabounou. *Approche unifiée de quelques problèmes non linéaires de mécanique des milieux continus par la méthode des éléments finis*. Thèse de doctorat. Université de Technologie de Compiègne, France, 1994.
- [Dam96] F. Dammak. *Formulation isoparamétrique généralisée en analyse linéaire et non linéaire des coques par éléments finis*. Thèse de doctorat, Université Laval, Québec, 1996.
- [DB84] E. N. Dvorkin and K. J. Bathe. A continuum mechanics based four-node shell element for general nonlinear analysis. *Eng. Comput.*, 1:77–88, 1984.

- [ddC94] Centre de documentation C.S.S.T. Machines forestière automotrice—structures de protection au retournement—essai de laboratoire et critère de performance. Technical Report ISO 8082:1994(F), Globa Enginnering documents, 1994.
- [DF92] R. Desjardins and M. Fafard. Développement d'un logiciel pour l'analyse des structures par éléments finis utilisant l'approche de la programmation orientée objets. Technical Report GCT-92-05, Univ. Laval, Québec, 1992.
- [DF95] G. Dhatt and M. Fafard. Modélisation non linéaire des structures. Technical Report GCS-95-08, Université Laval, Québec, Sept. 1995.
- [Dha70] G. Dhatt. Instability of thin shells by the finite element method. In *Proc. Sym. of the Association of Shell Structures*. Vienna, 1970.
- [DO66] L. M. Dinis and D. R. Owen. Elasto-viscoplastic and elasto-plastic large deformation analysis of thin plates and shells. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 18:591–607, 1966.
- [DO77] L. M. Dinis and D. R. Owen. Elasto-viscoplastic anlysis of plates by finite element method. *Comp. Struct.*, 8:207–215, 1977.
- [Dom97] E. Domissy. *Formulation et évaluation d'éléments finis volumiques modifiés pour l'analyse linéaire et non linéaire des coques*. Thèse de docteur-ingénieur. Université de Technologie de Compiègne, France, 1997.
- [DOO88] E. N. Dvorkin, E. Onate, and J. Olivier. On a non-linear formulation for curved timoshenko beam elements considering large displacement/rotation increments. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 26:1597–1613, 1988.
- [DS75] D. A DaDeppo and R. Schmidt. Instability of clamped-hingeg circular arches subjected to a point load. *Journal of applied mechanics*, 97:894–896, 1975.
- [DT81] G. Dhatt and G. Touzot. *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Les Presses de l'Université Laval, Québec, 1981.
- [EL82] M. Eidsheim and P. K. Larsen. Non linear analysis of elasto-plastic shells by hybrid stress finite elements. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 34:989–1018, 1982.

- [EM89] M. El Mouatassim. *Modélisation en grandes transformations des solides massifs par éléments finis*. Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne. France. 1989.
- [ET58] J. L. Ericksen and C. Truesdell. Exact theory of stress and strain in rods and shells. *Archives for rotational mechanics and analysis*, 1:295–323, 1958.
- [Faf87] M. Fafard. *Calcul automatique des configurations pré et post-flambement en calcul non linéaire des structures*. Thèse de doctorat, Université Laval, Québec. 1987.
- [FDB89] M. Fafard, G. Dhatt, and J. L. Batoz. A new discret kirchhoff plate/shell element with updated procedures. *Comp. Struct.*, 31:591–606, 1989.
- [Fel66] C. A. Felippa. Refined finite element analysis of linear and nonlinear two-dimensional structures. Technical Report SESM 66-22, Univ. California, Berkeley. 1966.
- [Fre78] F. Frey. *L'analyse statique non linéaire des structures par la méthode des éléments finis et son application à la constuction métallique*. Thèse de doctorat, Université de Liège, Belgique, 1978.
- [FS92] D. D. Fox and J. C. Simo. Drill rotation formulation for geometrically exact shells. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 98:329–343, 1992.
- [Gac71] H. Gachon. Analyse de comportement des plaques minces raidies anisotropes. *Annales ITBTP. section 'théories et méthodes de calcul'*, 1971.
- [Gal73] R. H. Gallagher. The finite element method in shell. *Comp. Struct.*, 3(3):543–557, 1973.
- [GDO84] M. S. Gadala, M. A. Dokainish, and G. A. Oravas. Formulation methods of geometric and material nonlinearity problems. *Int. J. for Num. Meth. in Eng.*, 20:887–914, 1984.
- [GKW95] F. Gruttmann, S. Klinkel, and W. Wagner. A finite rotation shell theory with application to composite structures. *Revue européenne des éléments finis*. 4(5-6), 1995.

- [GLM71] R. H. Gallagher, S. Lien, and S. Mau. A procedure for finite element plate and shell pre and post buckling analysis. In *Proc. Air Force 3rd Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics*, pages 857–879. Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 1971.
- [GN74] A. E. Green and P. M. Naghdi. On the derivation of shell theories by direct approach. *J. Appl. Mech.*, pages 173–176, 1974.
- [GNW65] A. E. Green, P. M. Naghdi, and W. L. Wainwright. A general theory of a cosserat surface. *Archives for rotational mechanics and analysis*, 20:287–308, 1965.
- [Guo87] Y. Q. Guo. *Analyse non linéaire statique et dynamique des poutres tridimensionnelles élasto-plastiques*. Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne, France, 1987.
- [GY68] R. H. Gallagher and H. T. Yang. Elastic instability predictions for doubly curved shells. In *Proc. Air Force 2nd Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics*, pages 711–742. Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, Oct. 1968.
- [GZ68] A. E. Green and W. Zerna. *Theoretical elasticity*. Clarendon Press, Oxford, 1968.
- [HB89] T. J. R. Hughes and F. Brezzi. On drilling degrees-of-freedom. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 72:105–121, 1989.
- [HC83] T. J. R. Hughes and E. Carnoy. Nonlinear finite element shell formulation accounting for large membrane strain. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 39:69–82, 1983.
- [HCH78] T. J. R. Hughes, M. Cohen, and M. Haroun. Reduced and selective integration techniques in finite element analysis of plates. *Nucl. Eng. Des.*, 46:203–222, 1978.
- [HGE71] L. D. Hofmeister, G. A. Greenbaum, and D. A. Evensen. Large strain elasto-plastic finite element analysis. *AIAA J.*, 9(7):1248–1254, 1971.
- [Hib79] H. D. Hibbit. Some follower forces and load stiffness. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 14:937–941, 1979.

- [Hil56] F. B. Hildebrand. *Introduction to numerical analysis*. McGraw-Hill, 1956.
- [HKS95] Hibbit, Karlsson, and Sorensen. *ABAQUS manuel, Version 5.4*. Hibbitt, Karlsson & Sorensen, Inc., 1995.
- [HL81a] T. J. R. Hughes and W. K. Liu. Nonlinear finite element analysis of shells, part i: Three-dimensional shells. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 26:331–362, 1981.
- [HL81b] T. J. R. Hughes and W. K. Liu. Nonlinear finite element analysis of shells, part ii: Two dimensional shells. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 27:167–181, 1981.
- [HMR70] H. D. Hibbit, P. V. Marcal, and J. R. Rice. A finite element formulation for problems of large strain and large displacement. *Int. J. Solids Struct.*, 6(8):1069–1086, 1970.
- [HSK77] W. E. Haisler, J. A. Stricklin, and J. E. Key. Displacement incrementation in non-linear structural analysis by self-correcting method. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 11:3–10, 1977.
- [HTK77] T. J. R. Hughes, R.L. Taylor, and W. Kanoknukulchai. A simple and efficient element for plate bending. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 11:1529–1543, 1977.
- [Hug87] T. J. R. Hughes. *The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1987.
- [HW80] T. J. R. Hughes and J. Winget. Finite rotation effects in numerical integration of rate constitutive equations arising in large deformation analysis. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 15:333–353, 1980.
- [Ibr93] A. Ibrahimbegovic. Quadrilateral finite elements for analysis of thick and plates. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 110:195–209, 1993.
- [Ibr94] A. Ibrahimbegovic. Stress geometrically nonlinear shell theory with drilling rotations, part i: A consistent formulation. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 118:265–284, 1994.

- [Ibr95] A. Ibrahimbegovic. On finite element implementation of geometrically nonlinear reissner's beam theory: three-dimensional curved beam elements. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 26:11–26, 1995.
- [Ibr96] A. Ibrahimbegovic. A intrinsic form of the stress resultant geometrically exact shell theory. In *Proc. Séminaire d'été de la Société Mathématique du Canada*. Université Laval, Québec, Juillet 1996.
- [Ibr97a] A. Ibrahimbegovic. On the choice of finite rotation parameters. *Comput Methods Appl. Mech. Engrg*, 149:49–71, 1997.
- [Ibr97b] A. Ibrahimbegovic. Stress resultant geometrically exact shell theory for finite rotations and its finite element implementation. *Applied Mechanics Reviews*. 50(4):199–226, 1997.
- [IF92] A. Ibrahimbegovic and F. Frey. Finite element analysis of linear and nonlinear deformations of elastic initially curved beams. Technical Report LSC 92/02. École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Lausanne, Jan. 1992.
- [IF94a] A. Ibrahimbegovic and F. Frey. Stress geometrically nonlinear shell theory with drilling rotations, part ii: Computational aspects. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 118:285–308, 1994.
- [IF94b] A. Ibrahimbegovic and F. Frey. Stress geometrically nonlinear shell theory with drilling rotations, part iii: Linearized kinematics. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 37:3659–3683, 1994.
- [IF95] A. Ibrahimbegovic and F. Frey. Computational aspects of vector-like parametrization of three-dimensional finite rotation. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 38:3653–3673, 1995.
- [ISB<sup>+</sup>96] A. Ibrahimbegovic, H. Shakourzadeh, J. L. Batoz, M. Al Mikdad, and Y. Q. Guo. On the role of geometrically exact and second-order theories in buckling and post-buckling analysis of three-dimensional beam structures. *Comput. Struc.*, 61(6):1101–1114, 1996.
- [Jaa86] S. Jaamei. *Etudes des différentes formulations lagrangiennes pour l'analyse des plaques et coques minces élastoplastiques en grands déplacements et grandes rotations*. Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne, France, 1986.



- [JCP94] L. Jiang, M. W. Chernuka, and N. G. Pegg. A co-rotational, updated lagrangian formulation for geometrically nonlinear finite element analysis of shell structures. *Finite Elements in Analysis and Design*, 18:129–140, 1994.
- [Kat93] I. Katili. *Formulation et évaluation de nouveaux éléments finis pour l'analyse linéaire des plaques et coques de forme quelconque*. Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne, France, 1993.
- [KC91] H. Kebari and A. C. Cassel. Non-conforming modes stabilisation of 9-node stress-resultant degenerated shell element with drilling freedom. *Comp. Struct.*, 40:569–580, 1991.
- [KC92] H. Kebari and A. C. Cassel. A stabilized 9-node non-linear shell element. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 35:37–61, 1992.
- [Key72] S. W. Key. The analysis of arbitrary shells with a doubly curved arbitrary quadrilateral finite elements. *Int. J. for Computers and Structures*, 2:637–673, 1972.
- [KNTH81] W. Kanok-Nukulchai, R. L. Taylor, and T. J. R. Hughes. Resultant-stress degenerated-shell element. *Comp. Struct.*, 13:19–25, 1981.
- [KY69] T. Kawai and N. Yoshimura. Analysis of large deflection of plates by the finite element method. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 1:123–133, 1969.
- [Lar88] S. Laroze. *Mécanique des structures. Tome 2, Poutres*. Eyrolles, Masson, Saint-Germain, Paris, 1988.
- [Leb85] F. Lebouvier. *Analyse non-linéaire et ruine de structures planes formées de poutres et d'arcs*. Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne, France, 1985.
- [LH81] V. A. Lubarda and Lee E. H. A correct definition of elastic and plastic deformation and its computational significance. *Journal of Applied Mechanics*, 48:35–40, 1981.
- [LLLB86] W. K. Liu, E. S. Law, D. Lam, and T. Belytschko. A large deformation formulation for shell analysis by finite element method. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 55:259–300, 1986.

- [LMR68] S. L. Lee, F. S. Manuel, and E. C. Rossow. Large deflection and stability of elastic frames. *ASCE, J. Eng. Mech. Div.*, 94(EM2):521–547, 1968.
- [Lo92] S. H. Lo. Geometrically nonlinear formulation of 3d finite strain beam element with large rotations. *Comput. Struct.*, 44:147–157, 1992.
- [Mal69] L. E. Malvern. *Introduction to the Mechanics of Continuous Medium*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1969.
- [Mar66] H. C. Martin. On the derivation of stiffness matrices for the analysis of large deflection and stability problems. In *Proc. Air Force 1st Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics*, pages 679–696. Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, Nov. 1966.
- [Mar70] P. V. Marcal. Large deflection analysis of elastic-plastic shells of revolution. *AIAA J.*, 8(9):1627–1633, 1970.
- [MG90] J. C. Murray and J. H. Gregory. A study of incremental-iterative strategies for non-linear analysis. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 29:1365–1391, 1990.
- [MH78] D. S. Malkus and T. J. R. Hughes. Mixed finite element method - reduced and selective integration technique: a unification of concepts. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 15:63–81, 1978.
- [MI95] A. M. Mazen and A. Ibrahimbegovic. Interpolation non linéaire pour un élément fini de poutre en grandes rotaions tri-dimensionnelles. *Revue européenne des éléments finis*, 4(5-6):693–718, 1995.
- [MM76] T. Matsui and Matsuoka. A new finite element scheme for instability analysis of thin shells. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 10(1):145–170, 1976.
- [MS67] R. H. Mallett and L. A. Schmit. Non-linear structural analysis by energy search. *ASCE J. Struct. Div.*, 93(ST3):221–234, 1967.
- [MS86] R. V. Milford and W. C. Schinobrich. Degenerated isoparametric elements using explicit intergration. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 23:133–154, 1986.
- [MS93] M. Mahe and J. C. Sourisseau. Explicite thickness integration for three-dimensional shell elements applied to non-linear analysis. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 36:1085–1114, 1993.

- [MW68] D. W. Murray and E. L. Wilson. An approximate non-linear analysis of thin-plates. In *Proc. Air Force 2nd Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics*. Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, Oct. 1968.
- [Nag63] P. M. Naghdi. Foundations of elastic shell theory. In I. N. Sneddon and R. Hill. editors. *Progress in solid mechanics, Vol. IV*. North-Holland, 1963.
- [NOC91] B. Nour-Omid and Rankin C. C. Finite rotation analysis and consistent linearization using projection. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 93:353–384. 1991.
- [Ode66] J. T. Oden. Calculation of geometric stiffness matrices for complex structures. *AIAA Journal*. 4(8):1480–1482, 1966.
- [Ode69a] T. J. Oden. Finite element application in nonlinear analysis. In H. W. Rowan and R. M. Hackett. editors. *Proc. Symp. on application of the finite element methods in Civil Engineering*, pages 419–456. ASCE and Vanderbilt Univ., Nashville, Nov. 1969.
- [Ode69b] T. J. Oden. Numerical formulation of non-linear elasticity problems. In H. W. Rowan and R. M. Hackett. editors. *Proc. Symp. on application of the finite element methods in Civil Engineering*, pages 419–456. ASCE and Vanderbilt Univ., Nashville, Nov. 1969.
- [Ode72] J. T. Oden. *Finite element of nonlinear continua*. Mc Graw Hill, New York. 1972.
- [OF83] D. R. J. Owen and J. A. Figueiras. Elasto-plastic analysis of anisotropic plates and shells by semiloof element. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 19:521–539. 1983.
- [OP85] M. Ortiz and E. P. Popov. Accuracy and stability of intergration algorithms for elastoplastic constitutive relations. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 21:1561–1576. 1985.
- [Opp82] G. Opperman. *Comportement spatiale des poutres-colonnes à section ouverte et parois minces*. Thèse de doctorat, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne. Suisse. 1982.

- [OS86] M. Ortiz and J. C. Simo. An analysis of new class of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 23:353–366, 1986.
- [Par79] H. Parisch. A critical survey of the 9-node degenerated shell element with special emphasis on thin shell application and reduced integration. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 20:323–350, 1979.
- [Par91] H. Parisch. An investigation of a finite rotation four node assumed shell element. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 31:127–150, 1991.
- [PB83] W. Pietraszkiewicz and J. Badur. Finite rotations in the description of continuum deformation. *Int. J. Eng. Sci.*, 21(9):1115–1983, 1983.
- [PJ91] P. M. Pinsky and R. V. Jasti. On use of lagrange multiplier compatible modes for controlling accuracy and stability of mixed shell finite elements. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 85:151–182, 1991.
- [PL96] M. S. Park and B. C. Lee. Geometrically non-linear and elastoplastic three-dimensional shear flexible beam element of von-mises-type hardening material. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 39:383–408, 1996.
- [Pol92] P. Pol. *Modélisation du comportement élastoplastique de coques minces par éléments finis*. Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne, France, 1992.
- [Pra69] C. Prato. Shell finite element via reissner's principle. *Int. J. Solids Struct.*, 5:1119–1133, 1969.
- [Pro75] J. P. Prost. Analyse de la stabilité élastique des voiles minces de révolution par la méthode des éléments finis. Thèse de maîtrise, Université Laval, 1975.
- [PS81] G. Powell and J. Simons. Improved iteration strategy for non linear structures. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 17:1455–1467, 1981.
- [PS86] K. C. Parks and G. M. Stanley. A curved  $c^0$  shell element based on assumed natural-coordinate strains. *J. Appl. Mech.*, 53(2):278–290, 1986.

- [PT71] T. H. H. Pian and P. Tong. Variational formulation of finite-displacements analysis. In B. Fraeijs de Veubeke, editor. *High speed computing of elastic structure*, pages 43–63. Pergamon Press, 1971.
- [RA71] T. M. Roberts and D. G. Ashwell. The use of the finite mid-increment stiffness matrices in the post-buckling analysis of imperfect structures. *Int. J. Solids Struct.*, 7(7):805–823, 1971.
- [Ram77] E. Ramm. A plate/shell element for large deflection and rotations. In K. G. Bathe, J. T. Oden, and W. Wunderlich, editors, *Formulation and computational algorithms in finite element analysis*. MIT Press, Cambridge, MA, 1977.
- [Ram81] E. Ramm. Strategies for tracing the non-linear response near limits points. In *Nonlinear FE analysis in structural mechanics*, pages 68–89. Springer-Verlag, New York, 1981.
- [RD87] H. Rothert and W. Dehmel. Nonlinear analysis of isotropic, orthotropic and laminated plates and shells. *Comp. Methods in Appl. Mech. Eng.*, 64:429–446, 1987.
- [Rei74] E. Reissner. Linear and nonlinear theory of shells. In Y. C. Fung and E. E. Sechler, editors. *Thin shell structures*, pages 29–44. Prentice Hall, N.J., 1974.
- [RFD97] A. Rahem, M. Fafard, and G. Dhatt. Un élément de coque à 8 nœuds en grandes rotations. In *16 congrès canadien de mécanique appliquée*, page 457. Université Laval, Québec, Juin 1997.
- [Rik79] E. Riks. The incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. *Int. J. of Solids and Struc.*, 15:529–551, 1979.
- [RM73] S. Rajasekaran and D. W. Murray. Couple local buckling in wide flange beam-columns. *ASCE Journal of Structural Division*, 99(ST-6):1003–1023, 1973.
- [RO83] E. Ramm and P. Osterrieder. Ultimate load analysis of three-dimensional beam structures with thin-walled cross sections using finite elements. In *Proc. Third Int. Colloquium. Stability of metal structures*. CTICM, Paris, Nov. 1983.

- [Sal88] J. Salençon. *Mécanique des Milieux continus, II, Elasticité - Milieux curviligne*. Editions Ellipses. 1988.
- [SB92] C. Sansour and H. Bufler. An exact finite rotation shell theory, its mixed variational formulation and its finite element implementation. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 34:73–115. 1992.
- [SBF68] L. A. Schmit, F. K. Bognor, and R. L. Fox. Finite deflection structural analysis using plate and shell discrete elements. *AIAA J.*, 6(5):781–791, 1968.
- [SCG92] A. F. Saleeb, T. Y. Chang, and A. S. Gendy. Effective modelling of sp-tial buckling af beam assemblage, accounting for warping constraints and rotation-dependency of moments. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 33:469–502, 1992.
- [SCGY90] A. F. Saleeb, T. Y. Chang, W. Graf, and S. Yingyeunyoung. A hybrid mixed model for nonlinear shell analysis and its application to large-rotation problems. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 29:407–446, 1990.
- [SF89] J. C. Simo and D. D. Fox. On a stress resultant geometrically exact shell model. part i: Formulation and optimal parametrization. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 72:267–304, 1989.
- [SFR89] J. C. Simo, D. D. Fox, and M. Rifai. On a stress resultant geometrically exact shell model. part ii: The linear theory. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 73:53–62. 1989.
- [SFR90] J. C. Simo, D. D. Fox, and M. Rifai. On a stress resultant geometrically exact shell model. part iii: Computational aspects of the nonlinear theory. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 79:21–70, 1990.
- [SH86] J. C. Simo and T. J. R. Hughes. On the variational foundations of assumed strain methods. *J. Appl. Mech.*, 53:51–54, 1986.
- [Sha94] B. Shakourzadeh. *Modélisation des structures-poutres tridimensionnelle à parois minces et simulation du comportement non linéaire géométrique et élasto-plastique*. Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne, France, 1994.

- [SHS68] J. A. Stricklin, W. E. Haisler, and F. Stebbins. Nonlinear analysis of shells of revolution by the matrix displacement method. *AIAA J.*, 6(12):2306–2312, 1968.
- [Sim85] J. C. Simo. A finite strain beam formulation. the three-dimensional dynamic problem. part i. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 49:55–70, 1985.
- [Sim92] J. C. Simo. (symmetric) hessian for geometrically nonlinear models in solid mechanics: Intrinsic definition and geometric interpretation. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 33:1413–1449, 1992.
- [Sim93] J. C. Simo. On a stress resultant geometrically exact shell model. part vii: Shell intersections with 5/6 dof finite element formulations. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 108:319–339, 1993.
- [SK92] J. C. Simo and J. G. Kennedy. On a stress resultant geometrically exact shell model. part v: Nonlinear plasticity: formulation and integration algorithms. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 96:133–171, 1992.
- [SMR89] N. Stander, A. Matzenmiller, and E. Ramm. An assessment of assumed strain methods in finite rotation shell analysis. *Eng Comput.*, 6:57–66, 1989.
- [Sop96] Dessau Soprin. étude de stabilité à l'aide de la méthode des éléments d'une série de panneaux ondulé. Technical Report 815031-EP-CF-001, Honco inc., 1996.
- [Sop98] Dessau Soprin. étude de stabilité et d'analyse non lineaire à l'aide de la méthode des éléments finis de panneaux ondulé types. Technical Report 815131. Honco inc., 1998.
- [SP71] P. Sharifi and E. P. Popov. Nonlinear buckling analysis of sandwich arches. *ASCE J. Eng. Mech. Div.*, 97:1397–1411, 1971.
- [SRF90a] J. C. Simo, M. Rifai, and D. D. Fox. On a stress resultant geometrically exact shell model. part iv: Variable thickness shells with through-the-thickness stretching. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 81:91–126, 1990.
- [SRF90b] J. C. Simo, M. Rifai, and D. D. Fox. On a stress resultant geometrically exact shell model. part vi: Nonlinear dynamics and conserving algorithms. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 34:117–164, 1990.

- [ST85] J. C. Simo and R. L. Taylor. Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 48:101–118, 1985.
- [ST86] J. C. Simo and R. L. Taylor. A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 22:649–670, 1986.
- [Str71] J. A. Stricklin. Geometrically nonlinear static and dynamic analysis of shells of revolution. In Univ. de Liège Fraeijs de Veubeke, editor, *Proc. IUTAM Symposium on High Speed Computing of Elastic Structures*, pages 383–411. 1971.
- [Sur83] K. S. Surana. Geometrically nonlinear formulation for the curved shell element. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 19:581–615, 1983.
- [SVQ86] J. C. Simo and L. Vu-Quoc. A three-dimensional finite-strain rod model. part ii: computational aspects. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 58:79–116, 1986.
- [SVQ88] J. C. Simo and L. Vu-Quoc. On the dynamics in space of rods undergoing large motions - a geometrically exact approach. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 66:125–161. 1988.
- [Tah71] C. Tahiani. *Analyse des voiles minces dans les domaines linéaire et géométriquement non linéaire par la méthode des éléments finis mixtes*. Ph. d. thesis. Université Laval. 1971.
- [TDMM60] J. M. Turner, E. H. Dill, H. C. Martin, and R. J. Melosh. Large deflection of structures subject to heating and external load. *J. Aero. Sci.*, 27:97–106. 1960.
- [Tes91] A. Tessler. A two-node beam element including transverse shear and transverse normal deformations. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 32:1027–1039, 1991.
- [TG72] S. P. Timoshenko and J. M. Gere. *Mechanics of materials*. D. Van Nostrand Company, 1972.
- [Tim22] S. P. Timoshenko. On the transverse vibrations of bars of uniform cross section. *Philosophical Magazine*, 43:125–131, 1922.



- [Tim56] S. P. Timoshenko. *Strength of materials, Part III, advanced theory and problems*. D. Van Nostrand Co., Princeton, New Jersey, 1956.
- [Tim68] S. P. Timoshenko. *Résistance des matériaux, Tomes 1 et 2*. Dunod, 1968.
- [TMW64] M. J. Turner. H. C. Martin. and B. C. Weikel. Further developement and applications of stiffness method. In B. Fraeijs de Veubeke, editor, *Matrix methods in structural analysis*. pages 203–266. Pergamon Press, 1964.
- [TS86] A. Tessler and L. Spiridigolozzi. Curved beam elements with penalty relaxation. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 23:2245–2262, 1986.
- [Wal69] A. C. Walker. A non-linear finite element analysis of shallow circular arches. *Int. J. Solids Struct.*, 5:97–107, 1969.
- [Was82] K. Washizu. *Variational methods in elasticity and plasticity*. Pergamon Press, 1982.
- [Wem71] G. A. Wempner. Discrete approximations related to nonlinear theories of solids. *Int. J. Mech. Sci.*, 7:1581–1599, 1971.
- [WG93] P. Wriggers and F. Gruttmann. Thin shells with finite rotations formulated in biot stresses: Theory and finite element formulation. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 36:2049–2071, 1993.
- [Wis66] J. W. Wissmann. Nonlinear structural analysis-tensor formulation. In *Proc. Air Force 1st Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics*, pages 697–716. Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, Nov. 1966.
- [Woo77] Wood77. Geometrically non linear finite element analysis of beam, frames, arches and axissymmetric shells. *Comp. Struct.*, 7:725–735, 1977.
- [WOS86] W. Wunderlich. H. Obrecht. and V. Schrodter. Nonlinear analysis and elasto-plastic load-carrying behavior of thin-walled spatial beam structures with warping constraints. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 22:671–695, 1986.
- [Yag68] S. Yaghmai. Incremental analysis of large deformations in mechanics of solids with applications to axisymmetric shells of revolution. Technical Report SESM 68-17. Univ. California, Berkeley, Dec. 1968.

- [YS85] G. H. Yang and S. Saigal. A curved quadrilateral element for static analysis of shells with geometric and material nonlinearities. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 21:617–635, 1985.
- [ZL88] O. C. Zienkiewicz and D. Lefebvre. Robust tringular plate bending element of the reissner-mindlin type. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 26:1169–1184, 1988.
- [ZN71] O. C. Zienkiewicz and G. C. Nayak. A general approach to problems of plasticity and large deformation using isoparametric elements. In *Proc. Air Force 3rd Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics*, pages 881–928. Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 1971.
- [ZT91] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor. *The finite element, Volume 1 et 2*. McGraw-Hill, London, 1991.
- [ZTPO90] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, P. Papadopoulos, and E. Onate. Plate bending elements with discrete constraints: new triangular elements. *Comput. Struct.*, 35:505–522, 1990.
- [ZTT71] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, and J. M. Too. Reduced integration techniques in general analysis of plates and shells. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 3:275–293, 1971.
- [ZXZ<sup>+</sup>93] O. C. Zienkiewicz, Z. Xu, L. F. Zeng, A. Samuelsson, and N. E. Wiberg. Linked interpolation for reissner-mindlin plate elements: Part a—a simple quadrilateral. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 36:3043–3056, 1993.

## Annexe A

### Critère de von Mises

#### A.1 Critère de von Mises et loi d'écoulement associée

Comme nous l'avions annoncé dans la sous-section (3.3.1), l'écrouissage isotrope se traduit, mathématiquement, par la relation suivante:

$$F(\boldsymbol{\tau}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl}) \equiv f(\boldsymbol{\tau}) - \bar{\tau}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl}) = 0 \quad (\text{A.1})$$

où  $f(\boldsymbol{\tau})$  est le potentiel de contrainte et  $\bar{\tau}$  est la limite élastique courante dont la dépendance par rapport à la déformation plastique équivalente  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl}$  est déterminée expérimentalement à partir de la courbe contrainte-déformation universelle  $\bar{\tau} = h(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl})$ .

Si l'hypothèse de l'indépendance de l'écrouissage plastique face à une contrainte hydrostatique est adoptée, les déformations plastiques surviendront à volume constant:

$$\text{trace}(\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}) = 0 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{pl} = \mathbf{e}^{pl} + \frac{1}{3}\text{trace}(\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}) \mathbf{I} = \mathbf{e}^{pl}$$

La déformation plastique équivalente  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl}$  se réduira à  $\bar{\boldsymbol{e}}^{pl}$  tel que

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl}} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\mathbf{e}}^{pl} : \dot{\mathbf{e}}^{pl}} = \dot{\bar{\mathbf{e}}}^{pl} \quad (\text{A.2})$$

Quant au potentiel de contraintes  $f$ , il sera indépendant du tenseur sphérique des contraintes de sorte que l'équation (A.1) prendra l'expression suivante:

$$F(\boldsymbol{\tau}', \bar{e}^{pl}) \equiv f(\boldsymbol{\tau}') - \bar{\tau}(\bar{e}^{pl}) = 0$$

dans laquelle  $\boldsymbol{\tau}'$  est le tenseur déviatorique des contraintes:

$$\boldsymbol{\tau}' = \boldsymbol{\tau} - \frac{1}{3} \text{trace}(\boldsymbol{\tau}) \mathbf{I}$$

En considérant l'hypothèse de l'indépendance de l'écrouissage plastique face à une contrainte hydrostatique et en supposant que le matériau est isotrope, on peut simplifier davantage la fonction d'écoulement  $F$  en introduisant les invariants du tenseur déviatorique. On aura dans ce cas:

$$F \equiv f(J'_2, J'_3) - \bar{\tau}(\bar{e}^{pl}) = 0 \quad (\text{A.3})$$

avec

$$J'_2 = \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau}' : \boldsymbol{\tau}' \quad \text{et} \quad J'_3 = \det(\boldsymbol{\tau}')$$

$J'_1$  étant nul ( $J'_1 = \text{trace}(\boldsymbol{\tau}')$ ).

La condition d'écoulement de von Mises est un cas particulier de l'équation (A.3), dans laquelle nous supposons que  $f$  est indépendante de  $J'_3$

$$f = \sqrt{3 J'_2} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\tau}' : \boldsymbol{\tau}'} = \tau_e$$

La version de von Mises de l'équation (A.3) est alors

$$F \equiv \tau_e - \bar{\tau}(\bar{e}^{pl}) = 0 \quad (\text{A.4})$$

pour cette fonction

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \frac{3}{2} \frac{\boldsymbol{\tau}'}{\tau_e}$$

ce qui permet de déduire la loi d'écoulement plastique suivante:

$$\dot{\mathbf{e}}^{pl} = \dot{\bar{e}}^{pl} \mathbf{n} \quad (\text{A.5})$$

avec  $\mathbf{n}$  comme direction de l'écoulement plastique.

$$\mathbf{n} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \frac{3}{2} \frac{\boldsymbol{\tau}'}{\tau_e} \quad (\text{A.6})$$

En effet, nous avons

$$\dot{\epsilon}^{pl} = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \dot{\lambda} \mathbf{n}$$

qui se réduit à

$$\dot{\epsilon}^{pl} = \dot{\lambda} \mathbf{n}$$

d'où

$$\dot{\epsilon}^{pl} : \dot{\epsilon}^{pl} = (\dot{\lambda})^2 \mathbf{n} : \mathbf{n}$$

ce qui s'écrit aussi d'après (A.2) et (A.6)

$$\frac{3}{2} (\dot{\epsilon}^{pl})^2 = (\dot{\lambda})^2 \left( \left( \frac{3}{2} \right)^2 \frac{\boldsymbol{\tau}' : \boldsymbol{\tau}'}{\tau_e^2} \right) = \frac{3}{2} (\dot{\lambda})^2 \frac{\tau_e^2}{\tau_e^2}$$

donc

$$\dot{\lambda} = \dot{\epsilon}^{pl}$$

## A.2 Évaluation des termes de la matrice élastoplastique

Les termes de la matrice  $\mathbf{C}$ , définissant le module tangent élastoplastique, pour le cas des contraintes planes (coques) ou le cas des poutres tridimensionnelles, peuvent être facilement obtenus en utilisant la relation (3.23), qui se traduit sous la forme:

$$\partial \tau'_{ij} = [Q \mathfrak{S}_{ijkl} - R \tau'_{ij} \tau'_{kl}] \partial \hat{e}_{kl} \quad (\text{A.7})$$

Ainsi:

1. pour le cas des contraintes plane:

$$\begin{aligned} \partial \tau'_{11} &= [Q \mathfrak{S}_{1111} - R \tau'_{11} \tau'_{11}] \partial \hat{e}_{11} + [Q \mathfrak{S}_{1122} - R \tau'_{11} \tau'_{22}] \partial \hat{e}_{22} \\ &+ [Q \mathfrak{S}_{1133} - R \tau'_{11} \tau'_{33}] \partial \hat{e}_{33} + [Q \mathfrak{S}_{1112} - R \tau'_{11} \tau'_{12}] \partial \hat{e}_{12} \\ &+ [Q \mathfrak{S}_{1121} - R \tau'_{11} \tau'_{21}] \partial \hat{e}_{21} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial \tau'_{22} &= [Q \mathfrak{S}_{2211} - R \tau'_{22} \tau'_{11}] \partial \hat{e}_{11} + [Q \mathfrak{S}_{2222} - R \tau'_{22} \tau'_{22}] \partial \hat{e}_{22} \\ &+ [Q \mathfrak{S}_{2233} - R \tau'_{22} \tau'_{33}] \partial \hat{e}_{33} + [Q \mathfrak{S}_{2212} - R \tau'_{22} \tau'_{12}] \partial \hat{e}_{12} \\ &+ [Q \mathfrak{S}_{2221} - R \tau'_{22} \tau'_{21}] \partial \hat{e}_{21} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial \tau'_{12} &= [Q \mathfrak{S}_{1211} - R \tau'_{12} \tau'_{11}] \partial \hat{e}_{11} + [Q \mathfrak{S}_{1222} - R \tau'_{12} \tau'_{22}] \partial \hat{e}_{22} \\
&+ [Q \mathfrak{S}_{1233} - R \tau'_{12} \tau'_{33}] \partial \hat{e}_{33} + [Q \mathfrak{S}_{1212} - R \tau'_{12} \tau'_{12}] \partial \hat{e}_{12} \\
&+ [Q \mathfrak{S}_{1221} - R \tau'_{12} \tau'_{21}] \partial \hat{e}_{21}
\end{aligned}$$

avec

$$\partial \hat{e}_{11} = \partial \varepsilon_{11}, \quad \partial \hat{e}_{22} = \partial \varepsilon_{11}, \quad \partial \hat{e}_{33} = -(\partial \varepsilon_{11} + \partial \varepsilon_{22})$$

et

$$\partial \hat{e}_{12} = \partial \hat{e}_{21} = \frac{1}{2} \partial \gamma_{12}$$

Ce qui nous donne<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned}
\partial \tau'_{11} &= [Q - R \tau'_{11} \tau'_{11} + R \tau'_{11} \tau'_{33}] \partial \varepsilon_{11} \\
&+ [-R \tau'_{11} \tau'_{22} + R \tau'_{11} \tau'_{33}] \partial \varepsilon_{22} - [R \tau'_{11} \tau'_{12}] \partial \gamma_{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial \tau'_{22} &= [-R \tau'_{22} \tau'_{11} + R \tau'_{22} \tau'_{33}] \partial \varepsilon_{11} \\
&+ [Q - R \tau'_{22} \tau'_{22} + R \tau'_{22} \tau'_{33}] \partial \varepsilon_{22} - [R \tau'_{22} \tau'_{12}] \partial \gamma_{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial \tau'_{12} &= [-R \tau'_{12} \tau'_{11} + R \tau'_{12} \tau'_{33}] \partial \varepsilon_{11} \\
&+ [-R \tau'_{12} \tau'_{22} + R \tau'_{12} \tau'_{33}] \partial \varepsilon_{22} + \left[ \frac{Q}{2} - R \tau'_{12} \tau'_{12} \right] \partial \gamma_{12}
\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant, à l'aide des relations:

$$\partial \tau_{11} = 2 \partial \tau'_{11} + \partial \tau'_{22}, \quad \partial \tau_{22} = 2 \partial \tau'_{22} + \partial \tau'_{11} \quad \text{et} \quad \partial \tau_{12} = \partial \tau'_{12}$$

calculer  $\partial \tau_{11}$ ,  $\partial \tau_{22}$ ,  $\partial \tau_{12}$  et établir aisément que:

$$\begin{Bmatrix} \partial \tau_{11} \\ \partial \tau_{22} \\ \partial \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2Q - R \tau_{11}^2 & Q - R \tau_{11} \tau_{22} & -R \tau_{11} \tau_{12} \\ & 2Q - R \tau_{22}^2 & -R \tau_{22} \tau_{12} \\ \text{sym} & & \frac{1}{2}Q - R \tau_{12}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial \varepsilon_{11} \\ \partial \varepsilon_{22} \\ \partial \gamma_{12} \end{Bmatrix}$$

<sup>1</sup>Signalons que les composantes du tenseur unité de quatrième ordre sont toutes nulles, sauf:

$$\mathfrak{S}_{1111} = \mathfrak{S}_{2222} = \mathfrak{S}_{3333} = \mathfrak{S}_{1212} = \mathfrak{S}_{2121} = \mathfrak{S}_{1313} = \mathfrak{S}_{3131} = \mathfrak{S}_{3232} = \mathfrak{S}_{2323} = 1$$

2. Pour le cas des poutres tridimensionnelles, nous avons exigé que la pression hydrostatique équivalente  $p$  soit égale à:

$$p = \tau'_{22} = \tau'_{33} = -\frac{1}{2} \tau'_{11}$$

de façon à respecter la condition:

$$\tau_{22} = \tau_{33} = 0$$

Les composantes directes  $\tau'_{11}$ ,  $\tau'_{22}$  et  $\tau'_{33}$ , du tenseur déviatorique des contraintes  $\tau'$ , sont alors égales à:

$$\tau'_{11} = \frac{2}{3} \tau_{11}, \quad \tau'_{22} = \tau'_{33} = -\frac{1}{2} \tau'_{11} = -\frac{1}{3} \tau_{11}$$

Par ailleurs, suivant l'équation (A.7):

$$\begin{aligned} \partial \tau'_{11} &= [Q - R \tau'_{11} \tau'_{11}] \partial \hat{e}_{11} - [R \tau'_{11} \tau'_{22}] \partial \hat{e}_{22} - [R \tau'_{11} \tau'_{33}] \partial \hat{e}_{33} \\ &\quad - [2R \tau'_{11} \tau'_{12}] \partial \hat{e}_{12} - [2R \tau'_{11} \tau'_{13}] \partial \hat{e}_{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial \tau'_{12} &= -[R \tau'_{12} \tau'_{11}] \partial \hat{e}_{11} - [R \tau'_{12} \tau'_{22}] \partial \hat{e}_{22} - [R \tau'_{12} \tau'_{33}] \partial \hat{e}_{33} \\ &\quad + [Q - 2R \tau'_{12} \tau'_{12}] \partial \hat{e}_{12} - [2R \tau'_{12} \tau'_{13}] \partial \hat{e}_{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial \tau'_{13} &= -[R \tau'_{13} \tau'_{11}] \partial \hat{e}_{11} - [R \tau'_{13} \tau'_{22}] \partial \hat{e}_{22} - [R \tau'_{13} \tau'_{33}] \partial \hat{e}_{33} \\ &\quad - [2R \tau'_{13} \tau'_{12}] \partial \hat{e}_{12} + [Q - 2R \tau'_{13} \tau'_{13}] \partial \hat{e}_{13} \end{aligned}$$

Avec ces résultats et à l'aide des relations:

$$\partial \hat{e}_{11} = \partial \varepsilon_{11}, \quad \partial \hat{e}_{22} = \partial \hat{e}_{33} = -\frac{1}{2} \partial \varepsilon_{11}$$

et

$$\partial \hat{e}_{12} = \frac{1}{2} \partial \gamma_{12}, \quad \partial \hat{e}_{13} = \frac{1}{2} \partial \gamma_{13}$$

nous pouvons facilement écrire:

$$\begin{Bmatrix} \partial \tau_{11} \\ \partial \tau_{12} \\ \partial \tau_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} Q - R \tau_{11}^2 & -R \tau_{11} \tau_{12} & -R \tau_{11} \tau_{13} \\ & \frac{1}{2} Q - R \tau_{12}^2 & -R \tau_{12} \tau_{13} \\ \text{sym} & & \frac{1}{2} Q - R \tau_{13}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial \varepsilon_{11} \\ \partial \gamma_{12} \\ \partial \gamma_{13} \end{Bmatrix}$$

## Annexe B

### Section transversale de la poutre

#### B.1 Caractéristiques de section transversale

En un point  $p$  de la ligne de référence, nous avons défini un repère orthonormé  $[\mathbf{T}, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2]$  dont les vecteurs unitaires sont choisis tel que.  $\mathbf{N}_1$  et  $\mathbf{N}_2$  soient dans le plan de la section transversale  $A$  et  $\mathbf{T}$  normale à ce plan. La section  $A$  étant rapportée aux axes  $pS^1$  et  $pS^2$  (figure B.1), les moments statiques  $Q_1$ ,  $Q_2$  et les moments d'inertie  $I_1$  et  $I_2$  de  $A$ , par rapport aux axes  $pS^1$  et  $pS^2$  respectivement, sont donnés par les formules:

$$Q_1 = \int_A S^2 dA, \quad Q_2 = \int_A S^1 dA$$

et

$$I_1 = \int_A (S^2)^2 dA, \quad I_2 = \int_A (S^1)^2 dA$$

Quant au produit d'inertie  $I_{12}$  et le moment d'inertie polaire  $I_p$  (par rapport au point  $p$ ), ils sont définis par:

$$I_{12} = \int_A S^1 S^2 dA, \quad I_p = \int_A [(S^1)^2 + (S^2)^2] dA = I_2 + I_1$$

$S^1$  et  $S^2$  désignant les coordonnées du point  $q$  de  $A$ , centre de l'élément  $dA$ , dans la base  $[\mathbf{T}, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2]$  (figure B.1).



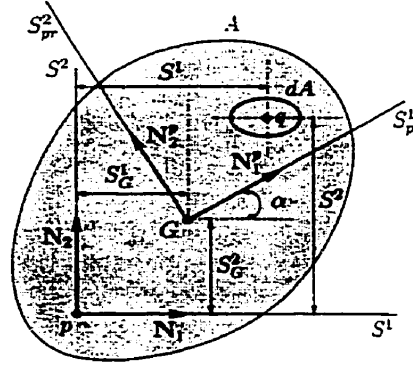


Figure B.1: Section transversale d'une poutre tridimensionnelle.

Si  $G$  désigne le centre de gravité de la section droite  $A$  et  $GS^1_{pr}$ ,  $GS^2_{pr}$  les axes principaux d'inertie issus de  $G$ , on a les formules suivantes pour ce changement de repère [Lar88]:

$$Q_1 = S^2_G A, \quad Q_2 = S^1_G A$$

$$I_1 = I^{pr}_1 \cos^2 \alpha + I^{pr}_2 \sin^2 \alpha + (S^2_G)^2 A, \quad I_2 = I^{pr}_2 \cos^2 \alpha + I^{pr}_1 \sin^2 \alpha + (S^1_G)^2 A$$

$$I_{12} = (I^{pr}_2 - I^{pr}_1) \sin \alpha \cos \alpha + S^1_G S^2_G A, \quad I_p = J_G + [(S^1_G)^2 + (S^2_G)^2] A$$

où  $S^1_G$  et  $S^2_G$  sont les coordonnées du centre de gravité  $G$  par rapport aux axes  $pS^1$  et  $pS^2$ .

## B.2 Intégration sur la section transversale de la loi élastoplastique

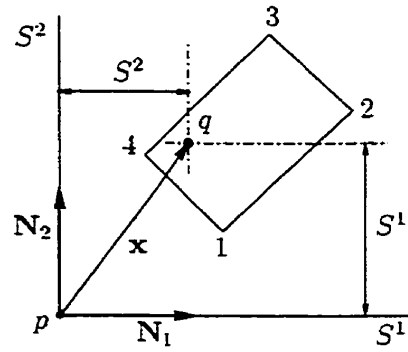
L'application de la méthode de plastification progressive à la théorie des poutres tridimensionnelles nécessite l'intégration des quantités résultantes (efforts et module tangent) sur la section transversale. Ces quantités résultantes, qui s'expriment en général sous la forme:

$$I = \int_A \mathcal{F}(\mathbf{x}) dA, \quad (\text{B.1})$$

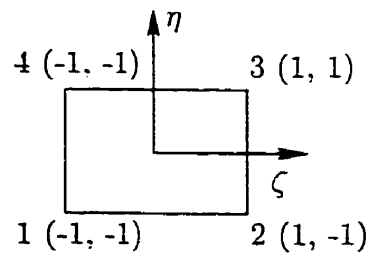
font intervenir la position  $\mathbf{x} \equiv [S^1, S^2]^T$  du point  $q$  de la section transversale. Le changement de variables

$$\mathbf{x} \equiv [S^1, S^2]^T \longrightarrow \boldsymbol{\zeta} \equiv [\zeta, \eta]^T$$

permet de passer de l'intégration de la fonction  $\mathcal{F}$  sur la surface réelle  $A$  à une intégration plus simple sur la surface de référence  $A^\zeta$ . À cette fin, nous choisissons un



(a) Élément réel



(b) Élément de référence

Figure B.2: Élément quadrilatère à 4 nœuds dans le repère  $(S^1, S^2)$ .

élément quadrilatère à 4 nœuds (figure B.2), défini par la transformation géométrique:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\zeta) = N^i(\zeta) \mathbf{x}_i \quad i = 1, \dots, 4$$

avec

$$N^1 = \frac{1}{4} (1 - \zeta)(1 - \eta)$$

$$N^2 = \frac{1}{4} (1 + \zeta)(1 - \eta)$$

$$N^3 = \frac{1}{4} (1 + \zeta)(1 + \eta)$$

$$N^4 = \frac{1}{4} (1 - \zeta)(1 + \eta)$$

et  $\mathbf{x}$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) les vecteurs positions, relativement à la base  $[\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2]$  des sommets du quadrilatère. La position de ces nœuds est déduite directement de celle des nœuds

du segment droit  $AB$  (figure B.3), défini par l'utilisateur<sup>1</sup>

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_A - \frac{h}{2}\mathbf{n}, \quad \mathbf{x}_4 = \mathbf{x}_A + \frac{h}{2}\mathbf{n}$$

et

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_B - \frac{h}{2}\mathbf{n}, \quad \mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_B + \frac{h}{2}\mathbf{n}$$

avec

$$\mathbf{n} \equiv \frac{1}{b} \begin{Bmatrix} S_A^2 - S_B^2 \\ S_B^1 - S_A^1 \end{Bmatrix}$$

comme vecteur unitaire perpendiculaire au segment  $AB$  et

$$h = \|\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_1\|, \quad b = \|\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A\|$$

comme dimensions du segment (épaisseur et longueur). La transformation de l'intégrale (B.1)

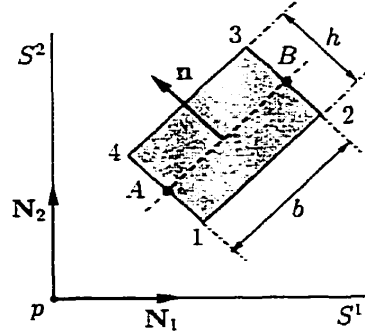


Figure B.3: Section rectangulaire.

sur la surface s'écrit ainsi:

$$I = \int_A \mathcal{F}(\mathbf{x}) dA = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathcal{F}(\mathbf{x}(\zeta)) \frac{hb}{4} d\zeta d\eta \quad (\text{B.2})$$

Cette intégrale est ensuite évaluée numériquement sous la forme:

$$I = \frac{hb}{4} \sum_{n=1}^{NPI} w_n \mathcal{F}(\zeta_n, \eta_n)$$

<sup>1</sup>En fait, l'utilisateur définit l'épaisseur  $h$  du segment et les coordonnées de ses extrémités par rapport à la base locale  $[\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2]$ . L'orientation de cette dernière dans l'espace est aussi fixé par l'utilisateur qui doit spécifier l'orientation du vecteur  $\mathbf{N}_1$  par rapport au système cartésien global

moyennant le schéma d'intégration de *Lobatto*.  $NPI$  est le nombre total de points d'intégration:  $(\zeta_n, \eta_n)$  les coordonnées paramétriques du point  $n$ ;  $w_n$  le poids pour le point  $n$  et  $\mathcal{F}(\zeta_n, \eta_n)$  la valeur numérique de  $\mathcal{F}$  au point  $n$ .

Dans le cas général d'une section en  $U$  ou en  $L$ , etc., l'intégration est effectuée sur chaque surface élémentaire faisant partie de la surface totale (figure B.4). L'utilisateur définit la section en spécifiant une série de segments droits ainsi que l'épaisseur de chaque segment: ces segments permettent de définir les surfaces élémentaires sur lesquelles doit être effectuée l'intégration.

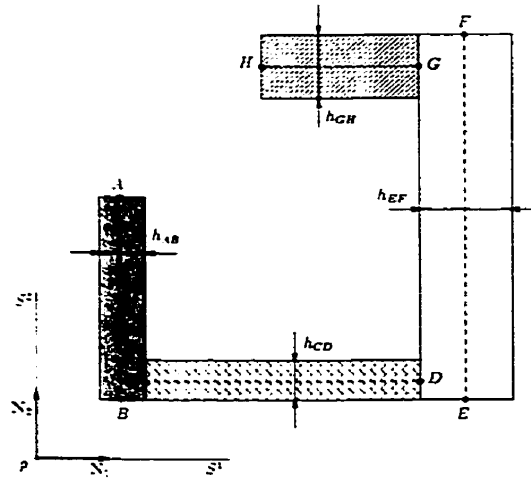


Figure B.4: Section générale.