



CONTRIBUTION À LA RÉOLUTION PRATIQUE DU PROBLÈME DE STABILITÉ EN CALCUL DES STRUCTURES

Par
JOSEPH AZIZ, ing.

Mémoire présenté à l'Université du Québec à Chicoutimi en vue de
l'obtention du grade de maîtrise en ingénierie

AVANT-PROPOS

Ce travail de recherche a été réalisé en collaboration avec le Département des sciences appliquées de l'Université du Québec à Chicoutimi (UQAC), sous la direction du professeur Daniel Marceau de l'UQAC ainsi que sous la codirection du professeur Denis Beaulieu de l'Université Laval.

Ce projet de maîtrise a été motivé principalement par mon intérêt pour le sujet et ma volonté d'amener une contribution à la compréhension des différents aspects qui influencent la stabilité des structures dans le domaine du génie civil. Mon cheminement professionnel, qui se traduit par plus de 44 années d'expérience dans le domaine de la conception des structures, m'a donné l'opportunité d'être confronté à diverses situations pertinentes dans le contexte de la compréhension et de l'application des spécifications techniques. En effet, mes responsabilités en tant que directeur du service des structures et directeur technique des projets majeurs chez plusieurs prestigieux bureaux de génie conseil notamment, SNC Lavalin, Cegertec Worley Parsons, Dessau et BPR-BECHTEL, ainsi que les divers projets à caractères industriels et en ouvrages d'art à travers le Canada et outre-mer que j'aurai réalisé et/ou dirigé m'ont permis d'appliquer mais également de confronter différentes spécifications techniques qui régissent les calculs des charpentes d'acier.

Plusieurs approches spécifiques pour déterminer la stabilité des membrures et des cadres rigides ont été proposées dans le passé. Ces contributions sont aujourd'hui reconnues et furent à l'origine de nombreuses recherches dans le domaine. On remarque de nombreuses subtilités associées à l'application pratique d'une procédure technique pour déterminer la stabilité. Dans le passé, ces subtilités ont conduit à de mauvaises interprétations ou/et des mauvaises pratiques dans la conception des structures.

Dans cette optique, ce mémoire s'attarde à donner aux ingénieurs concepteurs une meilleure compréhension des problèmes liés à la stabilité des structures d'acier et les différents paramètres qui gouvernent ce phénomène complexe.

RÉSUMÉ

Ce mémoire de maîtrise, qui s'inscrit dans la compréhension des différentes modes d'instabilité telle que le flambement, le déversement et le voilement local, traite plus spécifiquement des différents aspects pouvant affecter la stabilité des cadres rigides en acier qui sont libres de se déplacer latéralement. À cet effet, la charge critique de flambement d'un élément de compression ou d'une structure dans sa globalité et calculée à partir d'une analyse élastique linéaire d'une structure parfaite idéalisée, ne correspond pas forcément à la charge réelle pouvant provoquer l'instabilité de ladite structure. La charge critique de flambement ainsi calculée ne fournit pas suffisamment d'informations pour déterminer quand la ruine, due à l'instabilité de la structure dans son ensemble, se produira. Pour obtenir ces informations cruciales, il est nécessaire de prendre en compte les imperfections géométriques initiales ainsi que le comportement inélastique des structures et des matériaux qui les composent.

Pour se faire, ce mémoire traite du calcul des charges critiques de flambement par différentes méthodes ainsi que l'influence des imperfections géométriques sur le comportement des composants structuraux et sur l'ensemble de la structure. Les effets du second ordre, tant sur le comportement local ($P-\delta$) que global ($P-\Delta$) y sont largement couverts. On y retrouve également l'étude de plusieurs cas de figures rencontrés en pratique ainsi qu'une analyse comparative des différentes normes en vigueur. Ce mémoire fut d'ailleurs élaboré afin de permettre aux ingénieurs praticiens d'identifier et d'évaluer les paramètres potentiels qui influencent le phénomène de la stabilité. Son contenu y est suffisamment large pour que les professionnels œuvrant dans le domaine de la conception des charpentes d'acier, puissent en bénéficier. À l'aide de ce mémoire, l'ingénieur sera en mesure de sélectionner, concevoir et spécifier de manière appropriée, des structures d'acier répondant aux critères de conceptions et ce en conformité avec les spécifications techniques en vigueur et les règles de bonnes pratiques.

ABSTRACT

This Master thesis is in line with the understanding of the different modes of instability such as buckling, lateral torsional buckling and local buckling, deals more specifically with the different aspects that can affect the stability of sway rigid steel frames. For this purpose, the critical buckling load for a compression element or for the structure, determined based on linear elastic analysis of a perfect idealized structure, does not necessarily correspond to the actual load that can cause the structural instability. The calculated critical buckling load does not provide enough information to determine when failure, due to instability of the overall structure, will occur. To obtain this critical information, it is necessary to consider the initial geometric imperfections as well as the inelastic behavior of the structures and materials that compose them.

In order to cover those aspects, this thesis deals with the calculation of critical buckling loads by different methods as well as the influence of geometric imperfections on the behavior of the structural components and on the whole structure. Second-order effects on both local ($P-\delta$) and global ($P-\Delta$) behavior are largely covered. It also includes the study of several cases encountered in practice and a comparative analysis of the various technical specifications used around the world. This work has been produce to enable practicing engineers to identify and evaluate the potential parameters that influence the phenomenon of stability. The thesis content is wide enough to allow professionals working in the field of structural steel design, to take advantage and benefit from this content. With the aid of this thesis, the engineer will be able to select, design and specify in an appropriate manner, steel structures meeting the design criteria and in accordance with the technical specifications and the rules of good practice.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont contribué au succès de mon projet de maîtrise et qui m'ont aidé lors de la rédaction de ce mémoire.

Je voudrais dans un premier temps remercier mon directeur, le professeur Daniel Marceau, pour sa patience, son soutien et son attention, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter ma réflexion, et m'a guidé tout au long de ce processus. La confiance que mon directeur m'a accordée ainsi que le soutien moral qu'il a manifesté à mon égard m'ont permis d'accomplir ce projet. Ce projet de maîtrise n'aurait pu voir le jour sans la participation et l'engagement professionnel du professeur Marceau.

Je voudrais aussi mentionner l'appui inconditionnel ainsi que les judicieux conseils de mon codirecteur, le professeur Denis Beaulieu. Reconnu mondialement en tant qu'expert sur le sujet, le professeur Beaulieu aura été pour moi une grande source d'inspiration tout au long de ma carrière d'ingénieur mais également, dans le cadre de la réalisation de ce mémoire.

Je tiens également à témoigner toute ma reconnaissance à M. Yves Faucher, alors professeur au Département des sciences appliquées de l'Université du Québec à Chicoutimi, qui fut la première personne qui m'a encouragé à traiter le sujet de cette maîtrise.

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements les professeurs Mathieu Fiset et Ahmed Rahem de l'Université du Québec à Chicoutimi qui ont accepté d'examiner et d'évaluer mon travail.

J'adresse également mes sincères remerciements à tous les professeurs et autres intervenants de l'Université du Québec à Chicoutimi qui de par leurs conseils et leurs critiques ont guidé mes réflexions durant mes travaux ainsi que le Département des sciences appliquées de l'Université du Québec à Chicoutimi pour son support administratif.

Enfin, je voudrais exprimer toute ma reconnaissance à ma conjointe Farida, mes deux fils, Yousef et Adel, ma sœur Hélène ainsi que mes défunts parents. Leur présence, leur écoute, leur inspiration,

leur confiance en moi et leur soutien constant m'a permis de persévérer dans la réalisation de mon projet.

TABLE DES MATIÈRES

AVANT-PROPOS	III
RÉSUMÉ	4
ABSTRACT	5
REMERCIEMENTS	VI
TABLE DES MATIÈRES	VIII
LISTE DES FIGURES	XV
LISTE DES TABLEAUX	XXIII
CHAPITRE 1 PRÉSENTATION DU PROJET DE RECHERCHE	24
1.1 Généralités.....	24
1.2 Problématique	27
1.3 Objectifs.....	29
1.4 État des connaissances	30
1.4.1 Théorie d'Euler.....	30
1.4.2 Spécifications techniques.....	31
1.4.3 Étude de la stabilité selon les différentes spécifications techniques	37
1.5 Méthodologie	43
1.6 Contenu du mémoire.....	44
CHAPITRE 2 SYSTÈMES DE STABILITÉ LATÉRALE ET EFFETS DU SECOND ORDRE	47
2.1 Généralités.....	47
2.2 Effets du second ordre ($P - \Delta$)	49
2.3 Effets du second ordre ($P - \delta$)	52
2.4 Méthode d'analyse structurale élastique du second ordre	56
2.4.1 Méthode exacte.....	58
2.4.2 Méthode du facteur d'amplification.....	59
2.4.3 Méthode des charges horizontales fictives.....	62
2.4.4 La méthode du contreventement fictif	65
2.4.5 Analyse pratique du second ordre (Le Messurier, 1977).	66
2.5 Commentaires sur les différentes approches adoptées pour le calcul des effets du second ordre.....	76

2.5.1 Analyse rigide plastique.....	76
2.5.2 Analyse élastique de premier ordre.....	82
2.5.3 Analyse élastique du second ordre	84
2.5.4 Approximation de Merchant	86
2.5.5 Analyse élasto-plastique.....	87
2.5.6 Méthode de la dernière rotule.....	88
CHAPITRE 3 STABILITÉ DES CADRES RIGIDES – APPROCHES DE LA LONGUEUR EFFECTIVE	91
3.1 Généralités.....	91
3.2 Résistance au flambement des poteaux : spécifications américaines versus les modèles idéalisés.....	92
3.3 Modèles pour le calcul de la longueur effective	95
3.3.1 Flambement d'une membrure isolée.....	96
3.3.2 Flambement d'un étage	103
3.3.3 Impact du concept du flambement de l'étage sur la résistance à la force axiale dans les équations d'interaction	108
3.4 Flambement de l'étage et longueur effective des poteaux articulés « poteaux faibles »	110
3.5 Analyse du système de flambement	111
3.6 Interprétation des valeurs très élevées des coefficients de la longueur effective	112
3.7 Analyse du système de flambement d'un cadre étagé	114
3.8 Analyse du flambement d'un étage ayant des poteaux légèrement chargés.....	115
3.9 Calcul de la charge critique élastique et inélastique de flambement de l'étage (cadres non contreventés)	116
3.9.1 Approche basée sur le nomogramme d'alignement K_{K_n}	116
3.9.2 Approche pratique pour le facteur de la longueur effective de l'étage K_{R_L}	118
3.10 Résistance de l'étage aux déplacements latéraux dus aux effets du premier ordre....	123
3.11 Les effets $P - \Delta$ sur la charge critique de flambement	125

3.12 Combinaison des effets $P - \Delta$ et $P - \delta$ et leur influence sur la charge critique de flambement.....	128
3.13 Limites imposées aux calculs de la longueur effective d'un étage	132
3.14 Évolution et mises à jour des spécifications techniques.....	133
CHAPITRE 4 STABILITÉ DES CADRES RIGIDES	137
4.1 Approche basée sur les imperfections géométriques.....	137
4.2 Aperçu de l'approche des charges fictives	139
4.3 Influence des imperfections géométriques sur la résistance du poteau	142
4.3.1 Généralités	142
4.3.2 Types d'imperfections.....	144
4.3.3 Imperfections géométriques.....	146
4.3.4 Imperfections géométriques – Normes et spécifications.....	149
4.3.5 Défauts de rectitude de la membrure.....	149
4.3.6 Défauts de verticalité de l'étage.....	150
4.3.7 Aperçu des tolérances courantes de la construction et de la fabrication.....	152
4.4 L'adaptation des imperfections dans l'utilisation d'une analyse avancée	155
4.4.1 Méthode d'analyse avancée.....	157
4.4.2 Évaluation analytique de l'importance des imperfections géométriques	157
4.4.3 Adaptation des imperfections géométriques à la courbe de résistance des poteaux dans les spécifications AISC LRFD.....	159
4.5 Charges fictives pour des comportements élastique et inélastique équivalents.....	162
4.5.1 Charge fictive pour un comportement élastique équivalent	163
4.5.2 Charge fictive pour un comportement inélastique équivalent	164
4.6 Adaptation théorique des charges fictives à la résistance des poteaux	164
4.7 Adaptation simplifiée de la méthode de la charge fictive	171
4.7.1 Adaptation modifiée de la charge fictive.....	171
4.7.2 Adaptation raffinée de la charge fictive	173
4.8 Application de la méthode de la charge latérale fictive aux poteaux-poutres	175
4.8.1 Généralités	175
4.8.2 Calcul des courbes d'interaction incluant l'effet des charges latérales fictives.....	175

4.9 Application de l'approche de la charge latérale fictive aux cadres rigides simples	178
4.10 Application de l'approche de la charge fictive aux cadres étagés	181
4.11 Analyse avancée des cadres étagés	182
4.11.1 Considérations générales – imperfections	182
4.11.2 Influence du nombre de baies	182
4.11.3 Concept de l'étage critique – Détermination pratique de la résistance du cadre	183
4.12 Procédures modifiées d'analyses de la charge fictive	185
4.12.1 Forces axiales induites par les charges fictives	185
4.12.2 Procédure de couplage « $R - N$ »	186
4.13 Résistance tridimensionnelle d'un poteau-poutre dans le plan du chargement	188
4.14 Analyse tridimensionnelle avancée	189
4.15 Résumé et commentaires	192
CHAPITRE 5 MEMBRURES TRAVAILLANT EN COMPRESSION-FLEXION	197
5.1 Généralités	197
5.2 Comportement des poteaux-poutre	199
5.3 Comportement élastique d'un poteau-poutre	202
5.3.1 Équations différentielles d'un poteau-poutre	202
5.3.2 Résistance d'un poteau-poutre dans le plan du chargement	204
5.3.3 Approche approximative pour d'autres cas de chargement	211
5.3.4 Résumé pour le cas des poteaux-poutres à comportement élastique	215
5.4 Résistance maximale des poteaux-poutre	216
5.4.1 Comportement dans le domaine inélastique	216
5.4.2 Comportement dans le plan du chargement	216
5.4.3 Relation moment - force axiale - courbure	218
5.5 Méthode de résolution des cas de poteaux-poutres inélastiques	220
5.5.1 Méthode analytique exacte	221
5.5.2 Méthodes approximatives	223
5.5.3 Intégrales numériques	228
5.6 Équations d'interaction approximatives	230

CHAPITRE 6 ÉQUATIONS D'INTERACTION POUR LE CALCUL DES POTEAUX-POUTRES	234
6.1 Comparaison et évolution des spécifications techniques canadiennes	234
6.2 Comparaison des différentes spécifications techniques pour le calcul des poteaux- poutres	240
6.2.1 Équations d'interaction des spécifications CSA/CAN-S16-09.....	240
6.2.2 Équations d'interaction des spécifications AISC LRFD	245
6.2.3 Équations d'interaction des spécifications d'Eurocode 3.....	248
6.2.4 Équations d'interaction des spécifications australienne AS4100	252
6.3 Comparaison des philosophies adoptées dans les différentes spécifications	254
6.4 Hypothèses de base des équations d'interaction pour les poteaux-poutres.....	258
CHAPITRE 7 FLAMBEMENT EN FLEXION DES POTEAUX ET CADRES	260
7.1 Généralités.....	260
7.2 Théorie d'Euler	261
7.2.1 Hypothèses	261
7.3 Conditions réelles	268
7.4 Influence des défauts de rectitude.....	271
7.5 Longueur effective des poteaux dans les cadres rigides	271
7.6 Dimensionnement des pièces sollicitées en compression pure.....	277
7.6.1 Outils de dimensionnement.....	277
7.6.2 Fondements des courbes de flambement de la CECM.....	279
7.7 Flambement en compression-flexion.....	280
7.8 Influence de l'effort tranchant sur le flambement des pièces	283
7.9 Aspects expérimentaux du flambement	285
7.10 Prise en compte des défauts de rectitude	286
7.11 Prise en compte des défauts de centrage.....	289
7.12 Réglementation sur le flambement dans les normes européennes.....	292
7.12.1 Flambement simple	292
7.12.2 Flambement en flexion (Eurocode 5.5.4).....	294
7.12.3 Longueurs de flambement.....	296

7.13	Classification de la section transversale des pièces.....	298
7.14	Flambement des cadres rigides	299
7.14.1	Mise en contexte	299
7.14.2	Modes de flambement.....	301
7.15	Charge critique d'un cadre rigide – Méthode de l'équilibre neutre	304
7.15.1	Déplacement latéral permis	304
7.15.2	Déplacement latéral empêché (flambement symétrique).....	307
7.16	Charge critique d'un cadre rigide – Méthode des rotations.....	310
CHAPITRE 8	COURBES DE RÉSISTANCE DES POTEAUX	313
8.1	Généralités.....	313
8.2	Principaux types de membrures comprimées.....	314
8.2.1	Membrures simples à section transversale uniforme.....	314
8.2.2	Compression pure sans instabilité	315
8.2.3	Stabilité des poteaux élancés en acier.....	316
8.3	Théorie fondamentale des poteaux	316
8.3.1	Méthode basée sur l'approche de la bifurcation	317
8.3.2	Méthode basée sur l'approche de la stabilité.....	327
CHAPITRE 9	THÉORIE DU FLAMBEMENT INÉLASTIQUE DES POTEAUX	344
9.1	Généralités.....	344
9.2	États d'équilibre stable et instables.....	345
9.3	Flambement par bifurcation.....	345
9.4	Développement des théories du flambement inélastique.....	346
9.5	Concept de Shanley	352
9.6	Influence des contraintes résiduelles sur la résistance des poteaux laminées à chaud .	358
9.7	Autres facteurs qui influencent la résistance des poteaux	368
9.7.1	Effet de la plasticité du matériau	368
9.7.2	Effet des imperfections géométriques.....	371
CHAPITRE 10	MÉTHODE DE CALCUL DES CHARGES CRITIQUES DE FLAMBEMENT	374

10.1 Généralités	374
10.2 Membrures avec des conditions de retenues différentes.....	374
10.3 Calcul de la charge critique des cadres simples à partir des équations différentielles de la déformée	378
10.4 Estimation de la charge critique par la méthode des différences finies.....	383
10.4.1 Ratios des différences.....	384
10.4.2 Calcul de la charge critique.....	388
10.5 Charge critique de flambement d'un cadre rigide	396
10.6 Analyse matricielle de la stabilité élastique.....	401
10.6.1 Théorie de la solution unique suivant Kirchoff	401
10.6.2 Stabilité élastique d'un cadre rigide	414
10.7 Méthode de Rayleigh-Ritz.....	418
10.7.1 Cas d'un poteau en porte-à-faux.....	418
10.7.2 Cadre général de la méthode de Rayleigh-Ritz.....	424
10.8 Applications sous Mathcad™	427
CHAPITRE 11 CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS	429
11.1 Rétrospective	429
11.2 Remarques à l'égard des différentes approches	430
11.3 Recommandations et travaux futurs	438
RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES	439
ANNEXE A DIMENSIONNEMENT D'UN CADRE À DEUX TRAVÉES SYMÉTRIQUES ET UN SEUL ÉTAGE AVEC POTEAUX DE RIVE ARTICULÉS AUX EXTRÉMITÉS : CONCEPT DE LA LONGUEUR EFFECTIVE VERSUS CHARGE LATÉRALE FICTIVE	450
ANNEXE B DIMENSIONNEMENT AUX CONTRAINTES ADMISSIBLES – SOLUTION INÉLASTIQUE	469
ANNEXE C COMPARAISON ENTRE LES FORMULES DE LA RÉSISTANCE À LA COMPRESSION DES POTEAUX SUIVANT AISC LRFD, S16-14 ET EUROCODE 3	485

LISTE DES FIGURES

FIGURE 1-1 : POTEAU ARTICULÉ AUX EXTRÉMITÉS-MODÈLE D'EULER	32
FIGURE 2-1 : PHOTO MONTRANT UN CADRE RIGIDE EN ACIER	49
FIGURE 2-2 : CADRE RIGIDE – EFFETS DU SECOND ORDRE	50
FIGURE 2-3 : CADRES RIGIDES SYMÉTRIQUES.....	51
FIGURE 2-4 : EFFETS $P - \delta$	52
FIGURE 2-5 : EFFETS DEUXIÈME ORDRE – FACTEUR D'AMPLIFICATION : STRUCTURE RÉELLE	61
FIGURE 2-6 : EFFETS DEUXIÈME ORDRE – FACTEUR D'AMPLIFICATION : ANALYSE DU 1 ^{ER} ORDRE.....	62
FIGURE 2-7 : CADRE RIGIDE – EFFETS DE DEUXIÈME ORDRE (MÉTHODE DES CHARGES HORIZONTALES FICTIVES)	63
FIGURE 2-8 : IDENTIFICATION DES CHARGES HORIZONTALES FICTIVES	66
FIGURE 2-9 : MÉTHODE DE LA DIAGONALE FICTIVE	67
FIGURE 2-10 : MEMBRURE EN PORTE-À-FAUX	68
FIGURE 2-11 : CADRE SIMPLE – CHARGE VERTICALE EN TÊTE DU POTEAU ARTICULÉ AUX DEUX EXTRÉMITÉS.....	70
FIGURE 2-12 : CADRE SIMPLE – CHARGE VERTICALE EN TÊTE DU POTEAU ARTICULÉ AUX DEUX EXTRÉMITÉS – CONFIGURATION DE LA DÉFORMÉE.....	71
FIGURE 2-13 : CADRE SIMPLE – CHARGE VERTICALE EN TÊTE DU POTEAU ENCASTRÉ À SA BASE	71
FIGURE 2-14 : CADRE SIMPLE – CHARGE VERTICALE EN TÊTE DU POTEAU ENCASTRÉ À SA BASE – CONFIGURATION DE LA DÉFORMÉE	75
FIGURE 2-15 : MOMENT DU SECOND ORDRE – CONFIGURATION SINUSOÏDALE	76

FIGURE 2-16 : RELATION $M - P - \Phi$ PLASTIQUE RIGIDE	77
FIGURE 2-17 : CADRE RIGIDE SIMPLE ENCASTRÉ AUX PIEDS	78
FIGURE 2-18 : MÉCANISME D'UN CADRE RIGIDE SIMPLE ENCASTRÉ AUX PIEDS	79
FIGURE 2-19 : FORCES ET DÉFORMATIONS DU CADRE	80
FIGURE 2-20 : COURBES SCHÉMATIQUES ILLUSTRANT LE COMPORTEMENT DU CADRE.....	81
FIGURE 2-21 : COURBES CHARGES / DÉFORMATIONS OBTENUES DES ANALYSES « ÉLASTO-PLASTIQUES » ET PLASTIQUE-RIGIDE ...	82
FIGURE 2-22 : RELATION $M - P - \Phi$ ÉLASTO-PLASTIQUE	87
FIGURE 2-23 : DÉTÉRIORATION DE LA STABILITÉ DUE À LA FORMATION PROGRESSIVE DES ROTULES	89
FIGURE 2-24 : ANALYSE DE LA DERNIÈRE ROTULE $P_J < P_{P2}$	90
FIGURE 3-1 : STRUCTURES LIBRES DE SE DÉPLACER LATÉRALEMENT (MODÈLE D'UN SOUS-ASSEMBLAGE).....	97
FIGURE 3-2 : STRUCTURES EMPÊCHÉES DE SE DÉPLACER LATÉRALEMENT (MODÈLE D'UN SOUS-ASSEMBLAGE)	99
FIGURE 3-3 : NOMOGRAMMES D'ALIGNEMENT (KAVANAGH, 1962)	101
FIGURE 3-4 : CADRE SIMPLE AVEC POTEAU ARTICULÉ – EFFET $P - \Delta$	104
FIGURE 3-5 : CADRE RIGIDE – INTERACTION DE FLAMBEMENT ENTRE LES POTEAUX D'UN MÊME ÉTAGE.....	105
FIGURE 3-6 : COMPORTEMENT D'UN POTEAU EN PORTE-À-FAUX SANS CHARGE AXIALE – EFFETS DU PREMIER ORDRE	124
FIGURE 3-7 : CADRE SIMPLE - UNE TRAVÉE AVEC UN POTEAU ARTICULÉ CHARGÉ AXIALEMENT	126
FIGURE 3-8 : COMPORTEMENT DU POTEAU EN PORTE-À-FAUX EN FLEXION DÙ À L'EFFET $P - \Delta$ SUR LE POTEAU FAIBLE.....	128
FIGURE 3-9 : CADRE RIGIDE - FORCE AXIALE APPLIQUÉE AU POTEAU ENCASTRÉ À SA BASE.....	130
FIGURE 3-10 : EFFETS $P - \Delta$ ET $P - \delta$ SUR UN POTEAU SOLlicitÉ PAR UNE CHARGE AXIALE	131

FIGURE 3-11 : REPRÉSENTATION DES RETENUES ÉLASTIQUES AUX EXTRÉMITÉS DU POTEAU.....	132
FIGURE 4-1 : INFLUENCE DES IMPERFECTIONS GÉOMÉTRIQUES SUR LE COMPORTEMENT DU POTEAU (TRAHAIR & BRADFORD, 1991)	144
FIGURE 4-2 : EXEMPLES DE LA DISTRIBUTION DES CONTRAINTES RÉSIDUELLES DANS UNE SECTION EN I DOUBLEMENT SYMÉTRIQUE (BILD & TRAHAIR, 1989)	146
FIGURE 4-3 : DÉFAUTS GÉOMÉTRIQUES DES MEMBRURES ET DES CADRES	147
FIGURE 4-4 : POTEUX ÉQUIVALENTS AVEC IMPERFECTIONS GÉOMÉTRIQUES BASÉS SUR LE CONCEPT DE LA LONGUEUR EFFECTIVE	148
FIGURE 4-5 : DÉFAUTS DE VERTICALITÉ ET CHARGES FICTIVES ÉQUIVALENTES	152
FIGURE 4-6 : POTEUX LIBRE DE SE DÉPLACER LATÉRALEMENT AYANT DES RETENUES LATÉRALES EN ROTATION	156
FIGURE 4-7 : FORMES DES IMPERFECTIONS POUR UN POTEUX EN PORTE-À-FAUX.....	158
FIGURE 4-8 : POTEUX NON CONTREVENTÉ AVEC IMPERFECTIONS GÉOMÉTRIQUES.....	161
FIGURE 4-9 : POTEUX NON CONTREVENTÉ AVEC DES RETENUES OFFRANT UNE RIGIDITÉ À LA ROTATION – (A) DÉFAUT DE RECTITUDE (B) CHARGE LATÉRALE FICTIVE.....	163
FIGURE 4-10 : MODÈLES POUR DÉTERMINER LES COURBES D’INTERACTION DES POTEUX-POUTRES.....	178
FIGURE 4-11 : CADRES AVEC POTEUX ARTICULÉS.....	180
FIGURE 4-12 : PROCÉDURE DE COUPLAGE « $R - N$ »	187
FIGURE 4-13 : POTEUX EN PORTE-À-FAUX ÉTUDIÉ PAR UNE ANALYSE TRIDIMENSIONNELLE AVANCÉE.....	190
FIGURE 5-1 : CHARGEMENT DES POTEUX-POUTRES - (A) POTEUX-POUTRES DANS UN CADRE À ÉTAGES, (B) DÉFORMATIONS DES POTEUX-POUTRES TYPES DANS UN CADRE, (C) POTEUX-POUTRES SOLLICITÉS TRANSVERSALEMENT	198
FIGURE 5-2 : FORCES AUX EXTRÉMITÉS D’UNE MEMBRURE.....	199

FIGURE 5-3 : COURBE EXPÉRIMENTALE MOMENT-ROTATION POUR UNE MEMBRURE AGISSANT COMME POTEAU-POUTRE.....	200
FIGURE 5-4 : EFFETS DU DÉVERSEMENT ET DU FLAMBEMENT LOCAL.....	201
FIGURE 5-5 : RELATIONS TRIGONOMÉTRIQUES	207
FIGURE 5-6 : DIFFÉRENTES POSSIBILITÉS POUR LA POSITION DU MOMENT MAXIMAL.....	208
FIGURE 5-7 : COURBES D'INTERACTION POUR $\kappa = 1.0$	210
FIGURE 5-8 : SUPERPOSITION DE DEUX CAS DE CHARGE	212
FIGURE 5-9 : DISTRIBUTION PROGRESSIVE DES CONTRAINTES DANS UNE SECTION D'UN POTEAU-POUTRE	218
FIGURE 5-10 : RELATION $M - P - \Phi$ POUR UNE SECTION RECTANGULAIRE POUTRE	221
FIGURE 5-11 : MEMBRURE CHARGÉE EXCENTRIQUEMENT	222
FIGURE 5-12 : CONSTRUCTION DU DIAGRAMME DE LA COURBURE D'UNE MEMBRURE SOLlicitÉE PAR UNE CHARGE AXIALE ET DES MOMENTS DE FLEXION AUX DEUX EXTRÉMITÉS	229
FIGURE 5-13 : COURBES D'INTERACTION POUR POTEAU-POUTRE DE SECTIONS EN I FLÉCHIES SUIVANT L'AXE FORT ($\kappa = 0$)	231
FIGURE 5-14 : COURBES D'INTERACTION POUR POTEAU-POUTRE DE SECTIONS EN I FLÉCHIES SUIVANT L'AXE FORT ($\kappa = 1$)	232
FIGURE 5-15 : ÉQUATIONS D'INTERACTION EMPIRIQUES	233
FIGURE 7-1 : MEMBRURE DROITE ARTICULÉES AUX EXTRÉMITÉS ET CHARGÉE AXIALEMENT	261
FIGURE 7-2 : MEMBRURE DROITE ARTICULÉE À UNE EXTRÉMITÉ ET ENCASTRÉE À L'AUTRE EXTRÉMITÉ.....	264
FIGURE 7-3 : MEMBRURE EN COMPRESSION REPRÉSENTANT UN DÉPLACEMENT RELATIF ENTRE LES DEUX EXTRÉMITÉS	266
FIGURE 7-4 : MEMBRURE DROITE AVEC UN DÉFAUT DE RECTITUDE	270
FIGURE 7-5 : POTEAU ARTICULÉ AUX EXTRÉMITÉS - SOLlicitÉ EN COMPRESSION ET EN FLEXION.....	282

FIGURE 7-6 : POTEAU BI-ARTICULÉ REPRÉSENTANT DES DÉFAUTS DE RECTITUDE	288
FIGURE 7-7 : DÉFAUTS DE CENTRAGE.....	291
FIGURE 7-8 : POTEAU FAISANT PARTIE D'UNE STRUCTURE À ÉTAGES.....	297
FIGURE 7-9 : CADRE CONTREVENTÉ EN "X"	301
FIGURE 7-10 : MODES DE FLAMBEMENT D'UN CADRE RIGIDE SIMPLE	303
FIGURE 7-11 : FLAMBEMENT AVEC DÉPLACEMENT LATÉRAL	306
FIGURE 7-12 : FLAMBEMENT SYMÉTRIQUE D'UN CADRE RIGIDE SIMPLE	309
FIGURE 7-13 : CADRE À DEUX ÉTAGES AVEC DES MEMBRURES AYANT LES MÊMES CARACTÉRISTIQUES.....	312
FIGURE 8-1 : COURBE CHARGE/DÉFLEXION POUR UN POTEAU ARTICULÉ AUX EXTRÉMITÉS	318
FIGURE 8-2 : COURBE D'EULER AVEC UNE LIMITE ÉLASTIQUE SUPÉRIEURE	320
FIGURE 8-3 : COURBE CONTRAINTE/DÉFORMATION POUR L'ACIER.....	322
FIGURE 8-4 : COURBE 1 DU SSRC	325
FIGURE 8-5 : COURBE 2 DU SSRC	325
FIGURE 8-6 : COURBE 3 DU SSRC	326
FIGURE 8-7 : COURBES DE LA RÉSISTANCE DES POTEAU SUIVANT <i>CRC</i> ET <i>AISC</i>	326
FIGURE 8-8 : DÉTERMINATION DE LA COURBE DE RÉSISTANCE DU POTEAU À PARTIR DES COURBES CHARGE/DÉFLEXION, POUR UN POTEAU AVEC DES DÉFAUTS DE RECTITUDE INITIAUX	327
FIGURE 8-9 : COURBES DE LA RÉSISTANCE SELON SSRC	329
FIGURE 8-10 : REPRÉSENTATION SCHÉMATIQUE DU MOMENT MOYEN DE L'ÉCOULEMENT	334

FIGURE 8-11 : MODÈLE D'UN POTEAU REPRÉSENTANT UN DÉFAUT DE RECTITUDE.....	334
FIGURE 8-12 : MODÈLE D'UN POTEAU CHARGÉ EXCENTRIQUEMENT	338
FIGURE 8-13 : COMPARAISON DU FACTEUR D'AMPLIFICATION POUR UN POTEAU CHARGÉ EXCENTRIQUEMENT ET UN POTEAU AVEC UN DÉFAUT DE RECTITUDE	340
FIGURE 8-14 : MODÈLE D'UN POTEAU AVEC DÉFAUT DE RECTITUDE INITIAL ET CHARGÉ EXCENTRIQUEMENT.....	341
FIGURE 9-1 : MODÈLE DE <i>SHANLEY</i>	353
FIGURE 9-2 : REFROIDISSEMENT NON UNIFORME DES SECTIONS EN I LAMINÉES À CHAUD.....	359
FIGURE 9-3 : SCHÉMA DES CONTRAINTES RÉSIDUELLES POUR UNE SECTION EN I (GALAMBOS & KETTER, 1959).....	360
FIGURE 9-4 : COURBE CONTRAINTES DÉFORMATIONS POUR UN POTEAU TRAPU	361
FIGURE 9-5 : INFLUENCE DES CONTRAINTES RÉSIDUELLES SUR LA COURBE CONTRAINTE/DÉFORMATION D'UN POTEAU TRAPU.....	363
FIGURE 9-6 : CONTRAINTES RÉSIDUELLES À TRAVERS UNE SECTION RECTANGULAIRE.....	363
FIGURE 9-7 : RELATION IDÉALISÉE CONTRAINTE/DÉFORMATION D'UN MATÉRIAU ÉLASTIQUE PARFAITEMENT PLASTIQUE	364
FIGURE 9-8 : SECTION RECTANGULAIRE - CONTRAINTE EXTERNE DE COMPRESSION ET LES CONTRAINTES RÉSIDUELLES.....	365
FIGURE 9-9 : COURBE CONTRAINTE/DÉFORMATION RIGIDE-PLASTIQUE	369
FIGURE 10-1 : MEMBRURE SOLlicitÉE EN COMPRESSION AXIALE SOUS DIFFÉRENTES CONDITIONS DE RETENUE LATÉRALE	375
FIGURE 10-2 : ORGANIGRAMME DES ÉTAPES DE CALCUL SELON LA MÉTHODE MATRICIELLE.....	377
FIGURE 10-3 : CHARGE CRITIQUE DU FLAMBEMENT POUR UN CADRE SIMPLE À TROIS ARTICULATIONS.....	378
FIGURE 10-4 : DÉFORMÉE DU CADRE À TROIS ARTICULATIONS	379
FIGURE 10-5 : LONGUEUR EFFECTIVE DU POTEAU FAISANT PARTIE D'UN CADRE À TROIS ARTICULATIONS	382

FIGURE 10-6 : MÉTHODE NUMÉRIQUE POUR L'APPROCHE DE LA DÉRIVÉE	385
FIGURE 10-7 : RATIOS DES DIFFÉRENCES FINIES	388
FIGURE 10-8 : POTEAU ARTICULÉ AUX EXTRÉMITÉS, SUBDIVISÉ EN N SEGMENTS	389
FIGURE 10-9 : APPROXIMATION AVEC $N=2$	390
FIGURE 10-10 : APPROXIMATION AVEC $N=3$	392
FIGURE 10-11 : APPROXIMATION AVEC $N=4$	394
FIGURE 10-12 : CADRE RIGIDE SIMPLEMENT ARTICULÉ	398
FIGURE 10-13 : CADRE RIGIDE ENCASTRÉ	399
FIGURE 10-14 : BARRE INFINIMENT RIGIDE RETENUE LATÉRALEMENT	403
FIGURE 10-15 : SOLLICITATIONS ET DEGRÉS DE LIBERTÉ APPLIQUÉE SUR LE SYSTÈME	405
FIGURE 10-16 : POTEAU ENCASTRÉ À LA BASE ET LIBRE DE SE DÉPLACER EN TÊTE	407
FIGURE 10-17 : POTEAU ROTULÉ À LA BASE ET LIBRE DE SE DÉPLACER EN TÊTE	407
FIGURE 10-18 : POTEAU ENCASTRÉ À SA BASE ET LIBRE EN TÊTE	410
FIGURE 10-19 : MODÉLISATION EN DEUX TONÇONS D'UN POTEAU-POUTRE	411
FIGURE 10-20 : POTEAU ROTULÉ AUX DEUX EXTRÉMITÉS	412
FIGURE 10-21 : POTEAU ENCASTRÉ AUX DEUX EXTRÉMITÉS	413
FIGURE 10-22 : CADRE RIGIDE COMPOSÉ DE CINQ MEMBRURES	414
FIGURE 10-23 : CADRE SIMPLE ENCASTRÉ AUX PIEDS ET AVEC MEMBRURES VERTICALES CHARGÉES AXIALEMENT	416
FIGURE 10-24 : DÉCOMPOSITION DES EFFORTS DANS UN CADRE SIMPLE	417

FIGURE 10-25 : POTEAU EN PORTE-À-FAUX.....	419
FIGURE 10-26 : MEMBRURE QUELCONQUE SOUMISE À UN EFFORT DE FLEXION	426

LISTE DES TABLEAUX

TABLEAU 4-1 – VALEURS UNIVERSELLES DU PARAMÈTRE DE LA CHARGE FICTIVE SELON LA LIMITE ÉLASTIQUE	172
TABLEAU 6-1 : COMPARATIF DES DIFFÉRENTS ASPECTS DU CALCUL DES POTEAUX-POUTRES À L'ÉTAT LIMITE ULTIME (PICARD, BEAULIEU, & KENNEDY, 1992)	236
TABLEAU 7-1 – VALEURS DU FACTEUR D'IMPERFECTION (α) SELON LA COURBE DE FLAMBEMENT	293
TABLEAU 7-2 – CHOIX D'UNE COURBE DE FLAMBEMENT POUR UNE SECTION TRANSVERSALE SELON EUROCODE 3	294
TABLEAU 8-1 – MÉTHODE DE DIMENSIONNEMENT DES POTEAUX SELON LA SPÉCIFICATION	343

CHAPITRE 1

PRÉSENTATION DU PROJET DE RECHERCHE

1.1 GÉNÉRALITÉS

Depuis de nombreuses années, les ingénieurs concepteurs en structure ont exploré et continuent d'explorer plusieurs approches pour estimer la stabilité des poteaux et des cadres rigides faisant partie des ouvrages d'acier. Les méthodes pour évaluer cet aspect si important ont évolué dans le temps; les procédures changent pour tenir compte des pratiques communes utilisées dans la conception, bénéficiant ainsi de l'outil informatique en plein essor et de l'apport des informations provenant des tests expérimentaux. Les ingénieurs concepteurs recherchent des approches balancées qui sont pratiques en ce qui a trait aux calculs et qui permettent d'assurer, en même temps, le niveau désiré de sécurité. Le calcul d'une structure exige que la stabilité statique soit assurée tant globalement, au niveau de la structure, qu'individuellement au niveau de chaque élément, et ce, conséquent de l'ensemble des combinaisons d'actions définies dans la réglementation en vigueur.

Les différentes actions des charges appliquées à travers les diverses combinaisons spécifiques génèrent des contraintes et des déformations au sein du matériau utilisé. Il s'agit donc, afin de garantir le degré de sécurité souhaité et la bonne tenue en service, de s'assurer que les contraintes

et les déformations demeurent en deçà des limites admissibles. Le dimensionnement d'une structure donnée, sous l'action des charges spécifiques, est basé sur les principes fondamentaux :

- Sécurité
- Durabilité
- Aptitude au service
- Fiabilité

L'analyse structurale permet de déterminer la distribution, soit des sollicitations, soit des contraintes, déformations et déplacements de l'ensemble ou d'une partie de la structure. Elle permet d'identifier les sollicitations aux divers états limites dans les éléments ou les sections de la structure. Les modèles de comportement couramment utilisés pour l'analyse sont :

- Comportement élastique linéaire
- Comportement plastique
- Comportement non linéaire

Le dimensionnement d'une structure en acier comporte les étapes suivantes :

- Pré dimensionnement et modélisation
- Analyse globale de l'ossature
- Vérification des sections et des éléments de l'ossature
- Calcul des assemblages

L'analyse globale a pour objectif de déterminer, à l'état limite considéré, les déplacements et la distribution des sollicitations dans une structure soumise à un ensemble particulier d'actions de calcul, et en particulier, les efforts maximums qui vont survenir dans les sections, les éléments et les assemblages de la structure. Cette analyse doit prendre en compte les effets du second ordre, les imperfections structurelles, le comportement des assemblages et la redistribution plastique des

efforts lorsque c'est nécessaire (analyse globale plastique). Les ossatures doivent être vérifiées en ce qui concerne :

1. les résistances des sections transversales des éléments (flambement, déversement);
2. les déplacements pour les combinaisons les plus défavorables de l'État Limite d'Utilisation (ÉLUT selon **S16**);
3. la stabilité globale et la stabilité locale.

Ce dernier aspect, l'instabilité, nécessite un examen de la stabilité individuelle des membrures ainsi que la stabilité globale de la structure. Pour les structures d'acier, les problèmes d'instabilité fait partie intégrante des méthodes de calculs adoptées par les différentes spécifications techniques qui régissent la conception des charpentes d'acier à travers le monde. Toutefois, l'instabilité n'est pas toujours la principale raison qui peut conduire à la ruine de la structure. Les structures d'acier peuvent atteindre la ruine par fatigue élastique ou plastique, vibrations excessives et/ou par manque de ductilité dans d'autres cas.

Ce mémoire couvre le comportement des cadres rigides en acier et de leurs composants structuraux, sollicités par des charges statiques non répétitives et qui peuvent, à l'ultime, atteindre la ruine en raison d'une certaine forme d'instabilité, lorsque ces cadres sont chargés dans le domaine inélastique. La plupart des structures d'acier composées de cadres rigides sont concernées par ce phénomène. Une méthodologie de calcul peut être qualifiée d'adéquate si elle permet que les calculs soient exécutés aisément à l'aide des ressources communément utilisées dans la pratique et dans le cadre quotidien des bureaux d'ingénieurs. Les calculs ne doivent pas être très complexes, et ce, de façon à réduire le risque des erreurs causées par une mauvaise interprétation et/ou une mauvaise utilisation de la méthode. Toutes ces méthodes de calcul doivent être basées essentiellement sur les principes fondamentaux du comportement des charpentes d'acier; le processus de calcul doit assister le concepteur dans la compréhension du comportement de la structure dont il a la charge de concevoir. Souvent, les procédures de calcul semblent faire partie de recettes qui conduisent à une conception sécuritaire, mais en réalité elles peuvent conduire à

des solutions erronées, si ces dites recettes sont mal comprises et/ou mal appliquées. Dans d'autres cas, la procédure de calcul peut être très complexe de façon à pouvoir induire le concepteur en erreur. Malheureusement, cette constatation peut être faite d'une façon ou d'une autre à propos de la plupart des méthodes communes utilisées pour déterminer la stabilité globale des structures.

1.2 PROBLÉMATIQUE

L'étude des phénomènes d'instabilité élastique est particulièrement importante en construction métallique, et ce, en raison de l'apparition sur les marchés des aciers de hautes résistances; ce qui conduit aux choix d'éléments minces et de membrures très élancées. Aussi, considérant l'intensité des déformations, deux cas de figure peuvent se présenter. Cas 1 : tant que l'on demeure dans le domaine des petites déformations, on admet que les sollicitations ne varient pas (ou peu) sous l'effet des déformations, ce qui conduit simplement à vérifier que les contraintes restent inférieures à la contrainte de ruine. Cas 2 : dans le cas des grandes déformations, ces dernières modifient considérablement les sollicitations qui les ont initiées, menant ainsi à des calculs spécifiques. L'apparition de déformations importantes dans certaines pièces peut survenir dans :

- le domaine élastique lorsque la relation linéaire contrainte/déformation n'est plus vérifiée, les déformations augmentent plus vite que les efforts appliqués;
- le domaine élasto-plastique lorsqu'il y a écoulement plastique.

Les grandes déformations affectent les zones comprimées des pièces qui peuvent présenter trois types de comportements caractéristiques, appelés phénomènes d'instabilité, qui sont :

- le flambement qui affecte les membrures simplement comprimées (flambement simple) ou comprimées et fléchies (flambement flexion) qui peut s'avérer très dangereux;
- le déversement qui affecte les ailes comprimées des pièces fléchies;
- Le voilement local qui affecte les parois élancées qui constituent la section.

L'expérimentation en laboratoire effectuée sur des membrures laminées courantes, soumises à des efforts de compression progressivement croissants, montre que la ruine des pièces se manifeste de deux façons différentes selon l'élancement des pièces :

- pour les pièces de faible élancement (L/r), qui se caractérise par une section importante et une faible hauteur, la ruine se manifeste par l'affaissement des membrures sous la contrainte équivalente à la limite élastique du matériau (F_y);
- pour les pièces de grands élancements, la ruine intervient pour une contrainte d'affaissement inférieur à la limite élastique et à la contrainte critique d'Euler, pour laquelle on observe une augmentation brutale des déformations (bifurcation) avec l'apparition de zones plastifiées suivie de l'effondrement. En outre, la courbe contrainte/déformation n'est plus linéaire.

La contrainte d'Euler représente, en fait, une borne supérieure que l'on ne peut pas atteindre, du fait que la théorie d'Euler prend en compte une barre idéale ayant une section exempte de contraintes résiduelles, parfaitement rectiligne et soumise à une force de compression parfaitement centrée et appliquée suivant l'axe moyen, ce qui n'est jamais le cas en réalité. Pour le comportement des cadres rigides, dans le plan du chargement, les théories et les formules nécessaires pour exécuter une analyse inélastique du second ordre sont, aujourd'hui, bien établies. Toutefois, beaucoup de travaux et de recherches restent à accomplir avant de pouvoir modéliser les aspects plus complexes du comportement tridimensionnel des membrures. Dans ce contexte, des approches plus pratiques qui traitent les problèmes de la stabilité sont indispensables pour fournir aux ingénieurs concepteurs des outils simples à utiliser dans le cadre des tâches quotidiennes.

Pour les structures à nœuds déplaçables (la rigidité latérale de la structure est assurée par les assemblages rigides des poteaux et des poutres), le flambement d'un poteau en particulier ne peut être considéré comme un phénomène individuel, mais il doit être considéré dans un contexte d'ensemble où des éléments plus résistants peuvent offrir une retenue latérale pour d'autres

poteaux moins résistants. C'est le cas des cadres rigides qui contiennent des poteaux articulés aux deux extrémités en plus des poteaux assemblés rigidement aux poutres.

Le sujet de ce mémoire a suscité plusieurs débats concernant la convenance de plusieurs méthodes utilisées dans l'estimation de la stabilité des poteaux et des cadres rigides. Les différentes spécifications et standards reflètent différentes philosophies associées à chacune de ces deux approches. Donc, il paraît très important pour les ingénieurs concepteurs des charpentes d'acier, dans le cadre de leurs activités professionnelles, de se munir d'une solide compréhension des problèmes de la stabilité des structures, afin de pouvoir porter un jugement de valeur sur un sujet considéré comme complexe et qui est traité de différentes façons dans les spécifications techniques.

1.3 OBJECTIFS

Le principal objectif de ce mémoire est de traiter l'un des aspects du processus de dimensionnement, notamment l'analyse et la détermination de la stabilité des cadres rigides et de leurs composantes structurales. Plus spécifiquement, les objectifs de ce mémoire sont :

- contribuer à une meilleure compréhension du phénomène de la stabilité des poteaux, poteaux-poutres et des cadres rigides;
- consolider la compréhension des approches avec la norme canadienne « **CSA/CAN S16** »;
- comparer les spécifications canadiennes avec les spécifications américaines « **AISC LRFD Specifications** » et européennes « **Eurocode 3** »;
- permettre une meilleure compréhension du fondement des différentes approches adoptées par certaines spécifications techniques ainsi que les avantages et limites des approches proposées;
- produire un traité théorique pratique regroupant les théories et les calculs fondamentaux des différents aspects qui influencent la stabilité.

Ce mémoire traite essentiellement de la stabilité des cadres rigides libres de se déplacer latéralement, sans toutefois omettre certains aspects particuliers des cadres empêchés de se déplacer latéralement (structures contreventées). Les méthodes d'analyse sur ordinateur peuvent modéliser le comportement réel de la structure et, de cette façon, réduire la dépendance des méthodes semi-empiriques pour traiter l'interaction entre le comportement individuel des membrures et le comportement de l'ensemble de la structure.

1.4 ÉTAT DES CONNAISSANCES

Bien que le sujet de la stabilité des charpentes d'acier puisse être considéré comme mature, il demeure néanmoins que les approches, qui traitent ce sujet, varient largement entre les différentes spécifications et standards à travers le monde. Un grand nombre de ces méthodes ont été proposées, traitées et critiquées amplement dans la littérature technique, notamment, les méthodes basées le concept de la longueur effective et celles basées sur le concept des imperfections géométriques. Plusieurs de ces méthodes ont des différences qui peuvent être qualifiées de subtiles. Le sujet de la stabilité a suscité, depuis plusieurs décades, et continue de susciter encore aujourd'hui l'intérêt des ingénieurs en structure et des chercheurs. Il est certainement très bénéfique pour la profession de l'ingénierie des structures de garder une vue sur cette progression. Les méthodes d'analyses ont connu une grande évolution qui est résumée dans les prochaines sous-sections.

1.4.1 Théorie d'Euler

Leonhard Euler, considéré comme le pionnier dans le domaine du comportement des éléments en compression, a dérivé sa formule en 1774. La formule d'*Euler* décrit la résistance à la compression d'une membrure parfaitement droite, articulée aux deux extrémités et sollicitée en compression concentrique (Figure 1-1). Dans le fondement de la théorie d'*Euler*, le flambement, qui est un

phénomène de bifurcation, prend place selon un état de contraintes inférieures à la limite élastique du matériau. La charge critique de flambement (P_E) s'écrit :

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (1.1)$$

où E , I et L sont respectivement le module d'élasticité du matériau, le moment d'inertie de la section par rapport à l'axe où le flambement se produit et la longueur de la membrure. Cependant, (1.1) ne tient pas compte des défauts géométriques, de l'action inélastique et du comportement non linéaire de la membrure due à la présence des contraintes résiduelles. Réellement, en pratique, les poteaux individuels ou ceux faisant partie des structures plus complexes, voient leurs résistances et stabilités affectées par les conditions de retenues aux extrémités, les excentricités accidentelles des charges appliquées en fonction de la configuration des assemblages et les défauts de verticalité et de rectitude quasiment inévitables.

1.4.2 Spécifications techniques

Le dimensionnement des membrures, travaillant en compression ou en compression flexion, est considéré comme étant un des calculs les plus complexes en structure. Dans le dimensionnement de ces membrures, il faut considérer :

- le comportement individuel des membrures;
- l'interaction entre le comportement individuel des membrures et le comportement global de l'ensemble de la structure.

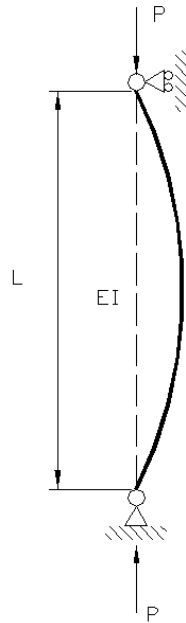


Figure 1-1 : Poteau articulé aux extrémités-Modèle d'Euler

Les générations précédentes d'ingénieurs ont compris la nécessité de combiner les effets des forces axiales qui produisent des contraintes axiales (σ_{axial}) et les effets des charges latérales qui produisent des contraintes de flexion (σ_{flexion}). L'approche la plus simple est d'utiliser la résistance élastique des matériaux pour les contraintes combinées ($\sigma_{\text{combinée}}$) sous la forme :

$$\sigma_{\text{combinée}} = \sigma_{\text{axial}} + \sigma_{\text{flexion}} \quad (1.2)$$

Il a été reconnu par la plupart des ingénieurs que les déflexions causées par les charges transversales et les imperfections géométriques telles que les défauts de rectitude tendent à créer un moment additionnel en raison de l'amplification du moment en présence des forces axiales, un phénomène connu présentement sous l'appellation $P - \delta$. Plusieurs auteurs (Burt, 1914; Fuller & Kerekes, 1931; Johnson, Bryan, & Turneure, 1897; Merriam & Jacoby, 1911; Rondal, 1998; Shedd, 1934; Spofford, 1915) ainsi que certaines spécifications précédentes ont tenté de fournir une expression pour cette amplification du moment, et ce, dans le cadre des équations d'interaction proposées. Parmi ces approches, on peut citer celle de (Ketchum, 1921) qui était la méthode

d'interaction utilisée par plusieurs ingénieurs durant la période avant 1935. L'équation d'interaction de Ketchum spécifie que les membrures sollicitées par des contraintes axiales et des contraintes de flexion doivent être dimensionnées pour satisfaire l'expression :

$$S = [P/A] + \left[\frac{Mc/I}{(PL^2/10E)} \right] \quad (1.3)$$

avec :

S : contrainte à la fibre extrême (lb/po²);

P : charge axiale (lb);

A : aire de la section de la membrure (po²);

M : moment de flexion (lb-po);

C : distance entre l'axe neutre et la fibre la plus éloignée (po);

I : moment d'inertie de la section transversale de la membrure (po⁴);

L : longueur de la membrure (po);

E : module d'élasticité (lb/po²).

Les approches varient entre les normes et spécifications techniques à travers le monde. Les approches peuvent être divisées en deux principales catégories :

1. le concept de la longueur effective;
2. application de charges latérales fictives qui est aussi appelée approche des « imperfections équivalentes ».

Les spécifications américaines (AISC, 1928) n'ont pas donné une exigence concernant une interaction, mais elles ont formulé cette exigence en termes généraux. Les membrures sollicitées

par des contraintes axiales et de flexion doivent être dimensionnées de façon à ce que les plus grandes valeurs des contraintes combinées ne dépassent pas les limites admissibles. Le concepteur était libre de choisir sa forme préférée de l'équation d'interaction. Certains auteurs de cette période (Rondal, 1998; Shedd, 1934) continuaient à recommander l'usage de l'équation d'interaction. Avec la révision des spécifications (AISC, 1936), l'équation d'interaction représentée par une ligne droite a été officiellement adoptée pour être utilisée dans la conception des structures. Les membrures sollicitées par des contraintes axiales et de flexion doivent être dimensionnées de façon à satisfaire :

$$f_a/F_a + f_b/F_b = 1 \quad (1.4)$$

avec :

f_a : contrainte axiale due aux charges appliquées;

f_b : contrainte de flexion;

F_a : contrainte axiale permise par cette spécification si les contraintes axiales sont présentes seules;

F_b : contrainte de flexion permise par cette spécification si ces contraintes sont présentes seules.

Malgré le fait que (1.4) ne considère pas la présence des moments secondaires, elle a donné des résultats satisfaisants durant plusieurs années parce que les contraintes de service à cette époque étaient inférieures à la limite élastique suivant les standards en vigueur. L'acier de grade A-7 avait une limite élastique de 227 MPa. La contrainte de compression de base en service était égale à 117 MPa et la contrainte en flexion de base en service était égale à 138 MPa. Le fait de garder le niveau des contraintes axiales très bas a permis de contourner les effets des moments secondaires.

Après la Deuxième Guerre mondiale, les recherches ont commencé aux États-Unis dans le domaine de la résistance ultime des structures d'acier. La plupart des recherches étaient

concentrées aux universités de Lehigh, Bethlehem et Pennsylvania. Ces recherches ont été initiées par le CRC (Column Research Council) et ont mis l'accent sur la capacité des poteaux sous l'effet combiné des forces axiales et transversales (poteaux-poutres). Les recherches ont mené à deux équations générales pour la résistance ultime des poteaux-poutres. Ces équations ont été présentées sous différentes formes. La forme de base de ces équations est :

$$\frac{P}{P_{cr}} + \frac{M_{eq}}{M_p (1 - P/P_e)} \leq 1,0 \quad (1.5)$$

$$\frac{P}{P_y} + \frac{0,85M_2}{M_p} \leq 1,0 \quad (1.6)$$

où :

P : charge axiale;

P_{cr} : charge critique du poteau dans l'absence de la flexion, mais incluant l'influence de la longueur effective et les contraintes résiduelles;

M_{eq} : moment de flexion équivalent;

M_p : capacité plastique de la section en flexion;

P_e : charge critique élastique d'Euler;

P_y : capacité élastique axiale de la section correspondant à la limite élastique;

M_2 : le plus grand moment à une extrémité de la membrure.

L'équation (1.5) est dérivée pour une membrure non supportée latéralement et, par conséquent, considère l'aspect de la stabilité du poteau-poutre. L'équation (1.6) considère la formation d'une

rotule plastique à l'extrémité de la membrure, et ce, considérant que la membrure est bien contreventée pour développer le moment plastique (Beedle, 1964).

Le concept de la longueur effective a été introduit dans les spécifications nord-américaines au début des années 1960 (AISC, 1963). Avant cette date, la conception des poteaux était basée sur la longueur réelle des membrures. Des spécifications apparues dans les années précédentes, comme celles de la cinquième édition (AISC, 1955), ne faisaient pas mention de l'élancement d'un poteau en fonction du facteur de la longueur effective. Des nombreuses recherches subséquentes ont suivi. Elles ont traité les calculs de longueurs effectives d'une grande variété de membrures et de systèmes structuraux rencontrés dans la pratique. Les spécifications françaises pour les calculs des charpentes métalliques (ITBTP & CTICM, 1966) approuvées en décembre 1966, ont donné deux différentes façons pour traiter le concept de la longueur effective. La première utilise des facteurs semblables au facteur utilisé dans le concept original et la deuxième utilise des ressorts ayant des rigidités en flexion. Le concept de la longueur effective inélastique, qui est une nécessité pour la détermination exacte de la résistance des poteaux retenus par des poutres élastiques, a fait son apparition dans les spécifications américaines en 1978. Les recommandations européennes de 1978, qui ont précédé **Eurocode 3**, ont adopté essentiellement les mêmes formules. Les spécifications CM66 et les recommandations européennes n'ont pas donné l'origine de ces deux formules.

Dans l'édition de 1989, les spécifications canadiennes **CSA/CAN S16.1-M89** ont adopté le concept des charges latérales fictives et abandonné le concept de la longueur effective (Beaulieu & Picard, 2003; Beaulieu, Picard, Tremblay, Grondin, & Massicotte, 2010). Les spécifications européennes ont présenté en 1992 deux formules simples pour remplacer l'utilisation des nomogrammes d'alignement. Ces formules étaient dédiées essentiellement pour une utilisation dans les feuilles de calculs électroniques qui commençaient à avoir un usage répandu auprès des professionnels. La deuxième édition des spécifications (AISC, 1993) est la première à adresser, de façon explicite, le concept des poteaux articulés se trouvant dans un étage et l'effet de ces poteaux

sur la stabilité latérale du système structural. Environ 40 ans après les premières apparitions qui traitent les problèmes de la stabilité, l'ensemble des spécifications à travers le monde couvre ce sujet de façon explicite. (Rondal, 1998; von Kármán, Sechler, & Donnell, 1932) mentionnent que l'origine des formules à la base du tracé des nomogrammes d'alignement a été trouvée dans un document intitulé « Reissner Anniversary Volume »; à la fin des années 40. Il existe aussi un article publié par (Newmark, 1949) décrivant des travaux réalisés en 1944; travaux qui furent commandités par « The Consolidated Vultee Aircraft Corporation ».

1.4.3 Étude de la stabilité selon les différentes spécifications techniques

Spécifications canadiennes CSA/CAN S16

Les spécifications canadiennes (début des années 1990) et australiennes ont éliminé l'usage du concept de la longueur effective (basé sur la bifurcation de la structure) pour déterminer la résistance et la stabilité des membrures travaillant comme poteau ou poteaux-poutres, au profit d'une approche basée sur les charges fictives (les imperfections géométriques équivalentes). Dans cette nouvelle approche, les vérifications des éléments structuraux dans le plan de chargement et hors du plan de chargement sont basées sur la longueur réelle de la membrure et la stabilité du cadre est vérifiée uniquement à travers une analyse du second ordre (l'effet des charges de gravité sur la structure déformée). Les spécifications canadiennes exigeaient l'application des charges latérales fictives dans des combinaisons de charges regroupant des charges pondérées de gravité, sans toutefois exiger leur application pour d'autres cas de chargement comme, par exemple, les charges latérales (vent, séisme ou pont roulant). Les charges latérales fictives tiennent compte des effets inélastiques et des imperfections géométriques de la structure, ce qui reflète la réalité rencontrée dans la pratique. Les spécifications canadiennes limitaient l'usage de l'analyse élastique du second ordre au cas où le ratio entre les effets de premier ordre et les effets du second ordre sont inférieurs à 1,4. Au-delà de cette limite, le concepteur doit procéder à une analyse élasto-plastique. Avec l'entrée en vigueur des spécifications **CSA/CAN S16-09** (CSA/CAN, 2009), articles

8.4.1, les effets de la translation produits par les charges fictives, appliquées à chaque étage (égales à 0,005 fois les charges pondérées de gravité sollicitant l'étage), doivent être ajoutés aux charges latérales pour chaque combinaison de charge (section 8.4.1 du code). En plus, les charges latérales fictives doivent être appliquées dans deux directions orthogonales indépendamment lorsque les effets tridimensionnels de chargement sont inclus dans l'analyse de la structure.

*Spécifications américaines **AISC LRFD***

Les spécifications américaines **AISC LRFD** continuent à utiliser le concept de la longueur effective en combinaison avec une analyse du second ordre pour prendre en considération tous les effets qui influencent la stabilité dans le dimensionnement des membrures travaillant comme poteau ou poteaux-poutres. Cette approche est adoptée en reconnaissant les limites d'une analyse élastique pour modéliser la stabilité des cadres sollicités par des forces axiales élevées et dont la réduction inélastique de la rigidité devient significative. Avec cette approche, les spécifications **AISC LRFD** évitent d'imposer des limites à l'utilisation des analyses élastiques du second ordre. Dans le vocabulaire technique des spécifications **AISC LRFD** (AISC, 1993) le calcul de la stabilité d'une membrure ou d'un système devient une détermination de la résistance axiale nominale.

La procédure de calcul de la résistance axiale nominale peut, sans aucun doute, être classée parmi les procédures les moins bien comprises et, souvent, aussi les plus mal appliquées dans le domaine de la stabilité des structures d'acier. Durant plusieurs décennies, les calculs s'effectuaient traditionnellement sur la base de la détermination des facteurs de la longueur effective (facteur K). Ces valeurs du facteur de la longueur effective sont généralement déterminées à l'aide de nomogrammes d'alignement. Le tracé de ces nomogrammes est basé sur plusieurs hypothèses simplificatrices. Malheureusement, ces hypothèses ne sont généralement pas satisfaites dans les cas communs des systèmes structuraux rencontrés dans la pratique. Ces faits mènent à l'application de corrections compliquées pour pallier aux lacunes des hypothèses simplificatrices de base. La complexité de ces corrections fait en sorte que le concepteur doit prêter une grande attention à cet aspect pour éviter les erreurs. Dans la méthode des nomogrammes d'alignement, le poteau est

extrait de la charpente et étudié de façon isolée; ce qui est inadéquat pour les charpentes non contreventées, mais acceptable pour celles qui le sont. Le concept de la longueur effective de flambement K , est un moyen simple pour réduire les problèmes d'évaluation des contraintes critiques de flambement à une équivalence avec un poteau articulé aux extrémités et empêché de se déplacer latéralement (c'est le modèle de base d'Euler).

L'utilisation des nomogrammes d'alignement dans certaines situations, sans procédures de correction, peut aller à l'encontre des principes essentiels qui ont conduit au tracé des nomogrammes. Deux des principales hypothèses simplificatrices qui ont conduit au tracé des nomogrammes sont :

1. Domaine élastique : la méthode des nomogrammes d'alignement considère un comportement élastique de la charpente jusqu'à la rupture;
2. Le flambement simultané de tous les poteaux du même étage.

Il existe une multitude de cas pratiques où l'une ou même les deux hypothèses mentionnées ci-dessus ne sont pas respectées. En raison de la présence des contraintes résiduelles et des imperfections géométriques, l'action inélastique est censée prendre place à un niveau de contrainte d'environ 50 % de la limite élastique de l'acier (McGuire, 1967). La valeur de KL/r qui correspond à cette contrainte, définit la frontière entre l'action inélastique et élastique, ce qui signifie que la plupart des poteaux dans les structures simples ou à étages se comportent dans le domaine inélastique. La rigidité d'un poteau dans le domaine élastique est proportionnelle à EI . Par contre, dans le domaine inélastique, la rigidité est proportionnelle à $E_T I$ où E_T est le module tangent. Pour utiliser les nomogrammes d'alignement qui sont basés sur le concept de la longueur effective, on doit déterminer les rigidités relatives, au sommet et à la base du poteau étudié, à partir de l'équation :

$$G = \frac{\text{rigidité du poteau}}{\text{rigidité de la poutre}} = \frac{\sum (EI / L)_c}{\sum (EI / L)_p} \quad (1.7)$$

où E est le module de Young. Lorsque l'élancement de la membrure KL/r est inférieur à la valeur qui définit la frontière entre l'action inélastique et élastique, il résulte que le comportement du poteau est inélastique et les facteurs de retenue aux extrémités doivent être déterminés par :

$$G_{\text{inélastique}} = \frac{\sum (E_T I / L)_c}{\sum (EI / L)_p} = \frac{E_T}{E} G_{\text{élastique}} \quad (1.8)$$

La valeur de G (paramètre de la rigidité) utilisée dans les nomogrammes d'alignement est donc réduite par un facteur égal à E_T/E . Dans ce cas, il résulte que la longueur effective sera aussi réduite. Donc, si l'on peut déterminer le facteur E_T/E , on peut utiliser les nomogrammes d'alignement pour déterminer la longueur effective de flambement des poteaux dans le domaine inélastique.

La spécification (AISC, 2005) reflète les dernières avancées dans l'analyse de la stabilité et de la conception des structures d'acier. La nouvelle spécification définit les exigences générales pour l'analyse de la stabilité et de la conception et donne aux ingénieurs la liberté de choisir leurs propres méthodes. La spécification fournit également plusieurs procédures spécifiques. Le Chapitre C de la spécification (AISC, 2005) stipule que toute méthode d'analyse ou de conception qui traite les effets suivants sur l'ensemble la stabilité de la structure et de ses éléments est autorisée:

1. Déformations dues à flexion, force axiale et cisaillement (dans les membrures et les assemblages);
2. Réduction de la rigidité (et l'augmentation correspondante des déformations) en raison de contraintes résiduelles et de la plastification du matériau;

3. Les effets $P-\Delta$, qui sont les effets des charges axiales P agissant sur le déplacement transversal relatif aux extrémités d'une membrure;
4. Les effets $P-\delta$, qui sont les effets des charges axiales P agissant sur la déformée latérale d'une membrure sollicitée en flexion uniaxiale;
5. Les $P-\Delta_0$ et $P-\delta_0$ qui sont des effets causés par les charges axiales agissant respectivement sur l'ensemble de la structure ainsi que sur les membrures caractérisées par les inévitables imperfections géométriques.

Cette approche préconisée au chapitre C de la norme (AISC, 2010) donne aux ingénieurs la liberté de choisir ou de concevoir des méthodes qui conviennent le mieux pour les différents types de structures rencontrées dans la pratique. Cette approche offre des solutions alternatives à l'approche de la longueur effective qui permettent de considérer les imperfections géométriques et/ou l'inélasticité directement au sein de l'analyse et peuvent être particulièrement utiles pour des structures plus complexes.

*Spécifications européennes **Eurocode 3***

Les spécifications Européennes **Eurocode 3** (CEN, 2005), stipulent que le modèle de calcul et les hypothèses de base de ces calculs doivent refléter le comportement structural à l'état limite pertinent et ce avec une précision appropriée, et doivent refléter, aussi, le comportement anticipé des sections transversales, membrures, joints et supports. Les méthodes d'analyse permises sont :

1. Les forces internes et les moments peuvent, généralement, être déterminés à l'aide d'une des deux méthodes suivantes : a) Analyse élastique de premier-ordre, utilisant la géométrie initiale de la structure, ou b) Analyse élastique du second ordre qui tient compte de l'influence de la déformée de la structure.
2. Les effets du second ordre doivent être considérés dans le cas où ces effets auront une influence significative sur la magnitude des forces internes, moments et le comportement de la structure.

3. Une analyse élastique du premier-ordre peut être utilisée à condition que les forces internes, moments et comportement de la structure ne soient pas affectés de façon significative, en raison des déformées de la structure.

Ces dernières méthodes exigent l'application des charges latérales fictives avec toutes les combinaisons des charges incluant celles qui contiennent des charges latérales réelles. Toutefois, les spécifications européennes permettent de déterminer la longueur de flambement d'un élément en fonction de sa longueur nominale, affectée par un facteur supérieur ou inférieur à l'unité selon que la structure se situe, respectivement, dans un mode à nœuds déplaçables ou à nœuds fixes selon l'annexe E d'**Eurocode 3**. Concernant le concept de la longueur effective, il y est stipulé ce qui suit :

1. En l'absence d'analyses plus détaillées, la longueur de flambement élastique théorique peut être adoptée pour déterminer la résistance au flambement de la membrure.
2. Une longueur équivalente peut être utilisée pour assimiler une membrure non prismatique à une membrure de section uniforme ayant les mêmes conditions de chargement et de retenues latérales.
3. Une longueur équivalente peut être utilisée pour assimiler une membrure sollicitée par un chargement non uniforme à une membrure similaire chargée uniformément et ayant les mêmes conditions de retenues latérales.

Pour ce qui est de la stabilité des cadres :

1. La vérification de la stabilité des cadres rigides et de ses composants structuraux doivent être effectuée en considérant les imperfections et les effets du second ordre
2. En fonction du type du cadre et de l'analyse globale adoptée, les effets du second ordre et les imperfections peuvent être représentés par une des méthodes suivantes :
 - a. Totalement par une analyse globale

- b. Partiellement par une analyse globale et partiellement à travers des vérifications individuelles de la stabilité des membrures
 - c. Pour des cas de base, par des vérifications individuelles des membrures en utilisant les longueurs appropriées de flambement, selon le mode global de flambement de la structure
- 3. Les effets du second ordre peuvent être calculés à l'aide d'une analyse appropriée (procédure itérative comme exemple). Pour les cadres ou le mode fondamental de flambement s'avère prédominant, une analyse élastique du premier-ordre doit être effectuée avec une amplification des effets pertinents des actions.

1.5 MÉTHODOLOGIE

Pour pouvoir porter un jugement rationnel sur un sujet aussi complexe et délicat que celui de la stabilité des charpentes d'acier, il faudra comprendre l'importance et l'influence de tous les aspects qui entourent le sujet. Pour assurer cette importante compréhension, la démarche proposée consiste à couvrir une revue exhaustive, critique et approfondie des différentes approches analytiques qui traitent des problèmes de la résistance et de la stabilité des membrures travaillant en compression et en compression-flexion. On s'attardera notamment aux aspects suivants :

- le comportement individuel des membrures travaillant en compression et en compression-flexion;
- les différents facteurs qui affectent le comportement de ces membrures;
- les problèmes du flambement élastique;
- l'interaction du comportement individuel des membrures;
- la réponse globale de la structure;
- l'approche basée sur le concept de la longueur effective;
- l'approche basée sur le concept de la charge latérale fictive;
- le comportement des membrures travaillant comme poteaux-poutres;

- le dimensionnement des poteaux-poutres à l'aide des équations d'interaction. Le développement analytique et l'approche empirique de ces équations d'interaction;
- les différentes approches pour la prise en considération des effets du second ordre;
- le flambement inélastique;
- les imperfections géométriques et leurs influences sur le comportement des membrures individuelles et le comportement de l'ensemble de la structure.

Comme complément à la revue technique des différents aspects qui influencent la stabilité, ce mémoire regroupe une série de calculs qui incluent notamment :

- des exemples numériques qui traitent des calculs de la résistance et l'évaluation de la stabilité des poteaux, poteaux-poutres et cadres rigides simples pour pouvoir mettre plus de lumière sur les facteurs qui influencent le comportement structural;
- des comparaisons entre les spécifications canadiennes **CSA/CAN S16** et les spécifications américaines **AISC LRFD** à l'aide d'exemples numériques;
- un aperçu de l'évolution des méthodes de calculs et des approches adoptées par les spécifications nord-américaines qui traitent du dimensionnement des poteaux, poteaux-poutres et cadres rigides;

1.6 CONTENU DU MÉMOIRE

Le contenu de ce mémoire est subdivisé en 11 chapitres incluant celui-ci et qui se résument comme suit.

Le Chapitre 2 introduit les effets du second ordre, communément appelés les effets $P - \Delta$. L'analyse du deuxième ordre permet d'inclure les efforts additionnels, causés par les charges verticales et qui agissent sur la structure déformée. Ce chapitre traite des différentes méthodes qui tiennent compte de ces effets ainsi que les différentes approches retenues par les spécifications techniques.

Le Chapitre 3 introduit le concept de la longueur effective basée sur la bifurcation de la structure, les limites de validation pour l'utilisation de ce concept et les spécifications qui se basent sur ce concept. Aussi, ce chapitre traite des différents aspects du flambement inélastique ainsi que de la présence des poteaux articulés dans un étage et dont la stabilité dépend des autres poteaux connectés rigidement avec les poutres.

Le Chapitre 4 introduit le concept des charges latérales fictives. Cette approche de la charge fictive est aussi appelée la « méthode des imperfections équivalentes » étant donné qu'elle tient compte des effets des diverses imperfections qui influencent la résistance des membrures des cadres rigides.

Le Chapitre 5 présente la théorie et le comportement des poteaux-poutres. Le chapitre traite des relations charge/déformation, du déversement et du comportement des poteaux-poutres dans les domaines élastique et inélastique.

Le Chapitre 6 présente les équations d'interaction dans les calculs des poteaux-poutres, l'évolution de la norme **CAN3-S16.1** de l'Association canadienne de normalisation (CSA). Dans ce chapitre, on examine tout d'abord les équations d'interaction de la norme **CAN-S16.1-M84** et, ensuite, on présente les équations proposées pour l'édition 1989 de cette norme **CAN-S16.1-M89**, on termine avec la dernière édition des spécifications **S16-09**. Des comparaisons sont établies entre les deux éditions ainsi que des comparaisons avec d'autres spécifications techniques.

Le Chapitre 7 s'attarde à la théorie du flambement élastique des poteaux et des cadres rigides, la détermination des charges critiques qui produisent le flambement. Ce chapitre traite aussi l'influence des imperfections géométriques sur la charge critique du flambement.

Le Chapitre 8 présente la prise en compte des imperfections géométriques des poteaux et des cadres rigides et leurs influences sur la résistance et la stabilité. On présente également une méthode simple pour déterminer la résistance d'un poteau avec des défauts géométriques de

rectitude et de verticalité. Les courbes de résistance des poteaux faisant partie de toute spécification technique, sont aussi présentées dans ce chapitre.

Le Chapitre 9 introduit la théorie du flambement inélastique et la façon dont cet aspect est pris en considération par les spécifications. On y traite, également, des différents aspects reliés au comportement inélastique des membrures en compression ou en compression-flexion.

Le Chapitre 10 est consacré aux différentes méthodes de calcul des charges critiques du flambement des poteaux, des cadres rigides simples (équations différentielles, équations empiriques, méthode matricielle et méthode d'énergie) et aux comparaisons des dimensionnements effectués à l'aide des différentes spécifications techniques.

Appuyé par la large expertise professionnelle de l'auteur, le Chapitre 11 présente la conclusion et les recommandations, dans le domaine de la conception des charpentes d'acier.

CHAPITRE 2

SYSTÈMES DE STABILITÉ LATÉRALE ET EFFETS DU SECOND ORDRE

2.1 GÉNÉRALITÉS

La majorité des méthodes d'analyse des structures est basée sur la supposition qui stipule que la déformation d'une membrure n'affecte pas sa force interne et/ou la distribution des contraintes. Cette supposition représente le fondement des méthodes d'analyse de premier ordre. Toutefois, pour des systèmes structuraux relativement flexibles, les forces et/ou les contraintes additionnelles induites par les déformations peuvent être significatives et par conséquent, elles ne peuvent pas être ignorées. Cet effet dû aux déformations est habituellement désigné comme étant l'effet du second ordre. Les cadres d'acier sont des structures dans lesquelles les forces secondaires induites par les déformations doivent être évaluées et considérées dans la conception de ces structures. C'est seulement au début des années 60 que certaines spécifications techniques ont inclus implicitement cet effet du second ordre dans les formules d'interactions des poteaux-poutres à l'aide d'un facteur d'amplification des moments de premier ordre et ce, dans le cadre des procédures de calculs aux contraintes admissibles. Depuis la fin des années 60, les différentes spécifications techniques ont adopté le concept des calculs aux états limites. Pour des structures calculées aux états limites ultime de la résistance, les spécifications techniques exigent, parallèlement à l'amplification des moments de premier ordre, que la stabilité soit assurée. Toute structure doit comprendre un système de résistance aux forces latérales composé de deux éléments

principaux : (1) un système horizontal (diaphragme ou poutre horizontale en treillis) capable de résister aux sollicitations latérales et les acheminer vers (2) un ou plusieurs systèmes verticaux qui se chargent de transmettre les charges latérales aux fondations. Dans les charpentes d'acier, les principaux systèmes verticaux les plus communément utilisés et qui assurent la stabilité latérale sont :

- les cadres contreventés concentriques ou excentriques;
- les cadres rigides ou cadres semi-rigides;
- les murs de cisaillement.

Un système de résistance aux forces latérales a pour fonction la transmission des sollicitations latérales (vent, séisme, pont roulant, etc.) jusqu'au système de fondation. Le système de résistance aux forces latérales agit en quelque sorte comme un élément vertical en porte-à-faux. Par conséquent, plus la structure est élancée, plus il est important de faire une étude approfondie du système de stabilité latérale. En ce sens, ce chapitre traite l'un des systèmes de résistance aux forces latérales à savoir les cadres rigides. Un cadre rigide est défini comme étant une structure composée généralement d'éléments verticaux (poteaux) et horizontaux (poutres) connectés à l'aide d'assemblages rigides (voir Figure 2-1). Un assemblage poteau-poutre est considéré comme rigide s'il offre une résistance suffisante pour supporter le moment plastique de la poutre et l'effort tranchant correspondant. Un des avantages d'un système composé de cadres rigides est sa grande ductilité, ce qui convient dans les zones de forte activité sismique.



Figure 2-1 : Photo montrant un cadre rigide en acier

2.2 EFFETS DU SECOND ORDRE ($P - \Delta$)

Les effets du second ordre dans le domaine de la stabilité des structures sont causés par les charges de gravité agissant sur une charpente déformée latéralement (voir Figure 2-2). Il existe deux effets du second ordre. L'effet $P - \Delta$, qui est un effet global sur la structure et l'effet $P - \delta$, qui est un effet local sur les membrures.

L'effet $P - \Delta$ est non linéaire et affecte toute structure où les éléments sont sollicités par des forces axiales. $P - \Delta$ est l'un parmi plusieurs effets du second ordre et est considéré comme un « effet important » associé à la magnitude de la force axiale appliquée P et au déplacement latéral Δ .

La déformation latérale peut résulter de l'asymétrie des charges de gravité et/ou de la structure, des imperfections géométriques ou de l'action des charges latérales (vent, séisme, pont roulant, etc.). L'analyse du second ordre permet d'inclure les efforts additionnels causés par les charges verticales agissant sur la structure déformée. Ces efforts additionnels sont connus sous le nom des

« effets $P-\Delta$ ». Les cadres rigides sont connus pour subir de grands déplacements latéraux comparativement à d'autres systèmes de résistance aux forces latérales, d'où l'importance d'inclure les analyses du second ordre dans toute procédure de calcul régissant le dimensionnement des structures à cadres rigides. Dans la désignation $P-\Delta$, Δ est le déplacement latéral relatif au niveau considéré et P est la totalité des charges verticales pondérées agissant sur la structure au-dessus du niveau considéré.

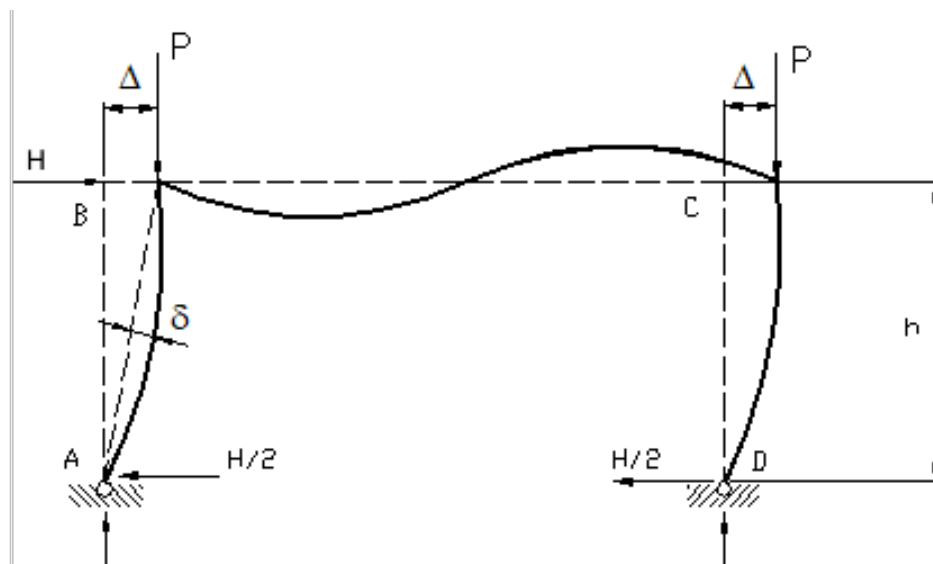


Figure 2-2 : Cadre rigide – Effets du second ordre

La Figure 2-2 montre le cas d'un cadre rigide simple à une travée. Les moments de flexion aux nœuds B et C , obtenus d'une analyse structurale du premier ordre sont égaux à $Hh/2$. Due à la présence d'une sollicitation latérale, la structure se déforme et cette déformation donne naissance aux effets $P-\Delta$ et les moments aux nœuds B et C deviennent $Hh/2 + P\Delta$. En général, une analyse linéaire élastique du deuxième ordre suffit pour le dimensionnement des structures régies par les limites imposées aux déformations latérales pour une bonne tenue en service. Si la rigidité flexionnelle de la charpente est suffisante, la structure atteint une position d'équilibre à une certaine valeur de la flèche latérale Δ . Si la charpente est moins flexible, le déplacement

latéral s'amplifie et peut conduire à la ruine de la structure. Lorsque, dans un cas hypothétique, une charpente est géométriquement symétrique et sollicitée par des charges de gravité disposées symétriquement, il est admis que la structure se déplace quand même latéralement puisque les charges de gravité agissent sur les défauts de verticalité des poteaux et autres défauts géométriques.

Quel que soit le cas de la structure étudiée, les spécifications **CSA/CAN S16** recommandent l'utilisation d'une charge horizontale minimale égale à 0,5 % fois la totalité des charges de gravité pondérées appliquées à l'étage considéré (voir Figure 2-3). Cette approche est équivalente aux effets $P - \Delta$ dans une structure déplacée latéralement d'une quantité égale à 0,005 fois la hauteur de l'étage. Lorsque les déplacements latéraux calculés pour tous les types de sollicitations n'excèdent pas la valeur minimale de $0,005h$, le concepteur est tenu de satisfaire l'exigence minimale de la structure considérée.

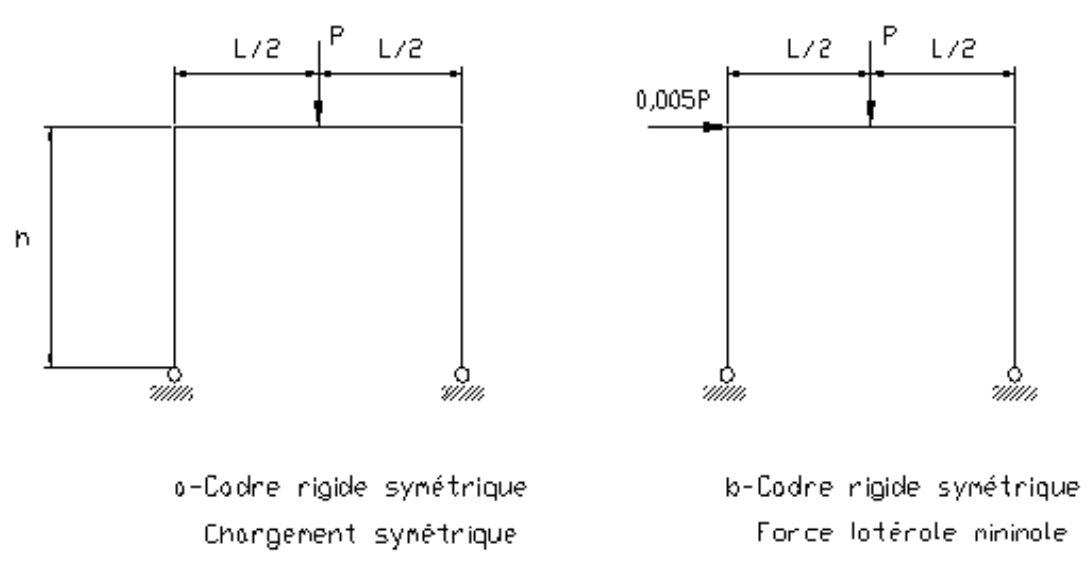


Figure 2-3 : Cadres rigides symétriques

2.3 EFFETS DU SECOND ORDRE ($P - \delta$)

Parmi les effets qui influencent la stabilité d'une membrure faisant partie d'une structure et qui doivent être investigués par le concepteur, il y a les effets $P - \delta$ qui traitent de l'influence de la charge axiale qui agit sur la déformée de la membrure. À noter que l'effet $P - \delta$ affecte une membrure de façon individuelle et l'effet $P - \Delta$ affecte la structure de façon globale. Ces deux phénomènes cohabitent et influencent de façon significative le comportement des éléments travaillant comme poteaux-poutres ainsi que les structures qualifiées de cadres rigides. La Figure 2-4 montre une membrure rectiligne dont les extrémités sont retenues, éliminant ainsi tout déplacement relatif (effets $P - \Delta$). La pièce est chargée transversalement via q_f et Q_f et sollicitée à ses extrémités par des moments de flexion M_{f1} , M_{f2} ainsi qu'en compression centrée C_f .

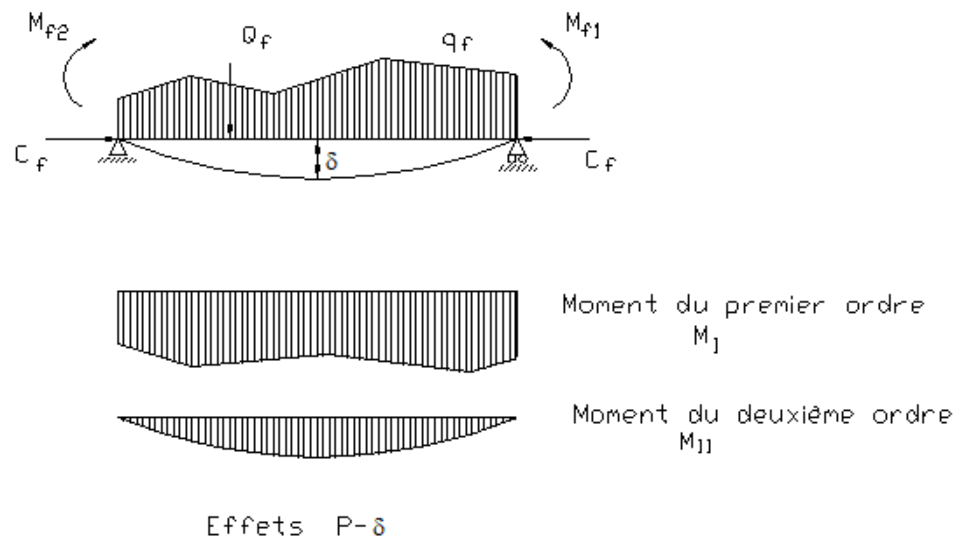


Figure 2-4 : Effets $P - \delta$

Les sollicitations M_{f1} , M_{f2} , q_f et Q_f vont produire respectivement des moments et des déformations du premier ordre M_I et δ_I . La charge axiale C_f qui agit sur la déformée du premier ordre va produire des moments secondaires $M_{II} = C_f \delta_I$. Cette action va accroître les moments et les déformations jusqu'à ce que le système se stabilise. Le moment fléchissant total et la déformée sont :

$$M = M_I + M_{II} \quad (2.1)$$

et

$$\delta = \delta_I + \delta_{II} \quad (2.2)$$

Pour parvenir à un dimensionnement adéquat de la membrure, il est nécessaire de déterminer le moment maximal M_{\max} qui se produit quelque part le long de la membrure. Il faut résoudre l'équation différentielle qui décrit le comportement de la membrure, et ce, en fonction des conditions de retenues spécifiques. Pour une membrure agissant comme poteau-poutre de longueur L sollicitée par une force axiale C_f et des moments de flexion aux extrémités M_f et κM_f , les moments internes produisent une courbe simple. (Galambos, 1968) a démontré que le moment maximal qui est situé à une distance \bar{z} de l'extrémité où le moment M_f est le plus grand est donné par :

$$M_{\max} = \frac{\sqrt{1 + \kappa^2 + 2\kappa \cos kL}}{\sin kL} M_f = U_1 M_f = (\sec \kappa \bar{z}) M_f \quad (2.3)$$

Donc, le moment M_f est amplifié par le facteur $U_1 = \sec \kappa \bar{z}$ et $k = \sqrt{C_f/EI}$. La valeur de \bar{z} est donnée par :

$$\tan \kappa \bar{z} = \frac{-\kappa - \cos kL}{\sin kL} \quad (2.4)$$

Lorsque (2.4) donne des valeurs positives de \bar{z} , le moment maximal se trouve entre les extrémités de la membrure et il est donné par (2.3) avec $U_1 > 1,0$. Si la valeur de \bar{z} est négative, cela signifie que le moment maximal est égal à M_f à $\bar{z} = 0$ et le facteur $U_1 = 1,0$.

Moments égaux aux extrémités

Lorsque $\kappa = -1,0$ (moments égaux qui produisent une courbure simple), le moment maximal se produit à mi-portée soit $\bar{z} = L/2$. À cet instant, il est égal à :

$$M_{\max} = U_1 M_f \quad (2.5)$$

avec

$$U_1 = \sec kL/2 = \sec \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{C_f L^2}{\pi^2 EI}} \quad (2.6)$$

et

$$C_e = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = \frac{\pi^2 EA}{(L/r)^2} \quad (2.7)$$

Cependant, on obtient de (2.6) :

$$U_1 = \sec \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{C_f}{C_e}} \approx \frac{1}{1 - C_f / C_e} \quad (2.8)$$

Moments inégaux aux extrémités

Dans ce cas, le facteur d'amplification est donné par :

$$U_1 = \frac{\sqrt{1 + \kappa^2 + 2\kappa \cos kL}}{\sin kL} \geq 1,0 \quad (2.9)$$

L'Éq (2.9) peut également être réécrite sous la forme :

$$U_1 = \frac{\omega_1}{1 - C_f / C_e} \geq 1,0 \quad (2.10)$$

avec

$$\omega_1 = \left(1 - \frac{C_f}{C_e}\right) \frac{\sqrt{1 + \kappa^2 + 2\kappa \cos kL}}{\sin kL} \quad (2.11)$$

Considérant que $\omega_1 = 0,6 - 0,4\kappa \geq 0,4$, l'Éq (2.10) devient :

$$U_1 = \frac{0,6 - 0,4\kappa}{1 - C_f / C_e} \quad (2.12)$$

L'équation (2.12) est utilisée par la norme **CSA/CAN S16-14** (articles 13.8.4 et 13.8.5) pour prendre en considération l'amplification des moments dus aux effets $P - \delta$.

Lorsque la structure possède la rigidité nécessaire pour assurer sa stabilité vis-à-vis des forces latérales, les moments dus au déplacement latéral sont amplifiés par un facteur d'amplification qui affecte les moments de flexion dus aux forces latérales. Ce facteur est désigné par U_2 dans les spécifications canadiennes. Le moment de flexion total à être repris par l'élément « poteau-poutre » M_f est donné par :

$$M_f = M_{fg} + U_2 M_{ft} \quad (2.13)$$

Les spécifications canadiennes tiennent compte des effets $P - \delta$ telle que :

$$\begin{aligned} M_{\max} &= U_1 M_f \\ M_f &= (M_{fg} + U_2 M_{ft}) U_1 \\ M_f &= U_1 M_{fg} + U_1 U_2 M_{ft} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Cette approche est différente de celle adoptée par les spécifications **LRFD** où B_1 (l'équivalent du facteur U_1 dans les spécifications canadiennes) est appliquée seulement aux moments dus aux charges de gravité M_{fg} .

2.4 MÉTHODE D'ANALYSE STRUCTURALE ÉLASTIQUE DU SECOND ORDRE

Il y a plus de 50 ans, les ingénieurs utilisaient des simples calculs manuels pour déterminer les forces et les moments dans les structures. Dans plusieurs cas, le mot « analyse » n'était pas mentionné même qu'il était exécuté intrinsèquement. Aujourd'hui, les ingénieurs ont recours, assez souvent, à des analyses élastiques statiques (analyse de premier ordre) pour déterminer les forces et les moments qui résultent des différentes combinaisons des charges. Une analyse de premier ordre suppose un comportement régi par les petites déformations élastiques, c'est-à-dire que les forces et les moments qui en résultent ne tiennent pas compte des effets additionnels dus à la déformation de la structure sous différents chargements. Une analyse du second ordre combine deux effets pour aboutir à une solution :

- La théorie des grands déplacements c'est-à-dire que les forces et les moments qui en résultent prennent totalement en considération les effets de la configuration déformée de chaque membrure individuellement et aussi la structure dans son ensemble.
- Les effets sur la rigidité de la structure dus aux charges axiales qui sollicitent les différentes membrures, c'est-à-dire que les forces axiales de traction rehaussent la rigidité tandis que les forces axiales de compression réduisent la rigidité.

De nos jours, les structures, sont plus que jamais élancées et plus sensibles aux déformations. Pour cela, le besoin de considérer les effets du second ordre et plus spécifiquement les effets $P-\Delta$ se fait sentir. Les spécifications techniques réfèrent les ingénieurs de plus en plus à l'utilisation des analyses du second ordre de façon à ce que les effets $P-\Delta$ et les effets des forces axiales sur la rigidité latérale des structures, soient considérés et interprétés de façon appropriée dans la conception. La plupart des concepteurs comprennent les effets $P-\Delta$ comme étant : la structure se déplace latéralement d'une quantité Δ . La charge axiale devient alors excentrique par rapport à la base et induit plus de moments de flexion.

Toutefois, ceci illustre uniquement l'effet $P-\Delta$, qui est un effet parmi d'autres effets du second ordre. Ce qui arrive réellement est que les caractéristiques de la déflexion changent en présence des charges axiales. Pour satisfaire les effet $P-\Delta$ et obtenir les « véritables forces internes », la méthode d'analyse structurale utilisée doit tenir compte à la fois des effets $P-\Delta$ et $P-\delta$ qui sont inextricablement liés. Une augmentation d'un des deux effets conduit à une augmentation de l'autre. Les ingénieurs sont conscients des effets $P-\Delta$ et $P-\delta$ depuis plusieurs années. Toutefois, il est relativement récent qu'il soit d'usage répandu de simuler ces effets à l'aide des calculs sur ordinateur. Devant l'absence de possibilités de réaliser des analyses plus précises et plus rigoureuses, plusieurs spécifications techniques de conception et calculs ont, dans le passé, incorporé des vérifications empiriques et des règles de « bonnes pratiques » pour s'assurer que la magnitude des effets du second ordre reste dans les limites dites « admissibles ». Alternativement, les spécifications ont fourni les outils nécessaires pour tenir compte de ces effets en utilisant des

approches basées sur la longueur effective ou l'amplification des moments et des déflexions. La façon la plus simple, pour s'assurer de ne pas avoir besoin de considérer les effets du second ordre, est de s'assurer que la structure et ses éléments sont suffisamment rigides de façon à pouvoir considérer ces effets comme négligeables. Il est possible de dépenser temps et efforts pour éviter une analyse du second ordre en prouvant que ces effets seront négligeables. Par contre, si ces effets ne le sont pas, on trouve parmi les options qui s'offrent à l'ingénieur pour l'analyse de la stabilité, certaines méthodes d'analyse élastique du second ordre qui sont dans la plupart des cas disponibles en format de calcul sur ordinateur :

1. La méthode exacte.
2. La méthode du facteur d'amplification.
3. La méthode itérative basée sur la pseudo-charge ou sur la pseudo-déflexion.
4. La méthode du contreventement fictif (diagonale ayant une aire négative).
5. Approche du paramètre de la rigidité développée par (Le Messurier, 1977).

À noter que c'est un jugement personnel de chaque concepteur en ce qui concerne le choix de la méthode à utiliser. Toutefois, ce choix doit être guidé par le degré d'exactitude demandé dans la simulation des effets du second ordre.

2.4.1 Méthode exacte

Les techniques d'analyse du deuxième ordre impliquent un processus itératif. Une méthode dite exacte et performante est celle qui tient compte des effets $P-\Delta$ et $P-\delta$, du comportement « élasto-plastique » des matériaux, de l'influence des contraintes résiduelles, des imperfections géométriques, du degré de rigidité des assemblages, de l'interaction entre les membrures de la structure et les diaphragmes verticaux (murs de refend) et horizontaux (dalles de planchers) et la distribution de la propagation de la plasticité. Pour des structures qui respectent un certain degré de flexibilité basé sur des critères de tenue en service, le recours à des méthodes matricielles élastiques simples qui effectuent des itérations pour aboutir à une convergence en fonction de la

précision imposée, et qui modifient les paramètres de rigidité pour prendre en considération les effets des forces axiales, s'avère un choix judicieux. L'équation fondamentale d'équilibre du système pour une analyse non linéaire est :

$$\{F\}_s - \{R\}_s = 0 \quad (2.15)$$

où le vecteur des charges $\{R\}_s$ comprend la contribution de toutes forces nodales externes et le vecteur $\{F\}_s$ comprend les forces nodales correspondantes aux contraintes dans les éléments pour cette configuration. Ce vecteur est connu comme un vecteur de charge interne. La solution de l'équation non linéaire est exécutée par une analyse incrémentale pas à pas avec la totalité des charges appliquées divisées en un nombre de pas de chargement. La méthode la plus populaire pour la solution des équations non linéaires est la méthode de Newton-Raphson (Nocedal & Wright, 2006). Le comportement « élasto-plastique » du matériau exige quant à lui des considérations additionnelles.

2.4.2 Méthode du facteur d'amplification

À défaut d'une analyse exacte, la norme canadienne **CSA/CAN S16-14** (article 8.4.2) propose, entre autres, la méthode du facteur d'amplification U_2 . Pour tenir compte des effets $P - \Delta$ on procède en premier à une analyse structurale du premier ordre. Avec les déplacements latéraux obtenus de cette analyse et les charges verticales, on amplifie les forces internes obtenues. Donc, la méthode du facteur d'amplification consiste à amplifier les moments de flexion dus aux charges latérales M_{ft} obtenues d'une analyse du premier ordre par le facteur U_2 tel que :

$$U_2 = \frac{1}{1 - \left(\frac{\sum C_f \Delta_f}{\sum V_f h} \right)} \leq 1,4 \quad (2.16)$$

où :

U_2 : le facteur d'amplification qui affecte le moment M_{ft}

ΣC_f : la somme des charges axiales pondérées;

ΣV_f : la somme des efforts tranchants pondérés dans tous les poteaux de l'étage (égale à la somme des charges latérales pondérées au-dessus de cet étage);

Δ_f : le déplacement latéral total pondéré;

h : la hauteur de l'étage.

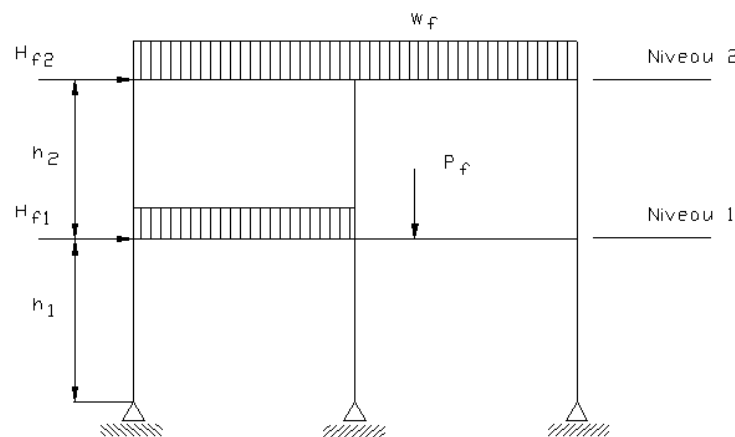
Par exemple, sur la structure montrée à la Figure 2-5, il s'agit de séparer les effets des charges de gravité de ceux des charges latérales parce que le facteur d'amplification U_2 affecte uniquement les charges latérales. Pour obtenir les moments dus aux charges de gravité M_{fg} , il faut procéder à une analyse structurale du premier ordre tout en empêchant la structure de se déplacer latéralement (voir Figure 2-6). Comme deuxième étape, la structure est analysée sous l'effet des charges latérales seules et, de cette analyse, on obtient les moments M_{ft} et les déplacements Δ_1 qui sont utilisés dans (2.16) pour déterminer la valeur du facteur d'amplification U_2 .

Si le facteur d'amplification U_2 calculé pour un étage quelconque dépasse la valeur limite prescrite par les spécifications (1,4 dans le cas de la norme canadienne), cela signifie que la structure est trop flexible. Dans une telle situation, le concepteur doit choisir entre augmenter la rigidité latérale de la structure ou procéder à une analyse structurale « élasto-plastique » du second ordre, sauf s'il est démontré que les contraintes aux sections critiques, en tenant compte des contraintes résiduelles ne sont pas supérieures à la limite élastique de l'acier F_y . Toutefois, les limites sur les

flèches latérales imposées par les différents standards et spécifications pour la bonne tenue de la structure en service sont restrictives et contrôlent généralement le choix de la rigidité. Le concepteur peut aussi démontrer qu'il n'y a pas de plastification des sections même si le facteur d'amplification U_2 dépasse la valeur limite de 1,4. L'utilisation de la méthode du facteur d'amplification oblige le concepteur à considérer séparément les charges de gravité et les charges latérales. Le moment final est égal à :

$$M_f = M_{fg} + U_2 M_{fi} \quad (2.17)$$

où M_f représente les moments incluant les effets du deuxième ordre.



Charges de gravité et charges latérales

Figure 2-5 : Effets deuxième ordre – Facteur d'amplification : structure réelle

Pour ce qui est des combinaisons incluant seulement des charges de gravité, le déplacement latéral dû à l'asymétrie des charges et/ou de la géométrie de la structure doit être pris en considération. Cependant, les effets provenant de la translation de la structure ne doivent pas être inférieurs aux effets de charge produits par des charges latérales fictives minimales à chaque étage

qui sont de l'ordre de 0,005 fois la totalité des charges de gravité pondérées et qui sollicitent l'étage considéré (*CSA/CAN /S16.1*).

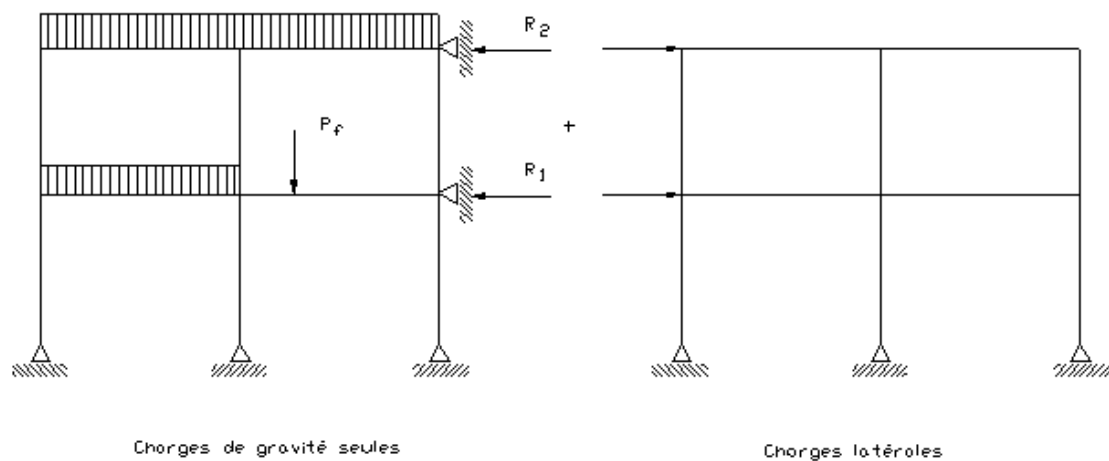


Figure 2-6 : Effets deuxième ordre – Facteur d'amplification : analyse du 1^{er} ordre

Étant donné que la charge sismique est obtenue en considérant les masses susceptibles d'être présentes dans la structure lors d'un tremblement de terre, il s'agit donc des charges permanentes d'utilisation (non pondérées). En d'autres termes, la valeur de ΣC_f à utiliser dans (2.16) doit correspondre aux charges de gravité non pondérées.

2.4.3 Méthode des charges horizontales fictives

La méthode des charges horizontales fictives est une méthode itérative qui consiste à simuler les effets $P - \Delta$ par une charge horizontale fictive égale $P\Delta / h$ appliquée en tête des poteaux. Pour illustrer cette méthode prenons l'exemple du cadre simple montré à la Figure 2-7. Une première analyse structurale du premier ordre est exécutée avec $H_1 = H$ et de cette analyse structurale, on obtient un déplacement latéral Δ_1 . Les moments de flexion obtenus aux nœuds *C* et *D* sont :

$$M_{C1} = M_{D1} = \frac{H_1 h}{2} \quad (2.18)$$

Avec les charges verticales P et le déplacement Δ_1 on corrige les moments du premier ordre qui deviennent :

$$M_{C2} = M_{D2} = \frac{H_1 h}{2} + P\Delta_1 \quad (2.19)$$

On détermine la charge horizontale H_2 qui produit le moment de flexion du premier ordre en tête du poteau M_{C2} tel que:

$$M_{C2} = M_{D2} = \frac{H_2 h}{2} = \frac{H_1 h}{2} + P\Delta_1 \quad (2.20)$$

avec $H_2 = H_1 + \frac{2P\Delta_1}{h}$.

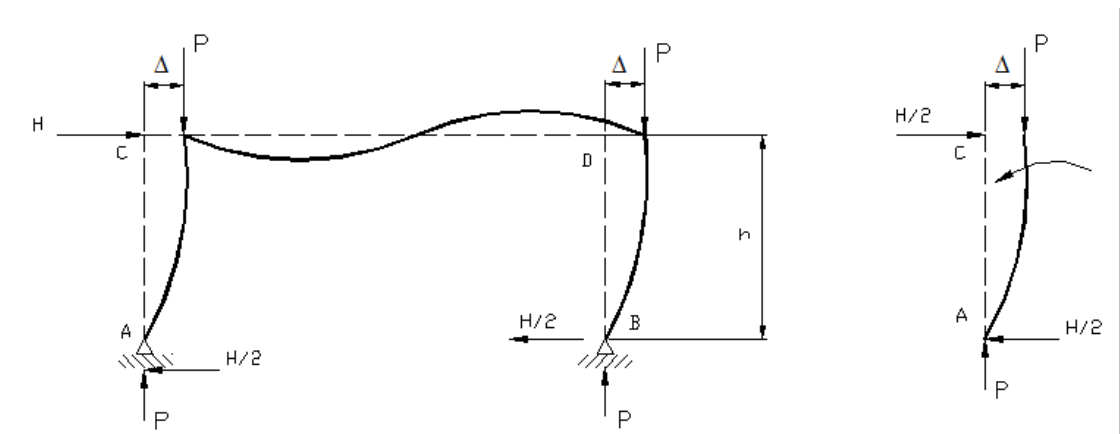


Figure 2-7 : Cadre rigide – Effets de deuxième ordre (méthode des charges horizontales fictives)

On continue le processus en exécutant une deuxième analyse du premier ordre avec une charge horizontale égale à $H_2 = H_1 + \frac{2P\Delta_1}{h}$ et on obtient un déplacement Δ_2 . Avec ce déplacement et la totalité des charges verticales P , on corrige les moments obtenus à partir de H_2 . Cependant, il faut soustraire de Δ_2 le déplacement Δ_1 qui est inclus dans le calcul de la force latérale H_2 tel que :

$$\begin{aligned}
 M_{C3} &= M_{D3} = \frac{H_3 h}{2} \\
 H_3 &= H_2 + \frac{2P(\Delta_2 - \Delta_1)}{h} \\
 M_{C3} &= M_{D3} = \left(H_2 + \frac{2P(\Delta_2 - \Delta_1)}{h} \right) \frac{h}{2} \\
 M_{C3} &= M_{D3} = \frac{H_2 h}{2} + P(\Delta_2 - \Delta_1) \\
 M_{C3} &= M_{D3} = \left(H_1 + \frac{2P\Delta_1}{h} + \frac{2P(\Delta_2 - \Delta_1)}{h} \right) \frac{h}{2} \\
 M_{C3} &= M_{D3} = \frac{Hh}{2} + P\Delta_2
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

On détermine la charge horizontale H_3 qui produit le moment du premier ordre M_{C3} :

$$H_3 = H + \frac{2P\Delta_2}{h} \tag{2.22}$$

Si le déplacement horizontal Δ_3 calculé à partir de H_3 est presque égal à Δ_2 , on peut considérer que le processus itératif a convergé. Les efforts tranchants et les moments aux nœuds B et C sont alors donnés par :

$$V = \frac{H_3}{2} = \frac{H}{2} + \frac{P\Delta_3}{h} \tag{2.23}$$

$$M_C = M_D = Vh = \frac{H_3}{2}h = \frac{H}{2}h + P\Delta_3$$

Dans le cas contraire, le processus itératif est poursuivi jusqu'à l'obtention de la précision souhaitée. Ce concept est appliqué aux calculs des structures à étages dont les différentes étapes de calcul nécessaires à l'application de cette méthode sont (voir Figure 2-7) :

1. À un niveau i , effectuer une analyse du premier ordre pour obtenir le déplacement latéral pondéré Δ_{fi} dû aux charges pondérées. Calculer les efforts tranchants fictifs V'_{fi} qui produisent, aux extrémités des poteaux, des moments de flexion équivalents à ceux causés par les charges verticales C_{fi} agissant sur la structure déformée à partir de :

$$V'_i = \frac{\sum C_{fi}}{h_i} (\Delta_{fi+1} - \Delta_{fi}) \quad (2.24)$$

2. Calculer la charge horizontale fictive à chaque niveau tel que :

$$H'_i = V'_{i-1} - V'_i \quad (2.25)$$

3. Additionner la charge horizontale fictive H'_i à la charge horizontale pondérée appliquée au même niveau et analyser de nouveau la charpente.

La méthode arrive à convergence lorsque les déplacements horizontaux obtenus à la fin d'un cycle de calcul restent pratiquement inchangés. Il faut souligner que cette méthode requiert de nombreux calculs pour déterminer les forces et les charges fictives résultant de chaque itération.

2.4.4 La méthode du contreventement fictif

Pour une charpente, il est possible de simuler les effets $P - \Delta$ en plaçant à chaque niveau une diagonale d'aire négative qui contribue à réduire la rigidité de la structure (voir Figure 2-9). Cette

membrure fictive force la charpente à se déformer d'une quantité égale à celle produite par les effets du deuxième ordre. L'aire de la diagonale fictive est calculée selon laquelle :

$$A_i = - \frac{\Sigma C_{fi}}{h_i} \frac{L_i}{E \cos^2 \alpha_i} \quad (2.26)$$

où ΣC_f est la somme des charges verticales qui sollicitent tous les poteaux de l'étage considéré et E est le module d'élasticité de l'acier. Il convient de souligner que si le sinus de l'angle d'inclinaison de la diagonale fictive avec l'horizontal (α) est relativement grand, l'intensité des forces axiales dans les poteaux peut être faussé.

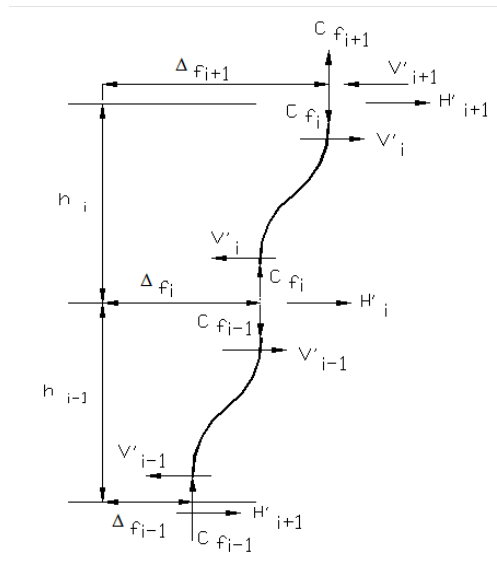


Figure 2-8 : Identification des charges horizontales fictives

2.4.5 Analyse pratique du second ordre (Le Messurier, 1977).

La Figure 2-10a montre une membrure AB en porte-à-faux dont l'extrémité A est encastree parfaitement. La membrure AB est sollicitée par une force horizontale V appliquée à l'extrémité

libre B . La Figure 2-10b montre la déformée de la membrure où l'extrémité B se déplace d'une quantité $\Delta_{0v} = H$ sous l'action d'une force horizontale P_L telle que :

$$\frac{\Delta_{0v}}{H} = \frac{V}{P_L} \rightarrow P_L = \frac{VH}{\Delta_{0v}} \quad (2.27)$$

Sachant que $\Delta_{0v} = \frac{VH^3}{3EI}$, (2.27) devient :

$$P_L = \frac{3EI}{H^2} \quad (2.28)$$

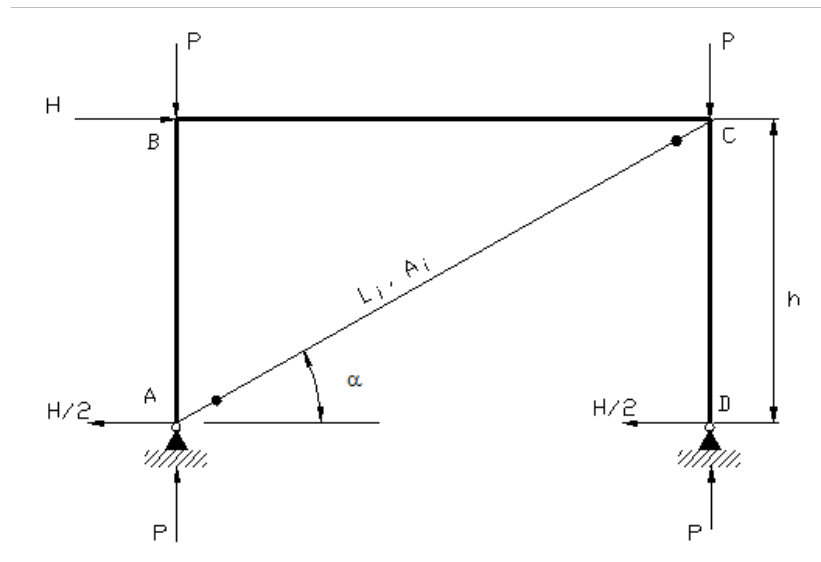


Figure 2-9 : Méthode de la diagonale fictive

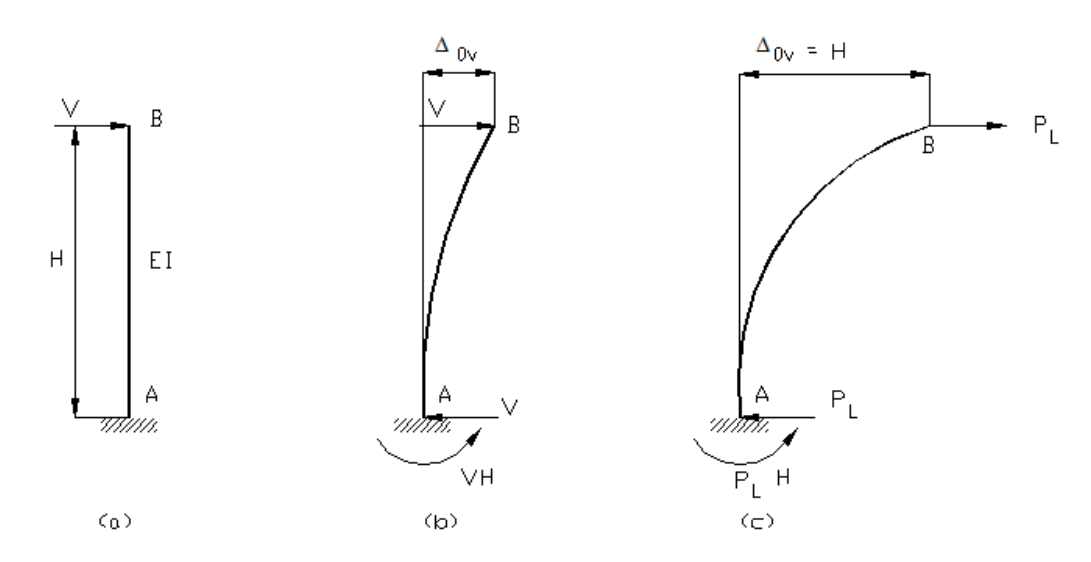


Figure 2-10 : Membrane en porte-à-faux

La Figure 2-11 montre un cadre simple sollicité par une force horizontale V appliquée au nœud B et une force verticale P appliquée au nœud C . La présence des forces horizontale et verticale impose une analyse structurale du second ordre. La Figure 2-12 montre la déformée de la structure, les réactions aux appuis et les forces internes. La déflexion de la membrure AB est telle que :

$$\Delta_{pv} = \left(V + P \frac{\Delta_{pv}}{H} \right) \frac{H^3}{3EI} \quad (2.29)$$

Sachant que $P_L = \frac{3EI}{H^2}$, (2.29) devient :

$$\frac{\Delta_{pv}}{H} = \frac{\left(V + P \frac{\Delta_{pv}}{H} \right)}{P_L} \quad (2.30)$$

ou encore après simplification :

$$\frac{\Delta_{pv}}{H} = \frac{V}{P_L - P} \quad (2.31)$$

avec :

Δ_{0v} : déplacement horizontal sous l'action de V seulement;

Δ_{pv} : déplacement horizontal sous l'action de V et P simultanément.

Le déplacement horizontal atteint l'infini lorsque P est égale P_L (paramètre de rigidité). Donc, la charge critique de flambement est $P_{cr} = P_L$.

Le ratio des forces internes qui resultent des effets du second ordre et de celles obtenues d'une analyse de premier ordre définit le facteur d'amplification. Le facteur d'amplification des moments en A est :

$$F.A = \frac{VH + P\Delta_{pv}}{VH} = 1 + \frac{P\Delta_{pv}}{VH} \quad (2.32)$$

En considérant (2.30), on obtient:

$$F.A = \frac{1}{1 - (P/P_L)} \quad (2.33)$$

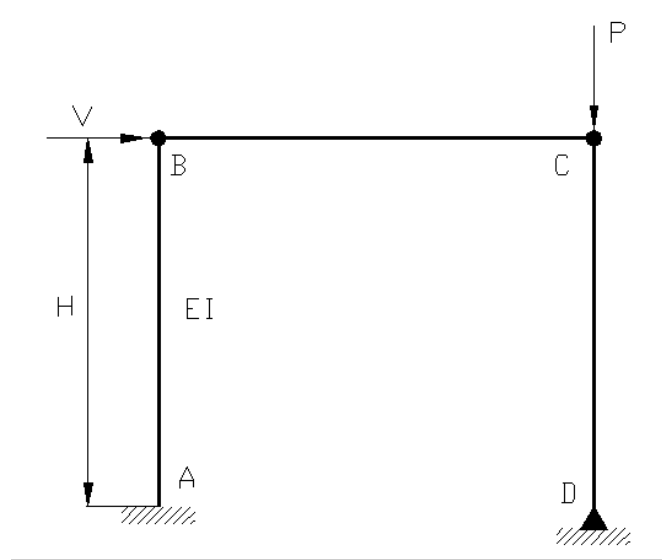


Figure 2-11 : Cadre simple – Charge verticale en tête du poteau articulé aux deux extrémités

Examinons maintenant le cas où la membrure AB est sollicitée par une charge verticale axiale P telle que montré à la Figure 2-13. La Figure 2-14a montre les réactions et la déformée de la membrure AB . La Figure 2-14b montre le diagramme des moments de flexion du premier ordre. La Figure 2-14c montre le diagramme des moments de flexion du second ordre. Ce diagramme a une forme similaire à la déformée de la membrure. La déflexion Δ_{pv} est calculée avec la méthode des charges élastiques telle que :

$$\Delta_{pv} = \frac{VH^3}{3EI} + \frac{P\Delta_{pv}H^2}{3EI} + \left(\frac{P\Delta_{pv}}{EI}H^2\right) \int_0^1 \left(\frac{a^2 - a^4}{2}\right) da \quad (2.34)$$

En fonction de P_L , (2.34) devient :

$$\Delta_{pv} = \frac{VH}{P_L} + \frac{P\Delta_{pv}}{3EI} + \frac{P\Delta_{pv}}{P_L} \left(3 \int_0^1 \left(\frac{a^2 - a^4}{2}\right) da\right) \quad (2.35)$$

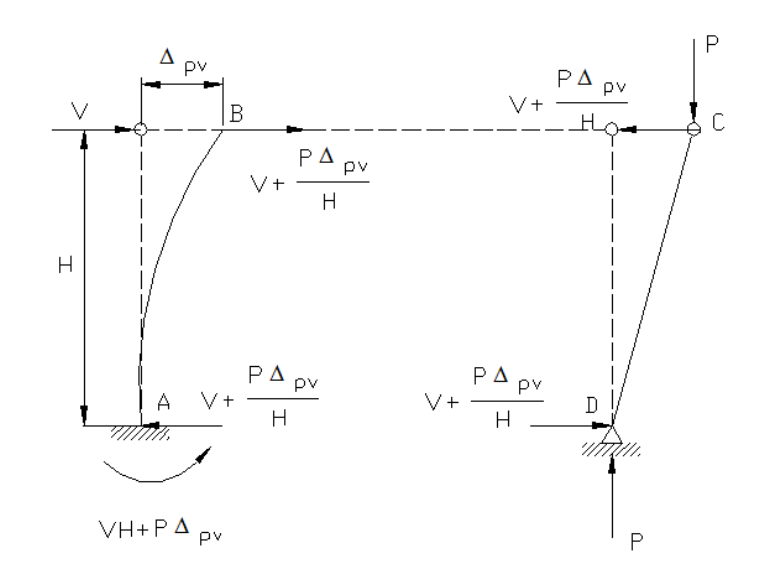


Figure 2-12 : Cadre simple – Charge verticale en tête du poteau articulé aux deux extrémités – Configuration de la déformée

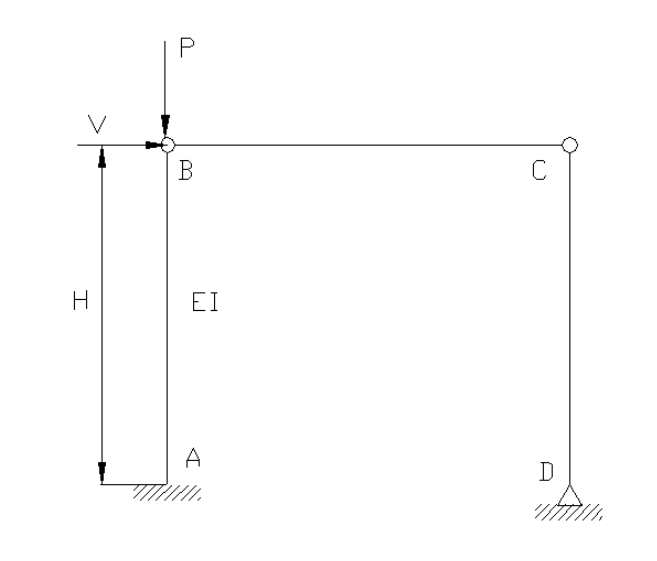


Figure 2-13 : Cadre simple – Charge verticale en tête du poteau encastré à sa base

La valeur de l'intégrale $(3 \int_0^1 (\frac{a^2 - a^4}{2}) da)$ est égale à 0,2, donc (2.35) prend la forme :

$$\frac{\Delta_{pv}}{H} = \frac{V}{P_L - P - 0,2P} \quad (2.36)$$

L'équation (2.36) est très similaire à (2.31) à l'exception du terme additionnel $0,2P$ dans le dénominateur. Le terme $0,2P$ est correct seulement si l'intensité de P est petite. Par contre, si la charge V est petite et P approche la charge critique de flambement, la déformée de la membrure aura une forme sinusoïdale telle que démontrée par *Euler*. La Figure 2-15 montre le moment du second ordre de forme sinusoïdale de la section située à une hauteur aH de B qui est égal à $P\Delta_{pv}(\sin \pi a/2)$. La déflexion Δ_{pv} est égale à :

$$\Delta_{pv} = \frac{VH^3}{3EI} + \frac{P\Delta_{pv}H^2}{3EI} + \left(\frac{P\Delta_{pv}}{EI}H^2\right) \int_0^1 a \left(\sin \frac{\pi}{2} a - a \right) da \quad (2.37)$$

En fonction de P_L , (2.37) devient :

$$\Delta_{pv} = \frac{VH}{P_L} + \frac{P\Delta_{pv}}{3EI} + \frac{P\Delta_{pv}}{P_L} \left(\frac{3}{(\pi/2)^2} - 1 \right)$$

$$\frac{\Delta_{pv}}{H} = \frac{V}{P_L - P - \left(\frac{3}{(\pi/2)^2} - 1 \right) P} \quad (2.38)$$

Le terme entre parenthèses de (2.38) est égal à 0,216, donc 8 % plus grand que 0,2. Il est proposé que la déflexion soit :

$$\frac{\Delta_{pv}}{H} = \frac{V}{P_L - P - C_L P} \quad (2.39)$$

où C_L est une constante qui varie entre 0,2 et 0,216 en fonction de la variation de P entre $P = 0$ et $P = P_e$ pour le poteau en porte-à-faux,. Ceci est dû au changement de la configuration de la déformée qui accompagne l'augmentation de la charge axiale. Si les termes du numérateur et du dénominateur entre parenthèses de (2.38) sont multipliés par EI/H^2 , les termes entre parenthèses deviennent :

$$\left(\frac{3 \frac{EI}{H^2}}{\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \frac{EI}{H^2}} - 1 \right), \text{ ce qui est identique à } \left(\frac{P_L}{P_e} - 1 \right) \text{ et où } P_e \text{ est la charge critique d'Euler pour le}$$

poteau en porte-à-faux. L'équation (2.39) peut être généralisée pour tout autre poteau sous la forme :

$$\frac{\Delta_{pv}}{H} = \frac{V}{P_L - P - \left(\frac{P_L}{P_e} - 1 \right) P} \quad (2.40)$$

Le dénominateur du côté droit de l'équation devient égal à zéro lorsque $P = P_e$, ce qui signifie que la déflexion devient égale à l'infini pour toute valeur de V au moment du flambement. Ceci doit être le cas pour une analyse correcte du second ordre. En général, pour tout poteau qui subit un déplacement provenant d'une rotation, on peut écrire :

$$C_L = \left(\frac{P_L}{P_e} - 1 \right) \quad (2.41)$$

En introduisant le paramètre β qui prend en considération le degré des retenues élastiques aux extrémités du poteau, on obtient :

$$P_L = \beta \frac{EI}{H^2} \quad (2.42)$$

et

$$P_e = \left(\frac{\pi}{K} \right)^2 \frac{EI}{H^2} \quad (2.43)$$

où K est le facteur de la longueur effective. Donc, l'Eq. (2.41) devient :

$$C_L = \left(\frac{\beta K^2}{\pi^2} - 1 \right) \quad (2.44)$$

Les valeurs de β et K dépendent des conditions aux extrémités des poteaux définies par :

$$G = \frac{\sum \frac{EI_c}{L_c}}{\sum \frac{EI_g}{L_g}} \quad (2.45)$$

Pour un poteau en porte-à-faux $G_{\text{sup}} = \infty$, $G_{\text{inf}} = 0$, $\beta = 3$, $K = 2$, et $C_L = 0,216$. La substitution de (2.39) dans (2.32) donne :

$$F.A. = \frac{1}{1 - \frac{P}{P_L - C_L P}} \quad (2.46)$$

Aussi, lorsque le dénominateur de (2.40) ou de (2.46) est égal à zéro, le poteau devient instable. L'utilisation de (2.40) donne :

$$P_L - P_{cr} - C_L P_{cr} = 0$$

$$P_{cr} = \frac{P_L}{1 + C_L} \quad (2.47)$$

Ceci est en quelque sorte une autre façon d'écrire (2.41). Toutefois, l'application de (2.47) revêt une grande signification lorsqu'elle est appliquée à l'ensemble de la structure. Dans tout ce qui précède, la seule approximation faite est de retenir une valeur constante de C_L . Dans ces équations, C_L tient compte de la réduction de la rigidité dans le poteau due à la présence de la force axiale.

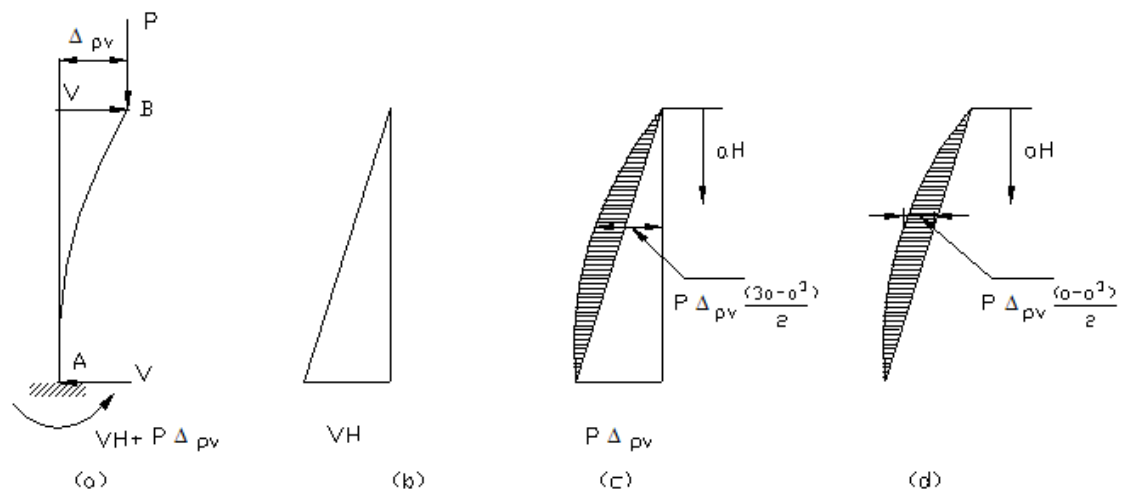


Figure 2-14 : Cadre simple – Charge verticale en tête du poteau encasté à sa base – configuration de la déformée

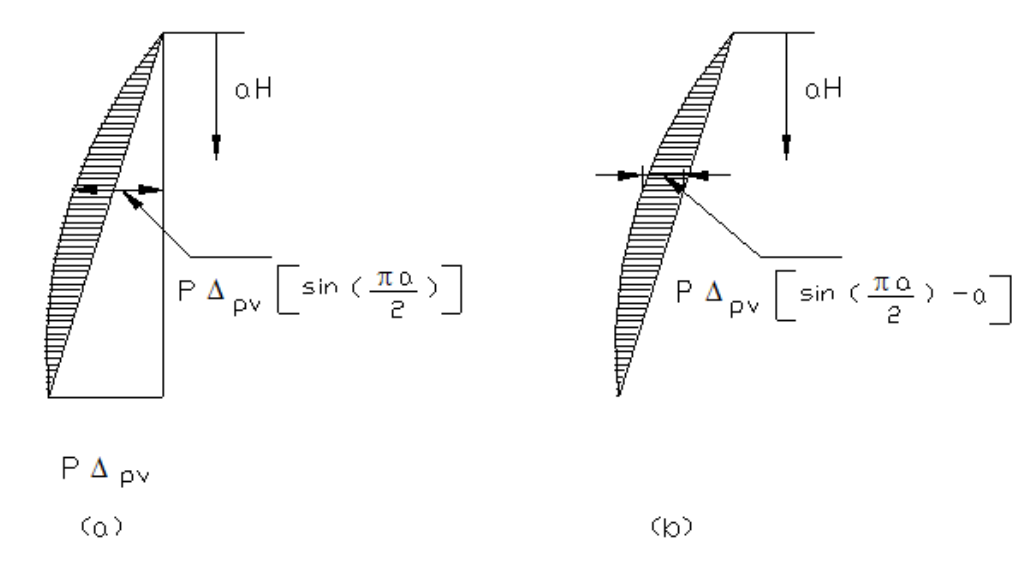


Figure 2-15 : Moment du second ordre – Configuration sinusoïdale

2.5 COMMENTAIRES SUR LES DIFFÉRENTES APPROCHES ADOPTÉES POUR LE CALCUL DES EFFETS DU SECOND ORDRE

2.5.1 Analyse rigide plastique

En pratique, un cadre rigide ne possède pas les caractéristiques qui garantissent un comportement parfaitement élastique. Éventuellement, sous l'effet de diverses sollicitations, la plastification prendra place et le comportement décrit par une analyse élastique peut ne pas être valide. Une des méthodes utilisée pour déterminer la charge qu'un cadre peut supporter est celle basée sur la théorie du comportement rigide plastique. Conformément à cette théorie, le cadre est supposé indéformable jusqu'à l'atteinte d'un moment égal au moment plastique à suffisamment d'endroits pour former un mécanisme. Ceci signifie que la relation « moment-courbure » est composée d'une ligne verticale (voir Figure 2-16) jusqu'à l'atteinte du moment plastique M_{pc} .

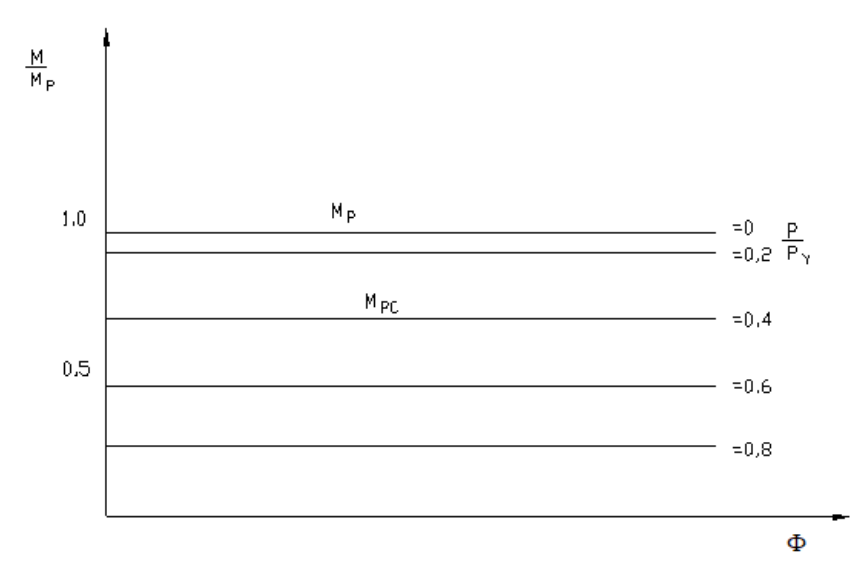


Figure 2-16 : Relation $M - P - \Phi$ plastique rigide

Donc, il n'y aura pas de déformations en autant que $M < M_{PC}$. Par la suite, la courbure augmente indéfiniment pour un moment constant (lignes horizontales sur la Figure 2-16). La valeur du moment M_{PC} dépend de l'intensité de la force axiale dans la membrure et peut être estimée par :

$$M_{PC} = 1,18M_P \left(1 - \frac{P}{P_Y}\right) \quad (2.48)$$

où $M_P = Z\sigma_Y$ est le moment plastique lorsque $P = 0$. Le cadre montré à la Figure 2-17 va développer un mécanisme rigide lorsque des rotules seront formées aux extrémités des poteaux (voir Figure 2-18). Le mécanisme sera formé lorsque les moments d'extrémités montrés à la Figure 2-19 sont :

$$M_{AB} = M_{BA} = - (M_{PC})_{AB} \quad (2.49)$$

$$M_{CD} = M_{DC} = -(M_{PC})_{CD}$$

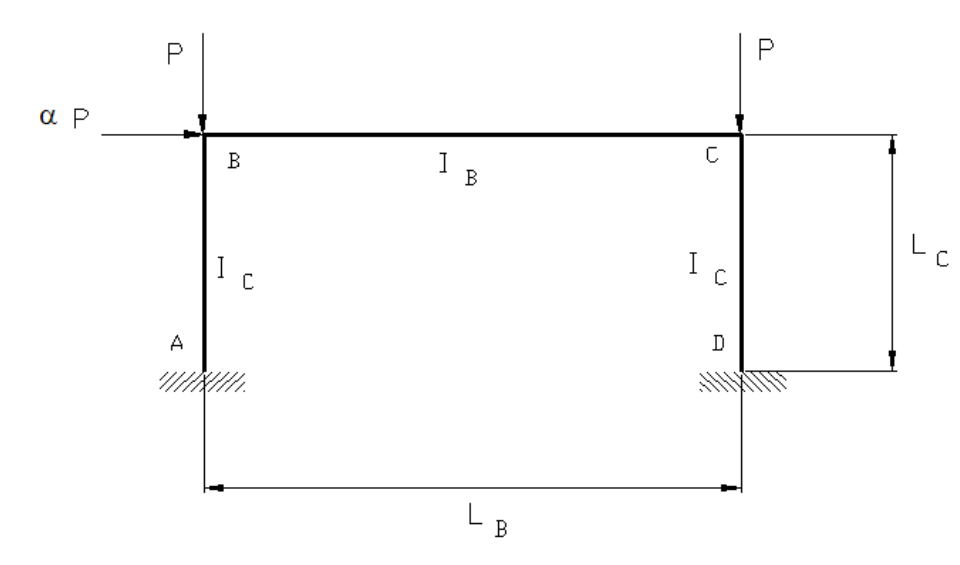


Figure 2-17 : Cadre rigide simple encastré aux pieds

La valeur de M_{PC} dans chaque membrure est affectée par l'intensité de la force axiale suivant (2.48). Les rotules plastiques se forment dans les poteaux plutôt que dans les poutres puisque ces dernières sont sollicitées par de faibles forces axiales comparativement aux poteaux et que le moment plastique des poutres est supérieur au moment plastique des poteaux-poutres. Pour simplifier le problème, on suppose que la force axiale dans les deux poteaux-poutres est égale à P , ce qui mène à :

$$M_{AB} = M_{BA} = M_{CD} = M_{DC} = -M_{PC} = -1,18M_P \left(1 - \frac{P}{P_Y} \right) \quad (2.50)$$

où P est la charge verticale en tête des poteaux. La substitution de ces moments d'extrémité dans l'équation d'équilibre :

$$PL(2\rho + \alpha) + M_{AB} + M_{BA} + M_{CD} + M_{DC} = 0 \quad (2.51)$$

donne finalement :

$$PL(2\rho + \alpha) - 4M_{PC} = 0 \quad (2.52)$$

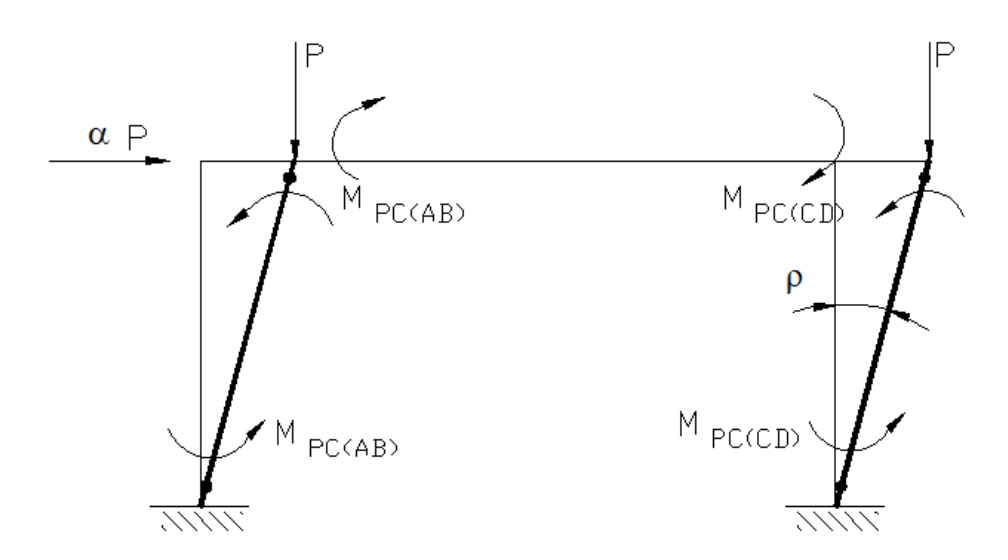


Figure 2-18 : Mécanisme d'un cadre rigide simple encastré aux pieds

On peut résoudre (2.52) en terme de P sachant que $P_Y = A\sigma_Y$, $M_{PC} = 1,18M_P$ tel que :

$$\frac{P}{P_Y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{P_Y L}{4,72 M_P} \right) (2\rho + \alpha)} \quad (2.53)$$

La représentation graphique pour $\alpha = 0,1$ et

$$\frac{A\sigma_y L}{M_p} = \frac{A\sigma_y L}{Z\sigma_y} = \frac{AL}{fs} = \frac{AL}{f} \left(\frac{d}{2I} \right) = \left(\frac{L}{r} \right) \left(\frac{d}{r} \right) \left(\frac{1}{2f} \right) \quad (2.54)$$

est montrée à la Figure 2-20. Il s'agit d'une courbe du second ordre parce que la rotation ρ est incluse dans l'équation d'équilibre. Lorsque $\rho = 0$ au début de la formation du mécanisme, nous pouvons trouver la valeur de P_{p1} qui est la charge maximale plastique rigide de premier ordre qu'on obtient d'une simple analyse plastique. Dès que la rotation fait son apparition, la capacité de résister aux charges est réduite selon (2.53). Donc, nous avons deux charges limites : la charge du flambement élastique P_E et la charge maximale plastique rigide de premier ordre P_{p1} . Les deux charges sont plus élevées que la charge réelle qui peut être supportée. Ceci s'explique par le fait que la vraie courbe $P - \rho$ est délimitée par les courbes élastiques du second ordre et la courbe plastique rigide. On peut obtenir une meilleure estimation de la charge maximale en utilisant P au point d'intersection des deux courbes. C'est le point P_{A2} sur la courbe de la Figure 2-20.

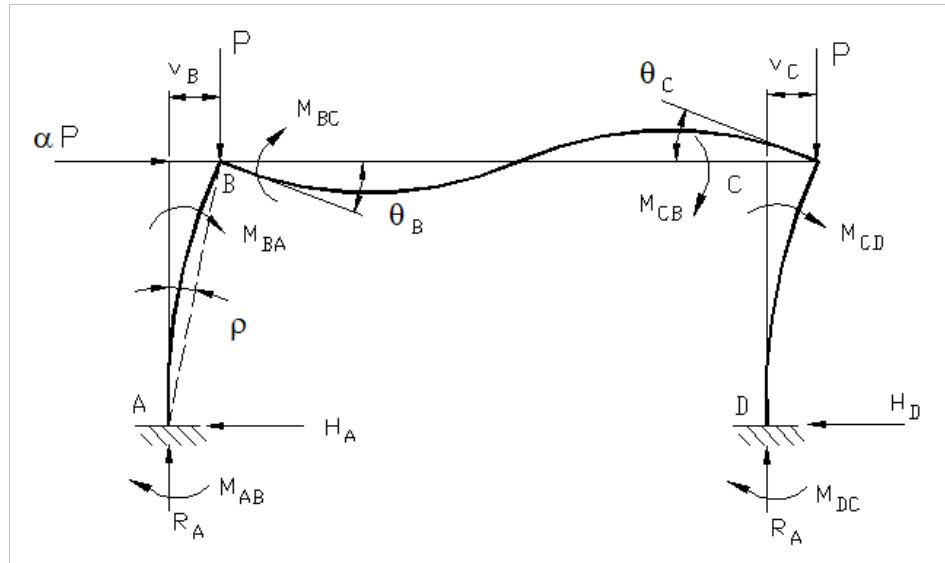


Figure 2-19 : Forces et déformations du cadre

Nous désignons les différentes charges obtenues des analyses comme étant des charges de références et chaque charge a une signification particulière par rapport à la charge maximale P_M . Les charges de référence possibles sont classées sur les Figure 2-20 et Figure 2-21. La courbe qui représente le comportement réel du cadre est obtenue par un test expérimental.

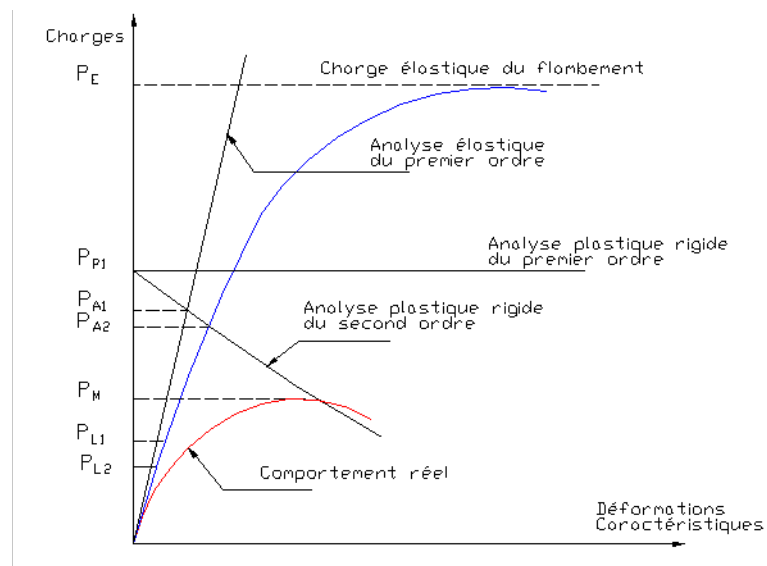


Figure 2-20 : Courbes schématiques illustrant le comportement du cadre

Quatre courbes additionnelles sont montrées à la Figure 2-21 : les courbes élastiques du premier et second ordre et les courbes rigides plastiques du premier et second ordre. Les diverses charges de référence sur ces courbes sont :

P_E : la charge élastique du flambement;

P_{P1} : la charge plastique rigide du premier ordre;

P_{A1} et P_{A2} : les charges à l'intersection de la courbe rigide plastique et les courbes élastiques du premier ordre et du deuxième ordre respectivement;

P_{L1} et P_{L2} : les charges auxquelles les rotules commencent à se développer sur les courbes élastiques du premier et du deuxième ordre.

La Figure 2-21 regroupe les courbes élasto-plastiques du premier et du second ordre avec les charges de référence additionnelles suivantes :

P_{A3} : le point d'intersection entre la courbe élasto-plastique du premier ordre et la courbe plastique-rigide du second ordre;

P_{P2} : le point maximal sur la courbe élasto-plastique du second ordre;

P_J : le point d'intersection entre la courbe élasto-plastique du second ordre et les courbes plastique-rigide du second ordre.

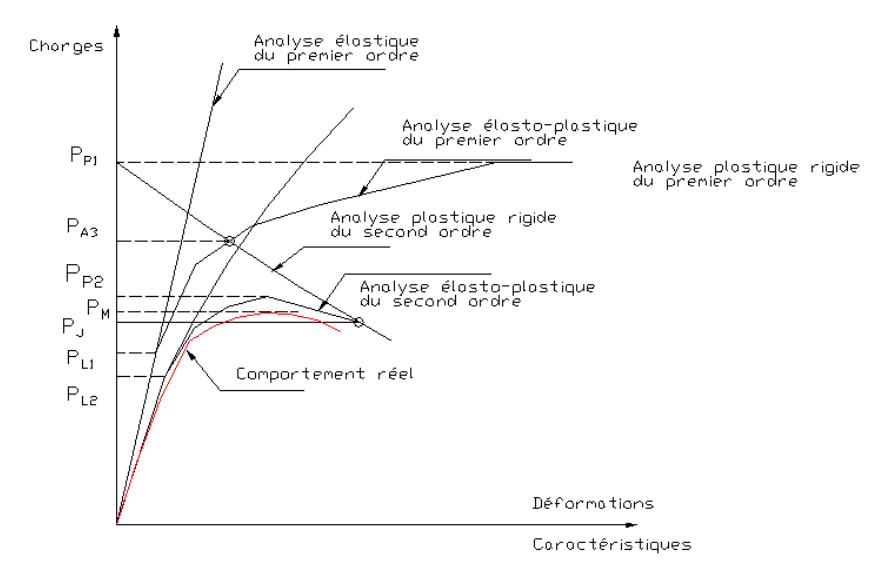


Figure 2-21 : Courbes charges / déformations obtenues des analyses « élasto-plastiques » et plastique-rigide

2.5.2 Analyse élastique de premier ordre

Dans cette analyse, la réponse de la structure est parfaitement élastique et linéaire et les équations d'équilibre sont formulées pour une structure non déformée. L'analyse élastique du

premier ordre est considérée comme étant la plus simple et les ingénieurs concepteurs sont familiers avec cette méthode. Depuis le début du vingtième siècle, une multitude de méthodes ont été développées pour l'obtention de solution analytiques exactes (le travail virtuel, la méthode des rotations et la méthode de distribution des moments). Plus récemment, des méthodes basées sur la manipulation algébrique des matrices ont fait leur apparition. On parle ici de la méthode de la matrice de rigidité ou la matrice de flexibilité. La méthode de la matrice de rigidité est la plus utilisée et implémenté dans la quasi-totalité des logiciels d'analyse des structures. Il est habituel de négliger l'influence des forces axiales et des efforts tranchants sur la rigidité des membrures. Ces effets sont toutefois de plus petites magnitudes que les effets des déformations dues à la flexion qui jouent un rôle très important dans les analyses du second ordre. En dehors de fournir la charge de référence P_{Al} au point d'intersection avec la courbe « plastique-rigide » du second ordre (voir Figure 2-20) qui est une limite supérieure à P_M , la solution élastique du premier ordre donne aussi la charge P_{Li} là où le comportement élastique se termine. La méthode donne aussi les déformations correspondantes à ces charges. La charge P_{Li} peut être définie de différentes façons. La définition la plus utilisée est que P_{Li} est la charge à laquelle les contraintes dans les fibres extrêmes seront égales à la limite élastique du matériau F_Y . Cette définition peut être modifiée pour une contrainte ultime égale à $F_Y - F_r$ pour tenir compte des contraintes résiduelles F_r ou pour une contrainte critique F_{cr} qui tient compte du déversement ou du flambement local. Une autre définition de la charge P_{Li} est qu'elle correspond à la formation de la première rotule dans le cadre. La première définition mène à une charge limite pour laquelle toutes les spécifications mène à une charge limite reflétant un comportement élastique sans apparition de rotules plastiques. La différence dans le niveau de la charge entre les deux définitions est égale à $f - 1$ où f est le facteur de la forme géométrique. Étant donné que le facteur de la forme géométrique pour les sections en forme de I fléchies selon l'axe fort est d'environ 1,14, cette différence n'est pas très significative. Pour les

structures sollicitées par des charges axiales plus élevées, cette charge n'est pas nécessairement la limite inférieure et il faudra être prudent dans l'interprétation de P_{LI} parce qu'elle néglige les effets dominants possibles du second ordre.

2.5.3 Analyse élastique du second ordre

Dans cette analyse, on suppose que la structure demeure élastique, mais les équations d'équilibre sont formulées pour la structure déformée. Les moments dans les membrures sont amplifiés par l'action des forces axiales agissant sur la déformée de la membrure; ce qui donne lieu à l'augmentation des déformations à un taux plus rapide que les charges. Éventuellement ces déformations deviennent très grandes jusqu'à atteindre l'infini théoriquement, ce qui correspond à la charge du flambement du cadre P_E . Une analyse globale élastique peut être réalisée dans tous les cas. Il n'y a aucune restriction. Nous réalisons donc l'analyse en supposant que le matériau (acier) est indéfiniment élastique. La prise en compte du premier ordre ou du second ordre dans cette analyse élastique dépend de la déformabilité de la structure et aussi du type de vérification réalisé (à nœuds fixes ou déplaçables). Il est à noter que faire une analyse élastique n'empêche pas de réaliser une vérification qui se base sur la résistance plastique des sections. En effet, le type de vérification (élastique ou plastique) de la résistance des sections ne dépend que des classes de ces dernières.

À l'exception des structures très simples comme celles montrées à la Figure 2-17, nous ne connaissons pas la magnitude des forces axiales au début de l'analyse. Toutefois, les forces axiales peuvent être estimées ou obtenues d'une analyse de premier ordre dans le premier cycle des calculs. Étant donné que les coefficients S et C , étant respectivement la rigidité rotationnelle à l'extrémité de la membrure et un facteur de partage des moments, sont très sensibles aux changements dans les valeurs des charges axiales, les meilleurs résultats sont obtenus après seulement quelques cycles de calculs. Une simplification supplémentaire est possible si

$PL^2/EI < 1,0$ parce qu'on pourra, dans cette situation, utiliser $S = 2$ et $C = 4$ sans crainte d'introduire des erreurs significatives. Les résultats d'une analyse élastique du second ordre peuvent être présentés sous forme de courbe charge/déflexion qui inclut les non-linéarités géométriques et une valeur pour la charge critique élastique du flambement P_E . Cette charge est considérée comme une charge de référence parce qu'elle représente la charge théorique la plus élevée que le cadre peut supporter. Une autre charge de référence peut être obtenue avec la définition d'une charge limite P_{L2} (voir Figure 2-21) qui marque la fin du comportement élastique et représente l'équivalent du second ordre de la charge P_{L1} . Cette charge peut être calculée pour $\sigma_{\max} = \sigma_{cr}$ (le cas du déversement ou du flambement local), pour $\sigma_{\max} = F_Y$ ou $\sigma_{\max} = F_Y - F_r$ (le cas où les contraintes résiduelles sont incluses) ou pour $M_{\max} = M_{PC}$.

La charge P_{L2} représente une limite inférieure de la résistance du cadre. Une autre charge de référence est P_{A2} qui est la charge se trouvant à l'intersection de la courbe élastique du second ordre et la courbe plastique rigide (voir Figure 2-20). Cette charge est toujours une limite supérieure de P_M . La performance d'une analyse élastique du second ordre est en sorte plus compliquée que l'analyse élastique du premier ordre. Toutefois, les mêmes méthodes et les outils de calculs peuvent être employés dans la solution et l'usage des ordinateurs devient indispensable même pour des cadres relativement simples. Dans l'analyse, la théorie des petites déformations est employée, par contre, celles dues aux forces axiales et aux efforts tranchants sont négligées. La théorie des petites déformations donne des résultats valides pour des charges inférieures ou égales à la charge qui correspond à la ruine en mode plastique rigide. Aux alentours de P_E , les déformations deviennent plus importantes; donc, la théorie des petites déformations n'est plus valide. Toutefois, la courbe qui définit la relation entre la charge (du second ordre) et la déflexion dans cette région, n'est pas

nécessaire. La valeur de P_E , telle qu'obtenue de la théorie des petites déformations, est égale à sa valeur obtenue d'une analyse du flambement. Les déformations dues aux efforts tranchants deviennent importantes uniquement dans le cas des poutres relativement courtes et profondes; donc, pour les cas des cadres courants, ces déformations peuvent être négligées. Les déformations axiales (l'allongement ou le raccourcissement des membrures) deviennent importantes pour des cadres élancés où la hauteur dépasse environ huit fois la largeur.

2.5.4 Approximation de *Merchant*

La Figure 2-20 montre six charges de référence qui aident à cerner la vraie charge maximale P_M . En général, quatre de ces six charges de référence sont obtenues avec la variation des efforts imposés à la structure P_E , P_{P1} , P_{A1} et P_{A2} qui sont des limites supérieures et P_{L2} est une limite inférieure de P_M . Étant donné que P_{P1} et P_E sont déjà déterminées pour les cadres de dimensions usuelles et étant donné que P_M est plus petite que ces deux charges, *Merchant* a suggéré d'utiliser P_{MA} pour l'approximation de P_M tel que :

$$\frac{P_{MA}}{P_{P1}} + \frac{P_{MA}}{P_E} = 1,0 \quad (2.55)$$

Si $P_M \ll P_E$, comme c'est le cas des cadres avec des charges relativement petites, $P_M = P_{P1}$. On peut réarranger (2.54) sous la forme :

$$P_{MA} = \frac{P_{P1} P_E}{P_E + P_{P1}} \quad (2.56)$$

La valeur de P_{MA} calculée selon (2.56) se trouve conservatrice dans la plupart des cas.

2.5.5 Analyse élasto-plastique

Une meilleure estimation de la valeur de P_M peut être obtenue par une analyse élasto-plastique du second ordre (voir Figure 2-21). Dans une telle analyse, nous supposons que les relations $M - \Phi$ peuvent être représentées approximativement telles que montrées à la Figure 2-22.

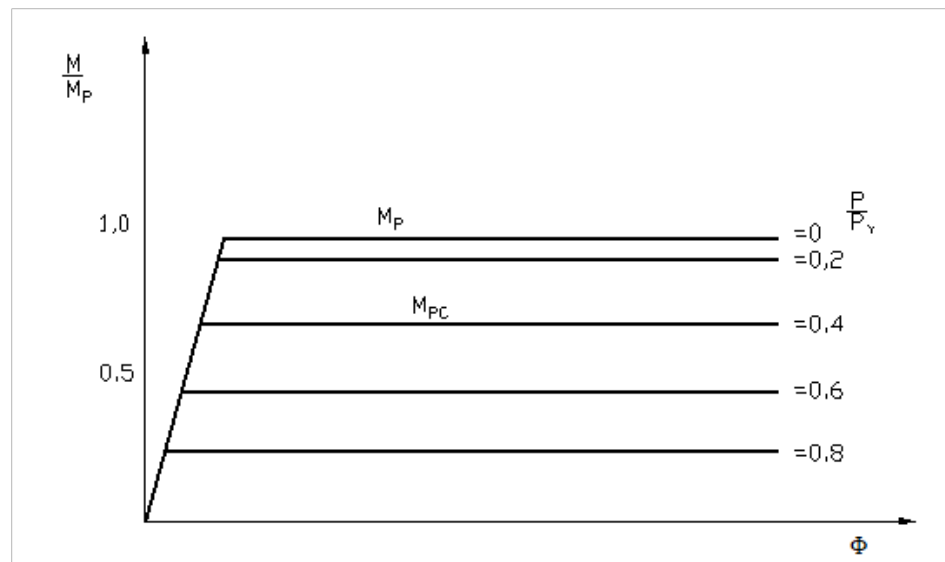


Figure 2-22 : Relation $M - P - \Phi$ élasto-plastique

Nous débutons par une analyse élastique du second ordre et de cette analyse, nous déterminons la charge qui correspond à la formation de la première rotule (P_{L2} de la Figure 2-21). L'analyse suivante est faite pour des incréments des charges au-dessus de P_{L2} et en supposant que la première rotule plastique est une rotule réelle incapable de résister aux moments. La rotule plastique suivante est trouvée et le processus est répété jusqu'au développement d'un mécanisme total avec la formation de la dernière rotule. À ce point, qui correspond au point P_J à la Figure 2-21, la courbe élasto-plastique du second ordre va rejoindre la courbe plastique-rigide du second ordre. La

charge maximale obtenue de l'analyse élasto-plastique du second ordre P_2 (voir Figure 2-21), représente maintenant la meilleure estimation de P_M bien qu'elle reste une limite supérieure. La courbe élasto-plastique du premier ordre montrée sur la Figure 2-21 atteint son niveau maximal à $P = P_{p1}$. Pour les cadres avec des charges axiales relativement petites, cette courbe va approximer le comportement réel du cadre. Son intersection avec la courbe rigide-plastique du second ordre donne une autre limite supérieure (P_{A3}) de la charge maximale.

L'examen de la Figure 2-23 peut nous amener à d'autres constations. En effet, La courbe représentée par un trait continu est la relation charge/déflexion élasto-plastique du second ordre. Le segment 0-1 correspond à un cadre totalement élastique. La courbe devient asymptotique à la charge P_E si un comportement infiniment élastique est supposé. Toutefois, une rotule est formée au point 1 et le cadre se comporte comme si une vraie rotule existait (segment 1-2). Si un comportement élastique illimitée est supposée après la formation de la première rotule, le segment 1-2 continu et devient asymptotique à la charge P_{D1} . Cette charge est inférieure à P_E et est égale à la charge du flambement du cadre détérioré qui a maintenant une vraie rotule. Après la formation d'une deuxième rotule, la nouvelle courbe est représentée par le segment 2-3 et si cette courbe doit continuer, elle devient asymptotique à une nouvelle charge de flambement P_{D2} (voir Figure 2-23). Cette détérioration va continuer jusqu'à la formation de la dernière rotule correspondant à la charge P_J où le cadre agit comme un mécanisme.

2.5.6 Méthode de la dernière rotule

L'estimation la plus proche de P_M résulte d'une analyse élasto-plastique du second ordre (la charge P_{p2} de la Figure 2-21). Il est possible d'obtenir un point sur cette courbe sans exécuter une

analyse complète élasto-plastique. Cette charge P_J est le point à lequel un mécanisme vient juste d'être formé et où les solutions obtenues de l'analyse élasto-plastique du second ordre et l'analyse rigide-plastique du second ordre se confondent (voir Figure 2-21). La méthode pour obtenir P_J est appelée « l'analyse de la dernière rotule » et est à l'origine de nombreuses discussions sur la résistance des cadres rigides. C'est une méthode itérative qui consiste à déterminer la courbe plastique-rigide des charge/déplacement à l'aide d'une analyse du second ordre (par exemple, l'équation (2.50)). La charge rigide-plastique va être une fonction de la déformation, donc $P_p = f(v)$. Le point P_J va être sur cette courbe. La première étape de l'itération sera le calcul de P_{p1} (la charge rigide-plastique du premier ordre) et le calcul, par la suite, de la déformation correspondante V_{p1} ; à cet instant le mécanisme est formé. La valeur de V_{p1} est la déflexion qui correspond à P_{p1} sur la courbe plastique-rigide du premier ordre (voir Figure 2-24).

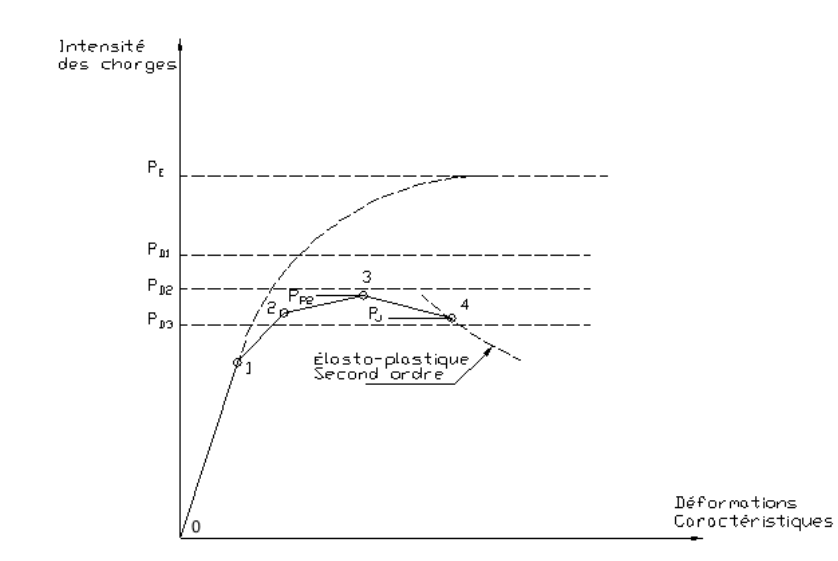


Figure 2-23 : Détérioration de la stabilité due à la formation progressive des rotules

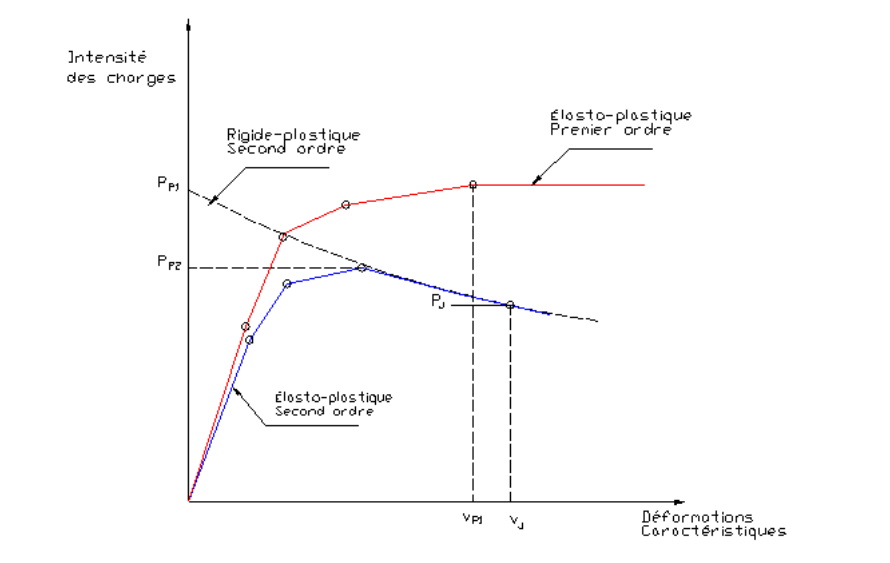


Figure 2-24 : Analyse de la dernière rotule $P_J < P_{F2}$

CHAPITRE 3

STABILITÉ DES CADRES RIGIDES – APPROCHES DE LA LONGUEUR EFFECTIVE

3.1 GÉNÉRALITÉS

Ce chapitre expose les hypothèses fondamentales et les mécanismes compris dans l'utilisation des approches basées sur le concept de la longueur effective pour l'évaluation de la stabilité des membrures et des cadres.

Le concept de la longueur effective est parmi les sujets les plus traités dans la littérature technique en ce qui a trait à la stabilité des structures. En réalité, dans plusieurs situations pratiques de conception, la structure peut être qualifiée de « non critique », en ce qui a trait à la stabilité, et une détermination approximative de la longueur effective ou même, à la rigueur, retenir une valeur unitaire du facteur de la longueur effective ($K = 1$) s'avère suffisant. Toutefois, dans les situations où la conception structurale est réellement sensible aux effets qui influencent la stabilité, il y a plusieurs complexités et subtilités associées aux calculs des charges du flambement et des longueurs effectives que le concepteur doit étudier et considérer attentivement.

Ce chapitre catégorise et discute les différents modèles de flambement en fonction d'un comportement élastique ou inélastique du matériau et donne une explication des méthodes utilisées dans la détermination de la longueur effective dans le cadre de la stabilité des cadres rigides et ces composants structuraux (poteaux et poteaux-poutres). Le but de ce chapitre est de fournir une base technique qui pourra aider les concepteurs à porter un jugement et comparer les différentes approches utilisées dans la détermination de la longueur effective.

3.2 RÉSISTANCE AU FLAMBEMENT DES POTEAUX : SPÉCIFICATIONS AMÉRICAINES VERSUS LES MODÈLES IDÉALISÉS

Pour un poteau qui peut atteindre la ruine dans le domaine inélastique, la résistance du poteau dans les spécifications **ANSI/AISC 360-16** est :

$$\phi_c P_n = \phi_c 0,658^{\frac{P_y}{P_e}} P_y \quad (3.1)$$

Ou sous une forme adoptant le paramètre de l'élancement λ_c tel que :

$$\phi_c P_n = \phi_c 0,658^{\lambda_c^2} P_y \quad (3.2)$$

$$\text{avec } \lambda_c = \sqrt{\frac{P_y}{P_e}} = \frac{KL}{r\pi} \sqrt{\frac{F_y}{E}}.$$

Dans ces deux dernières équations, P_y est la capacité élastique axiale de la membrure égale à $A_g F_y$ et P_e est la charge élastique du flambement basée sur la longueur effective KL telle que :

$$P_e = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} = \frac{\pi^2 E A_g}{(KL/r)^2} \quad (3.3)$$

où K est le facteur de la longueur effective de la membrure. Dans les spécifications **AISC LRFD**, un poteau sollicité par une charge axiale concentrique de compression est censé atteindre la ruine dans le domaine inélastique et sa résistance est gouvernée par (3.1) quand la charge P_e est supérieure ou égale à $\frac{4}{9}P_y$ (valide pour les cas où $\lambda_c \leq 1,5$). Pour les poteaux qui sont censés atteindre la ruine dans le domaine élastique, la courbe de la résistance du poteau dans les spécifications **AISC LRFD** prend la forme :

$$\phi_c P_n = \phi_c 0,877 P_e \quad (3.4)$$

ou encore

$$\phi_c P_n = \phi_c \left(\frac{0,877}{\lambda_c^2} \right) P_y \quad (3.5)$$

Donc, la résistance du poteau est approximativement égale à 0,877 fois la charge élastique du flambement, si la longueur effective est suffisamment grande de façon à ce qu'une membrure « parfaite » puisse atteindre le flambement élastique. La résistance nominale P_n est réduite, sous le seuil de la charge élastique du flambement (par un facteur de 0,877), pour prendre en considération les effets des imperfections géométriques telles que les défauts de la verticalité et les excentricités accidentelles.

Les équations (3.4) et (3.5) sont applicables pour les poteaux où la charge P_e inférieure ou égale à $\frac{4}{9}P_y$ (valide pour les cas où $\lambda_c > 1,5$). Toute charge P_e et son facteur de la longueur effective correspondant est associée (explicitement ou implicitement) avec un modèle idéalisé (en quelque sorte) de flambement. L'utilisation de P_e ou K dans les équations de calculs des poteaux est uniquement un lien entre les équations de calculs et le modèle du flambement. Plusieurs types

d'idéalisation du flambement ont été utilisés et /ou proposés dans la vaste littérature technique pertinente à la conception des poteaux. Pour les cas où les effets de la stabilité sont « réellement » critiques, la sélection du « bon » modèle du flambement ou, en d'autres termes, le calcul des facteurs convenables de la longueur effective peut impliquer plusieurs complexités. Tous les modèles du flambement ou les procédures pour déterminer le facteur K peuvent être subdivisés en deux catégories :

- Modèles élastiques : dans ces cas, les effets de la répartition de la plasticité dans la structure sont négligés.
- Modèles inélastiques : dans ces cas, les calculs des charges du flambement ou les facteurs K impliquent des simples représentations de l'inélasticité des poteaux.

Malgré le fait que les calculs des poteaux sont souvent basés sur des longueurs effectives élastiques, une économie significative peut être réalisée en considérant le comportement inélastique des poteaux (Le Messurier, 1977; Yura, 1971). Ceci s'explique par le fait que les élancements des poteaux dans les structures d'acier rencontrées dans la pratique sont souvent d'un tel ordre qu'une plasticité substantielle peut être développée avant d'atteindre la pleine résistance. Si les poteaux sont plastifiés à l'atteinte de leurs résistances de conception, la retenue latérale relative fournie par les poutres élastiques est plus grande comparativement au cas où les poteaux resteraient élastiques. Comme résultat, la longueur effective associée qui doit être calculée dans (3.1) peut être réduite. La prise en considération du type de comportement élastique ou inélastique nous donne la possibilité de regrouper (3.1) et (3.4) en une seule équation donnée par :

$$\phi_c P_n = \phi_c 0,877 \frac{\pi^2 \tau EI}{(KL)^2} = \phi_c 0,877 \frac{\pi^2 E_t A_g}{(KL/r)^2} = \phi_c 0,877 P_{et} \quad (3.6)$$

où τ est le facteur de réduction de la rigidité inélastique (AISC, 1994) et :

$$P_{et} = \frac{\pi^2 \tau EI}{(KL)^2} \quad (3.7)$$

est la charge (élastique ou inélastique) du flambement du poteau. Le terme τ peut être défini comme le ratio du module tangent E_t au module élastique $\left(\tau = \frac{E_t}{E}\right)$. D'après les spécifications **LRFD 1994** le facteur de réduction de la rigidité inélastique est donné par :

$$\tau = \begin{cases} 1,0 & \text{pour } P_n \leq 0,39P_y \\ \frac{\left(\frac{P_n}{P_y}\right) \ln\left(\frac{P_n}{P_y}\right)}{0,877 \ln(0,658)} = -2,724 \left(\frac{P_n}{P_y}\right) \ln\left(\frac{P_n}{P_y}\right) & \text{pour } P_n > 0,39P_y \end{cases} \quad (3.8)$$

L'équation (3.8) est obtenue de la substitution de $\lambda_c^2 = 0,877\tau \frac{P_y}{P_n}$ dans (3.1) et résolue pour obtenir τ . En terme de la résistance nominale, (3.8) devient :

$$\tau = \begin{cases} 1,0 & \text{pour } P_{et} \leq \frac{4}{9}P_y \\ -2,389 \left(\frac{P_{et}}{P_y}\right) \ln\left(\frac{0,877P_{et}}{P_y}\right) & \text{pour } P_{et} > \frac{4}{9}P_y \end{cases} \quad (3.9)$$

3.3 MODÈLES POUR LE CALCUL DE LA LONGUEUR EFFECTIVE

Les procédures pour déterminer le coefficient de la longueur effective peuvent être regroupées dans les trois modèles suivants :

- Le flambement d'une partie de la structure composée du poteau étudié et de toutes les membrures qui sont assemblées à ses deux extrémités.
- Le flambement de tout l'étage, dont le poteau étudié fait partie.
- Le flambement de toute la structure.

Toutes ces procédures contiennent certaines hypothèses simplificatrices.

3.3.1 Flambement d'une membrure isolée

L'approche la plus répandue pour déterminer le coefficient de la longueur effective K est l'utilisation du nomogramme d'alignement de (Kavanagh, 1962). Les nomogrammes d'alignement sont utilisés pour déterminer le coefficient de la longueur effective des poteaux faisant partie des structures libres de se déplacer latéralement (voir Figure 3-1) et celles empêchées de se déplacer latéralement (voir Figure 3-2). Le nomogramme d'alignement est basé sur le flambement d'un sous-groupe de la structure, dont le poteau étudié fait partie. Le nomogramme d'alignement est basé sur les hypothèses suivantes :

1. Toutes les membrures sont parfaitement droites et ont des sections prismatiques.
2. Tous les assemblages offrent une totale retenue (assemblages rigides). Par contre, les dimensions des assemblages et leurs déformations sont négligées.
3. Toutes les membrures offrent un comportement élastique. Le comportement non linéaire des assemblages et les rotules plastiques dans les poutres ne sont pas considérés.
4. Toutes les forces axiales dans les poutres assemblées au poteau sont considérées relativement petites et n'affectent pas la rigidité flexionnelle des poutres.
5. Le paramètre de la rigidité $L\sqrt{P/EI}$ est le même pour tous les poteaux qui forment le sous-assemblage c1, c2 et c3. Donc, tous les poteaux offrent la même rigidité relative aux effets du deuxième ordre, c'est aussi le cas pour la rigidité relative aux effets du premier ordre.
6. Les rotations des joints pour un niveau d'étage donné, au moment du flambement, sont égales et sont dans la même direction que celles aux extrémités des poutres, ce qui produit une déformation en courbure double des poutres avec un point d'inflexion à mi-portée. Les rotations des joints sont alternées d'un étage à un autre dans le sous-assemblage. Les rotations des lignes d'axes des poteaux Δ/L_{c1} , Δ/L_{c2} et Δ/L_{c3} sont égales.

7. Le sous-assemblage n'est pas retenu et n'est pas chargé par les autres éléments des trois étages dans lesquels il se trouve. Donc, au moment du flambement, les autres éléments n'offrent pas une retenue latérale aux extrémités du sous-assemblage. De plus, il n'y a aucun transfert d'effort tranchant par les autres éléments adjacents au sous-assemblage.

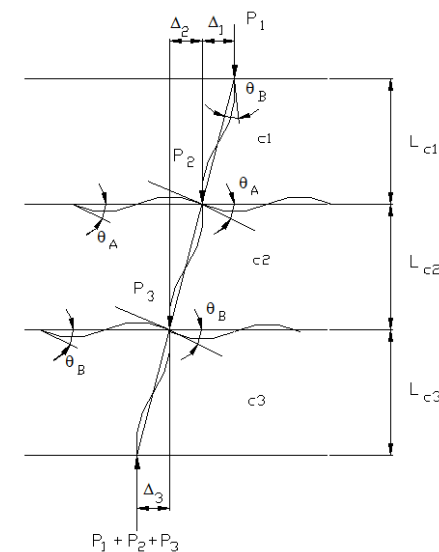


Figure 3-1 : Structures libres de se déplacer latéralement (modèle d'un sous-assemblage)

Pour que cette dernière condition puisse être satisfaite, tous les poteaux dans les étages associés au sous-assemblage doivent atteindre le flambement simultanément. L'équation qui permet le calcul du coefficient de la longueur effective K sur la base des hypothèses énumérées ci-dessus est donnée par :

$$\frac{G_A G_B (\pi / k)^2 - 36}{6(G_A + G_B)} - \frac{(\pi / k)}{\tan(\pi / k)} = 0 \quad (3.10)$$

avec

$$G_A = \frac{\sum \text{rigidité des poteaux au joint A}}{\sum \text{rigidité des poutres au joint A}} = \frac{\sum_A (EI/L)_c}{\sum_A (EI/L)_g} \quad (3.11)$$

et

$$G_B = \frac{\sum \text{rigidité des poteaux au joint B}}{\sum \text{rigidité des poutres au joint B}} = \frac{\sum_B (EI/L)_c}{\sum_B (EI/L)_g} \quad (3.12)$$

La solution de (3.10) est souvent présentée sous forme de nomogramme d'alignement tel que montré à la Figure 3-3. Les effets d'inélasticité des poteaux peuvent être inclus dans la procédure pour déterminer la longueur en envisageant une structure composée d'éléments « élastiques effectifs » dont la rigidité inélastique $\hat{\tau}EI$ est adéquatement déterminée. Ici, $\hat{\tau}$ est une approximation du facteur de réduction de la rigidité inélastique τ conséquent du fait que le calcul exact du facteur de réduction de la rigidité inélastique nécessite une procédure itérative dans laquelle le chargement est changé et par conséquent la rigidité inélastique est recalculée.

Avec cette notion de rigidité inélastique, (3.11) et (3.12) peuvent être réécrites sous la forme :

$$G_A = \frac{\sum_A (\tau EI/L)_c}{\sum_A (EI/L)_g} \quad (3.13)$$

et

$$G_B = \frac{\sum_B (\hat{\tau} EI / L)_c}{\sum_B (EI / L)_g} \quad (3.14)$$

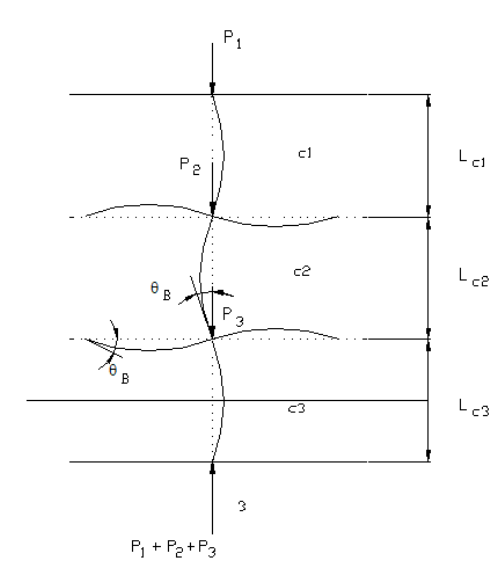


Figure 3-2 : Structures empêchées de se déplacer latéralement (modèle d'un sous-assemblage)

De façon générale, les poutres sont considérées comme totalement élastiques au moment du flambement. Les rigidités des poutres doivent être modifiées si elles ont des conditions de retenue différentes. Ces modifications peuvent être apportées en déterminant une longueur modifiée de la poutre sous la forme :

$$L'_g = L_g \left[2 - \frac{M_F}{M_N} \right] \quad (3.15)$$

ou encore sous la forme d'une rigidité donnée par :

$$(EI/L')_g = \frac{(EI/L)_g}{\left[2 - \frac{M_F}{M_N}\right]} \quad (3.16)$$

avec M_F et M_N , les moments de flexion aux extrémités éloignée et proche de la poutre étudiée. Ces derniers sont obtenus d'une analyse structurale de premier ordre. L'équation (3.16) réduit la rigidité de la poutre de 50 % si l'extrémité éloignée est articulée ($M_F = 0$) et la réduction de la rigidité est égale à 33% si la rotation de l'extrémité éloignée est totalement empêchée. Si le nomogramme d'alignement est utilisé sans la modification de la rigidité de la poutre et si le rapport $\frac{M_F}{M_N} < 1.0$, la longueur effective du poteau peut être sous-estimée et la charge critique de

flambement sera surestimée. Si le rapport $\frac{M_F}{M_N} > 2$, L'_g devient négatif. D'un point de vue mathématique, cette situation peut se produire, mais en contrepartie, elle produira des valeurs négatives du facteur de la rigidité G , ce qui n'est pas permis dans l'utilisation des nomogrammes d'alignement. Dans ce cas, le coefficient de la longueur effective K doit être calculé directement à partir de (3.10).

Dans le cas du calcul de la longueur effective inélastique, la valeur L'_g exige que l'analyse structurale soit basée sur la rigidité inélastique des poteaux $\hat{t}EI$. Pour des cadres rigides à un seul niveau, une charge latérale quelconque, appliquée en tête des poteaux, est utilisée pour déterminer le paramètre $\frac{M_F}{M_N}$. Toutefois, dans les cadres étagés, le paramètre $\frac{M_F}{M_N}$ varie de façon significative en fonction du type de chargement latéral utilisé dans l'analyse structurale. Pour la plupart des cas, le paramètre $\frac{M_F}{M_N}$ peut être déterminé avec suffisamment d'exactitude à partir d'une analyse

structurale de premier ordre dans laquelle la charge totale de gravité par étage (ou un pourcentage de celle-là) est appliquée comme force horizontale au niveau de chaque étage correspondant. Il est important de noter que si le cadre est considéré comme étant une structure asymétrique qui subit un déplacement latéral sous l'effet des charges de gravité, l'analyse utilisée pour déterminer les valeurs de $\frac{M_F}{M_N}$ ne doit pas inclure les charges verticales. Autrement, les déplacements latéraux obtenus ne reflètent pas uniquement la relation des caractéristiques des charge latérale/déplacement latéral de la structure.

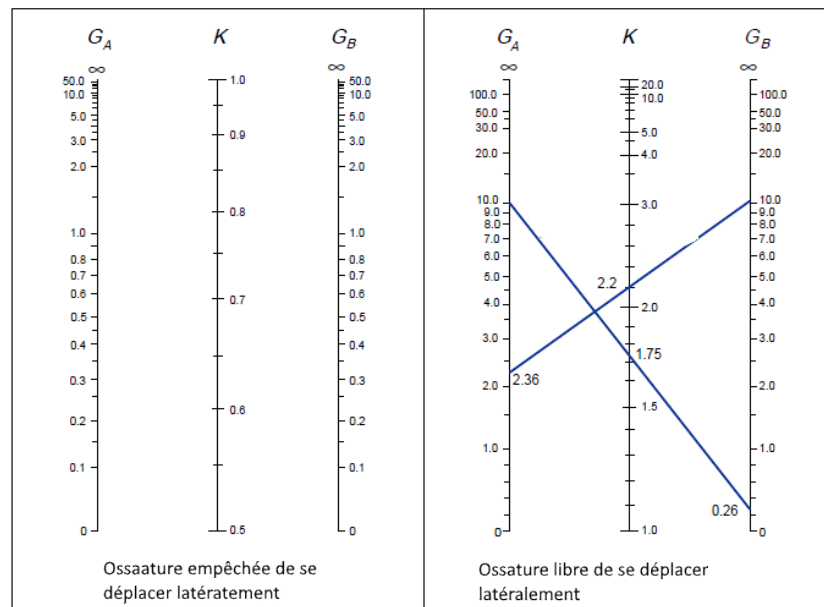


Figure 3-3 : Nomogrammes d'alignement (Kavanagh, 1962)

Pour prendre en considération certaines variations des hypothèses sur lesquelles les nomogrammes d'alignement sont construits, on doit procéder à certains ajustements notamment pour les structures libres de se déplacer latéralement. Parmi ces ajustements, on trouve celui qui prend en considération les effets des charges axiales sur la rigidité des poutres en multipliant les

rigidités $(EI/L)_g$ ou $(EI/L')_g$ par la quantité $\left[1 - \frac{Q}{Q_e}\right]$ et où Q et Q_e représentent respectivement la force axiale dans la poutre (positive en cas de compression) et la charge critique élastique de la poutre ($\pi^2 EI_g / L_g^2$).

Pour les structures empêchées de se déplacer latéralement, le nomogramme d'alignement est basé sur le flambement d'un sous-assemblage isolé tel que montré à la Figure 3-2. Les hypothèses utilisées dans cette configuration de flambement sont les mêmes que celles utilisées dans le développement du flambement des structures libres de se déplacer latéralement, à l'exception de ce qui suit :

- Au moment du flambement, les rotations des joints à un niveau donné θ_A ou θ_B sont égales dans un sens opposé à chaque poutre, ce qui provoque une flexion en simple courbure.
- La rotation des axes des poteaux est nulle.
- Le sous-assemblage est totalement retenu contre tout déplacement latéral.

L'équation qui gouverne le flambement du sous-assemblage monté à la Figure 3-2 est donnée par :

$$\frac{G_A G_B}{4} \left(\frac{\pi}{k} \right)^2 + \left(\frac{G_A + G_B}{2} \right) \left[1 - \frac{\frac{\pi}{k}}{\tan\left(\frac{\pi}{k}\right)} \right] + \frac{2 \tan\left(\frac{\pi}{2k}\right)}{\frac{\pi}{k}} - 1 = 0 \quad (3.17)$$

Pour les structures contreventées dans lesquelles les conditions aux extrémités des poutres diffèrent de celles du modèle montré à la Figure 3-2, on peut citer les cas suivants :

- Si l'extrémité opposée est considérée comme un encastrement, la quantité $(EI/L)_g$ est multipliée par 2.
- Si l'extrémité opposée de la poutre est considérée comme articulée, la quantité $(EI/L)_g$ est multipliée par 1,5.

Les poteaux qui subissent de petites rotations au moment du flambement reçoivent moins de retenue offerte par les poutres, comparés aux autres poteaux qui subissent une plus grande rotation.

3.3.2 Flambement d'un étage

Le nomogramme d'alignement, pour le cas des structures empêchées de se déplacer latéralement, admet que les autres poteaux faisant partie des étages où le sous-assemblage est considéré, ne transfèrent aucun effort tranchant aux poteaux du sous-assemblage. Chaque poteau dans un étage est censé flamber de façon indépendante des autres poteaux du même étage. Si on considère le cadre rigide simple montré à la Figure 3-4, le poteau C2 procure toute la résistance au flambement du cadre. Le poteau « faible » C1 dépend entièrement du poteau C2 pour lui offrir une retenue latérale. (Yura, 1971) a observé que le flambement élastique d'un tel cadre est atteint lorsque la somme des forces axiales de tous les poteaux de l'étage $P_1 + P_2$ atteint la somme de la résistance au flambement des poteaux qui peuvent offrir une retenue latérale (poteau C2 dans cet exemple). D'autres cas montrent une « interaction de flambement » entre les poteaux d'un même étage qui sont disposés suivant les axes forts pour certains et les axes faibles pour d'autres.

Un autre cas que celui des structures qui contiennent des poteaux « faibles », est celui d'une structure comme celle montrée à la Figure 3-5. Dans ce type de structure, certains poteaux présents dans une baie, sont orientés selon l'axe de la faible inertie, tandis les autres poteaux sont orientés selon l'axe de la forte inertie suivant l'exemple de (Le Messurier, 1977).

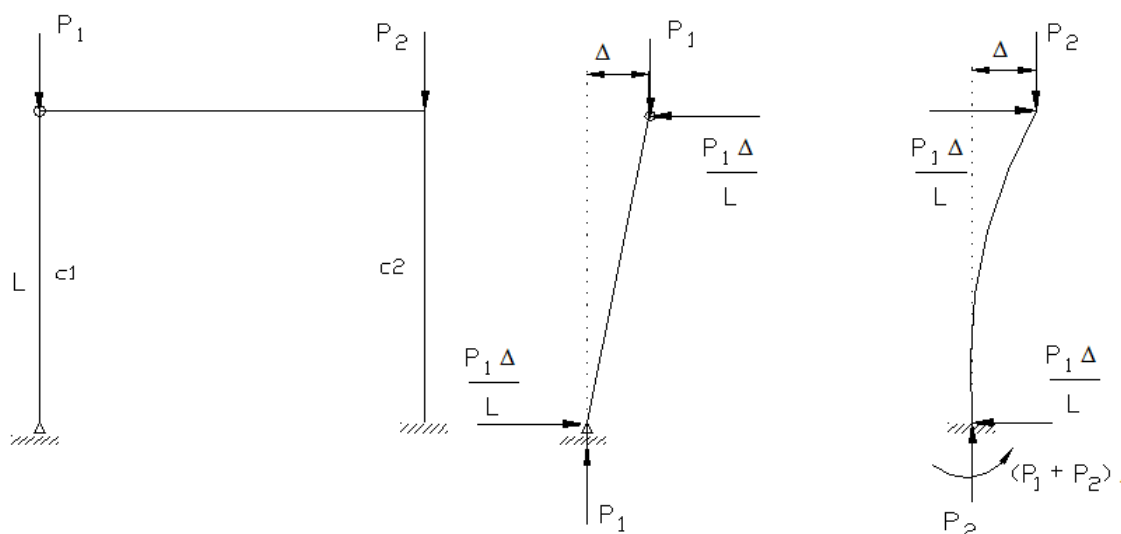


Figure 3-4 : Cadre simple avec poteau articulé – Effet $P - \Delta$

Dans cet exemple, si on considère la stabilité latérale de la baie qui contient les poteaux C1 et C2, la capacité de la résistance au flambement du poteau C2 sera beaucoup plus petite que celle offerte par le poteau C1. De cette façon, le poteau C1 aura tendance à restreindre le déplacement latéral du poteau C1 en autant que la capacité de la résistance au flambement de ce même poteau, n'est pas atteinte. Au moment du flambement :

$$(P_1 + P_2)_{cr} = \pi^2 E(I_x + I_y) / L^2 \quad (3.18)$$

où $P_1 = \pi^2 EI_x / (K_1 L)^2$ et $P_2 = \pi^2 EI_y / (K_2 L)^2$.

Les résultats du calcul exact du facteur de la longueur effective du poteau C2 de cet exemple est $K_2 = 0,635$ si $P_1 = P_2$. À l'inverse, dû aux effets « déstabilisateurs » du poteau de moindre inertie, la résistance axiale du poteau C1 au moment du flambement de l'étage, est réduite de façon

substantielle comparée à celle obtenue en utilisant les nomogrammes d'alignement. La valeur exacte du facteur de la longueur effective du poteau C1 est $K_1 = 1,272$.

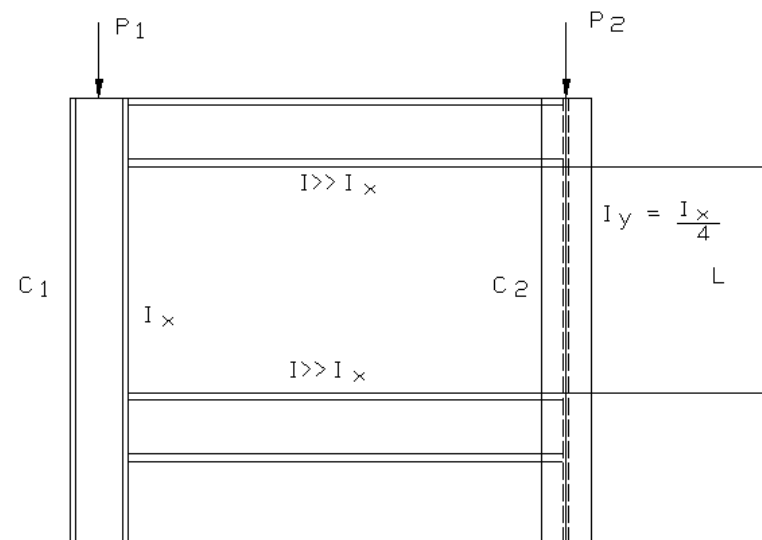


Figure 3-5 : Cadre rigide – Interaction de flambement entre les poteaux d'un même étage

Dans les cas des structures ayant des étages qui présentent une interaction significative entre les poteaux en matière de flambement, (Yura, 1971) a proposé de traiter chaque étage dans une structure non contreventée comme une unité. (Yura, 1971) a basé son approche sur les travaux de (Higgins, 1965; Sweig, 1965) qui ont fait les observations suivantes :

- Le poteau « fort » dans un étage offre une retenue latérale au poteau « faible » jusqu'au moment où la charge totale de flambement de l'étage est atteinte.
- Au moment du flambement, l'ensemble de l'étage aura un mode de flambement caractérisé par un déplacement latéral.

(Le Messurier, 1977) a fourni une approche compréhensive de la stabilité de l'étage et a développé une approche pratique pour déterminer la longueur effective. Pour le cas d'une structure

où les étages sont de la même hauteur, la stabilité structurale peut être formulée sur la base de l'équation :

$$\lambda_{\text{étage}} \sum_{\text{tous}} P_u = \sum_{\text{poteaux forts}} P_{cr}(\text{étage}) \quad (3.19)$$

où :

$P_{cr}(\text{étage})$: la contribution de tous les poteaux de l'étage à la résistance au flambement;

$\lambda_{\text{étage}}$: le paramètre de flambement pour adapter les charges pondérées P_u ;

\sum_{tous} : la sommation sur l'ensemble des poteaux dans un étage;

$\sum_{\text{poteaux forts}}$: la sommation sur l'ensemble des poteaux résistants aux sollicitations latérales.

La valeur du paramètre de flambement $\lambda_{\text{étage}}$ est obtenue de :

$$\lambda_{\text{étage}} = \frac{\sum_{\text{poteaux forts}} P_{cr}(\text{étage})}{\sum_{\text{tous}} P_u} \quad (3.20)$$

Comme il est admis que les forces axiales sont augmentées proportionnellement par le paramètre $\lambda_{\text{étage}}$ pour atteindre le flambement, la force dans le poteau au moment du flambement s'exprime donc par :

$$\lambda_{\text{étage}} P_u = \frac{\sum_{\text{poteaux forts}} P_{cr}(\text{étage})}{\sum_{\text{tous}} P_u} P_u \quad (3.21)$$

Le facteur de la longueur effective basé sur le flambement de l'étage peut être calculé en égalant cette force à la charge de flambement du poteau $P_{e\hat{\tau}}$, ce qui donne :

$$P_{e\hat{\tau}}(\text{étage}) = \frac{\pi^2 \hat{\tau} EI}{(K_{\text{étage}} L)^2} = \lambda_{\text{étage}} P_u = \frac{\sum_{\text{poteaux forts}} P_{cr}(\text{étage})}{\sum_{\text{tous}} P_u} P_u \quad (3.22)$$

En considérant l'égalité entre le deuxième terme et le quatrième terme de (3.22), on obtient :

$$K_{\text{étage}} = \sqrt{\frac{1}{P_u} \frac{\pi^2 \hat{\tau} EI}{L^2} \frac{\sum_{\text{tous}} P_u}{\sum_{\text{poteaux forts}} P_{cr}(\text{étage})}} \quad (3.23)$$

Alternativement, le terme $P_{e\hat{\tau}}(\text{étage})$ peut être calculé directement par :

$$P_{e\tau}(\text{étage}) = \frac{\sum_{\text{poteaux forts}} P_{cr}(\text{étage})}{\sum_{\text{tous}} P_u} P_u \quad (3.24)$$

Le coefficient de réduction de la rigidité inélastique $\hat{\tau}$ tient compte de la distribution de la plasticité due à la combinaison de la force axiale et des contraintes résiduelles initiales. Il faut retenir que le terme $P_{e\hat{\tau}}(\text{étage})$ est la charge de flambement incluant tous les effets de déstabilisation dans l'étage. Pour $\hat{\tau} = 1$, $P_{e\hat{\tau}}(\text{étage})$ est la charge de flambement élastique et, dans ce cas, $P_{cr}(\text{étage})$ est la résistance élastique au flambement.

En général, $P_{cr}(\text{étage})$ n'est pas égale à $\lambda_{\text{étage}} P_u$, ni à $P_{e\hat{\tau}}(\text{étage})$ ceci parce que la quantité $P_{cr}(\text{étage})$ est la résistance offerte par un poteau isolé au flambement de l'étage. Les paramètres $\lambda_{\text{étage}}$ et $P_{e\hat{\tau}}(\text{étage})$ tiennent compte de la distribution des charges verticales à travers les poteaux et l'interaction de tous les poteaux de l'étage pour la résistance au flambement. L'équation (3.24) peut s'écrire:

$$\frac{P_{e\tau}(\text{étage})}{\sum_{\text{poteaux forts}} P_{cr}} = \frac{P_u}{\sum_{\text{tous}} P_u} \quad (3.25)$$

L'équation (3.25) indique que le rapport de la charge de flambement incluant tous les effets de déstabilisation dans l'étage sur la résistance totale de l'étage au flambement $\sum_{\text{poteaux forts}} P_{cr}(\text{étage})$ est toujours égal au rapport entre la charge totale qui sollicite le poteau P_u et la charge totale pondérée supportée par l'étage $\sum_{\text{tous}} P_u$. La quantité $\sum_{\text{poteaux forts}} P_{cr}(\text{étage})$ est supposée constante, et ce, indépendamment de la distribution des forces axiales dans les poteaux à l'étage.

3.3.3 Impact du concept du flambement de l'étage sur la résistance à la force axiale dans les équations d'interaction

En calculant $P_{e\hat{\tau}}(\text{étage})$ de (3.24) et en substituant cette expression dans (3.6) pour obtenir $\phi_c P_n$, le rapport de la résistance axiale dans les équations d'interaction qui régissent le dimensionnement des poteaux-poutres dans les spécifications **AISC LRFD** on obtient :

$$\frac{P_u}{\phi_c P_n} = \frac{P_u}{\phi_c (0,877 P_{e\hat{\tau}}(\text{étage}))} = \frac{\sum_{\text{tous}} P_u}{0,877 \phi_c \sum_{\text{poteaux forts}} P_{cr}(\text{étage})} = \frac{1}{0,877 \phi_c \lambda_{\text{étage}}} \quad (3.26)$$

Tous les poteaux de l'étage auront la même valeur pour $\frac{P_u}{\phi_c P_n}$. De plus, comme le terme $\sum_{\text{poteaux forts}} P_{cr}(\text{étage})$ dans l'équation est basé sur la valeur exacte de τ associée au flambement élastique ou inélastique; ce terme peut donc être remplacé par $\frac{1}{0,877} \sum_{\text{poteaux forts}} P_n$, de façon à exprimer la résistance à la force axiale comme une valeur constante pour tous les poteaux de l'étage tel que :

$$\frac{P_u}{\phi_c P_n} = \frac{\sum_{\text{tous}} P_u}{\phi_c \sum_{\text{poteaux forts}} P_n} \quad (3.27)$$

À noter que la relation (3.27) est vraie si la valeur exacte de $\hat{\tau}$, notée τ , est utilisée de façon constante à travers tous les calculs de stabilité du poteau et de l'étage.

Si une valeur approximative est adoptée ($\hat{\tau}$) pour le coefficient de réduction de la rigidité inélastique telle que $\hat{\tau} \leq 1$ afin de déterminer la valeur de $\sum_{\text{poteaux forts}} P_{cr}(\text{étage})$ et le coefficient de la longueur effective correspondant $K_{\text{étage}}$ dans (3.23) et si cette valeur résultante $K_{\text{étage}}$ est utilisée pour déterminer $\phi_c P_n$, la résistance qui résulte s'avère souvent plus petite que celle obtenue avec la valeur exacte de τ dans l'équation de $K_{\text{étage}}$. Ceci est dû au fait que le coefficient $K_{\text{étage}}$, basé sur une valeur approximative de τ , est souvent plus grand que le coefficient inélastique exact.

Toutefois, $K_{\text{étage}}$ est augmentée en raison de l'inélasticité lorsque les effets des poteaux articulés (faibles) éliminent les effets bénéfiques de l'augmentation de la rigidité élastique des poutres. Cette situation peut avoir lieu, si le poteau considéré est légèrement sollicité de façon à se comporter de façon élastique et la valeur exacte de τ est égale à l'unité, pendant que d'autres poteaux dans le même étage sont plus sollicités de façon à avoir la valeur de $\hat{\tau}$ inférieure à l'unité. Si la valeur $\frac{P_u}{\phi_c P_n}$ est évaluée pour un poteau pour lequel $K_{\text{étage}}$ est réduite par la réduction de la rigidité inélastique, cette valeur de $\frac{P_u}{\phi_c P_n}$ peut être utilisée, de façon conservatrice, pour tous les poteaux de l'étage.

De plus, le poteau qui a la plus petite valeur de $\hat{\tau}$ (le poteau le plus sollicité en force axiale) est assuré d'avoir son coefficient $K_{\text{étage}}$ réduit dû aux effets de l'inélasticité et peut produire la meilleure

estimation de la valeur « exacte » $\frac{P_u}{\phi_c P_n} = \frac{\sum_{\text{tous}} P_u}{\phi_c \sum_{\text{poteaux forts}} P_n}$. Contrairement à cela, la valeur de $\frac{P_u}{\phi_c P_n}$

pour le poteau le moins sollicité (qui a la plus petite valeur de $\frac{P_u}{P_y}$, obtenue sur la base d'une valeur

approximative $\hat{\tau} > \tau$) est généralement plus petite que la valeur exacte de $\frac{P_u}{\phi_c P_n}$ de l'étage. Donc,

pour une procédure générale du dimensionnement, il est recommandé que $\frac{P_u}{\phi_c P_n}$ soit calculée en utilisant les équations du flambement de l'étage avec le poteau qui a le plus grand rapport $\frac{P_u}{P_y}$ et faisant partie du système de retenue latérale. Cette procédure empêche tout dimensionnement non conservateur associé au calcul séparé de $\frac{P_u}{\phi_c P_n}$ pour les poteaux les moins sollicités (Length, 1997a).

3.4 FLAMBEMENT DE L'ÉTAGE ET LONGUEUR EFFECTIVE DES POTEAUX ARTICULÉS « POTEAUX FAIBLES »

La résistance au flambement $P_{cr}(\text{étage})$ est nulle pour tout poteau faible (articulé aux extrémités et non résistant aux forces latérales) faisant partie de l'étage. Ces poteaux sont contreventés par le système de résistance aux forces latérales de l'étage. Pour cela, la charge de flambement $P_{e\tau}$ et/ou la résistance nominale pondérée $\phi_c P_n$ d'un poteau faible doivent être calculées avec un coefficient de la longueur effective $K = 1$ au lieu de (3.23). L'usage de ces équations, pour les poteaux articulés, est une source de mauvaises applications du concept du flambement de l'étage. Si ces équations sont appliquées, n'importe quelle valeur de K (supérieure ou inférieure à l'unité) peut être obtenue, et ce, dépendamment de la magnitude de la force axiale dans le poteau articulé au moment du flambement de l'étage.

En réalité, le flambement d'un poteau faible isolé et le flambement de l'ensemble de l'étage sont deux phénomènes distincts. Le flambement de l'étage est affecté par les forces de déstabilisation $P - \Delta$ provenant des poteaux articulés et ces effets sont inclus dans (3.23) et (3.24). Le flambement des poteaux articulés, faisant partie des cadres libres de se déplacer latéralement, n'est pas en réalité un phénomène de flambement individuel des poteaux articulés, mais c'est une rupture par flambement du système de résistance aux forces latérales à l'étage.

3.5 ANALYSE DU SYSTÈME DE FLAMBEMENT

Les coefficients de la longueur effective peuvent être calculés à partir d'une analyse structurale élastique ou inélastique. Le terme « analyse du système de flambement » implique une analyse aux valeurs propres de tout le système structural (Bradford & Hancock, 1984; Chen & Lui, 1987; Ziemian, 1990). Les facteurs de la longueur effective K associés à ce type d'analyse sont obtenus à partir de l'égalité entre la force axiale dans une membrure au moment du flambement de toute la structure $\lambda_{\text{système}} P_u$ et de la charge de flambement $P_{e\hat{\tau}(\text{système})}$ déterminée avec une longueur effective $K_{\text{système}} L$ et telle que :

$$\lambda_{\text{système}} P_u = P_{e\hat{\tau}(\text{système})} = \frac{\pi^2 \hat{\tau} EI}{(K_{\text{système}} L)^2} \quad (3.28)$$

Dans (3.28), la force axiale P_u est basée sur une analyse élastique linéaire, associée à une combinaison des charges pondérées et $\lambda_{\text{système}}$ est un multiple de P_u à lequel le flambement du système prend place. Le facteur de la longueur effective est déterminé par :

$$K_{\text{système}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \hat{\tau} EI / L^2}{P_{e\hat{\tau}(\text{système})}}} \quad (3.29)$$

Dans (3.29), $\hat{\tau}$ est égale à 1 pour un facteur de K élastique (basé sur analyse élastique du flambement du système) et peut être inférieure à 1,0 pour le calcul des facteurs inélastiques basés sur une analyse inélastique de flambement. Le facteur K déterminé à partir de (3.29) tient compte des interactions entre les étages au moment du flambement du système. Pour certains types de cadres, une analyse exacte du flambement du système s'avère nécessaire pour prédire le comportement de la structure en matière de stabilité. Par exemple, on peut citer les cadres élancés dont la majeure partie de la déflexion latérale provient du comportement de la structure comme étant un porte-à-faux ainsi que les déformations, associées, axiales des poteaux. Aussi, la

conception de certains systèmes structuraux avant-gardistes tels que les bâtiments contreventés de grande hauteur, peut nécessiter de considérer un système complexe de modes de flambement qui ne peuvent pas être déterminés en considérant simplement un sous-assemblage isolé. Toutefois, pour la plupart des structures ordinaires en cadres rigides, l'approche du flambement de l'étage produit des réponses aussi bonnes que celles obtenues par une analyse du flambement du système.

3.6 INTERPRÉTATION DES VALEURS TRÈS ÉLEVÉES DES COEFFICIENTS DE LA LONGUEUR EFFECTIVE

L'utilisation d'un modèle de flambement du système ou de l'étage peut, dans certains cas, conduire à des valeurs exceptionnellement grandes des coefficients de la longueur effective pour des poteaux faiblement sollicités en compression au moment du flambement du système de l'étage. En observant (3.29), on peut remarquer que les coefficients $K_{\text{étage}}$ et $K_{\text{système}}$ tendent vers l'infini lorsque la force axiale de compression tend vers zéro relativement à la quantité $\frac{\pi^2 \tau EI}{L^2}$. Toutefois, ceci ne signifie pas que la résistance de la membrure soit épuisée. Dans de telles situations, il peut être démontré que le terme $P_u / \phi_c P_n$ sera égal à $1/0,877 \phi_c \lambda_{\text{étage}}$ ou $1/0,877 \phi_c \lambda_{\text{système}}$ tandis que $\lambda_{\text{étage}} P_u$ ou $\lambda_{\text{système}} P_u$ s'approchent du zéro et $K_{\text{étage}}$ et $K_{\text{système}}$ approchent l'infini sans égard si la valeur exacte de τ est calculée dans le modèle ou non. Ceci est dû au fait que lorsque $K_{\text{système}}$ et $K_{\text{étage}}$ approchent l'infini pour une membrure, la résistance du poteau est basée sur le flambement élastique, $\tau = 1$ et $P_{e\tau} = P_e = P_n/0,877$ obtenus de :

$$\phi_c P_n = \phi_c 0,877 \frac{\pi^2 \tau EI}{(KL)^2} = \phi_c 0,877 \frac{\pi^2 \tau EA_g}{(KL/r)^2} = \phi_c 0,877 P_{e\tau} \quad (3.30)$$

En posant $P_{e\tau} = P_e = \frac{P_n}{0,877}$ pour $\lambda_{\text{étage}} P_u$ ou $\lambda_{\text{système}} P_u$, le ratio de la charge axiale à la

résistance des poteaux peut être écrit pour l'approche basée sur le flambement de l'étage tel que :

$$\frac{P_u}{\phi_c P_n} = \frac{P_u}{\phi_c (0,877 \lambda_{\text{étage}} P_u)} = \frac{1}{0,877 \phi_c \lambda_{\text{étage}}} \quad (3.31)$$

et pour l'approche basée sur le flambement du système :

$$\frac{P_u}{\phi_c P_n} = \frac{P_u}{\phi_c (0,877 \lambda_{\text{système}} P_u)} = \frac{1}{0,877 \phi_c \lambda_{\text{système}}} \quad (3.32)$$

Dans toute situation où la force axiale dans une membrure est relativement petite comparée à la charge d'Euler $\frac{\pi^2 EI}{L^2}$, elle sera associée à un des cas suivants :

1. L'effet de la force verticale sur la membrure est négligeable et la membrure se comporte comme une poutre. La membrure, agissant comme une poutre, peut contribuer de façon substantielle à la résistance au flambement de la structure (en offrant des retenues aux poteaux).
2. La membrure se comporte comme un poteau, c'est-à-dire que l'effet de la force axiale n'est pas négligeable. Toutefois, la membrure ne contribue pas, de façon significative, à la résistance au flambement de l'étage ou du système. Malgré tout, si la section de cette membrure est réduite de façon significative, la résistance au flambement de l'étage ou du système peut être contrôlée par un mode de flambement différent qui dépend, de façon significative, de cette membrure.
3. La membrure est un poteau qui contribue de façon significative, à la résistance au flambement de l'étage ou du système. Dans ce cas, si la section de cette membrure est changée, la résistance au flambement de la structure est affectée.

Dans plusieurs situations où les forces axiales de compression de certains poteaux sont petites, comparé à la charge critique d'Euler, ces poteaux ne participent pas de façon significative lors du flambement de l'étage ou du système. Ces membrures correspondent au cas 1 cité ci-dessus. Dans une telle situation, le facteur de la longueur effective, obtenu d'une analyse sur le flambement de

l'étage ou du système, n'est pas la valeur la plus appropriée à utiliser. En d'autres termes, ces membrures sont pénalisées par le fait que $\frac{P_u}{\phi_c P_n}$ est constant pour toutes les membrures dans le modèle étudié du flambement. Une valeur du facteur de la longueur effective K plus appropriée peut être calculée par le flambement de l'étage, si la valeur de $K_{\text{système}}$ est élevée ou par le nomogramme d'alignement si la valeur de $K_{\text{étage}}$ est élevée.

3.7 ANALYSE DU SYSTÈME DE FLAMBEMENT D'UN CADRE ÉTAGÉ

Une situation où les poteaux ont la même section sur plusieurs étages, les étages inférieurs des cadres étagés peuvent devenir plus critiques en ce qui a trait au flambement que ceux des étages supérieurs. En plus, si la structure est de grande hauteur, les poteaux faisant partie des étages supérieurs seront sollicités par de faibles forces axiales comparativement à leur résistance en compression. Les poteaux faisant partie des étages inférieurs peuvent être qualifiés d'éléments critiques en matière de stabilité (la contribution de la force axiale dans les termes des équations d'interaction étant plus significative). Pour les poteaux faisant partie des étages supérieurs, des coefficients de la longueur effective largement inattendus peuvent être obtenus. Dans une telle situation, la longueur effective de ces poteaux doit être basée sur une analyse du flambement de l'étage, parce que :

- L'effet d'interaction entre les étages qui influence le flambement du système structural peut être considéré comme négligeable.
- Le système de flambement est essentiellement un concept « d'étage critique »; avec cet étage le plus critique qui gouverne la capacité du cadre en matière de flambement.
- Le système de stabilité n'est pas influent dans le dimensionnement des étages traités individuellement, à l'exception de l'étage critique.

Les facteurs de la longueur effective, des poteaux légèrement chargés, seront plus petits s'ils sont calculés tel que discuté ci-dessus. Toutefois, dans certaines situations, une membrure peut avoir un grand facteur $K_{\text{système}}$ obtenu de l'analyse du flambement du système parce que cette membrure offre une retenue à d'autres membrures plus critiques ou à d'autres membrures dans d'autres étages au moment du flambement de l'ensemble de la structure. Si la retenue offerte est significative et que cette même retenue compte dans le dimensionnement d'autres « membrures critiques » et si la force axiale de compression est non négligeable, donc la plus grande valeur de $K_{\text{système}}$ doit être utilisée. Mélanger l'utilisation de $K_{\text{système}}$ et $K_{\text{étage}}$ est une procédure difficile qui nécessite une interprétation subtile du comportement. Si une interaction significative est probable entre un certain nombre d'étages, la meilleure approche consiste en l'analyse du flambement du système pour un sous-assemblage composé de ces étages, tandis qu'une analyse standard du flambement des étages peut être employée pour les étages restants (Wu, 1985).

3.8 ANALYSE DU FLAMBEMENT D'UN ÉTAGE AYANT DES POTEAUX LÉGÈREMENT CHARGÉS

Supposons, par exemple, qu'un poteau légèrement chargé est connecté aux poutres par des assemblages très flexibles, tandis que les autres poteaux, dans le même étage, sont lourdement chargés et connectés aux poutres à l'aide d'assemblages rigides. Si l'assemblage du premier poteau est flexible, la contribution de ce poteau, dans la rigidité de l'étage $\sum_{\text{non-faible}} P_{cr(\text{étage})}$, devient plus petite comparée à celle assurée par les poteaux ayant des assemblages plus rigides. Si l'assemblage devient suffisamment souple, $\sum_{\text{non-faible}} P_{cr(\text{étage})}$ devient indépendante de la contribution de ce poteau. Ce poteau peut donc être considéré comme un poteau faible, retenu pour tout déplacement latéral par les autres poteaux, avec un coefficient de la longueur effective $K = 1$.

Actuellement, le concept du flambement de l'étage est acceptable pour des bâtiments réguliers ayant des cadres avec système de cisaillement rectangulaire, avec une interaction significative entre les poteaux du même étage.

3.9 CALCUL DE LA CHARGE CRITIQUE ÉLASTIQUE ET INÉLASTIQUE DE FLAMBEMENT DE L'ÉTAGE (CADRES NON CONTREVENTÉS)

Deux approches pour estimer la capacité au flambement d'un étage seront présentées. La première approche désignée par K_{K_n} est basée sur le nomogramme d'alignement pour des structures non contreventées. La deuxième approche désignée par K_{R_L} n'utilise pas le nomogramme d'alignement, mais admet que les poteaux faisant partie du système de résistance latérale sont sollicités par une force déstabilisatrice $P - \delta$. À cause de cette hypothèse simplificatrice, l'approche K_{R_L} est efficace dans les calculs en conservant une bonne exactitude.

3.9.1 Approche basée sur le nomogramme d'alignement K_{K_n}

Une approche du coefficient de la longueur effective qui a reçu beaucoup d'attention est celle qui admet que la capacité d'un étage au flambement est égale à la somme des charges de flambement des poteaux, calculée en utilisant un facteur de la longueur effective à l'aide du nomogramme d'alignement pour les structures non contreventées tel que :

$$\sum_{\text{poteaux forts}} P_{cr \text{ (étage)}} = \sum_{\text{poteaux forts}} \frac{\pi^2 \hat{t} EI}{(K_n L)^2} \quad (3.33)$$

Le calcul de K_n dans cette équation doit prendre en considération toutes les modifications apportées au nomogramme d'alignement. Ces modifications doivent inclure la modification de la

longueur de la poutre de L_g à L'_g et l'ajustement des facteurs de rigidité G pour prendre en considération le facteur de réduction inélastique $\hat{\tau}$. Toutefois, l'interaction des différents poteaux de l'étage en matière de flambement n'est pas considérée dans la détermination de K_n . Par la substitution de (3.33) dans (3.22), on obtient :

$$P_{e\hat{\tau}(K_n)} = \frac{\pi^2 \hat{\tau} EI}{(K_{K_n} L)^2} = \left[\lambda_{K_n} P_u = \frac{\sum_{\text{poteaux forts}} \frac{\pi^2 \hat{\tau} EI}{(K_n L)^2}}{\sum_{\text{Tous}} P_u} P_u \right] \quad (3.34)$$

Posons l'égalité du deuxième et du quatrième terme de cette équation et trouvons l'expression pour K_{K_n} , le facteur de la longueur effective de l'étage peut être exprimé par :

$$K_{K_n} = \sqrt{\frac{1}{P_u} \frac{\pi^2 \hat{\tau} EI}{L^2} \frac{\sum_{\text{Tous}} P_u}{\sum_{\text{poteaux forts}} \frac{\pi^2 \hat{\tau} EI}{(K_n L)^2}}} = \sqrt{\frac{\sum_{\text{Tous}} P_u}{P_u} \frac{\hat{\tau} I}{\sum_{\text{poteaux forts}} \frac{\hat{\tau} I}{(K_n)^2}}} \quad (3.35)$$

La charge de flambement de l'étage peut alors être calculée directement par :

$$P_{e\hat{\tau}(K_n)} = \frac{\sum_{\text{poteaux forts}} \frac{\pi^2 \hat{\tau} EI}{(K_n L)^2}}{\sum_{\text{Tous}} P_u} P_u \quad (3.36)$$

On peut aussi exprimer le facteur d'amplification de la charge, dont les charges P_u doivent être affectées par le facteur donné par :

$$\lambda_{K_n} = \frac{\sum_{\text{poteaux forts}} \frac{\pi^2 \hat{\tau} EI}{(K_n L)^2}}{\sum_{\text{Tous}} P_u} \quad (3.37)$$

3.9.2 Approche pratique pour le facteur de la longueur effective de l'étage K_{R_L}

Le facteur de la longueur effective, obtenu du nomogramme d'alignement pour des structures non contreventées, fournit une évaluation théorique exacte de la capacité du poteau au flambement, à condition de satisfaire toutes les hypothèses qui ont conduit au tracé du nomogramme, et cela, après avoir modifié les facteurs de rigidité G . Si une interaction existe entre les poteaux de l'étage ou si des poteaux articulés « faibles » font partie du même étage, (3.25) tient compte de tous ces effets dans la plupart des cas. À noter que certaines hypothèses sont contenues dans le facteur K_n de même que pour K_{K_n} , ces hypothèses sont les suivantes (voir Figure 3-2) :

1. Le paramètre de la rigidité $L\sqrt{P/EI}$ est le même pour tous les poteaux dans le sous-assemblage C_1 , C_2 et C_3 . Donc, la rigidité réduite de tous ces poteaux (effet du second ordre) est la même que celle de leur rigidité élastique du premier ordre.
2. Les rotations des joints sont alternées d'un étage à l'autre dans le « sous-assemblage » de θ_B en tête du poteau C_1 à θ_A , en tête du poteau C_2 , à θ_B de nouveau au pied du poteau C_2 et à θ_A et au pied du poteau C_3 . Toutes les rotations des axes des poteaux en mode de flambement Δ/L_{C1} , Δ/L_{C2} et Δ/L_{C3} sont égales.

Si ces hypothèses ne sont pas respectées, il peut y avoir des interactions au flambement des étages adjacents qui ne peuvent pas être capturées par le modèle K_{K_n} . Par exemple, si certains poteaux dans le même étage sont relativement faibles comparés aux poteaux qui sont

immédiatement au-dessus ou au-dessous de ces poteaux, les poteaux forts pourront servir de retenues pour les poteaux faibles au flambement de la structure. Les calculs des facteurs de rigidité modifiés, les valeurs K_n associées et les calculs des valeurs de K_{K_n} peuvent représenter un processus laborieux. Une méthode simplifiée qui tient compte, de façon conservatrice, des effets des forces axiales sur la rigidité des poteaux, mérite d'être prise en considération. (Le Messurier, 1977) a développé une approche bénéfique qui peut tenir compte de certaines variations des hypothèses sur lesquelles cette approche est basée. L'approche de *Le Messurier* ne demande pas l'utilisation des nomogrammes d'alignement. À la place des nomogrammes, cette approche est basée sur les résultats d'une analyse structurale du premier ordre. Cette approche représente les effets $P-\Delta$ sur la capacité en flambement de l'étage et tient compte des effets $P-\delta$ pour les poteaux dans la plupart des cas pratiques. En considérant les effets $P-\delta$, le facteur de la longueur effective K_{R_L} est relativement simple à calculer. La procédure du facteur K est basée sur la résistance approximative de l'étage au flambement telle que :

$$\sum_{\text{poteaux forts}} P_{cr(\text{étage})} = \frac{\sum HL}{\Delta_{oh}} (0,85 + 0,15R_L) \quad (3.38)$$

où

$$R_L = \frac{\sum_{\text{poteaux articulés}} P_u}{\sum_{\text{Tous}} P_u} \quad (3.39)$$

et $\sum_{\text{poteaux articulés}} P_u$ représente la somme des forces axiales dans les poteaux articulés « faibles » de l'étage. Le symbole Δ_{oh} représente le déplacement latéral relatif dû aux effets du premier ordre

sous l'action d'un effort tranchant qui sollicite l'étage et égal à $\sum_{\text{poteaux forts}} H$. En substituant (3.38)

dans (3.22), on obtient:

$$P_{e\hat{\tau}(R_L)} = \frac{\pi^2 \hat{\tau} EI}{(K_{R_L} L)^2} = \left[\lambda_{R_L} P_u = \frac{\frac{\sum_{\text{poteaux forts}} HL}{\Delta_{oh}} (0,85 + 0,15 R_L)}{\sum_{\text{tous}} P_u} P_u \right] \quad (3.40)$$

En posant l'égalité du deuxième et du quatrième terme de (3.40), on peut obtenir le facteur de la longueur effective :

$$K_{R_L} = \sqrt{\frac{1}{P_u} \frac{\pi^2 \hat{\tau} EI}{L^2} \frac{\sum_{\text{Tous}} P_u}{\frac{\sum_{\text{poteaux forts}} HL}{\Delta_{oh}} (0,85 + 0,15 R_L)}} \quad (3.41)$$

et la résistance au flambement du poteau peut finalement être calculée par :

$$P_{e\hat{\tau}(R_L)} = \frac{\frac{\sum_{\text{poteaux forts}} HL}{\Delta_{oh}} (0,85 + 0,15 R_L)}{\sum_{\text{Tous}} P_u} \quad (3.42)$$

Les équations (3.40) et (3.41) sont employées souvent avec $\hat{\tau} = 1$ pour obtenir les longueurs effectives et les charges de flambement élastique. Toutefois, on peut obtenir K_{R_L} inélastique en utilisant $\hat{\tau} \leq 1,0$ au numérateur de l'équation et en utilisant les valeurs correspondantes de $\hat{\tau}$ pour la rigidité de tous les poteaux dans l'analyse structurale du premier ordre du cadre. Les

équations (3.41) et (3.42) peuvent être substituées dans l'équation $P_{e\hat{\tau}} = \frac{\pi^2 \hat{\tau} EI}{(KL)^2}$ pour déterminer

le paramètre du flambement de l'étage λ_{R_L} tel que :

$$\lambda_{R_L} = \frac{\frac{\sum_{\text{poteaux forts}} HL}{\Delta_{oh}} (0,85 + 0,15R_L)}{\sum_{\text{Tous}} P_u} \quad (3.43)$$

où $\frac{\sum_{\text{poteaux forts}} HL}{\Delta_{oh}}$ est la résistance latérale de l'étage aux effets du premier ordre. L'approche K_{R_L}

réduit la résistance latérale par un facteur $(0,85 + 0,15R_L)$ qui varie entre 0,85 à 1,0, dépendamment du pourcentage des charges de gravité supportées par les poteaux articulés « faibles ». Ce facteur de réduction tient compte des effets $P - \delta$ pour les poteaux de l'étage.

Les équations (3.40) à (3.43) sont basées sur l'hypothèse que le flambement de l'étage est unique et indépendant de la distribution des forces axiales entre les poteaux de l'étage. Pour illustrer les implications des deux approches présentées, les hypothèses retenues dans le développement et l'utilisation de K_{K_n} et K_{R_L} sont résumées comme suit :

- Toutes les membrures sont prismatiques et parfaitement droites.
- Toutes les connexions sont rigides.
- Toutes les poutres sont élastiques. Une distribution de la plasticité due aux forces axiales peut être considérée dans les poteaux par l'utilisation du facteur de la rigidité réduite $\hat{\tau}$, toute inélasticité le long des poteaux est considérée uniformément distribuée.
- Tout effet des forces axiales sur la rigidité des poutres est négligé dans les équations qui déterminent K_{R_L} .

- L'étage, au moment du flambement avec déplacement latéral, agit comme un ensemble et tous les poteaux subissant le même déplacement latéral.
- Les poteaux articulés « faibles » retenus latéralement par les poteaux « forts » ne sont pas capturés par les équations présentées.

Les charges pondérées P_u ou C_f sont augmentées, de façon proportionnelle, jusqu'à l'atteinte du mode de flambement de l'étage. Le multiple de P_u qui correspond au début du flambement de l'étage est donné par λ_{K_n} et λ_{R_L} pour les deux approches discutées. La retenue latérale des poteaux, fournie par les poutres, est modélisée dans une analyse du premier ordre dans l'approche K_{R_L} . Dans l'autre approche (K_{K_n}), la retenue latérale des poteaux est modélisée à travers l'utilisation des coefficients de rigidité G_A et G_B qui peuvent être ajustés pour tenir compte de la forme de la structure latéralement déformée.

Les effets $P-\Delta$ sont inclus dans les deux approches mais ceux de type $P-\delta$ sont considérés approximatifs. Ces approximations permettent le développement d'équations simples et raisonnables pour déterminer les facteurs de la longueur effective et la résistance au flambement conséquent du fait qu'en réalité, la résistance au flambement de l'étage est indépendante de la distribution des charges à l'intérieur de l'étage. Dans l'approche K_{R_L} , les rigidités dues aux effets du second ordre sont censées être proportionnelles aux rigidités dues aux effets du premier ordre. De plus, les effets $P-\delta$ sur la stabilité de l'étage sont censés dépendre uniquement du ratio R_L . Le terme $(0,85 + 0,15R_L)$ donne la réduction de la résistance au flambement associé à ces effets. Dans la plupart des cas pratiques, ce terme tient compte, de façon conservatrice, de la réduction due aux effets $P-\delta$. Tous les poteaux dans un étage ont la même longueur. Les déformations dans les membrures dues aux efforts tranchants sont négligeables dans les équations de K_{K_n} . Dans

l'approche de K_{R_L} , les déformations dans les membrures dues aux efforts tranchants ou d'autres effets tels que les déformations dans les zones d'assemblage peuvent être incluses en les modélisant dans l'analyse élastique du premier ordre pour obtenir Δ_{oh} .

3.10 RÉSISTANCE DE L'ÉTAGE AUX DÉPLACEMENTS LATÉRAUX DUS AUX EFFETS DU PREMIER ORDRE

La résistance au flambement de l'étage est obtenue, de façon assez correcte, en formulant une approximation de la déformée en considérant tous les effets de non-linéarités géométriques incluant les effets $P-\Delta$ et $P-\delta$ ainsi que l'inélasticité des poteaux. Les effets de l'inélasticité des poteaux sur la stabilité de l'étage peuvent être pris en compte avec un coefficient de réduction de la rigidité. Considérons, tout d'abord, un poteau en porte-à-faux ayant un comportement élastique tel que montré à la Figure 3-6. La flèche à l'extrémité libre du porte-à-faux dû aux effets du premier ordre Δ_{oh} est égale à :

$$\Delta_{oh} = \frac{HL^3}{3EI} \quad (3.44)$$

ou encoresous la forme :

$$H = \frac{3EI}{L^3} \Delta_{oh} \quad (3.45)$$

La rigidité du poteau k est égale à la force transversale requise pour déplacer l'extrémité libre d'une quantité égale à $\Delta_{oh} = 1,0$ telle que :

$$k = \frac{3EI}{L^3}(1) = \frac{3EI}{L^3} \quad (3.46)$$

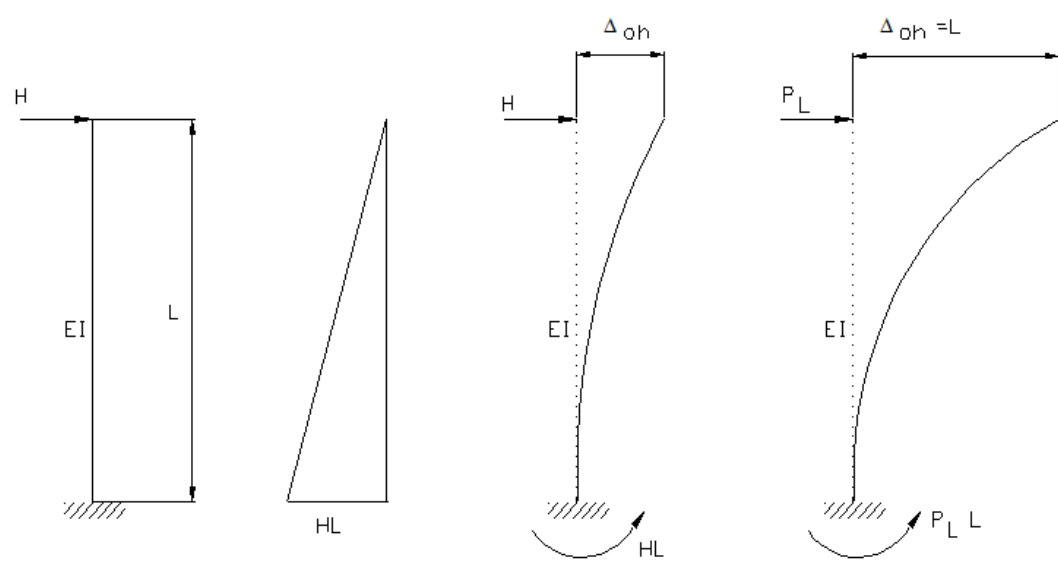


Figure 3-6 : Comportement d'un poteau en porte-à-faux sans charge axiale – Effets du premier ordre

Comme alternative, (Le Messurier, 1977) a préféré considérer la résistance latérale du système comme étant la force requise au système pour subir une rotation unitaire (c.a.d $\Delta_{oh}/L=1,0$ avec $\Delta_{oh}=L$ provenant d'une analyse du premier-ordre). Donc, cette force que *Le Messurier* définit comme étant P_L est obtenue de (3.46) tel que :

$$P_L = H \Big|_{\Delta_{oh}=L} = \frac{3EI}{L^3} \Delta_{oh} \Big|_{\Delta_{oh}=L} = \frac{3EI}{L^3} L = \frac{3EI}{L^2} \Rightarrow P_L = \frac{3EI}{L^2} \quad (3.47)$$

avec

$$\frac{H}{\Delta_{oh}} = \frac{P_L}{L} \quad (3.48)$$

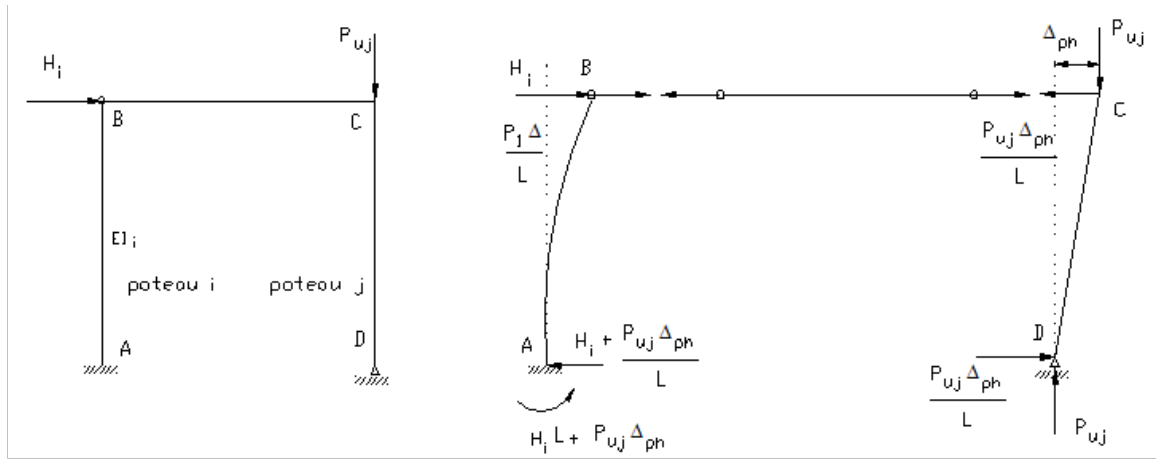
et

$$P_L = \frac{HL}{\Delta_{oh}} \quad (3.49)$$

Donc, pour ce système en porte-à-faux, on peut voir que la résistance latérale élastique du premier ordre P_L peut être représentée, soit en terme de la géométrie, de la retenue à l'extrémité et la rigidité flexionnelle de la section ou encore, soit directement en terme du ratio de l'effort tranchant H à la rotation entre étages Δ_{oh}/L , causée par cet effort tranchant. Étant donné que P_L est la rigidité latérale du premier ordre de l'étage, elle est aussi la charge critique du flambement de l'étage si les effets $P-\delta$ sont négligés.

3.11 LES EFFETS $P-\Delta$ SUR LA CHARGE CRITIQUE DE FLAMBEMENT

Considérons la structure montrée sur la Figure 3-7 dans laquelle un poteau articulé « faible » est sollicité par une force axiale de gravité P_{uj} et le poteau à gauche i n'est pas chargé. Le poteau i doit résister à l'effort tranchant créé par le poteau articulé lorsque le système se déplace latéralement. Aussi, lorsqu'une force latérale H agit en tête du poteau (AB), elle se déplace d'une quantité égale à Δ_{ph} correspondant au déplacement élastique de la structure dû aux effets du second ordre. Ce déplacement est égal au déplacement élastique de la structure dû aux effets du premier ordre Δ_{oh} auquel s'ajoute un déplacement dû à la non-linéarité géométrique de la structure. Dans ce cas, la seule non-linéarité géométrique est due aux effets $P-\Delta$ causés par la force axiale qui sollicite le poteau articulé lorsque la structure se déplace latéralement.



a) Cadre rigide – poteau articulé chargé axialement

b) Transfert de l'effet du poteau articulé au poteau connecté rigidement

Figure 3-7 : Cadre simple - une travée avec un poteau articulé chargé axialement

La force axiale P_{uj} déplacée d'une quantité égale à Δ_{ph} crée un effort tranchant $P_{uj} \Delta_{ph} / L$ dans le poteau articulé pour balancer le moment dû à l'effet du second ordre $P_{uj} \Delta_{ph}$. Cet effort tranchant est transféré dans la poutre sous forme de force axiale pour maintenir l'équilibre au joint C et cette dernière est transférée dans le poteau AB en porte-à-faux sous forme d'effort tranchant pour maintenir l'équilibre au joint B. Donc, l'effort tranchant en tête et au pied du poteau en porte-à-faux est égal à $H_i + P_{uj} \Delta_{ph} / L$, ce qui correspond à l'effort tranchant provenant de l'effet du premier ordre auquel s'ajoute l'effort tranchant provenant de l'effet $P-\Delta$. Le moment correspondant à cet effort tranchant au pied du poteau en porte-à-faux est égal à :

$$\left(H_i + P_{uj} \Delta_{ph} / L \right) L = H_i L + P_{uj} \Delta_{ph}.$$

La Figure 3-8b montre le diagramme du moment du premier ordre du poteau i , tandis que la Figure 3-8c montre le moment additionnel du second ordre et la Figure 3-8d montre le moment total du poteau en porte-à-faux. Tant que les deux poteaux n'atteignent pas le flambement, on peut supposer un comportement élastique. La position finale d'équilibre de la structure déplacée peut

être trouvée par une analyse structurale. Aussi, pour ce cas, le déplacement latéral de la structure dû aux effets $P - \Delta$ est égal à l'effort tranchant dans le poteau en porte-à-faux, divisé par la rigidité du poteau sous les effets du premier ordre.

Comme le poteau en porte-à-faux n'est sollicité par aucune force axiale, sa rigidité est donc élastique dans sa configuration déformée et est égale à sa rigidité sous l'effet des sollicitations du premier ordre $(3EI / L^3)$ tel que :

$$\begin{aligned}\Delta_{ph} &= \left(H_i + P_{uj} \frac{\Delta_{ph} L}{L} \right) \frac{L^3}{3EI_i} = \left[H_i + \frac{P_{uj}}{L} \Delta_{ph} \right] \frac{1}{PL_i / L} \\ \Delta_{ph} &= \frac{H_i L}{PL_i} + \frac{P_{uj} \Delta_{ph}}{PL_i} \\ \Delta_{ph} &= \frac{H_i L}{PL_i - P_{uj}}\end{aligned}\tag{3.50}$$

L'équation (3.50) est une expression du déplacement latéral élastique dû aux effets du second ordre. Cette expression reste valide tant que la rigidité du poteau en porte-à-faux n'est pas affectée par la présence des forces axiales. (Le Messurier, 1977) a noté que le déplacement Δ_{ph} approche l'infini lorsque la charge P_{uj} est augmentée par un facteur $\lambda_{\text{étage}}$ pour devenir : $\lambda_{\text{étage}} P_{uj} = P_{Li}$. Ceci représente la charge à laquelle la structure flambe dans une configuration déplacée latéralement et $\lambda_{\text{étage}}$ est définie comme étant le « paramètre du flambement » de l'étage. Donc, la contribution du poteau i à la résistance au flambement de l'étage est égale à : $P_{cr} = \lambda_{\text{étage}} P_{uj} = P_{Li}$.

Pour cette structure simple, la charge de flambement de cette structure non-contreventée a été déterminée en considérant la structure dans sa position déplacée et les effets du second ordre associés aux charges de gravité agissant sur la structure déplacée. Dans cette structure, la déformée de la structure due aux effets du premier ordre est de la même forme géométrique que celle

obtenue due aux effets du second ordre et aussi, la même que celle du premier mode de flambement de la structure. Donc, cette analyse conduit à la solution exacte du flambement de la structure. Ceci est dû au fait que la rigidité latérale du poteau i , qui assure la retenue latérale, n'est pas affectée par un effet $P - \delta$.

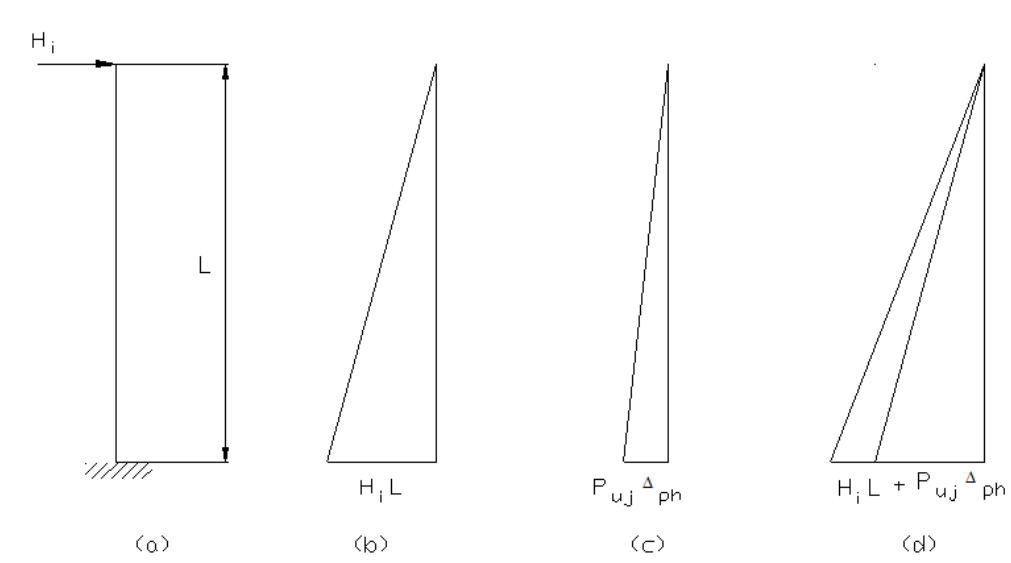


Figure 3-8 : Comportement du poteau en porte-à-faux en flexion dû à l'effet $P - \Delta$ sur le poteau faible

3.12 COMBINAISON DES EFFETS $P - \Delta$ ET $P - \delta$ ET LEUR INFLUENCE SUR LA CHARGE CRITIQUE DE FLAMBEMENT

Considérons la structure montrée à la Figure 3-9 qui est identique à celle étudiée précédemment, à l'exception du fait que le poteau i en porte-à-faux est sollicité par une force axiale P_{ii} à la place du poteau faible j . Dans cette situation, le « poteau faible » j ne contribue aucunement dans le comportement de la structure. Par conséquent, le comportement du poteau en porte-à-faux dû aux effets du second ordre peut être considéré de façon individuelle. Le poteau en porte-à-faux a un moment dû aux effets du second ordre provenant de la charge de gravité qui agit sur la structure

déformée ($P - \Delta$) et sur la déformée de l'axe de la membrure ($P - \delta$). Il est nécessaire de déterminer la déformée de la structure due aux effets du premier ordre. La déformée peut-être déterminée, de façon conservatrice, comme étant une fonction sinusoïdale qui est égale à la déformée due aux effets du second ordre au début du flambement. (Le Messurier, 1977) a démontré que la déflexion due aux effets du second ordre est égale à (voir Figure 3-10) :

$$\Delta_{ph} = \frac{H_i L_i}{P_{Li} - P_{ui} - C_{Li} P_{ui}} \quad (3.51)$$

où C_{Li} est un « facteur clarificateur ». Le troisième terme du dénominateur tient compte des effets $P - \delta$. Ce terme est directement proportionnel au deuxième terme qui lui tient compte des effets $P - \Delta$. La charge critique de flambement est égale à la charge à laquelle le dénominateur de (3.51) est égal à zéro (la charge où le déplacement latéral tend vers l'infini). Donc, le flambement aura lieu lorsque P_{ui} sera augmentée par un facteur λ_i tel que :

$$\lambda_i P_{ui} = P_{Li} - \lambda_i C_{Li} P_{ui} \quad (3.52)$$

et la charge critique du flambement élastique est donnée par :

$$P_{cri} = \lambda_i P_{ui} = \frac{P_{Li}}{1 + C_{Li}} \quad (3.53)$$

L'effet $P - \delta$ influence la charge critique de flambement sous la forme du terme $1 + C_{Li}$ au dénominateur. En pratique, le concepteur n'a pas besoin de calculer C_L pour déterminer le facteur K_{R_L} . (Le Messurier, 1977) a dérivé une expression générale pour le facteur C_L en considérant un

poteau avec des ressorts ayant une rigidité à la rotation aux extrémités et libre de se déplacer en tête.

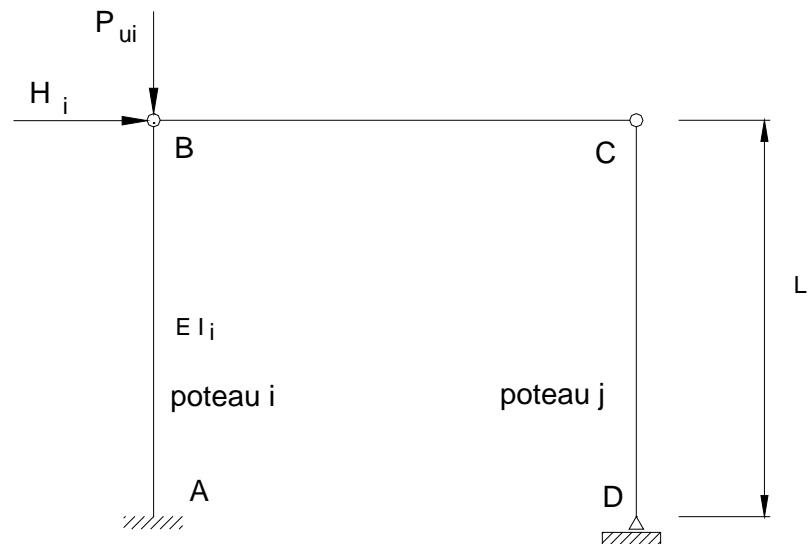


Figure 3-9 : Cadre rigide - Force axiale appliquée au poteau encastré à sa base

En utilisant un facteur de la rigidité du poteau (β) qui tient compte des conditions de retenue élastique aux extrémités, (Le Messurier, 1977) propose que la résistance élastique du poteau à la bifurcation puisse être exprimée par :

$$P_L = \beta \frac{EI}{L^2} \quad (3.54)$$

En substituant la résistance du poteau au flambement élastique, telle que définie par le nomogramme d'alignement, on obtient :

$$P_{e(n)} = \frac{\pi^2 EI}{(K_n L)^2} \quad (3.55)$$

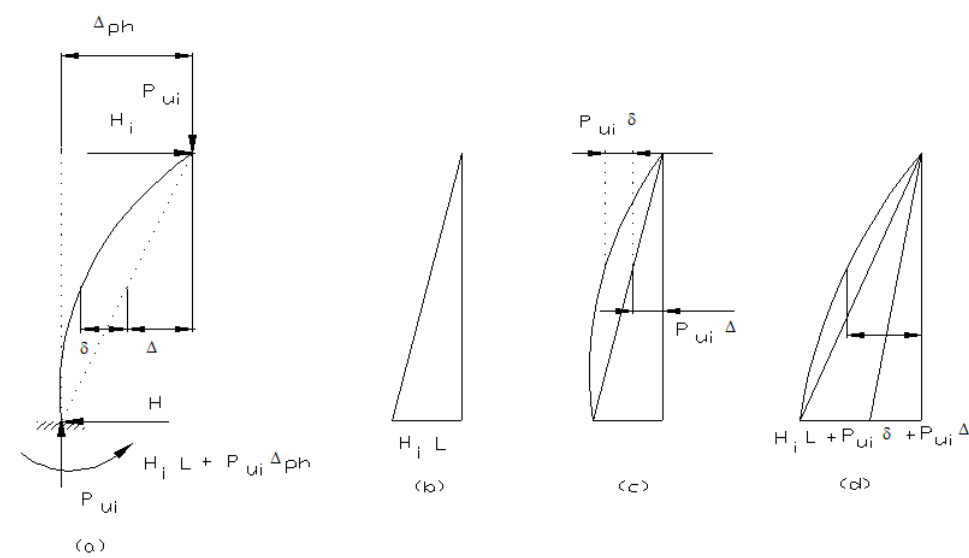


Figure 3-10 : Effets $P-\Delta$ et $P-\delta$ sur un poteau sollicité par une charge axiale

On peut obtenir une expression pour C_L telle que :

$$C_L = \frac{P_L}{P_{e(n)}} - 1 = \frac{\beta K_n^2}{\pi^2} - 1 \quad (3.56)$$

et où K_n est le facteur de la longueur effective, obtenu du nomogramme d'alignement pour des structures libres de se déplacer latéralement. Pour calculer C_L , on doit déterminer les valeurs de K_n et β qui sont en quelque sorte dépendantes des conditions de retenue de la membrure. À partir des valeurs de la rigidité « rotationnelle » des ressorts donnés sur la Figure 3-11, une expression pour déterminer β est donnée par :

$$\beta = \frac{6(G_A + G_B) + 36}{2(G_A + G_B) + G_A G_B + 3} \quad (3.57)$$

et où les valeurs des facteurs G sont calculées à l'aide de (3.11) et (3.12).

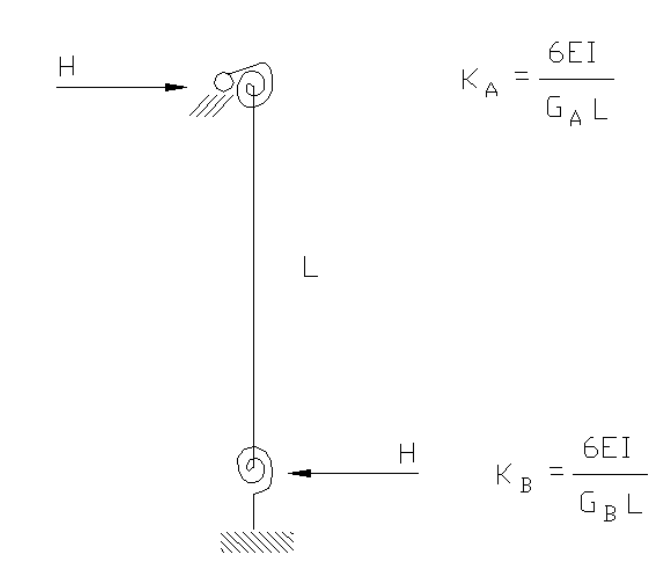


Figure 3-11 : Représentation des retenues élastiques aux extrémités du poteau

3.13 LIMITES IMPOSÉES AUX CALCULS DE LA LONGUEUR EFFECTIVE D'UN ÉTAGE

L'approche de la longueur effective de l'étage est caractérisée par deux principales limitations en ce qui a trait à l'exactitude et l'exhaustivité. En premier, cette approche est basée sur l'hypothèse fondamentale qui stipule que la valeur de $\lambda_{\text{étage}}$, calculée pour un étage donné dans un cadre étagé, est à l'intérieur d'une erreur acceptable de la valeur propre du paramètre de flambement $\lambda_{\text{système}}$ du cadre (Bridge & Fraser, 1987; Hajjar et al., 1994).

Deuxièmement, cette approche ne représente pas un mode de flambement d'un cadre contreventé pour tous les poteaux non-articulés « poteaux faible » de l'étage, même que si celui-ci est le mode qui gouverne le flambement de l'étage. Une portion significative de ces erreurs est due au fait que cette approche tient compte de la distribution de l'effet $P-\delta$ dans un étage de façon approximative. On peut pallier à ces deux déficiences par l'imposition d'une limite minimale sur la

valeur du facteur de la longueur effective (ou alternativement, imposer une limite maximale sur la capacité du poteau au flambement), calculée en utilisant cette approche. En imposant une limite sur la capacité individuelle des poteaux, un mode de flambement des cadres contreventés peut être estimé de façon approximative et conservatrice et les erreurs, qui résultent de l'utilisation de l'approche basée sur la longueur effective, peuvent être limitées à des valeurs acceptables (Le Messurier, 1993).

3.14 ÉVOLUTION ET MISES À JOUR DES SPÉCIFICATIONS TECHNIQUES

Traditionnellement, la méthode de la longueur effective (MLE) a été largement utilisée dans le dimensionnement des poteaux faisant partie des cadres en acier, que ces cadres soient contreventés (empêchés de se déplacer latéralement) ou non-contreventés (libres de se déplacer latéralement). Tel que discuté dans les précédents paragraphes, cette méthode est basée sur l'utilisation des facteurs de la longueur effective K , qui tiennent compte de la contribution et de l'influence des conditions de retenues sur la capacité de la résistance axiale des poteaux. Vu que la MLE est aussi basée sur diverses hypothèses en ce qui a trait à la géométrie, les conditions de retenue et les propriétés des matériaux (comportement dans le domaine élastique), on a pu constater à travers les paragraphes précédents, que cette méthode peut s'avérer inappropriée, surtout dans les cas où les structures traitées représentent des caractéristiques qui ne soient pas consistantes avec les hypothèses qui sont à l'origine de cette méthode. Dans un souci de pouvoir utiliser une méthode de dimensionnement qui peut avoir l'avantage de « capturer » avec plus d'exactitude les principaux facteurs qui affectent le comportement des poteaux et/ou poteaux-poutres, la méthode d'analyse directe (MAD) a été introduite dans les spécifications techniques qui régissent la conception et le calcul des charpentes d'acier (AISC, 2005), comme une méthode alternative à la MLE. Cette méthode s'appuie sur les exigences fondamentales de la stabilité qui stipulent que « La stabilité doit être assurée par la structure considérée dans son ensemble et par chacune de ses membrures ».

Un des avantages majeurs de la méthode proposée, réside dans sa capacité de pouvoir tenir compte des imperfections géométriques de la membrure et des défauts de construction qui contribuent à générer des contraintes additionnelles, réduisant par le fait même la capacité portante de la structure (Suroveck & Zienmian, 2005). La MAD est applicable à tous types de structures qu'elles soient contreventées ou non contreventées.

Pour prendre en considération tous les défauts géométriques, la MAD s'appuie sur l'utilisation des charges fictives appliquées à la structure dans la direction horizontale. Ces imperfections ou les charges fictives correspondantes doivent être appliquées dans la direction des charges latérales. Pour les cas des charges de gravité, ces charges fictives doivent être appliquées dans la direction suivant laquelle, la structure tend à se déplacer latéralement. Concernant un autre défaut géométrique, en l'occurrence, le défaut de rectitude, la modélisation de ce défaut dans l'analyse structurale de l'ensemble de la structure, peut s'avérer complexe et laborieuse, comparée à la modélisation des défauts de la non verticalité. Dans la pratique, le concepteur peut rencontrer des difficultés significatives concernant la direction de ces défauts de rectitude à spécifier par membrure. Pour contourner cette difficulté, la réduction de la rigidité flexionnelle des membrures concernées peut représenter une alternative beaucoup plus simple à utiliser dans une routine de calcul.

L'application de ces charges fictives assimile l'influence des effets du second ordre dans la réponse structurale, ce qui peut être interprété comme étant des effets qui contribuent à réduire la rigidité latérale de la structure. La MAD est basée sur des calculs qui retiennent une valeur du facteur de la longueur effective $K=1$. Les deux méthodes de dimensionnement (MLE et MAD) utilisent les équations d'interaction pour estimer la capacité individuelle des membrures. Toutefois, vu que les deux méthodes sont « différentes », il faut s'attendre à ne pas aboutir au même dimensionnement des membrures et ce pour une configuration structurale donnée. Bien entendu dans le cas où les résultats du dimensionnement obtenus de l'application des deux méthodes

représentent des différences substantielles, il devient judicieux de poser toute question pertinente pour expliquer et comprendre les raisons de ces différences.

La nouvelle méthode proposée fournit une « représentation » raisonnable du comportement réelle de la structure incluant les effets des non linéarités des matériaux et les non linéarités géométriques. L'objectif de l'introduction de cette méthode dans les spécifications techniques est de palier aux limitations de la MLE. Dans le dimensionnement des cadres d'acier selon la MAD, on utilise une analyse élastique du second ordre, que cette analyse soit une méthode rigoureuse ou une analyse élastique de premier ordre avec des facteurs d'amplification (U_1 et U_2 dans **S16**, ou B_1 et B_2 dans **AISC LRFD**). L'analyse structurale du second ordre est accompagnée de l'application des charges latérales fictives et d'une réduction de la rigidité flexionnelle des membrures qui contribuent à assurer la stabilité de l'ensemble de la structure. À noter que les spécifications (AISC, 2010) préconisent l'application des charges latérales fictives dans les combinaisons où figurent

uniquement des charges de gravité, en autant que le facteur d'amplification B_2 $\left(B_2 = \frac{\Delta_{second\ ordre}}{\Delta_{premier\ ordre}} \right)$

soit inférieur à 1,7. Dans le cas contraire, les charges latérales fictives sont ajoutées aux charges latérales de conception.

L'effet principal recherché de l'application des charges latérales fictives et la réduction de la rigidité flexionnelle, est de tenir compte de façon « approximative » du comportement inélastique des membrures et des imperfections géométriques pour approcher la réponse structurale réelle. En utilisant la MAD, l'analyse élastique du second ordre est conduite avec l'application des charges fictives et la réduction des rigidités, suivantes :

1. Charge latérale fictive appliquée au niveau de chaque étage égale à 0,2% de la somme des charges pondérées de gravité sollicitant l'étage considéré.

2. La valeur de 0,2% a été calibrée en utilisant des modèles de calculs qui tiennent compte de la propagation et de la distribution de la plasticité, de la limite élastique et des conditions de retenues (analyse élasto-plastique du second ordre).
3. La réduction des rigidités flexionnelles des membrures qui contribuent à assurer la stabilité de la structure est donnée par $EI^* = 0,8\tau_b EI$ avec

$$\tau_b = \begin{cases} 1,0 & \text{pour } \frac{P_r}{P_y} \leq 0,5 \\ 4 \left[\frac{P_r}{P_y} \left(1 - \frac{P_r}{P_y} \right) \right] & \text{pour } \frac{P_r}{P_y} > 0,5 \end{cases}$$

P_r étant la résistance requise par la membrure et $P_y = A F_y$, la résistance axiale de la membrure.

4. Réduction de la capacité axiale des membrures qui contribuent à assurer la stabilité de la structure, de façon à avoir $EA^* = 0,8EA$.

Un autre avantage de cette méthode est la simplicité des calculs et l'élimination de l'utilisation des nomogrammes d'alignement et tous les ajustements nécessaires que le concepteur devait y apporter. Il est important de souligner que les normes Canadiennes régissant la conception et le calcul des charpente d'acier aux états limites ultimes peuvent être considérées comme pionnières dans l'approche d'abandonner le concept de la longueur effective dans le dimensionnement des cadres libres de se déplacer latéralement et ce, au profit d'une approche basée sur l'utilisation des charges latérales fictives tout en retenant une valeur du facteur de la longueur effective $K = 1$.

CHAPITRE 4

STABILITÉ DES CADRES RIGIDES

4.1 APPROCHE BASÉE SUR LES IMPERFECTIONS GÉOMÉTRIQUES

Cette approche est une autre alternative à celle basée sur le concept de la longueur effective pour déterminer la résistance des poteaux faisant partie des structures à cadres rigides. Plutôt que de calculer les facteurs de la longueur effective qui tiennent compte entre autres des conditions de retenue aux extrémités des membrures, on utilise la longueur réelle du poteau $K=1,0$ conjointement avec une charge latérale fictive et l'équation d'interaction de résistance des membrures agissant comme poutre-poteau. Pour les structures libres de se déplacer latéralement, cette approche de la charge fictive est aussi appelée la « méthode des imperfections équivalentes »; étant donné qu'elle tient compte des effets des diverses imperfections qui influencent la résistance des membrures des cadres rigides. Les imperfections dans les structures en acier peuvent survenir de plusieurs sources :

1. Les contraintes résiduelles dans les membrures qui peuvent être vues comme étant des imperfections dans les matériaux.
2. Les imperfections géométriques qui influencent la stabilité dans le plan des cadres, incluant les défauts de verticalité, les défauts de rectitude et la non-verticalité de l'ensemble de la structure à condition que les membrures de ces cadres soient composées de sections compactes (pas de possibilité d'instabilités locales).

Les imperfections géométriques locales (flambement local des parois qui composent les sections), influencent la stabilité locale des sections transversales non-compactes, où le rapport d'élancement des ailes (b/t) est supérieur à $200/\sqrt{F_y}$. Aussi, pour les cadres qui ne sont pas adéquatement contreventés hors du plan de chargement, le déversement et le flambement des membrures peuvent affecter le comportement global et, dans ce cas, on peut être en présence d'un phénomène d'instabilité du cadre hors du plan de chargement.

Au moins trois différentes approches sont couramment utilisées dans le dimensionnement des poteaux dans les cadres libres de se déplacer latéralement. La première approche est basée sur le concept de la longueur effective pour déterminer le terme de la résistance à la compression dans les équations d'interaction des membrures travaillant comme poteaux-poutres (AISC, 1993). La structure est analysée pour déterminer les effets élastiques du second ordre, en supposant une structure parfaitement droite qui contient des membrures parfaites et idéales. Les imperfections géométriques sont considérées uniquement via la courbure d'un poteau équivalent étant articulé à ses extrémités. Cette approche a fait l'objet du chapitre 3 du présent mémoire.

La deuxième approche est une méthode d'analyse de premier ordre avec des facteurs d'amplification (U_1 et U_2 dans **S16** et B_1 et B_2 dans **AISC LRFD**) pour tenir compte des effets du second ordre $P-\Delta$ et $P-\delta$.

La troisième approche est celle basée sur le concept des charges latérales fictives accompagnée d'une analyse structurale élastique du second ordre, exécutée sur une structure parfaite où les défauts géométriques ne sont pas modélisés de façon explicite. Cette approche utilise la longueur réelle de la membrure dans les équations d'interaction de la résistance des poteaux-poutres et tient compte des défauts de rectitude des membrures, des défauts de la verticalité et de l'effet des contraintes résiduelles. Les charges latérales fictives sont spécifiées pour capturer les effets des défauts géométriques. Cette approche est adoptée par la norme canadienne **CSA-S16.1-M94**, la norme britannique **BS5950 : Part 1 (1990)** et la norme australienne **AS4100-1990**. Les normes européennes **Eurocode 3** sont similaires aux normes **CSA-S16.1-M94** et **BS5950 : Part 1 (1990)** dans

l'utilisation d'une force latérale fictive avec une analyse structurale élastique du second ordre, exécutée sur une structure parfaite, à l'exception du fait que la longueur effective peut être utilisée dans le terme de la résistance axiale dans les équations d'interaction. Cette exception est valable pour les structures contreventées (empêchées de se déplacer latéralement). L'approche de la charge latérale fictive est développée dans le contexte des cadres rigides libres de se déplacer latéralement. Les facteurs de la longueur effective dans ce type de structure sont supérieurs à l'unité et, donc, les moments additionnels induits par les charges latérales fictives sont très importants

pour équilibrer l'augmentation dans le terme de la résistance axiale $\frac{C_f}{C_r}$ (S16) ou $\frac{P_r}{P_c}$ (AISC) dans

les équations d'interaction basées sur la longueur réelle du poteau. Si le cadre est partiellement ou totalement retenu, l'approche de la charge latérale fictive continue de s'appliquer, mais possiblement résulte d'une conception plus conservatrice. Pour le cas extrême d'un cadre contreventé, les charges latérales fictives qui agissent à chaque niveau d'étage vont produire un petit changement dans la distribution de la force axiale à travers la structure, mais auront un effet négligeable sur la distribution des moments. Il est vrai que si les facteurs de la longueur effective des poteaux dans un étage sont inférieurs à l'unité, donc toute procédure de dimensionnement impliquant l'utilisation des charges fictives conjointement avec $K = 1$ sera conservatrice.

4.2 APERÇU DE L'APPROCHE DES CHARGES FICTIVES

Cette section présente une description détaillée des différents types d'imperfections et de leur influence dans la détermination de la résistance des poteaux et des cadres. La méthode des charges fictives est considérée comme étant une procédure de conception rationnelle et simple d'application en ingénierie des structures. Une alternative aux calculs des coefficients de la longueur effective des poteaux, dans une structure non-contreventée, est d'utiliser la longueur réelle du poteau ($K = 1$) en conjonction avec une charge latérale fictive agissant à chaque niveau. Une analyse élastique du second ordre est exécutée relativement à une structure géométriquement parfaite. Les charges latérales fictives appliquées à chaque étage contribuent à prendre en

considération les imperfections géométriques (défauts de verticalité et de rectitude) sous l'effet des charges de gravité. La charge fictive N , qui agit à chaque niveau (étage), est considérée comme étant une proportion ξ de la charge de gravité totale Q agissant sur l'étage de façon à ce que $N = \xi Q$. La valeur de la variable ξ varie selon les spécifications entre 0,002 dans une analyse élastique du second ordre, **AISC LRFD**, section C2.2a et 0,005 dans les spécifications canadiennes **S16-09**, article 8.4. Les valeurs choisies devront aboutir à des résultats proches de ceux déterminés à partir des méthodes d'analyse structurale rigoureuses qui tiennent compte de la propagation de la plastification dans la section. La différence dans la valeur des charges latérales fictives entre les spécifications **S16** et **AISC LRFD** peut s'expliquer par le fait que les spécifications **AISC LRFD** emploient une valeur de 0,002 accompagné d'une réduction de la rigidité flexionnelle et axiale des membrures qui contribuent à assurer la stabilité de la structure. Les normes canadiennes, conservent les valeurs nominales des rigidités flexionnelles et axiales des membrures. En se limitant au seul comportement de la structure dans le plan du chargement, si la méthode des charges fictives était permise dans les spécifications **AISC LRFD**, les équations pertinentes d'interaction des poteaux-poutres devraient être satisfaites pour toutes les membrures travaillant comme poteau-poutre telles que :

$$\begin{aligned} \frac{P_u}{\phi_c P_{n(L)}} + \frac{8}{9} \frac{M_u}{\phi_b M_n} &\leq 1,0 \quad \text{pour} \quad \frac{P_u}{\phi_c P_{n(L)}} \geq 0,2 \\ \frac{P_u}{2\phi_c P_{n(L)}} + \frac{8}{9} \frac{M_u}{\phi_b M_n} &\leq 1,0 \quad \text{pour} \quad \frac{P_u}{\phi_c P_{n(L)}} < 0,2 \end{aligned} \quad (4.1)$$

et dans lesquelles la résistance axiale nominale $P_{n(L)}$ est calculée à partir de la courbe de résistance du poteau en utilisant la longueur réelle de l'élément L ; la résistance ainsi calculée tient compte des imperfections géométriques. Dans une analyse structurale élastique, la méthode de la charge fictive agit en conjonction avec les vraies charges latérales et les charges de gravité, ce qui produit invariablement des valeurs plus élevées des moments dans les membrures M_u comparées à celles

obtenues des charges réelles seulement. Dans cette perspective, la contribution additionnelle aux moments M_u est contrebalancée par l'augmentation du terme de la résistance axiale nominale de P_n (basée sur la longueur effective KL) à $P_{n(L)}$ (basée sur la longueur réelle L). Les charges horizontales fictives doivent être employées dans toutes les combinaisons de charges et, en principe, elles nécessitent à être considérées dans toutes les directions, mais seulement dans une direction à la fois. Lorsque les vraies charges latérales sont appliquées, les charges réelles et les charges fictives sont logiquement supposées agir dans la même direction.

En l'absence de charges latérales réelles (cas d'une structure sollicitée par des charges de gravité symétriques seulement) et lorsque la structure et/ou la charge est asymétrique, les charges fictives doivent être considérées comme agissant de façon indépendante dans les deux directions, chaque direction à la fois. On peut noter qu'effectivement, cette procédure augmente le nombre de cas de charge où la charge de gravité a besoin d'être considérée. Le grand nombre de cas de charges inhérentes, dans la procédure de la charge fictive, ne doit pas représenter un problème de taille, surtout avec l'utilisation courante des analyses structurales sur ordinateur. Une conséquence de l'utilisation de la méthode des charges fictives est que même s'il s'agit des cas de charges de gravité, chaque poteau retenu et faisant partie d'une structure libre de se déplacer latéralement, est sollicité par un moment de flexion M_u et seuls les poteaux ayant des rotules aux extrémités (poteaux faibles) sont dimensionnés pour des charges axiales pures. Cela signifie qu'un point fixe, sur l'axe P_n/P_y du diagramme d'interaction de la résistance de la membrure sous l'effet de la charge axiale pure, n'existe pas dans cette approche basée sur les charges fictives et qu'il y a une certaine portion du diagramme d'interaction adjacente à l'axe P_n/P_y (où le moment M_u est plus petit que celui généré sous l'action de la charge fictive seule) qui est inutilisable.

Ces aspects particuliers, associés avec l'approche des charges fictives, n'affectent pas la puissance de cette méthode, mais confirment la réflexion sur la présence des défauts de verticalité dans les

cas réels et que les charges de gravité, agissant sur ces défauts de verticalité, induisent des moments de flexion. Un des avantages de la méthode basée sur les charges fictives est sa capacité à fournir les moments de flexion aux joints des cadres sous l'effet des charges de gravité et ces moments sont nécessaires pour le dimensionnement des poutres et les assemblages qui assurent le transfert des charges.

4.3 INFLUENCE DES IMPERFECTIONS GÉOMÉTRIQUES SUR LA RÉSISTANCE DU POTEAU

4.3.1 Généralités

En général, seulement deux types d'imperfections sont considérés dans la détermination de la résistance des poteaux tel que reflété dans les courbes de la résistance des poteaux. Il s'agit des contraintes résiduelles et des défauts de rectitude. L'influence de chaque imperfection et de leur combinaison est illustrée à la Figure 4-1. Cette courbe est obtenue en considérant une membrure parfaitement droite et une distribution des contraintes résiduelles selon le modèle proposé par (Galambo & Ketter, 1959). La membrure ne montre aucune déformation latérale avant le flambement (bifurcation), la charge critique de flambement est obtenue à partir du module tangent E_T et est désignée par P_i et les déformations subséquentes suivent la courbe (B). Pour une membrure ayant des défauts de rectitude (courbe A), mais exempte des contraintes résiduelles, les déformations latérales prennent place immédiatement après le chargement et elles suivent une courbe de flexion élastique du second ordre jusqu'à l'atteinte de la limite élastique correspondant à une charge P_i , les déformations subséquentes suivent la courbe A. Si les deux types d'imperfections sont présents, les déformations suivent la courbe C et atteignent une valeur maximale pour une charge correspondante P_m avec les déformations subséquentes suivant un tracé qui approche la courbe B.

Les multiples courbes de résistance des poteaux dans la norme britannique **BS5950 : Part 1 (1990)** et la norme australienne **AS-4100-1990** sont basées sur l'équation de *Perry-Robertson* qui inclut un terme du défaut de la verticalité. Dans la norme australienne **AS-4100-1990**, le terme du défaut de la verticalité est augmenté de façon artificielle pour tenir compte des contraintes résiduelles, ce qui conduit à réduire la résistance calculée de P_L à P_m (Figure 4-1). Les courbes multiples des poteaux dans les normes européennes sont basées sur une combinaison des analyses aux états limites ultimes et sur des tests à échelles réelles. Par contre, la courbe de la résistance des poteaux, dans la méthode de calcul aux contraintes admissibles **ASD** (AISC, 1978) est basée sur une réponse du poteau qui tient compte seulement des contraintes résiduelles (flambement suivant la courbe B de la Figure 4-1), où la contrainte résiduelle maximale en compression est égale à $0,5F_y$. Cette valeur représente une majoration artificielle de la contrainte résiduelle typique en compression qui est habituellement égale à $0,3F_y$ pour tenir compte partiellement des effets des courbures initiales (défauts de rectitude). Toutefois, cette méthode ne tient pas compte adéquatement des défauts initiaux de la verticalité et, donc, un facteur de sécurité variable est utilisé de façon à réduire la valeur de P_t à une valeur qui correspond à P_m déterminée à partir des résultats des tests.

La courbe de la résistance des poteaux dans la spécification **AISC LRFD** représente un ajustement de la courbe de la spécification **ASD** qui inclut les effets des contraintes résiduelles ainsi que les effets des imperfections géométriques. Pour les membrures faisant partie des cadres libres de se déplacer latéralement, les courbes de la résistance des poteaux, décrites ci-dessus, ne tiennent pas compte directement des défauts de verticalité de l'étage ou de la non-verticalité de l'ensemble de la structure. Tous les effets de ces imperfections peuvent être inclus dans une analyse structurale inélastique avancée. Les résultats d'une telle analyse peuvent être qualifiés de « résistances exactes » des poteaux. Les résistances déterminées d'une analyse structurale inélastique avancée

peuvent être comparées aux résultats obtenus des méthodes de conception prescrites dans les normes et les spécifications pour fins d'adaptation et/ou de rectifications (calibrage).

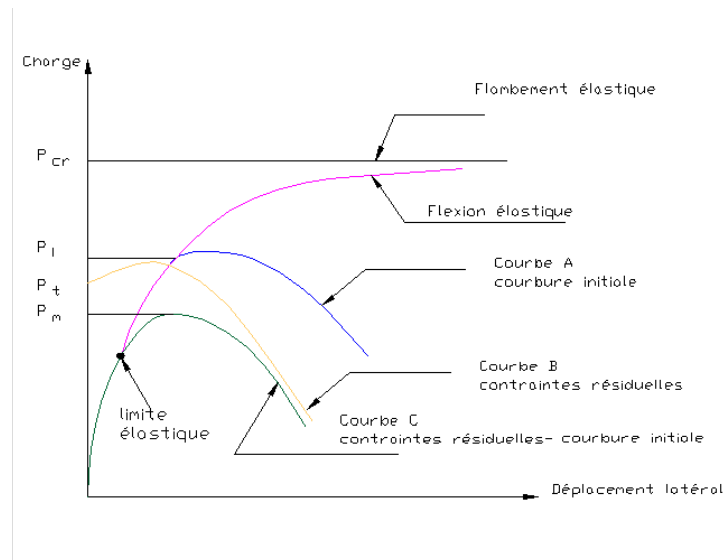


Figure 4-1 : Influence des imperfections géométriques sur le comportement du poteau (Trahair & Bradford, 1991)

En plus des imperfections considérées ci-dessus, il y a d'autres imperfections qui peuvent se produire dans la pratique, à savoir : les déviations dans les plaques qui constituent les sections, les excentricités accidentelles des charges, les charges transversales accidentelles, les mouvements des appuis et les tassements des systèmes de fondations sont des exemples parmi tant d'autres. Ces dernières imperfections ne sont pas traitées dans le cadre de ce mémoire.

4.3.2 Types d'imperfections

Les sections structurales laminées à chaud renferment des contraintes résiduelles qui résultent des différents taux de refroidissement que les différentes parties de la section éprouvent durant le processus de la fabrication. Pour les sections en I, les contraintes résiduelles sont habituellement des contraintes de compression dans le bout des ailes. Comparé aux sections exemptes de contraintes résiduelles, la magnitude et la distribution de ces contraintes résiduelles de compression

influencent la résistance à la compression des membrures, à cause de la possibilité d'atteindre prématurément la limite élastique dans différents endroits de la section, ce qui peut réduire la résistance à la flexion. Deux différentes distributions des contraintes résiduelles dans les sections en I sont montrées à la Figure 4-2. Les effets des contraintes résiduelles sont plus sévères pour des sections en I fléchies suivant leurs axes faibles. Comparé à celles fléchies suivant l'axe fort, les valeurs des contraintes résiduelles de compression et de traction peuvent être déterminées avec les expressions développées par (Galambos & Ketter, 1959) :

$$\sigma_{rt} = \left[\frac{bt}{bt + w(d - 2t)} \right] \sigma_{rc} \quad (4.2)$$

où $\sigma_{rc} = 0,3F_y$ est la contrainte résiduelle en compression et σ_{rt} est la contrainte résiduelle en traction.

Les contraintes résiduelles dans les sections en I laminées à chaud sont mesurées à l'aide des méthodes destructives et non destructives. Une des premières méthodes exactes pour déterminer les contraintes résiduelles a été proposée par (Mesnager, 1919) et modifier par (Sachs, 1919) est connue sous l'appellation technique de « Boring-out Method ». La distribution des contraintes résiduelles, proposée par (Beedle, 1964), est consistante avec les contraintes résiduelles mesurées dans les sections américaines, désignées par W (wide flange), qui résultent du refroidissement de la section pendant et après le laminage. Des recherches conduites, pour investiguer le déversement par flambement latéral des poutres et des poteaux-poutres, ont permis une représentation des contraintes résiduelles induites dans les ailes des sections, après le laminage à chaud par une distribution parabolique variant de $0,35F_y$, en compression aux bouts des ailes, à $0,5F_y$ de traction à la jonction ailes-âme. (Bild & Trahair, 1989) ont adopté une distribution bilinéaire pour les ailes et une distribution tri-linéaire pour l'âme (voir Figure 4-2b). La distribution des contraintes montrées à la Figure 4-2a a été employée largement dans les études paramétriques relatives à la résistance

des poteaux-poutres et des cadres dans le contexte du développement des équations d'interaction (Bild & Trahair, 1989).

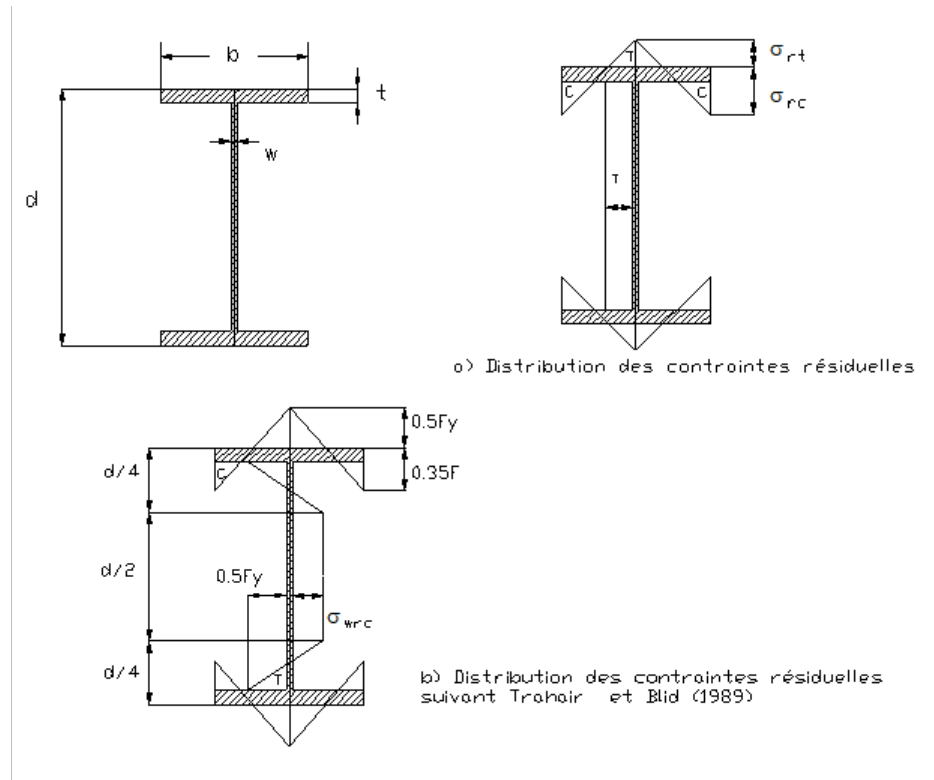


Figure 4-2 : Exemples de la distribution des contraintes résiduelles dans une section en I doublement symétrique (Bild & Trahair, 1989)

4.3.3 Imperfections géométriques

Dans les différentes spécifications techniques de conception, des valeurs définissant les tolérances de la fabrication et d'érection sont incluses de façon explicite ou implicite pour simuler les défauts de rectitude de la membrure δ_0 , les défauts de verticalité à l'étage Δ_0 et de la non-verticalité globale e_0 de la structure. Trois types d'imperfection qui peuvent être désignés comme

des imperfections de la membrure et de la structure dans son ensemble sont montrés à la Figure 4-3.

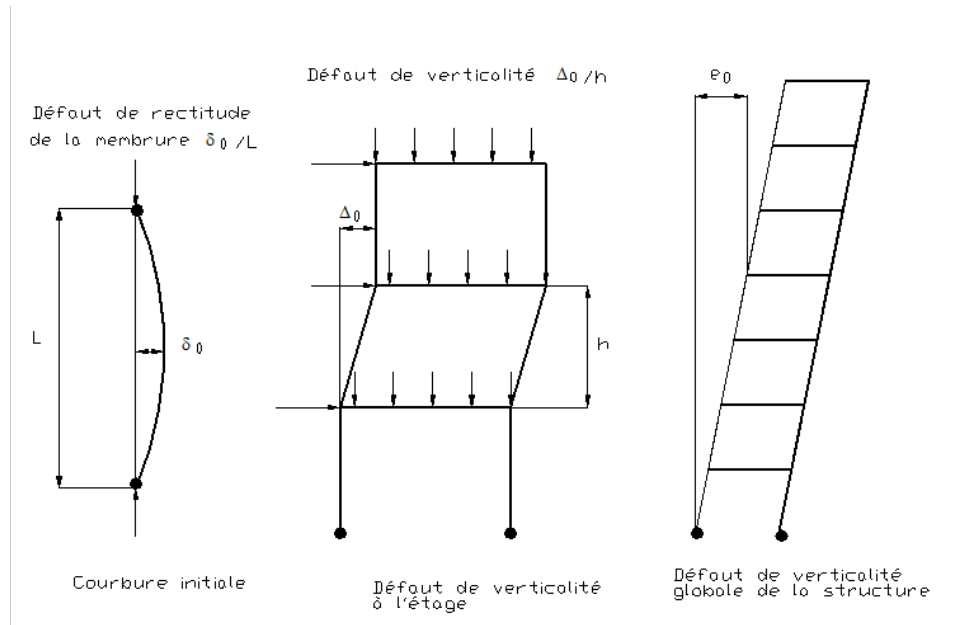


Figure 4-3 : Défauts géométriques des membrures et des cadres

Les défauts de rectitude d'une membrure sont parmi les aspects qui ont été les plus examinés et les effets de ces imperfections sont inclus dans les courbes de résistance des poteaux adoptées par les différentes spécifications techniques. Les imperfections peuvent être incluses dans la procédure de la conception et l'analyse des cadres, mais une telle approche peut s'avérer très complexe. **Eurocode 3** recommande que ces imperfections géométriques soient être incluses dans l'analyse élastique globale du cadre. Bien que l'influence du nombre de poteaux dans un étage et le nombre d'étages soit considérée, seules quelques lignes directrices sont données en ce qui a trait à la forme et la distribution de ces imperfections. Les spécifications **AS4100-1990** et **CSA-S16.1-M94** incluent les effets des imperfections géométriques à travers l'utilisation des charges latérales fictives. Cette approche est aussi admise dans **Eurocode 3**. La modélisation des imperfections géométriques n'est

pas une procédure simple. Ce n'est pas simplement la magnitude, mais aussi la forme, la distribution et l'orientation de ces imperfections qui sont significatives.

Le concept de la longueur effective du poteau, équivalent articulé aux deux extrémités peut être utilisé pour prendre en considération les défauts géométriques des poteaux ayant des conditions de retenues différentes de celles du poteau équivalent. Différents exemples de l'utilisation de ce concept sont montrés à la Figure 4-4.

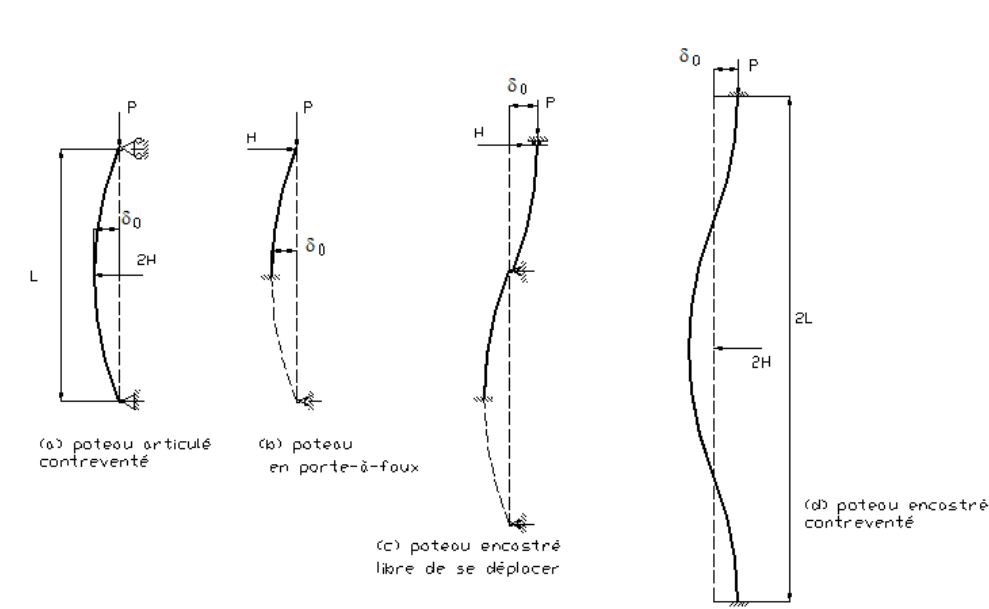


Figure 4-4 : Poteaux équivalents avec imperfections géométriques basés sur le concept de la longueur effective

Dans le cas d'absence d'imperfections géométriques, les poteaux-poutres montrés aux Figure 4-4a à Figure 4-4d, ont un comportement identique. De façon similaire, si les imperfections géométriques sont incluses suivant le concept d'un poteau bi-articulé équivalent avec un défaut initial de rectitude δ_0 , le comportement de chacun des quatre poteaux est identique. Le défaut de verticalité des poteaux-poutres sur les Figure 4-4a et Figure 4-4c est défini implicitement par le défaut de rectitude de la membrure δ_0 et de la longueur effective K et ce défaut est indépendant

des tolérances de l'érection. Le poteau en porte-à-faux, montré à la Figure 4-4b, a un coefficient de la longueur effective $K = 2$ sur le défaut de verticalité implicite supposé, δ_0 égal à $\delta_0 = 2\delta_0/K$, tandis que le coefficient de la longueur effective du poteau encastré à ses extrémités (voir Figure 4-4c) est égal à 1 et la non-verticalité implicite égale à $2\delta_0 = 2\delta_0/K$. La modélisation des imperfections géométriques des cadres, et plus particulièrement, la détermination des orientations appropriées de ces défauts est beaucoup plus complexe que celle pour une membrure individuelle. Plutôt que de prescrire des défauts de rectitude aux membrures et des défauts de verticalité au cadre, on peut employer un modèle de cadre équivalent représentant des imperfections géométriques. Les imperfections équivalentes peuvent être définies comme étant de larges imperfections qui résultent d'une déviation uniforme de la verticale, et ce, pour tenir compte des effets combinés des défauts des membrures et de l'ensemble du cadre.

4.3.4 Imperfections géométriques – Normes et spécifications

Une revue des imperfections géométriques et des imperfections des matériaux (contraintes résiduelles) incluses dans les spécifications techniques à travers le monde peut être trouvée dans (SSRC, 1991). Certaines spécifications techniques incluent les imperfections directement dans la procédure de la conception. Alternativement, ces imperfections peuvent être incluses dans une analyse structurale pour déterminer les effets des charges agissant sur ces imperfections. L'emphasis sur ces imperfections, et comment elles sont considérées dans les procédures basées sur le principe des analyses élastiques du second ordre, est fondamental pour comprendre la motivation d'une approche basée sur le concept des charges fictives.

4.3.5 Défauts de rectitude de la membrure

Pour déterminer les forces internes dues aux charges appliquées dans le contexte d'une analyse élastique qui traite la structure dans son ensemble, les spécifications techniques négligent habituellement les défauts de rectitude des membrures. Cependant, ces défauts sont considérés

dans le dimensionnement de la membrure par l'usage d'une courbe de résistance des poteaux qui inclut aussi les effets des contraintes résiduelles. **Eurocode 3** exige que les défauts de rectitude de la membrure soient inclus dans l'analyse globale lorsque l'élancement de la membrure excède une limite définie, relative au ratio de la charge axiale à la charge équivalente de la limite élastique P/P_y . Les défauts de rectitude de la membrure sont considérés dans les diverses spécifications techniques :

CSA-S16-09: inclut dans les courbes de résistance des pièces comprimées, des défauts de rectitude qui sont basées sur une valeur sécuritaire de la déformée initiale égale à $L/1000$.

AS4100-1990 : inclut les défauts de rectitude dans les courbes de résistance des poteaux.

AISC LRFD (1993) : inclut les défauts de rectitude dans les courbes de résistance des poteaux.

AISC LRFD (2005) : offre la possibilité d'utiliser la méthode d'analyse directe qui tient compte des imperfections géométriques, soit par l'application des charges latérales fictives ou par l'intermédiaire d'une modélisation directe de ces imperfections dans l'analyse structurale.

Eurocode 3 : inclut les défauts de rectitude dans la courbe de résistance des poteaux ou en utilisant une analyse du second ordre avec des poteaux représentant des défauts géométriques initiaux.

4.3.6 Défauts de verticalité de l'étage

Les imperfections initiales d'un cadre peuvent être considérées dans l'analyse structurale élastique au moyen d'une imperfection géométrique équivalente sous la forme d'un déplacement initial ψ tel que montré à la Figure 4-5. Il est important de réaliser que le défaut de verticalité ψ équivalent est souvent plus grand que la non-verticalité physique de l'étage spécifiée sur la base des tolérances d'érection. Pour plus de convenance dans l'analyse structurale, l'imperfection initiale ψ

peut être remplacée par des charges fictives équivalentes à $N = \psi P$ où P représentent la somme des charges de gravité qui sollicitent l'étage. Les charges latérales fictives équivalentes sont montrées à la Figure 4-5a, pour une membrure individuelle, et à la Figure 4-5b, pour un cadre rigide à étages. Les valeurs de ψ relatives à l'analyse élastique du cadre, qui sont incluses dans certaines spécifications de conception, sont :

AISC LRFD : non applicable. Les facteurs de la longueur effective sont utilisés pour les poteaux faisant partie des structures libres de se déplacer latéralement, de cette façon, ψ est considérée comme étant une quantité implicite (AISC, 1993). La norme (AISC, 2010) permet l'utilisation des charges latérales fictives, N_i , pour tenir compte d'un défaut de verticalité de l'ordre de 1/500, sous la forme $N_i = 0,002Y_i$, où Y_i est la somme des charges de gravité sollicitant l'étage. Dans le cas où un défaut de verticalité plus petit est défini, les charges latérales fictives peuvent être diminuées.

CSA-S16-09 : $\psi = 0,005$ conjointement avec un facteur de la longueur effective $K = 1$ où les charges latérales fictives sont plus grandes que les charges latérales réelles; sinon, la charge fictive est nulle.

AS 4100-1990 : $\psi = 0,002$ conjointement avec un facteur de la longueur effective $K = 1,0$ où les charges latérales fictives sont plus grandes que les charges latérales réelles; sinon, la charge fictive est nulle.

Eurocode 3 (1992) :

$$\psi = k_c k_s \psi_0$$

avec $\psi_0 = 0,005$

$$k_c = \sqrt{0,5 + 1/c} \quad k_c \leq 1,0$$

$$k_s = \sqrt{0,2 + 1/s} \quad k_s \leq 1,0$$

avec C et S , le nombre de poteaux par étage et le nombre d'étage respectivement.

La valeur de ψ peut donc varier d'un maximum 0,005 à un minimum de 0,0016, dépendamment du nombre d'étages (hauteur de la structure) et du nombre des poteaux à l'étage. À noter que ψ est utilisée conjointement avec le facteur de longueur effective K pour les cadres contreventés (empêchés de se déplacer latéralement).

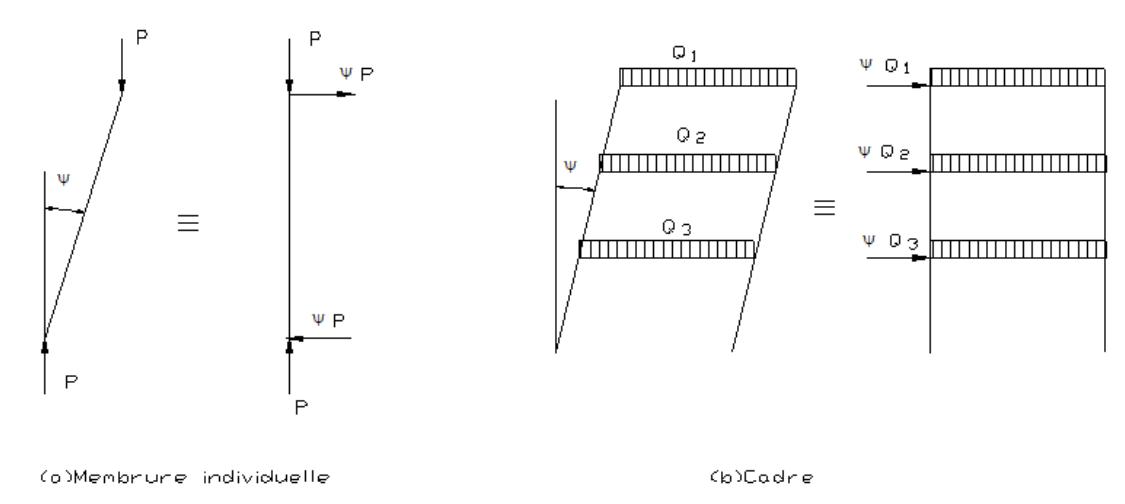


Figure 4-5 : Défauts de verticalité et charges fictives équivalentes

4.3.7 Aperçu des tolérances courantes de la construction et de la fabrication

Une approche alternative à la modélisation des imperfections géométriques et à leur prise en compte dans une étude inélastique avancée consiste à prendre en considération les tolérances d'érection et de fabrication pour les membrures (voir Figure 4-3). Les spécifications techniques ont habituellement des exigences concernant les tolérances de fabrication et d'érection des membrures sollicitées en compression. Ces tolérances doivent idéalement refléter les imperfections permises pour atteindre la résistance exigée.

Défauts de rectitude des membrures

Une membrure présentant des défauts géométriques (cas courants dans la pratique) peut être modélisée avec exactitude à l'aide d'un nombre de termes obtenus d'une série de Fourier. C'est généralement le premier terme qui représente une demi-onde de forme sinusoïdale entre les extrémités de la membrure qui a l'effet le plus significatif sur la résistance. Donc, le défaut de rectitude est normalement spécifié sous la forme de la proportion δ_0/L où δ_0 est l'imperfection à la mi-hauteur de la membrure et L est la longueur de la membrure. Les tolérances de fabrication pour les membrures en compression dans certaines spécifications techniques de conception sont :

AISC LRFD (1993): $\delta_0/L = 0,001$

CSA-S16-09 : $\delta_0/L = 0,001$

AS4100-1990 : La valeur minimale de $\delta_0 = 3$ mm où $\delta_0/L = 0,001$

Eurocode 3 (1992) : $\delta_0/L = 0,001$ ou $\delta_0/L = 0,002$ (pour les sections tubulaires)

Défauts de verticalité globale

Durant l'érection de la structure, les poteaux à chaque étage sont alignés de façon à maintenir la verticalité dans les limites des tolérances prescrites. Une mesure du défaut de verticalité à chaque étage (la tolérance d'érection) est le ratio Δ_0/h où Δ_0 est le déplacement relatif de l'étage à l'état où la structure n'est pas chargé et h est la hauteur de l'étage comme montré à la Figure 4-3b. Les tolérances d'érection dans certaines normes de conception sont les suivantes:

AISC LRFD (2005) : $\delta_0/L = 0,002$

CSA-S16-09 : $\delta_0/L = 0,001$

AS4100-1990 : $\delta_0/L = 0,002$

Eurocode 3 (1992) : $\delta_0/L = 0,002$

D'un point de vue analytique, toutes les spécifications mentionnées ci-dessus, permettent que les imperfections relatives à la verticalité soient représentées par des charges latérales fictives $N = (\Delta_0/h)Q$ où Q correspond à la totalité de la charge de gravité agissant à l'étage. Il est important de noter que la valeur de l'imperfection équivalente, Ψ , telle que discutée précédemment, peut-être plus grande que la valeur de la tolérance de construction Δ_0/h considérée dans la présente section. Cette dernière approche est plus adaptée à la procédure de construction.

Défauts de verticalité de l'ensemble de la structure

Pendant l'érection de la charpente d'acier, les poteaux dans les étages doivent être droits et bien alignés pour maintenir la verticalité générale de la structure dans les limites permises. Des exemples d'enveloppe pour la tolérance maximale de la verticalité e_0 pour les poteaux d'un cadre, sont montrés à la Figure 4-3. Les exigences dans certaines spécifications de conception sont les suivantes :

AISC LRFD (2005) : pour les poteaux extérieurs (poteaux de rive) : 25 mm vers la ligne du bâtiment ou 50 mm éloignés de la ligne du bâtiment pour les premiers 20 étages; au-dessus de 20 étages, la déviation peut être augmentée de 1,6 mm pour chaque étage supplémentaire jusqu'à un maximum de 50 mm vers la ligne du bâtiment ou 75 mm éloignés de la ligne du bâtiment. Pour les poteaux adjacents à des cages d'ascenseur : 25 mm pour les premiers 20 étages et la déviation peut être augmentée de 0,8 mm à chaque étage supplémentaire jusqu'à un maximum de 50 mm.

CSA-S16-09 : Pour les poteaux extérieurs: 25 mm vers la ligne du bâtiment ou 50 mm éloignés de la ligne du bâtiment pour les 20 premiers étages, plus 2,0 mm pour chaque étage

supplémentaire jusqu'à un maximum de 50 mm vers la ligne du bâtiment ou 75 mm éloignés de la ligne du bâtiment. Pour les poteaux adjacents à des cages d'ascenseur : 25 mm pour les 20 premiers étages, plus 1 mm pour chaque étage supplémentaire jusqu'à un maximum de 50 mm.

AS 4100-1990 : Pour tous les poteaux, 0,002 de la hauteur ou la plus petite valeur entre ce qui suit : 25 mm pour un point jusqu'à 60 m au-dessus de la base ou 25 mm plus 1 mm pour chaque 3 m dépassant 60 m jusqu'à une valeur maximale du défaut de verticalité de 50 mm.

Eurocode 3 (1992) : $0,0035 \Sigma h / \sqrt{n}$ où Σh est la hauteur totale et n est le nombre total d'étages à partir de la base jusqu'au niveau considéré.

Par exemple, à une hauteur totale de 105 m, l'équivalent d'environ 35 étages de 3,5 m de hauteur, la valeur maximum de e_0 est de 50 mm pour **AS4100-1990** et de 73,5 mm pour **Eurocode 3**, ce qui a une influence directe sur les forces internes obtenus des analyses structurale. Cet état des faits met l'accent sur les différences qui subsistent entre les différentes spécifications techniques.

4.4 L'ADAPTATION DES IMPERFECTIONS DANS L'UTILISATION D'UNE ANALYSE AVANCÉE

Un poteau de longueur L libre de se déplacer latéralement et caractérisé par des retenues rotationnelles élastique aux extrémités (voir Figure 4-6), peut être utilisé comme modèle analytique pour l'investigation de l'approche basée sur les charges fictives dans la détermination de la résistance des poteaux et de la stabilité globale de ce type de structure.

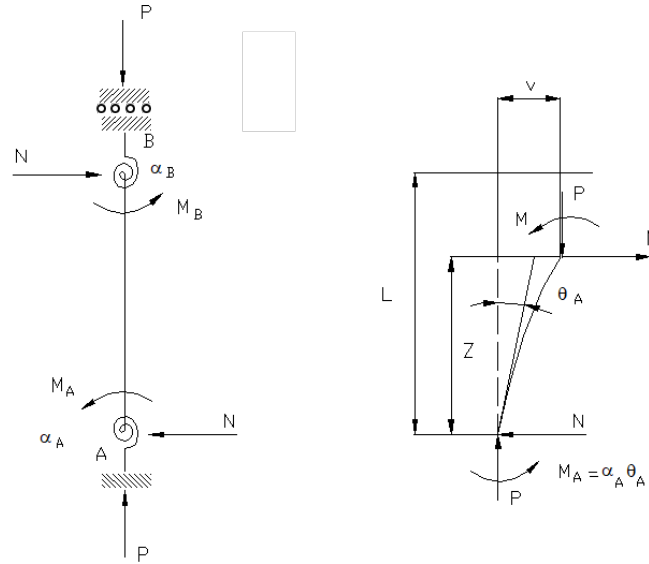


Figure 4-6 : Poteau libre de se déplacer latéralement ayant des retenues latérales en rotation

Les rigidités élastiques en rotation des retenues aux extrémités A et B du poteau sont désignées par α_A et α_B respectivement. Ces retenues élastiques peuvent être exprimées sous la forme :

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}_A &= \alpha_A L / EI \\ \bar{\alpha}_B &= \alpha_B L / EI\end{aligned}\tag{4.3}$$

où EI est la rigidité à la flexion de la section du poteau. Les facteurs de rigidité G_A et G_B couramment utilisés pour les poteaux libres de se déplacer latéralement (qui sont une mesure de flexibilité plutôt que la rigidité), peuvent être exprimés en terme de retenues élastiques à la rotation telle que :

$$\begin{aligned}G_A &= 6 / \bar{\alpha}_A \\ G_B &= 6 / \bar{\alpha}_B\end{aligned}\tag{4.4}$$

Les équations du flambement élastique, le flambement inélastique ainsi que le comportement élastique non linéaire de ce poteau (libre de se déplacer) ne sont pas traités dans le cadre de ce mémoire.

4.4.1 Méthode d'analyse avancée

Les analyses avancées sont généralement basées sur un modèle de zones plastiques qui sont distinctes de celles utilisant le concept des « rotules plastiques *SRC, 1993* ». L'analyse avancée basée sur les zones plastiques est reflétée dans la littérature de différentes façons : analyse « élasto-plastique », analyse de la plasticité répartie ou analyse inélastique répartie. L'analyse avancée basée sur un modèle des zones plastiques est caractérisée par la modélisation explicite de la diffusion de l'écoulement (plasticité) dans les membrures de la structure. Les autres facteurs qui affectent la résistance et la stabilité du cadre, tels que les contraintes résiduelles et les imperfections géométriques, peuvent aussi être modélisés. Une analyse avancée peut inclure les effets des grands déplacements, la non-linéarité des matériaux et le chargement non proportionnel des membrures et de la structure.

4.4.2 Évaluation analytique de l'importance des imperfections géométriques

Les effets des imperfections géométriques et des contraintes résiduelles sur la résistance du poteau ont été étudiés en utilisant un modèle d'un poteau en porte-à-faux montré à la Figure 4-7. Le poteau en porte-à-faux permet de considérer les défauts de rectitude et de verticalité et de fournir une compréhension des sujets plus complexes issus de la prise en considération des imperfections géométriques dans l'analyse des structures à cadres rigides.

Dans la plupart des analyses, l'élancement du poteau est :

$$\lambda_c = \frac{1}{\pi} \left(\frac{KL}{r} \right) \sqrt{\frac{F_y}{E}} \quad (4.5)$$

où K est le facteur de la longueur effective, qui est choisie égale à l'unité, puisque c'est la valeur pour laquelle la charge élastique et la charge du flambement élastique coïncident et produisent la plus grande sensibilité aux imperfections dans le poteau. Les configurations considérées par ces imperfections sont montrées à la Figure 4-7.

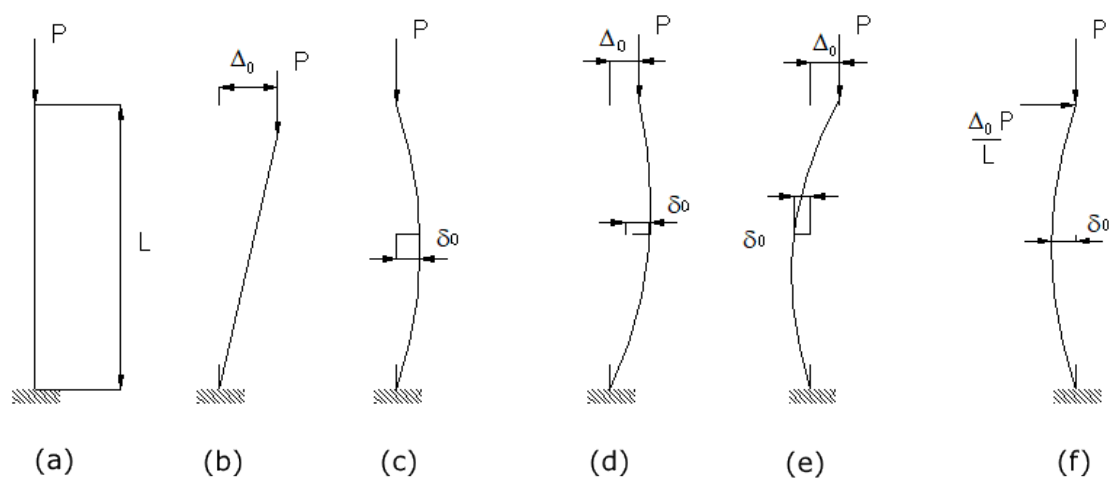


Figure 4-7 : Formes des imperfections pour un poteau en porte-à-faux

Les imperfections montrées à la Figure 4-7 consistent en des combinaisons de défauts de verticalité de magnitude Δ_0 et de défauts de rectitude de forme sinusoïdale et d'amplitude δ_0 . La section en I utilisée dans l'analyse est un **W200x46** fléchi suivant l'axe fort dont le comportement du matériau est supposé parfaitement élastique avec $F_y = 250$ MPa. La distribution de contraintes résiduelles a suivi le modèle proposé par (Galambos & Ketter, 1959) avec une contrainte résiduelle de compression aux bouts des ailes égale à $0,3F_y$. Le module d'élasticité de l'acier est égal à 200 GPa. Les résistances du poteau P_u obtenues d'une analyse avancée ainsi que des spécifications américaines **AISC LRFD** utilisées dans cette étude, ont permis de constater que :

1. Les imperfections géométriques et la distribution des contraintes résiduelles affectent la résistance du poteau.

2. Pour toutes les formes des imperfections, soit avec ou sans les contraintes résiduelles, c'est le défaut de verticalité Δ_0 qui l'effet le plus significatif sur la réduction de la résistance du système du poteau en porte-à-faux, comparé à l'effet du défaut de rectitude δ_0 . Aussi, les contraintes résiduelles ont un effet significatif sur la réduction de la résistance du poteau pour tous les cas d'imperfections géométriques.
3. Les poteaux de la Figure 4-7 diffèrent seulement dans l'orientation de l'imperfection de rectitude par rapport à l'imperfection de verticalité. L'imperfection favorablement orientée dans le poteau (d) donne une meilleure résistance comparée à celle obtenue pour le poteau (e) avec une imperfection défavorablement orientée.

4.4.3 Adaptation des imperfections géométriques à la courbe de résistance des poteaux dans les spécifications *AISC LRFD*

Tel que mentionné dans le commentaire des spécifications *AISC LRFD*, une seule courbe de la résistance des poteaux représente une adaptation raisonnable des résultats obtenus de la recherche. Les analyses avancées des poteaux, qui représentent des imperfections géométriques et une distribution déterminée des contraintes résiduelles, ont conduit à déterminer des valeurs de δ_0 , Δ_0 , et σ_{rc} qui se rapprochent étroitement des résultats obtenus de la courbe de la résistance, et ce, pour différents élancements des membrures. La courbe de la résistance des poteaux dans la spécification *AISC LRFD* est définie par :

$$P_n = 0,877 \frac{\pi^2 EI \tau}{(KL)^2} = \frac{0,877 \tau}{\lambda_c^2} P_y \quad (4.6)$$

où τ et K représente respectivement le facteur de réduction de la rigidité (comportement inélastique) et le facteur de la longueur effective inélastique.

Pour obtenir des résultats consistants avec les analyses avancées dans le cas d'un poteau libre de se déplacer latéralement et ayant des retenues aux extrémités qui développent une rigidité à la rotation, l'élancement de la membrure λ_c doit être fonction de la longueur effective inélastique plutôt qu'en fonction de la longueur effective élastique. Le calcul du facteur inélastique de la longueur effective K et la réduction de la rigidité inélastique τ implique la résolution par itération du système d'équations (tirée de (Length, 1997b)) :

$$\frac{\bar{\alpha}_A}{\tau} \frac{\bar{\alpha}_B}{\tau} + \left(\frac{\bar{\alpha}_A}{\tau} + \frac{\bar{\alpha}_B}{\tau} \right) \left(\frac{\pi}{K} \right) \cot \left(\frac{\pi}{K} \right) - \left(\frac{\pi}{K} \right)^2 = 0 \quad (4.7)$$

Poteau contreventé articulé aux extrémités

Un poteau contreventé articulé aux extrémités ($G_A = G_B = \infty$) a été analysé pour adapter le défaut de rectitude δ_0 et le niveau des contraintes résiduelles σ_{rc} à la courbe de la résistance du poteau adoptée par les spécifications **AISC LRFD**, indépendamment du facteur de la longueur effective K , qui est égal à 1 dans ce cas, et du défaut de verticalité Δ_0 qui n'a aucun effet dans ce cas (voir Figure 4-8).

Il a été trouvé que la combinaison d'un défaut initial de rectitude $\delta_0 = 0,001L$ et d'une contrainte résiduelle de compression $\sigma_{rc} = 0,3F_y$ aux bouts des ailes correspond à la courbe du poteau de **AISC LRFD** pour un grand nombre des valeurs d'élancement λ_c . Il est intéressant de noter que la valeur de $\delta_0 = 0,001L$ correspond à la tolérance de fabrication dans plusieurs spécifications techniques. Les équations de la résistance du poteau dans les spécifications **AISC LRFD** sont basées sur la résistance d'un poteau équivalent articulé aux extrémités de longueur KL avec un défaut de rectitude à mi-hauteur d'environ $KL/1500$. Pour évaluer la sensibilité de la résistance d'un poteau aux deux types d'imperfections, à savoir les défauts de rectitude et les contraintes

résiduelles, les résultats des investigations analytiques ont montré que ces deux paramètres ont un effet significatif sur la résistance du poteau et devraient donc être incluses dans l'analyse avancée des poteaux représentant des imperfections géométriques.

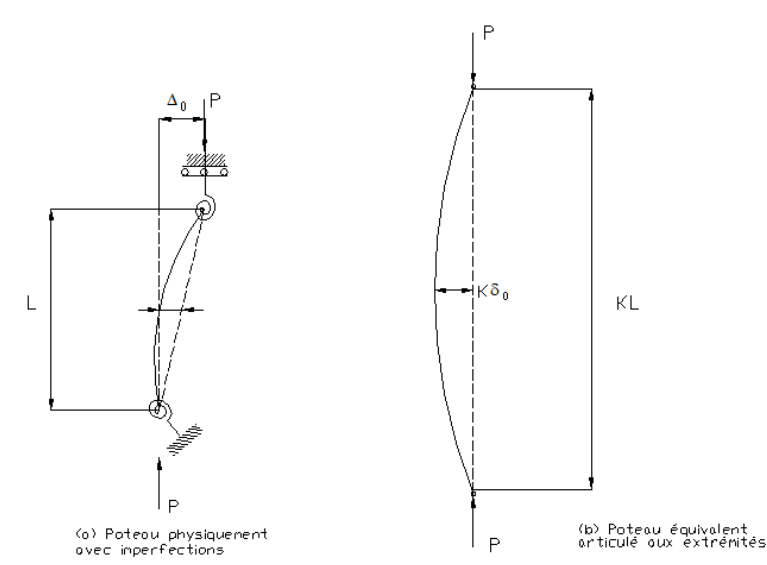


Figure 4-8 : Poteau non contreventé avec imperfections géométriques

Poteau libre de se déplacer latéralement avec retenues en rotation

En plus du défaut de rectitude δ_0 , les poteaux de longueur L sont caractérisés par d'autres imperfections géométriques notamment un défaut de verticalité Δ_0 tel que montré à la Figure 4-8a. Cette imperfection provient des tolérances de l'érection et a un effet significatif sur la résistance des poteaux non contreventés. Malgré que cette imperfection se produise aussi dans les poteaux contreventés, son effet, dans ce cas, peut être qualifié de significatif (M. J. Clarke & Bridge, 1992). Des analyses avancées ont été exécutées sur un nombre de poteaux non contreventés représentant des imperfections géométriques. Ces poteaux sont de longueur L avec des retenues élastiques en rotation et sans aucune retenue en translation. Ces derniers ont des imperfections géométriques

pour déterminer la résistance « exacte » du poteau P_n . Le défaut de rectitude retenu dans les analyses était $\delta_0 = 0,001L$ et les contraintes résiduelles de compression $\sigma_{rc} = 0,3F_y$ aux bouts des ailes. La valeur du défaut de verticalité a été modifié jusqu'à ce qu'un ajustement avec les courbes de résistance soit atteint, et ce, pour une grande variété d'élancement λ_c ainsi qu'une grande variété de conditions de retenues aux extrémités. Il est important de mentionner que le facteur de la longueur effective inélastique KL doit être utilisé pour des fins de comparaison entre les résultats obtenus des analyses avancées et ceux des courbes de résistance des poteaux. Les études réalisées ont démontré que la courbe de résistance des poteaux dans les spécifications **AISC LRFD**, en conjonction avec un facteur de la longueur effective inélastique K , se rapproche étroitement des résultats obtenus des analyses avancées dites « exactes » sur des poteaux ayant des imperfections géométriques, libres de se déplacer latéralement et pouvant atteindre la ruine par rapport à l'axe fort de la section. À noter que les spécifications canadiennes ne font mention, de façon explicite, que des effets des imperfections et du comportement inélastique des poteaux dans la seule équation qui détermine la résistance à la compression des membrures chargées en compression (**CSA/CAN S16-09**, article 13.3).

4.5 CHARGES FICTIVES POUR DES COMPORTEMENTS ÉLASTIQUE ET INÉLASTIQUE ÉQUIVALENTS

L'utilisation de l'approche des charges fictives pour déterminer la résistance des poteaux dans les structures à cadres rigides, qui est aussi nommé l'approche des imperfections équivalentes, est une alternative à l'approche de la longueur effective couramment utilisée. Comparée à la MLE, l'approche des charges fictives tient compte de la nature physique du poteau et des imperfections géométriques de façon plus directe. Les effets des imperfections des membrures et de l'étage sont considérés de façon indépendante. Les défauts de rectitude et les contraintes résiduelles sont considérés à travers une formulation conventionnelle de la résistance du poteau qui utilise la

longueur réelle au lieu de la longueur effective. Le défaut de verticalité de l'étage est pris en considération en incluant les charges fictives dans l'analyse structurale globale.

4.5.1 Charge fictive pour un comportement élastique équivalent

Le poteau montré à la Figure 4-9a présente un défaut de verticalité défini par ψ et le poteau montré à la Fig. 4.9b est parfaitement droit et sollicité par une charge latérale fictive N . La question est de déterminer la valeur de la charge latérale fictive de façon à ce que le comportement élastique du second ordre des deux systèmes (a et b) soit identique. Avec la résolution des équations différentielles pertinentes des deux poteaux de la Figure 4-9, il peut être démontré qu'on pourra obtenir des distributions identiques des moments élastiques du second ordre $M = M(z, P)$ si $N = \psi P$.

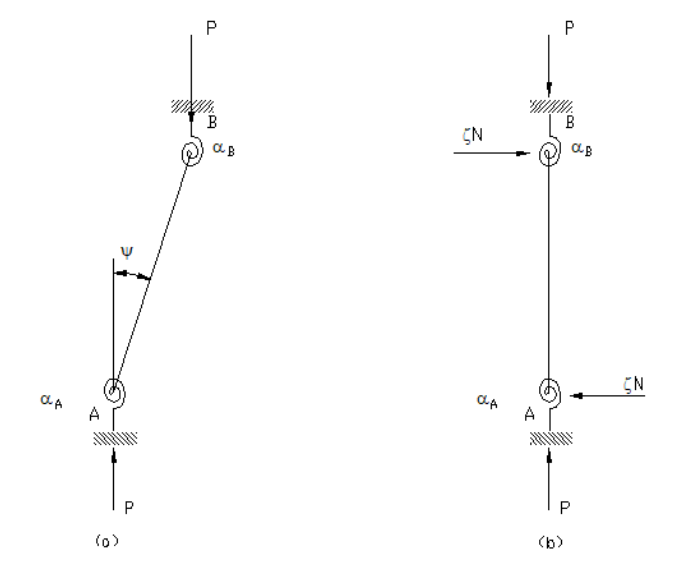


Figure 4-9 : Poteau non contreventé avec des retenues offrant une rigidité à la rotation – (a) Défaut de rectitude
(b) Charge latérale fictive

4.5.2 Charge fictive pour un comportement inélastique équivalent

Comme discuté dans la section précédente, les deux cas de la Figure 4-9 ont une distribution identique du moment élastique $M = M(z, P)$ quand $N = \psi P$. On peut donc affirmer, dans le but de déterminer la résistance du poteau en utilisant une analyse avancée, que les défauts de verticalité d'une déviation angulaire ψ peuvent être remplacés par une charge latérale fictive N de magnitude $N = \psi P$. Cette affirmation a été confirmée numériquement en utilisant des analyses avancées (M. J. Clarke & Bridge, 1992; M.J. Clarke, Bridge, Hancock, & Trahair, 1992).

4.6 ADAPTATION THÉORIQUE DES CHARGES FICTIVES À LA RÉSISTANCE DES POTEAUX

Tel que discuté précédemment, on peut se rapprocher étroitement de la courbe de résistance des poteaux dans la spécification **AISC LRFD** par une analyse des zones plastiques des poteaux articulés aux extrémités avec un défaut de rectitude initial de forme sinusoïdale avec une amplitude maximale à mi-hauteur égale à $\delta_0 = 0,001L$ et une distribution des contraintes résiduelles telle que montrée à la Figure 4-2 (Galambos & Ketter, 1959) ainsi qu'avec une valeur maximale de la contrainte résiduelle de compression aux bouts des ailes égale à $\sigma_{rc} = 0,3 F_y$. Pour les poteaux libres de se déplacer latéralement et possédant des retenues aux extrémités avec différents degrés de rigidité en rotation, il a été démontré que l'adoption d'un défaut de verticalité égal à $\Delta_0 = 0,002L$ en conjonction avec les défauts de rectitude et les contraintes résiduelles, le tout inclus dans une analyse avancée, donne des résultats très proches de ceux obtenus de la courbe de résistance de la norme **AISC LRFD**, pourvu que la longueur effective du poteau soit basée sur un facteur de la longueur effective inélastique. Pour un poteau libre de se déplacer latéralement avec défaut de verticalité désigné par ψ , la force latérale fictive N qui doit être appliquée à un poteau parfaitement droit pour produire un moment élastique du second ordre est simplement égal à $N = \psi P$. L'adaptation d'une approche basée sur une charge fictive latérale à une procédure de

dimensionnement se fera en analysant une membrure libre de se déplacer latéralement avec des retenues latérales aux extrémités de rigidité α_A et α_B . La membrure est sollicitée par une charge axiale P et une charge fictive horizontale N . On suppose que la charge fictive est une proportion ξ de la charge appliquée P de façon à ce que $N = \xi P$. Dans le cas où d'absence de retenues en translation, le moment maximal aura lieu à l'une des deux extrémités (A ou B) et le moment est donné par :

$$M_u = N_u L \Omega = \xi P_u L \Omega \quad (4.8)$$

où M_u et N_u définissent la résistance requise du poteau-poutre et $\Omega = \max(\Omega_A, \Omega_B)$ avec Ω_A et Ω_B qui sont des paramètres déterminés en fonction des conditions de retenues ainsi que de la force axiale telle que (tirées de (Length, 1997b)):

$$\Omega_A = \frac{\bar{\alpha}_A (\mu L \sin \mu L - \bar{\alpha}_B \cos \mu L + \bar{\alpha}_B)}{\mu L \left[(\bar{\alpha}_A + \bar{\alpha}_B) \mu L \cos \mu L + (\bar{\alpha}_A \bar{\alpha}_B - (\mu L)^2) \sin \mu L \right]} \quad (4.9)$$

$$\Omega_B = \frac{\bar{\alpha}_B (\mu L \sin \mu L - \bar{\alpha}_A \cos \mu L + \bar{\alpha}_A)}{\mu L \left[(\bar{\alpha}_A + \bar{\alpha}_B) \mu L \cos \mu L + (\bar{\alpha}_A \bar{\alpha}_B - (\mu L)^2) \sin \mu L \right]}$$

où :

$$\bar{\alpha}_A = \alpha_A L / EI, \bar{\alpha}_B = \alpha_B L / EI \quad (4.10)$$

$$\mu L = L \sqrt{\frac{P_u}{EI}}$$

avec α_A et α_A , les retenues rotationnelles élastiques. Avec l'hypothèse que la section utilisée est compacte, la résistance nominale de la section en flexion est égale à :

$$M_n = ZF_y \quad (4.11)$$

En substituant $Z = \eta S$, $S = \frac{2I}{D}$ (section supposée symétrique) et $r = \sqrt{I/A}$, (4.11) devient :

$$M_n = \mu SF_y = \eta \frac{2I}{D} \frac{P_y}{A} = 2 \left(\frac{\eta r}{D} \right) r P_y \quad (4.12)$$

avec

I : moment d'inertie de la section

D : hauteur totale de la section

S : module élastique de la section

Z : module plastique de la section

η : ratio du module plastique et du module élastique de la section

$P_y = AF_y$: la capacité élastique de la section en compression

F_y : limite élastique de l'acier

A : aire de la section

Avec (4.8), le ratio du moment pondéré par rapport au moment nominal est donné à :

$$\frac{M_u}{M_n} = \frac{\eta P_u L \Omega D}{2 \eta r P_y r} = \frac{1}{2} \xi \left(\frac{P_u}{P_y} \right) \left(\frac{L}{r} \right) \left(\frac{D}{\eta r} \right) \Omega \quad (4.13)$$

Puisque l'élancement géométrique L/r peut être exprimé en terme du paramètre modifié de l'élancement $\lambda_{c(L)}$ par :

$$\lambda_{c(L)} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{L}{r} \right) \sqrt{\frac{F_y}{E}} \quad (4.14)$$

La substitution de (4.14) dans (4.13), donne :

$$\frac{M_u}{M_n} = \frac{\pi}{2} \xi \lambda_{c(L)} \left(\frac{P_u}{P_y} \right) \sqrt{\frac{E}{F_y}} \left(\frac{D}{\eta r} \right) \Omega \quad (4.15)$$

L'Équation (4.15) indique que le ratio des moments M_u/M_n est fonction de certains paramètres caractéristiques :

ξ : paramètre qui définit la magnitude de la force horizontale fictive

$\lambda_{c(L)}$: paramètre de l'élancement de la membrure

E/F_y : paramètre spécifique des caractéristiques du matériau

P_u/P_y : paramètre de la force axiale dans la membrure

$\bar{\alpha}_A, \bar{\alpha}_B$: paramètres qui définissent les rigidités à la rotation des retenues latérales

$D/(\eta r)$: paramètre géométrique de la section

Pour une adaptation « correcte » du paramètre ξ d'une membrure sollicitée en compression axiale, la valeur maximale de la capacité axiale P_u calculée avec l'utilisation de l'approche de la charge fictive en conjonction avec l'équation d'interaction des poteaux-poutres, doit être égale à la capacité axiale nominale P_n calculée avec l'approche basée sur le facteur de la longueur effective :

$$P_u = 0,877 \frac{\pi^2 EI \tau}{(KL)^2} = \frac{0,877 \tau}{(K \lambda_{c(L)})^2} P_y = \frac{0,877 \tau}{\lambda_c^2} P_y \quad (4.16)$$

où K , τ et $K \lambda_{c(L)}$ représentent respectivement le facteur de la longueur effective inélastique, le facteur de réduction de la rigidité inélastique et l'élancement modifié de la membrure définie par (4.5).

Dans l'approche des charges fictives, la capacité nominale axiale $P_{n(L)}$ qui est utilisée dans l'équation d'interaction se réfère à la longueur réelle de la membrure $K=1,0$ et elle est donnée par :

$$\begin{aligned} P_{n(L)} &= 0,658^{\lambda_{c(L)}^2} P_y & \text{pour } \lambda_{c(L)} < 1,5 \\ P_{n(L)} &= (0,877 / \lambda_{c(L)}^2) P_y & \text{pour } \lambda_{c(L)} \geq 1,5 \end{aligned} \quad (4.17)$$

En définissant un facteur de réduction inélastique de la rigidité τ_L , qui se réfère à la longueur réelle du poteau L au lieu de la longueur effective KL , la capacité axiale nominale est calculée sous la forme :

$$P_{n(L)} = \frac{0,877 \tau_L}{\lambda_{c(L)}^2} P_y \quad (4.18)$$

Le ratio de la résistance à la force axiale requise sur la résistance nominale peut être obtenu de (4.16) et (4.18) tel que :

$$\frac{P_u}{P_{n(L)}} = \frac{1}{K^2} \left(\frac{\tau}{\tau_L} \right) \quad (4.19)$$

Il s'en suit que le ratio du moment requis sur le moment nominal peut être obtenu de (4.15) et (4.16) :

$$\frac{M_u}{M_n} = \frac{\pi}{2} \frac{\xi}{\lambda_{c(L)}} \frac{0,877\tau}{K^2} \sqrt{\frac{E}{F_y}} \left(\frac{D}{\eta r} \right) \Omega \quad (4.20)$$

En examinant les équations d'interaction des poteaux-poutres obtenues des spécifications **AISC LRFD** et en négligeant les facteurs ϕ , on retrouve :

$$\begin{aligned} \frac{P_u}{P_{n(L)}} + \frac{8}{9} \frac{M_u}{M_n} &\leq 1,0 & \text{pour } \frac{P_u}{P_{n(L)}} &\geq 0,2 \\ \frac{P_u}{2P_{n(L)}} + \frac{M_u}{M_n} &\leq 1,0 & \text{pour } \frac{P_u}{P_{n(L)}} &< 0,2 \end{aligned} \quad (4.21)$$

Il est approprié de négliger les coefficients de tenue ϕ dans (4.17) puisque l'adaptation est faite pour la résistance nominale plutôt que pour la résistance de conception. En supposant que $P_u/P_{n(L)} > 0,2$ (dans la plupart des cas, puisque la seule contribution du moment dans l'équation d'interaction provient des charges fictives) et la combinaison de (4.19) et (4.20) avec la première équation d'interaction de la spécification **AISC LRFD**, (4.21), on trouve une expression pour ξ telle que :

$$\xi = \lambda_{c(L)} \left(K^2 - \frac{\tau}{\tau_L} \right) \frac{9}{4\pi} \frac{1}{0,877\tau} \sqrt{\frac{F_y}{E}} \left(\frac{\eta r}{D} \right) \frac{1}{\Omega} \quad (4.22)$$

Si le poteau est suffisamment élancé, de façon à ce que $P_u/P_{n(L)} < 0,2$, on utilise alors la deuxième équation d'interaction du poteau-poutre pour obtenir le paramètre de la charge fictive ξ :

$$\xi = \lambda_{c(L)} \left(2K^2 - \frac{\tau}{\tau_L} \right) \frac{1}{\pi} \frac{1}{0,877\tau} \sqrt{\frac{F_y}{E}} \left(\frac{\eta r}{D} \right) \frac{1}{\Omega} \quad (4.23)$$

Pour un poteau de longueur définie et en connaissant le type de retenues aux extrémités, les caractéristiques de la section transversale et les propriétés du matériau, le paramètre requis de la charge latérale fictive exigée ξ peut alors être calculé à partir de (4.22) et (4.23). Toutefois, les calculs des facteurs de réduction inélastique des rigidités τ et τ_L exigent une procédure itérative. Pour les poteaux élancés et libres de se déplacer latéralement ($\lambda_{c(L)} > 1,5$), (4.22) et (4.23) peuvent être simplifiées du fait que $\tau = \tau_L = 1,0$. Il apparaît de (4.22) et (4.23) que la force latérale fictive théorique requise semble sans limite avec l'augmentation de l'élancement. Il est proposé de réaliser l'adaptation de la charge fictive à un paramètre modifié de l'élancement λ_c proche de l'unité parce que cette longueur correspond à la plus grande sensibilité aux imperfections et, par conséquent, aux charges fictives. Pour une plage d'élancements intermédiaires ($\lambda_c \approx 1,0$), le paramètre théorique de la force latérale fictive requise varie de $\xi = 0$, pour le cas d'un poteau non contreventé avec de parfaites retenues à la rotation ($G_A = G_B = 0$ et un facteur de la longueur effective $K = 1,0$), à une valeur qui s'approche de $\xi = 0,01$ pour un poteau non contreventé qui est légèrement retenu en rotation et dont les deux extrémités ont la même rigidité. L'examen des Éq. 4.18 et 4.19 nous permet de citer les facteurs qui contribuent à augmenter la valeur de la charge latérale fictive requise pour une adaptation précise :

- Une augmentation de l'élancement du poteau telle que définie par $\lambda_{c(L)}$.
- Une augmentation du coefficient de la longueur effective K .
- Une augmentation de la limite élastique de l'acier F_y .

L'examen du terme $\eta r/D$ dans (4.23) montre qu'une plus grande charge fictive est requise pour le comportement suivant l'axe fort (petit ratio de $D/(\eta r)$) comparé au comportement selon l'axe faible d'une section typique en I. À noter que les spécifications **AISC LRFD** ne font pas de distinction dans la forme de l'équation d'interaction en ce qui a trait à la flexion suivant l'axe fort et l'axe faible de la section. D'autres spécifications, telles que les normes canadiennes **CSA-S16.1-M94** et **Eurocode 3** emploient des équations d'interaction distinctes pour la résistance dans le plan de chargement et la résistance hors du plan de chargement. Dans ces cas, de plus grandes charges fictives peuvent être exigées pour le calcul de stabilité hors du plan comparé aux charges requises pour la stabilité dans le plan de charge (suivant l'axe fort de la section), de façon à éviter une évaluation non conservatrice de la capacité de certains cadres jugés sensibles aux effets de la stabilité.

4.7 ADAPTATION SIMPLIFIÉE DE LA MÉTHODE DE LA CHARGE FICTIVE

Le premier objectif de cet exercice d'adaptation sera de dériver une valeur unique pour le paramètre $\xi = \xi_0$ dans la conception des poteaux-poutres qui ont différentes conditions de retenues rencontrées dans la pratique et qui sont applicables pour étudier le comportement de la membrure suivant l'axe fort et l'axe faible sans égard à la limite élastique du matériau de la section. Avec cette intention, il est proposé dans les différentes spécifications techniques (**CSA/CAN S16-09** et **AISC LRFD** 2005) que $\xi = \xi_0 = 0,005$. Cette valeur représente la meilleure adaptation pour déterminer la charge latérale fictive $N = \xi P$ pour une large gamme de conditions pratiques.

4.7.1 Adaptation modifiée de la charge fictive

Différents paramètres ont un effet direct sur la charge latérale fictive, parmi lesquels le ratio E/F_y . Puisque le module élastique de l'acier E est essentiellement constant (200 GPa), les variations de E/F_y sont dues aux variations de la limite élastique F_y . Il est considéré approprié de

modifier le paramètre fondamental de la charge fictive $\xi_0 = 0,005$ de façon à prendre en considération les différentes limites d'élasticité. Le paramètre de la charge fictive ainsi dérivé est nommé le paramètre de la charge fictive « modifié » ξ_M et est exprimé en terme d'un facteur de modification de la limite élastique k_y tel que :

$$\xi_M = \xi_0 k_y \quad (4.24)$$

Il est indiqué par (4.22) et (4.23) qu'un tel facteur de modification doit être proportionnel à $\sqrt{F_y/E}$, donc la valeur suggérée de k_y est donnée par :

$$k_y = 22 \sqrt{\frac{F_y}{E}} \quad (4.25)$$

L'équation (4.25) est une formule simple qui modifie la charge fictive de façon appropriée pour les effets des différentes limites d'élasticité. De plus, la limite élastique spécifiée de l'acier structural correspond typiquement à seulement quelques-unes des valeurs standards telles que 250 MPa, 350 MPa et 450 MPa. Pour ces valeurs standards de la limite élastique, la plupart des normes proposent que le paramètre de la charge fictive ξ qui peut être appliqué universellement pour toutes conditions pratiques de retenues aux extrémités et d'élancement sont tels que montrés au Tableau 4-1.

Tableau 4-1 – Valeurs universelles du paramètre de la charge fictive selon la limite élastique

Limite élastique, F_y (MPa)	Paramètre de la charge fictive, ξ (-)
250	0,004
350	0,0045
450	0,005

Les valeurs indiquées au Tableau 4-1 sont proposées comme étant les meilleures adaptations possibles des paramètres de la charge de fictive en fonction des limites élastiques spécifiées. Dans beaucoup de situations, la résistance prédite du poteau ou du poteau-poutre n'est pas très sensible à la valeur précise de ξ proposée. La sensibilité de la résistance de la membrure à ξ va être plus grande pour une gamme intermédiaire des élancements pour lesquels les différences dans P_n et $P_{n(L)}$ sont plus grandes et où l'élancement effectif modifié λ_c est approximativement égal à l'unité. La sensibilité de la résistance des membrures à d'autres imperfections, tels que les défauts de rectitude et les contraintes résiduelles, est aussi plus grande dans la gamme intermédiaire des élancements. La résistance de la membrure sera un peu moins sensible à ξ pour la gamme des grands élancements où le flambement élastique devient plus important. Avec la diminution de l'élancement du poteau, la sensibilité de la résistance du poteau P_n au facteur de la longueur effective K diminue (P_n tend vers $P_{n(L)}$ qui approche P_y) et les effets d'amplification élastique du second ordre deviennent moins significatifs. Pour de tels poteaux trapus (faible élancement), l'effet de la charge fictive sur le moment fléchissant est approximativement du premier ordre. Le cas de $G_A = G_B = 0$ est une limite inférieure théorique étant donné que la longueur effective du poteau est égale à la longueur réelle $K = 1,0$ et par conséquent, la charge fictive théorique requise est égale à zéro. Donc, l'application de $\xi = 0,004$ produit nécessairement une courbe de résistance du poteau plus basse que celle définie dans les spécifications **AISC LRFD**.

4.7.2 Adaptation raffinée de la charge fictive

L'objectif d'une adaptation raffinée de la charge fictive est d'améliorer la précision des adaptations simples et modifiées qui sont traitées ci-dessus. Bien que dans beaucoup de cas, les adaptations simples et modifiées produisent des estimations adéquates de la résistance du poteau comparées aux résultats des analyses avancées, dans d'autres cas, les résultats peuvent être

qualifiés de conservateur. La motivation et les lignes guides pour une adaptation raffinée de la charge fictive découlent de certaines observations :

- Quel que soit la longueur du poteau, lorsque la rigidité latérale de la membrure non contreventée en ses extrémités et libre de se déplacer approche celle d'une membrure pour laquelle la rotation est empêchée, la charge fictive requise tend vers zéro. Dans ce cas, le facteur de la longueur effective tend vers l'unité.
- Quel que soit la magnitude des retenues aux extrémités (via le facteur de la longueur effective), lorsque la longueur réelle de la membrure approche de zéro, la charge fictive requise tend également vers zéro.

En plus des observations mentionnés ci-dessus on peut supposer à partir d'arguments probabilistes que le paramètre de la charge fictive ξ devrait diminuer à mesure que le nombre de baies dans un étage augmente. Le paramètre de la charge fictive raffinée $\xi = \xi_R$, qui est généralement applicable à un étage complet, est exprimé sous la forme :

$$\xi = \xi_R = \xi_0 k_y k_s k_\lambda k_c \quad (4.26)$$

où ξ_0 est le paramètre fondamental (ou simple) de la charge fictive (d'une valeur de 0,005) employé dans l'approche simple de la charge fictive et k_y , k_s , k_λ et k_c , les facteurs d'ajustement ou de raffinement qui tiennent compte respectivement de la limite élastique des poteaux dans l'étage, de la rigidité latérale de l'étage, de l'élancement effectif de l'étage et du nombre de poteaux dans l'étage. Ces facteurs d'ajustement peuvent être déterminés à partir de :

$$k_y = 22 \sqrt{\frac{F_y}{E}} \quad (4.27)$$

$$k_s = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 < \sqrt{S} \leq 0,50 \\ 2(1 - \sqrt{S}) & \text{pour } 0,50 < \sqrt{S} \leq 1,0 \end{cases}$$

$$k_\lambda = \frac{\lambda_{c(L)}}{\sqrt{S}}$$

$$k_c = \sqrt{0,5 + 1/c} \quad , k_c \leq 1,0$$

avec S , la rigidité latérale donnée par $S = \gamma = \frac{G_A + G_B + 6}{4G_A + 2G_A G_B + 4G_B + 6}$ et c , le nombre des poteaux par étage.

4.8 APPLICATION DE LA MÉTHODE DE LA CHARGE LATÉRALE FICTIVE AUX POTEAUX-POUTRES

4.8.1 Généralités

Les sections précédentes ont traité de l'évaluation de la résistance des membrures sollicitées principalement par des charges axiales en utilisant l'approche de la charge fictive. Cette même approche peut être étendue pour évaluer la résistance des membrures travaillant comme poteaux-poutres sollicitées en compression et en flexion simultanément et où les effets beaucoup plus significatifs de la flexion proviennent de vraies charges latérales et fictives. Dans cette section, la résistance ultime des poteaux-poutres qui sont libres de se déplacer latéralement est examinée.

4.8.2 Calcul des courbes d'interaction incluant l'effet des charges latérales fictives

Les différences entre l'approche de la charge fictive et les autres approches pour déterminer la résistance des poteaux-poutres sont mieux comprises lorsque les diagrammes d'interaction sont tracés en terme de charges réelles (charges fictives non incluses), seulement à des moments du premier ordre au lieu de moments du second ordre. D'un autre côté, les équations d'interaction des

poteaux-poutres dans les spécifications **AISC LRFD** sont exprimées directement en termes de M_u qui est par définition le moment maximal du second ordre dans la membrure. Dans l'approche de la charge fictive, les charges latérales réelles et fictives contribuent à M_u . La résistance des poteaux-poutres peut être représentée par un diagramme d'interaction de la force axiale P_u et de la force latérale réelle H_u . La procédure utilisée pour tracer ces courbes prend en considération la charge fictive $N_u = \xi P_u$. Pour une valeur donnée de P_u , le moment maximal du second ordre peut être exprimé sous la forme d'une somme des deux composantes telle que :

$$M_u = M_{uR} + M_{uN} \quad (4.28)$$

avec M_{uR} et M_{uN} , les moments dûs respectivement à la charge latérale réelle H_u et à la charge latérale fictive $N_u = \xi P_u$. Le moment maximal du second ordre requis peut aussi être exprimé sous la forme :

$$M_u = \delta_R M_{fR} + \delta_N M_{fN} \quad (4.29)$$

où M_{fR} et M_{fN} sont les moments du premier ordre dus respectivement aux charges réelles et aux charges fictives et $\delta_R = \delta_R(P_u)$ et $\delta_N = \delta_N(P_u)$, les facteurs d'amplification élastique correspondants. Ces facteurs d'amplification δ_R et δ_N sont déterminés à partir d'une analyse élastique du second ordre d'une membrure parfaite travaillant comme poteau-poutre et sollicitée par une charge axiale et des charges latérales réelles (pour δ_R) ainsi que par des charges latérales fictives (pour δ_N). Dans ce cas, les charges latérales réelles et les charges latérales fictives agissent dans la même direction et sont appliquées au même point d'action. Comme c'est souvent le cas, les

deux facteurs d'amplification δ_R et δ_N sont égaux. Le facteur d'amplification pour un poteau-poutre libre de se déplacer latéralement avec des retenues élastiques en rotation aux extrémités désignés par $\bar{\alpha}_A$ et $\bar{\alpha}_B$ avec une seule charge latérale appliquée en tête, est données par (voir Figure 4-10) :

$$\begin{aligned}\delta_A &= \frac{\Omega_A}{\Phi_A} \\ \delta_B &= \frac{\Omega_B}{\Phi_B} \\ \Phi_A &= \frac{1}{2} \left[\frac{\bar{\alpha}_A (2 + \bar{\alpha}_B)}{\bar{\alpha}_A + \bar{\alpha}_A \bar{\alpha}_B + \bar{\alpha}_B} \right] \\ \Phi_B &= \frac{1}{2} \left[\frac{\bar{\alpha}_B (2 + \bar{\alpha}_A)}{\bar{\alpha}_A + \bar{\alpha}_A \bar{\alpha}_B + \bar{\alpha}_B} \right]\end{aligned}\tag{4.30}$$

avec Ω_A et Ω_B définis par (4.9). De (4.29), M_{fR} peut être déterminé par :

$$M_{fR} = \frac{M_u - \delta_N M_{fN}}{\delta_R}\tag{4.31}$$

où M_{fN} est défini directement par la force latérale fictive $N_u = \xi P_u$: $M_{fN} = \xi P_u L \Phi_A$. Les moments de premier ordre aux extrémités de la membrure sont donnés par :

$$\begin{aligned}M_{fA} &= NL \Phi_A \\ M_{fB} &= NL \Phi_B \\ \Phi &= \max(\Phi_A, \Phi_B)\end{aligned}\tag{4.32}$$

$$\frac{H_u}{H_p} = \frac{M_{fR}}{M_p} \quad (4.33)$$

(a) modèle utilisé dans l'analyse avancée

(b) modèle utilisé dans l'analyse élastique basée sur la longueur effective

(c) modèle utilisé dans l'analyse élastique basée sur la charge fictive

Concernant l'approche de la charge latérale fictive appliquée à un étage, chaque membrure dans cet étage peut être traitée comme un poteau-poutre. Les poteaux faibles, articulés aux extrémités, peuvent être interprétés comme un cas spécial d'un poteau-poutre où il n'y a pas de moment de

flexion. Du point de vue analyse du second ordre, la capacité d'un étage est supposée être limitée à la résistance associée à l'atteinte d'un premier état limite, pour toute membrure faisant partie de l'étage. Toute réserve de capacité, associée à une distribution inélastique des forces et des moments de flexion à partir des membrures qualifiées de critique, ne peut être considérée. Pour les structures hyperstatiques, les effets d'une telle distribution inélastique sont automatiquement inclus dans l'estimation de la résistance calculée par les méthodes d'analyses avancées.

Le cadre montré sur la Figure 4-11 a un poteau articulé aux extrémités (c'est un cas extrême du concept du flambement de l'étage); ce cadre est investigué en utilisant l'approche de la charge fictive. Le poteau du côté gauche (1) est connecté rigidement tandis que le poteau du côté droit (2) est articulé. Toute la retenue latérale de ce cadre est donc assurée par le poteau (1) qui est supposé être retenu en rotation par les poutres de façon à ce que les facteurs de la rigidité G au pied et en tête du poteau (1) soient données par :

$$G_A = \frac{2EI_1/L}{EI_A/L_b}, \quad G_B = \frac{2EI_1/L}{EI_B/L_b} \quad (4.34)$$

où EI_1 , EI_A et EI_B sont respectivement les rigidités à la flexion du poteau (1), de la poutre inférieure et de la poutre supérieure, L est la longueur du poteau et L_b est la longueur des poutres. Ces expressions des facteurs G tiennent compte du fait que les poutres sont articulées au poteau (2).

Le cadre peut être investigué comme étant chargé de façon proportionnelle par les charges de gravité P_1 et P_2 et la charge latérale H jusqu'à l'atteinte de la résistance ultime du système ou d'une membrure critique. Donc, les charges de gravité peuvent être exprimées en termes d'un seul paramètre de charge tel que :

$$P_1 = \rho_1 P \quad (4.35)$$

$$P_2 = \rho_2 P$$

avec $\rho_1 + \rho_2 = 1$, donc, $P_1 + P_2 = P$. Un paramètre de la résistance axiale du cadre peut donc être défini par le ratio :

$$\gamma = \frac{P_{u1} + P_{u2}}{P_{y1} + P_{y2}} = \frac{\sum P_{ui}}{\sum P_{yi}} \quad (4.36)$$

où P_{ui} est la charge de gravité appliquée au poteau i correspondant à la résistance ultime du cadre et P_{yi} est la charge qui correspond à la limite élastique du poteau i .

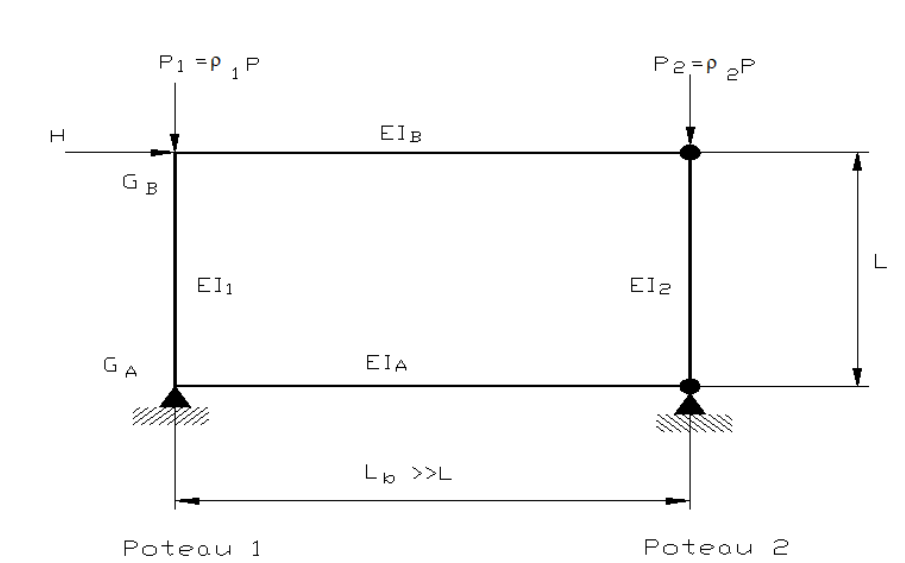


Figure 4-11 : Cadres avec poteaux articulés

L'élancement du cadre, caractérisé par un paramètre de l'élancement $\lambda_{c(L)i}$ correspondant au poteau i , est donnée par :

$$\lambda_{c(L)i} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{L}{r_i} \right) \sqrt{\frac{F_{yi}}{E}} \quad (4.37)$$

Les résultats obtenus des analyses avancées (zones plastiques) présentent une excellente concordance avec les résultats obtenus de l'application de la méthode des charges fictives. L'approche de la charge fictive tend à balancer l'augmentation du moment de flexion (force interne) par l'augmentation de la résistance axiale de P_{nx} (calculée en utilisant une longueur effective) à $P_{n(L)x}$ calculée en utilisant la longueur réelle.

4.10 APPLICATION DE L'APPROCHE DE LA CHARGE FICTIVE AUX CADRES ÉTAGÉS

Les travaux réalisés dans le cadre de la qualification de l'approche des charges fictives ont été concentrés sur les cas des cadres simples et des poteaux-poutres individuels. Malheureusement l'extension de l'approche de la charge fictive, tel que développée pour les cadres simples aux cadres à étages, peut conduire à un dimensionnement surestimé. Les aspects particuliers à considérer dans le cas des cadres à étages sont :

1. L'approche de la charge fictive peut s'avérer très conservatrice pour des cadres non contreventés qui contiennent des poteaux ayant un élancement faible à moyen, qui sont fléchis en double courbure et qui ont des retenues appréciables à la rotation à leurs extrémités. Des poteaux ayant de telles caractéristiques sont couramment rencontrés dans les cadres étagés non contreventés, particulièrement dans les étages inférieurs.
2. À mesure que le ratio hauteur/portée du cadre augmente, des forces axiales additionnelles sont générées par les charges fictives dans les poteaux, ce qui peut mener à une augmentation de la proportion de la force totale axiale par rapport aux forces axiales dues aux charges réelles (charges de gravité et charges latérales). Cet effet est plus sévère pour les poteaux formant les étages inférieurs, ce qui contribue au surdimensionnement de la structure. Toutefois, dans une certaine mesure, les forces

axiales additionnelles dues à l'effet de renversement provoqué par les charges fictives est un phénomène réel qui résulte des défauts réels de verticalité. À noter qu'il reste plusieurs questions fondamentales concernant ce qui peut constituer une distribution appropriée des charges fictives à utiliser dans l'analyse et la conception des cadres à étages.

4.11 ANALYSE AVANCÉE DES CADRES ÉTAGÉS

4.11.1 Considérations générales – imperfections

Avant d'aborder l'approche de la charge fictive dans le contexte des cadres à étages, il est pertinent de considérer comment la résistance de tels cadres peut être évaluée à l'aide des analyses avancées. Le concept des imperfections équivalentes d'un cadre peut être employé comme une alternative aux imperfections individuelles des membrures. Une « imperfection équivalente » est définie comme étant une déviation angulaire uniforme de la verticale qui tient compte des effets des imperfections locales et globales prescrites dans les spécifications des calculs.

4.11.2 Influence du nombre de baies

Pour un cadre simple à une seule travée, il est raisonnable de supposer que le défaut de verticalité de l'ensemble de l'étage est égal à la tolérance de l'érection prescrite dans les spécifications techniques. Cette hypothèse d'une valeur maximale de non-verticalité n'est pas statistiquement justifiée à mesure que le nombre de travées ou le nombre de poteaux par étage augmente. Des commentaires similaires peuvent être appliqués à la magnitude du paramètre de la charge fictive ξ . Seul l'**Eurocode 3** propose un mécanisme pour prendre en considération l'influence du nombre de travées sur la non-verticalité de l'étage. L'imperfection de la verticalité de l'étage Ψ_s à utiliser dans l'analyse avancée pour un étage considéré avec des travées multiples est :

$$\psi_s = \frac{\Delta_0}{h} = \psi_0 k_c \quad (4.38)$$

où :

ψ_s : défaut de verticalité de l'étage

ψ_0 : 0,002

$k_c : \sqrt{0,5 + 1/c} \leq 1.0$

C : nombre des poteaux/étage

Vraisemblablement, cette définition de k_c a une base statistique rationnelle fondée sur une magnitude particulière d'imperfection et de la déviation standard correspondante.

4.11.3 Concept de l'étage critique – Détermination pratique de la résistance du cadre

Dans le cas d'un cadre à étages sollicité par une certaine distribution de charges, il devient inévitable que la résistance de l'ensemble du cadre soit gouvernée par la résistance d'un étage en particulier. Cet étage est désigné comme étant l'étage critique. Si le cadre est sollicité par des charges de gravité seulement, l'étage critique est celui ayant le plus bas facteur de charge au flambement inélastique de l'étage. Il est intéressant de noter que les résultats obtenus d'une analyse du flambement du système (valeurs propres) ne facilitent pas l'identification de l'étage critique étant donné que toutes les membrures du cadre sont supposées flamber simultanément à la même charge critique. Toutefois, la connaissance de la configuration du système au flambement, dérivée du vecteur des valeurs propres, peut révéler que le mode du flambement est largement confiné à un seul étage. Pour toutes considérations pratiques, cet étage est celui qui est critique. Dans le contexte d'une analyse avancée de zones plastiques, l'étage critique du cadre est défini

comme celui qui fournit la valeur minimale de $\lambda_{ni} (1 \leq i \leq s)$ où λ_{ni} correspond à l'analyse avancée de la résistance du cadre avec une non-verticalité localisée dans l'étage i et s , le nombre d'étages dans le cadre. Même si un grand nombre de permutations aléatoires des imperfections géométriques peut être considéré, il reste que certaines lignes directrices sont proposées pour aider à l'évaluation de la résistance d'un cadre à étages.

Dans certains cas pratiques, il peut être plus prudent d'ignorer les imperfections géométriques de toutes les membrures, possiblement à l'aide du cadre équivalent (De Stefano & De Luca, 1994). Par rapport aux défauts de verticalité, il est proposé de considérer deux configurations pour une évaluation pratique de la résistance d'un cadre à étages dans le contexte d'une analyse avancée. Ces deux configurations sont :

1. Une non-verticalité globale de l'ensemble du cadre de hauteur H dans la direction des charges latérales et avec une déviation uniforme $\psi_H = e_{0H} / H$ où e_{0H} est la valeur maximale de la déviation de la verticale en tête du cadre par rapport à sa base.
2. Un défaut local de rectitude dans l'étage critique dans la direction des charges latérales et une déviation de la verticale $\psi_s = \psi_0 k_c$ donné par (4.38) avec évidemment, $\psi_H \leq \psi_s$.

La résistance du cadre est déterminée d'une analyse avancée et est égale à la plus petite des valeurs des deux résultats calculés pour chaque défaut discuté ci-dessus, et ce, de façon séparée. Dans la majorité des cas, l'imposition d'une imperfection localisée dans l'étage critique conduit à la plus petite résistance du cadre, comparée à un défaut étendu à la totalité de la hauteur du cadre.

4.12 PROCÉDURES MODIFIÉES D'ANALYSES DE LA CHARGE FICTIVE

4.12.1 Forces axiales induites par les charges fictives

Le défaut de verticalité, considéré sous l'effet des charges de gravité, conduira à des forces additionnelles de traction ou de compression dans les poteaux. Le fondement de l'approche des charges fictives est la correspondance entre le défaut de verticalité physique Ψ_s de l'étage et le paramètre de la charge latérale fictive ξ employé dans l'analyse élastique. Les moments additionnels provenant des charges fictives appliquées à chaque étage sont nécessaires pour refléter la philosophie de l'approche des charges fictives, qui est d'augmenter le moment de flexion (M_u) dans les membrures afin de balancer l'augmentation de la résistance axiale de la section dans les équations d'interaction de la résistance. Dans une analyse avancée d'un cadre à étages d'une hauteur raisonnable, il est inapproprié de supposer l'ensemble du cadre non-vertical via une quantité qui correspond à la non-verticalité locale de l'étage basée sur les tolérances de l'érection Ψ_s . Le cadre doit plutôt rester dans l'enveloppe globale de la non-verticalité prescrite par les spécifications techniques. Il est donc évident que malgré le fait que l'effet cumulatif des forces axiales est un phénomène réel dans le contexte des analyses avancées, il reste que cet effet, dans le cas des cadres à étages avec des charges latérales fictives à chaque étage, pourra contribuer à un surdimensionnement. Cet effet sera plus sévère pour les poteaux des étages inférieurs des cadres à étages ayant un ratio élevé de la hauteur sur la largeur. Par conséquent, il devient important de modifier la procédure d'analyse pour préserver la philosophie de base de l'approche de la charge fictive (augmentation du moment de flexion dans les membrures pour contrebalancer l'augmentation du terme de la résistance axiale de P_n à $P_{n(L)}$) tout en évitant l'effet coexistant d'augmenter la compression de façon exagérée dans les poteaux des étages inférieures. La procédure modifiée de l'analyse est désignée par le couplage des effets « $R - N$ ».

4.12.2 Procédure de couplage « $R - N$ »

Due à la complexité de cette procédure, l'analyse « $R - N$ » est d'intérêt théorique prédominant et ne peut pas être considérée pertinente dans un contexte pratique pour l'étude des cas usuels. Considérons le cas d'un cadre à S étages (cinq dans la Figure 4-12) où chaque étage i est sollicité par une certaine distribution q_i de charges de gravité (provenant des poutres), des charges latérales H_i et des charges fictives N_i comme montré à la Figure 4-12a. Dans la procédure conventionnelle de la charge fictive, une analyse élastique du second ordre du cadre, considéré parfait, et sollicité par des charges réelles et des charges fictives simultanément, doit être exécutée (configuration de la Figure 4-12a). Cette analyse va conduire à la détermination des forces axiales P_u et des moments M_u pour chacune des membrures. Les effets des charges fictives sont alors inclus implicitement. La procédure modifiée d'analyse doit éviter cet effet coexistant de la force axiale par la décomposition de la configuration intégrée en deux analyses désignées par analyse « N » et par analyse « R ». Ces deux analyses peuvent être décrites dans ce qui suit:

- Dans l'analyse « R » illustrée à la Figure 4-12b, une analyse élastique du second ordre est exécutée pour le cadre sous l'effet des charges réelles seulement q_i et H_i . Les résultats de cette analyse déterminent les forces axiales P_u et les moments M_u .
- Dans l'analyse « N » illustrée à la Figure 4-12c, l'idée de base est de calculer des moments additionnels dans les membrures dues aux charges fictives seulement. On doit retenir que ces moments doivent être des moments du second ordre qui sont amplifiés par les effets des forces axiales dans les poteaux. De cette façon, les moments dus aux charges fictives peuvent être isolés des moments générés dans les poteaux dus aux charges sur les poutres. Pour pouvoir rencontrer ces exigences, les charges distribuées de gravité $q_i = q_i(x)$ agissant à chaque étage i doivent être remplacées en premier

par une charge nodale équivalente Q_{ij} de façon à ce que : $Q_i = \sum_{j=1}^c Q_{ij} = \int_0^{W_i} q_i dx$ où Q_i

est la charge totale de gravité de l'étage, c est le nombre de poteaux par étage et W_i est la largeur totale de l'étage.

L'analyse « N » donne la distribution des moments du second ordre M_{uN} dans les membrures dus aux charges fictives seulement. Pour chaque membrure du cadre, la distribution résultante du moment de flexion, due aux charges réelles et fictives, est donnée par la sommation de M_{uR} et M_{uN} . Pour l'évaluation de la capacité d'une membrure à travers les équations d'interaction des poteaux-poutres, le moment M_u à être utilisé est donné par la valeur maximale de $(M_{uR} + M_{uN})$ sur la longueur de la membrure. Il est important ici de réitérer que la force axiale employée dans la vérification de la résistance d'un poteau-poutre est obtenue directement de l'analyse « R » du cadre parfait et elle n'inclut pas la contribution indésirable des charges fictives.

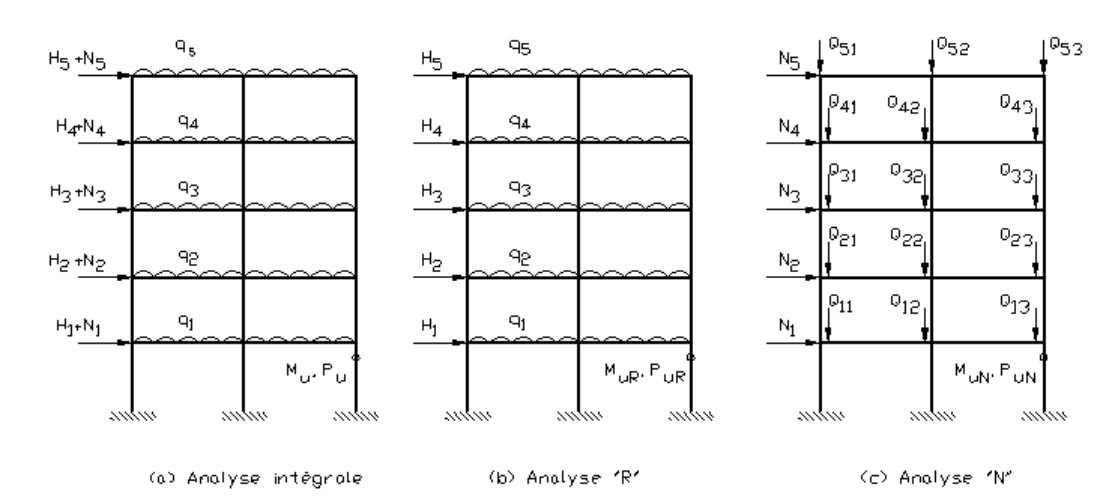


Figure 4-12 : Procédure de couplage « $R - N$ »

4.13 RÉSISTANCE TRIDIMENSIONNELLE D'UN POTEAU-POUTRE DANS LE PLAN DU CHARGEMENT

Dans la pratique, les structures en acier sont tridimensionnelles et la résistance tridimensionnelle qui peut être gouvernée par une rupture dans le plan ou hors du plan de chargement des membrures travaillant comme poteau-poutre doit être déterminée. Une structure tridimensionnelle de forme géométrique rectangulaire en plan est traitée comme une série de cadres parallèles interconnectés par un système de résistance aux forces latérales (système de contreventement) dans des directions orthogonales. Dans ce type de système structural, les cadres sont sollicités par un chargement dans le plan seulement et sont libres de se déplacer latéralement. On suppose que les cadres ne subissent aucune flexion hors du plan de chargement mais la possibilité d'une rupture hors du plan existe aussi. Dans ces circonstances, les équations d'interaction pour les poteaux-poutres dans les spécifications **AISC LRFD** sont simplement appliquées telles que :

$$\frac{P_u}{\phi_c P_n} + \frac{8}{9} \frac{M_{ux}}{\phi_b M_{nx}} \leq 1,0 \quad \text{pour} \quad \frac{P_u}{\phi_c P_n} \geq 0,2 \quad (4.39)$$

et

$$\frac{P_u}{2\phi_c P_n} + \frac{M_{ux}}{\phi_b M_{nx}} \leq 1,0 \quad \text{pour} \quad \frac{P_u}{\phi_c P_n} < 0,2 \quad (4.40)$$

où P_n est la plus petite valeur de la résistance nominale à la force axiale du poteau dans le plan et hors du plan de chargement et M_{nx} , la plus petite valeur de la résistance nominale à la flexion dans le plan et hors du plan de chargement. On constate que les spécifications **AISC LRFD** adoptent une seule équation pour vérifier la rupture dans le plan et hors du plan de chargement. Cette approche est différente des autres spécifications à travers le monde, telles que les spécifications canadiennes

CSA-S16.1-M94, **Eurocode 3** et les spécifications australiennes **AS4100-1990**. Toutes ces spécifications adoptent des vérifications distinctes pour la rupture dans le plan et hors du plan de chargement avec les résistances les moins élevées parmi les deux plans. Si l'approche de la charge fictive ($K = 1$) est utilisée pour vérifier la résistance dans le plan du chargement, le terme P_n provenant de (4.39) et (4.40) peut être défini par :

$$P_n = \min(P_{n(L)x}, P_{ny}) \quad (4.41)$$

où $P_{n(L)x}$ est la résistance nominale axiale du poteau par rapport à son axe fort, basée sur la longueur réelle de la membrure L et P_{ny} , la résistance nominale à la force axiale du poteau par rapport à son axe faible, basée sur la longueur effective K_{yL} (pour un cadre contreventé hors du plan, le facteur de la longueur effective hors du plan est pris égal à 1.0). Dans la grande majorité des cas pratiques, où $r_x/r_y > 1/K_y$, la résistance axiale du poteau P_n sera gouvernée par la résistance hors du plan P_{ny} . Ceci peut amener une certaine confusion sur le rôle de l'approche des charges fictives dans l'estimation de la résistance tridimensionnelle des poteaux-poutres, parce que cette approche se réfère à la résistance dans le plan du chargement seulement.

4.14 ANALYSE TRIDIMENSIONNELLE AVANCÉE

Des analyses plastiques tridimensionnelles par éléments finis ont été conduites à l'Université de Sydney (Pi & Trahair, 1994). Ces analyses ont tenu compte des imperfections géométriques et des retenues latérales dans le plan et hors du plan de chargement. Comme chargement, on a considéré deux types de chargement : une force axiale P qui agit simultanément avec une force latérale H et un moment C appliqué en tête de la membrure. Deux sections différentes ont été utilisées, soit

W250x39 type poutre pour laquelle $P_{ny} < P_{nx}$ et W200x46 type poteau pour laquelle $P_{nx} < P_{ny}$. La Figure 4-13 montre le cas de figure considéré.

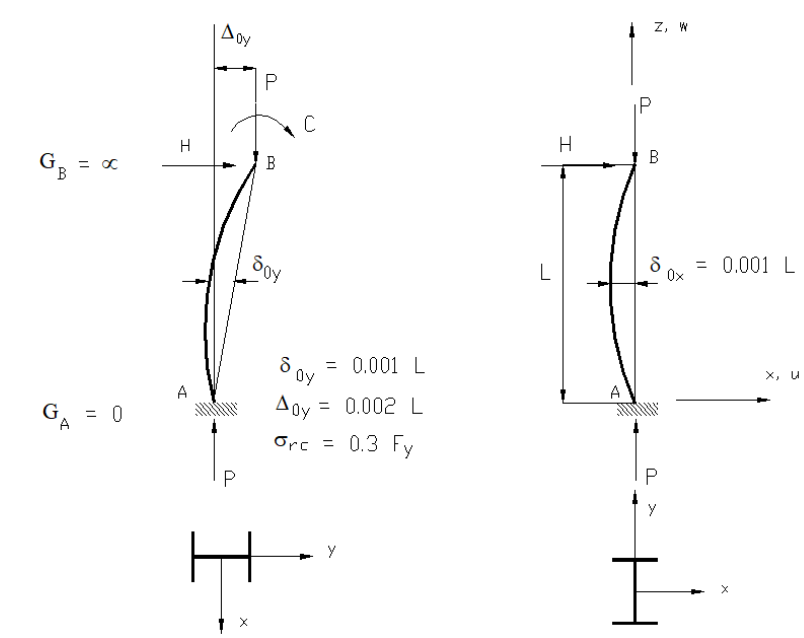


Figure 4-13 : Poteau en porte-à-faux étudié par une analyse tridimensionnelle avancée

La longueur de ces membrures est caractérisée par le paramètre d'élancement dans le plan tel que :

$$\lambda_{cx} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_x L}{r_x} \right) \sqrt{\frac{F_y}{E}} \quad (4.42)$$

où $K_x = 2,0$ (membrane en porte-à-faux) tandis que l'élancement de la membrane hors du plan est donnée par :

$$\lambda_{cy} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_y L}{\gamma_y} \right) \sqrt{\frac{F_y}{E}} \quad (4.43)$$

où K_y est le facteur de la longueur effective hors du plan égal à 0,70. Du point de vue d'une résistance du poteau (sous l'effet des charges axiales seulement), déterminée en utilisant une analyse avancée tridimensionnelle, il est possible de calculer :

- La résistance nominale dans le plan P_{nx} en considérant des imperfections géométriques dans le plan de chargement uniquement et une retenue latérale totale du poteau hors du plan de chargement.
- La résistance nominale hors du plan de chargement P_{ny} en considérant des imperfections géométriques hors du plan de chargement uniquement et des retenues contre les déplacements dans le plan de chargement.
- La résistance tridimensionnelle P_n en considérant les imperfections géométriques dans le plan et hors du plan de chargement et la possibilité que le poteau est libre de se déformer librement dans l'espace.

Si P_{nx} est égal à P_{ny} , on doit s'attendre à une certaine interaction entre les modes de rupture dans le plan et hors du plan de chargement; cette interaction résulte du fait que la résistance tridimensionnelle P_n est la plus petite valeur de P_{nx} et P_{ny} . En pratique, lorsque $P_{ny} < P_{nx}$, il est approprié de considérer que la résistance tridimensionnelle P_n est égale à la résistance hors du plan P_{ny} . De cette analyse tridimensionnelle avancée, les auteurs de cette étude ont noté les faits suivants:

1. Le mode de rupture (dans le plan ou hors du plan de chargement) dépend de plusieurs facteurs, incluant la longueur effective du poteau par rapport aux deux axes principaux, la distribution des moments et des forces axiales, le ratio de la force axiale et de la flexion ainsi que la forme géométrique de la section transversale.
2. Il est approprié et rationnel de prévoir des équations d'interaction séparées qui correspondent aux différents modes de rupture.
3. L'adoption d'équations d'interaction séparées pour vérifier la résistance des membrures dans le plan et hors du plan pour la flexion et la compression par rapport à l'axe fort, n'a pas de conséquence particulière pour l'approche basée sur les charges fictives. La résistance dans le plan peut être estimée également, soit par l'utilisation de la MLE (basée sur les facteurs de la longueur inélastique), soit par la méthode des charges fictives.
4. Les procédures des calculs, associées à l'utilisation du concept des charges fictives, sont largement plus simples que celles requises pour le concept de la longueur effective, considérant que les calculs des longueurs (inélastiques) effectives dans le plan sont évités.

4.15 RÉSUMÉ ET COMMENTAIRES

Ce chapitre a traité de l'utilisation de l'approche des charges fictives comme procédure dans l'évaluation de la stabilité des cadres. Comme c'est le cas de l'approche basée sur la longueur effective, l'approche de la charge fictive est une procédure qui doit être appliquée en conjonction avec une analyse élastique du second ordre de la structure géométriquement parfaite. Le chapitre a traité de l'influence des contraintes résiduelles et des imperfections géométriques sur la résistance des poteaux. Basés sur des considérations physiques des membrures ou des cadres représentant des imperfections qui sont prises en considération dans les analyses avancées, on peut distinguer les différents types d'imperfections géométriques suivants :

1. Défaut de rectitude initial de la membrure; la magnitude de ce défaut doit être consistante avec les tolérances de la fabrication prescrites dans les spécifications des calculs des charpentes d'acier.
2. Défaut de verticalité initial de l'étage et non-verticalité globale de l'ensemble du cadre; les magnitudes et les distributions de ces défauts doivent être consistantes avec les tolérances de l'érection prescrites dans les spécifications des calculs des charpentes d'acier.

Dans l'approche de la longueur effective pour la conception des poteaux-poutres, tous les effets des imperfections géométriques mentionnées ci-dessus sont inclus implicitement dans la courbe de résistance du poteau en utilisant la longueur effective de la membrure. L'approche de la longueur effective ne peut pas traiter de façon indépendante des défauts de rectitude et de verticalité qui sont des composantes intrinsèques d'une analyse structurale rationnelle avancée. Cependant, l'approche de la charge fictive tente d'inclure les effets de diverses imperfections de façon plus directe afin d'approcher les imperfections employées dans les analyses avancées. Les effets des contraintes résiduelles et les défauts de rectitude des membrures peuvent être regardés comme s'il étaient inclus dans les courbes de la résistance des poteaux, considérant leur longueur réelle L , soit avec $K = 1$. Les effets des défauts de verticalité à l'étage peuvent être considérés séparément à travers l'application des charges latérales fictives à chaque étage. Du point de vue conceptuel, ces charges fictives tiennent compte des effets de la non-verticalité de l'étage sous l'effet des charges de gravité.

L'objectif principal dans l'adaptation de l'approche de la charge fictive aux calculs des cadres est de déterminer la magnitude de ces charges latérales, de façon à ce que les résistances obtenues des poteaux-poutres puissent être consistantes avec celles obtenues en utilisant des analyses structurales avancées. Lorsqu'une charge latérale fictive est appliquée à une membrure individuelle libre de se déplacer latéralement, simultanément avec une force axiale P , cette charge latérale fictive N est égale à $N = \xi P$ où ξ est le coefficient de charge fictive. Lorsque la charge fictive est

appliquée à un cadre sur un ou plusieurs étages, ces charges latérales à chaque étage sont supposées être égales à $N = \xi \Sigma P$ où ΣP représente la somme de toutes les charges de gravité agissant sur l'étage correspondant. Ces forces latérales fictives agissent conjointement avec les charges latérales réelles et, de cette façon, les moments obtenus des calculs employés dans les équations d'interaction des poteaux-poutres tiennent compte de la contribution des charges latérales réelles et fictives.

L'adaptation simple de la charge fictive indique qu'une magnitude de $\xi = 0,005$ donne des résultats qui peuvent être qualifiés d'exacts et/ou conservateurs comparés aux résultats obtenus des analyses structurales avancées qui ont été réalisés sur une vaste gamme de cas pratiques. L'approche de la charge fictive modifiée confirme la valeur de $\xi = 0,005$ en incorporant un facteur de modification $K_y = 22\sqrt{F_y/E}$ qui tient compte de l'effet des limites élastiques de l'acier. L'approche du paramètre modifié de la charge fictive est défini comme étant $\xi_M = \xi_0 K_y$ avec $\xi_0 = 0,005$. On peut noter avec une précision suffisante que $\xi_0 = 0,004, 0,0045$ et $0,005$ pour des limites élastiques standard de 250 MPa, 350 MPa et 450 MPa respectivement.

Les résultats obtenus de l'application de l'approche de la charge fictive modifiée sont particulièrement précis pour les membrures fléchies en courbure simple mais plus conservateurs pour les membrures fléchies en double courbure avec des retenues latérales significatives. La résistance d'un seul étage dans un cadre libre de se déplacer latéralement, avec ou sans poteaux articulés aux extrémités (poteaux faibles) et avec différentes conditions de retenues aux extrémités et différents élancements, peut être déterminée de façon précise et/ ou sécuritaire à travers l'utilisation d'une charge latérale fictive de magnitude $N = \xi \Sigma P$.

L'adaptation raffinée de la charge latérale fictive $\xi = \xi_R$, est conduite essentiellement pour afin d'améliorer la précision générale de la procédure simple et modifiée utilisant les charges fictives, principalement en réduisant le conservatisme inhérent associé à ces dernières procédures

pour les poteaux d'élanement faible à intermédiaire, fléchis en double courbure. Ces types de poteaux sont des cas courants dans les cadres à étages. L'expression raffinée du paramètre de la charge latérale fictive $\xi = \xi_R$ tient compte de l'influence de la limite élastique, de l'élanement de l'étage, de la rigidité flexionnelle de l'étage et du nombre de poteaux dans ce même étage. Dans des cadres à étages, le paramètre raffiné de la charge latérale fictive peut être considérablement inférieur à la valeur retenue dans l'adaptation simple qui est égal à $\xi = 0,005$.

Dans les analyses structurales avancées des cadres à étages, les imperfections relatives aux défauts de verticalité, sous l'effet des charges de gravité, produisent de petites valeurs de traction surimposées aux poteaux (au vent) et de petites valeurs de compression surimposées aux poteaux (sous le vent). Les analyses avancées prédisent aussi une augmentation des moments de flexion dans les poutres due aux imperfections réelles et à l'inélasticité. Il peut être approprié, si désiré, de négliger les effets des forces axiales qui résultent de l'application des charges latérales fictives, ceci peut être accompli par l'introduction d'une procédure d'analyse appelée « $N - R$ ». Cette procédure d'analyse modifiée impose deux analyses séparées du second ordre pour les charges réelles et les charges fictives, de façon à ce que les moments associés aux premières peuvent être déterminés indépendamment de ceux associés aux deuxièmes. Dans ce type d'analyse, les charges latérales fictives ont le rôle de considérer les effets de la non-verticalité de l'étage en ajustant la valeur du moment utilisée dans les équations d'interaction pour balancer l'augmentation de la résistance nominale à la force axiale $P_{n(L)}$ basée sur la longueur réelle de la membrure.

L'avantage principal de l'approche de la charge fictive réside dans sa simplicité. Comme la longueur réelle de la membrure est utilisée ($K = 1$) pour déterminer la résistance nominale à la force axiale $P_{n(L)}$, il n'est pas nécessaire de calculer les valeurs des facteurs K et G . De plus, comme l'approche de la charge fictive a été adaptée aux résultats obtenus des analyses avancées basées sur les zones plastiques qui tiennent compte des effets des imperfections et de la non-linéarité du matériau, il n'est donc pas nécessaire de réaliser une analyse spéciale de charge latérale pour

déterminer les facteurs modifiés G qui tiennent compte de la distribution des moments dans les membrures résistantes.

CHAPITRE 5

MEMBRURES TRAVAILLANT EN COMPRESSION-FLEXION

5.1 GÉNÉRALITÉS

Les membrures qui supportent des charges et qui induisent de la flexion et de la compression axiale simultanément sont désignées comme étant des poteaux-poutres. Des telles membrures sont rencontrées très souvent dans les structures à cadres rigides et dans lesquelles les membrures verticales sont fléchies et comprimées simultanément (Figure 5-1). Malgré le fait que le sujet de la stabilité des cadres d'acier a été largement étudié et documenté, il n'en demeure pas moins que les approches qui traitent cet aspect de stabilité varient considérablement entre les spécifications techniques utilisées à travers le monde. Le contenu de ce chapitre se limite aux analyses élastiques et au dimensionnement selon les états limites ultimes des cadres d'acier caractérisés par des assemblages rigides poteau-poutre, des cadres rigides libres de se déplacer latéralement, ainsi que les cadres contreventés empêchés de se déplacer latéralement.

Les charges axiales P proviennent des étages au-dessus de la membrure considérée et des poutres de l'étage connectées à la membrure considérée. Dans une structure à cadres rigides, les poteaux-poutres sont souvent sollicités par des forces appliquées aux extrémités. Toutefois, il est possible que les poteaux-poutres puissent supporter des charges transversales en plus des forces appliquées aux extrémités. L'analyse des poteaux-poutres comprend une combinaison du comportement de la membrure comme poteau et comme poutre. En réalité on peut considérer

toutes les membrures comme des poteaux-poutres; dont les poutres représentent le cas limite où la force axiale de compression est nulle et les poteaux, un autre cas limite, où la flexion est nulle. La membrure montrée à la Figure 5-2 est de section uniforme et sollicitée par une force axiale de compression P et des moments de flexion aux deux extrémités. Les moments aux extrémités M_{Bx} et M_{Tx} sont considérés positifs dans le sens antihoraire. Le moment de flexion le plus grand numériquement sera utilisé comme référence et la convention des signes de la Figure 5-2b sera adoptée. Dans ce cas, le moment le plus grand est désigné par M_0 et l'origine de l'axe z se trouve à l'extrémité où le moment M_0 agit. Le moment à l'autre extrémité est κM_0 où κ est le ratio du moment le plus grand sur le moment le plus petit. Donc $-1 \leq \kappa \leq 1$. Lorsque κ est positif, le moment à $z = L$ est positif et il agit dans le sens anti-horaire.

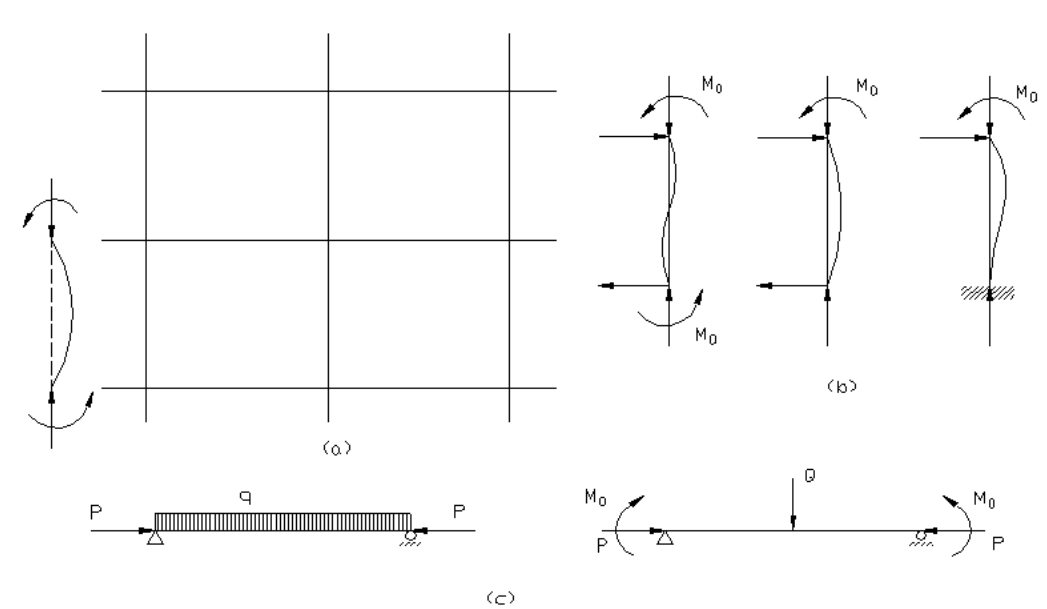


Figure 5-1 : Chargement des poteaux-poutres - (a) Poteaux-poutres dans un cadre à étages, (b) Déformations des poteaux-poutres types dans un cadre, (c) Poteaux-poutres sollicités transversalement

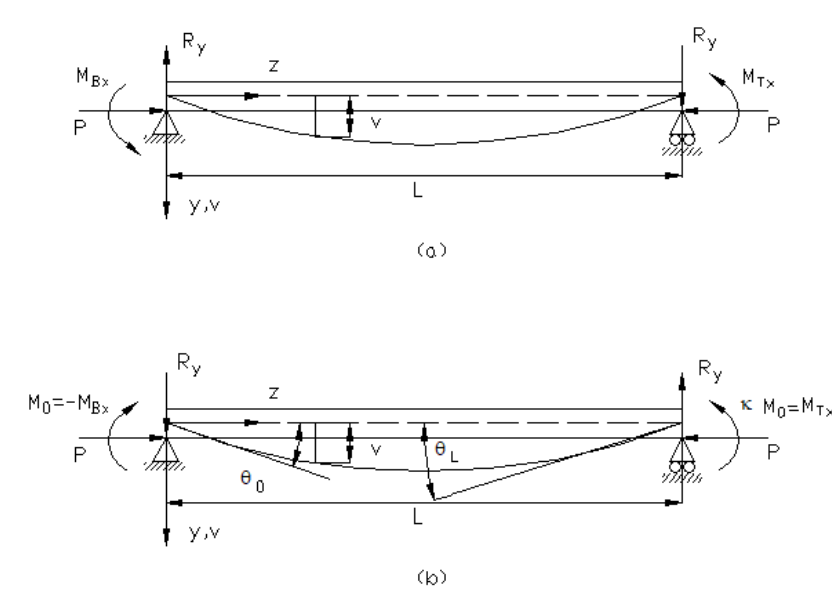


Figure 5-2 : Forces aux extrémités d'une membrure

5.2 COMPORTEMENT DES POTEAUX-POUTRE

Le comportement de la membrure montrée à la Figure 5-2b, qui agit comme poteau-poutre, peut être étudié en référant le moment M_0 à la rotation θ_0 durant l'application des charges. Ce type de comportement est caractérisé par les courbes obtenues de façon expérimentale et connues sous l'appellation $M - \theta$. Un exemple type de ces courbes est montré à la Figure 5-3 et st obtenue à partir d'un test expérimental d'une membrure ayant une section en I doublement symétrique et sollicitée par une force axiale concentrique en compression $P = \alpha P_Y$ avec α , un coefficient inférieur à l'unité. Tandis que P reste constante, un moment M_0 est appliqué à une extrémité suivant l'axe fort de la section ($\kappa = 0$). Le moment est appliqué à une extrémité à travers une rotation graduelle θ_0 . La relation entre la rotation θ_0 et le moment M_0 est similaire à celle montrée sur la Figure 5-3. La membrure étant supportée latéralement de façon continue, empêche

l'instabilité par déversement et le flambement selon l'axe faible de la section. Donc, la courbe $M_0 - \theta_0$ représente la relation charge vs déformation suivant un seul plan (plan du chargement).

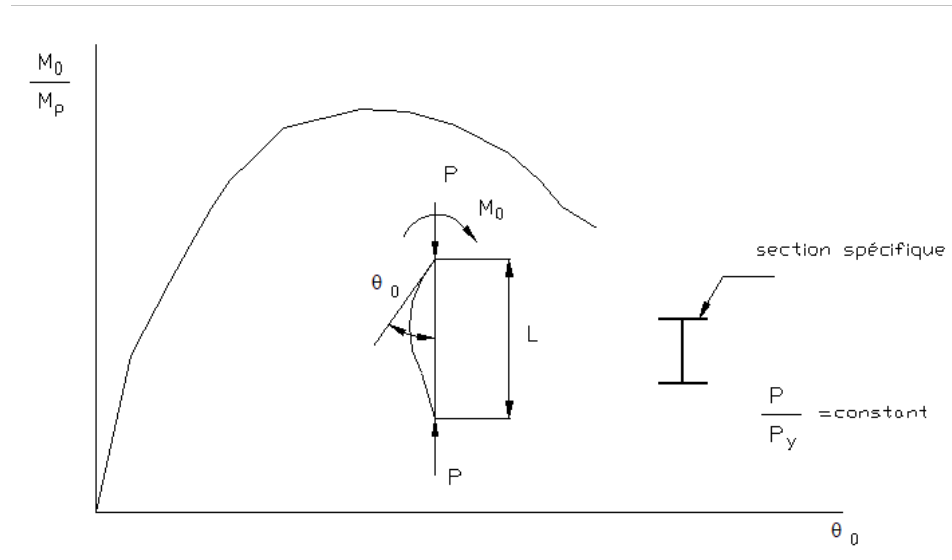


Figure 5-3 : Courbe expérimentale moment-rotation pour une membrure agissant comme poteau-poutre

Le comportement d'une membrure qualifiée de poteau-poutre est différent de celui des poutres seules et des poteaux seuls. La force axiale appliquée est plus petite que la force axiale maximale supportée par la membrure agissant comme poteau seulement; ce qui laisse une réserve pour résister à un moment de flexion. En contrepartie, le moment appliqué est plus petit que le moment équivalent à la limite élastique pouvant être supporté par la membrure si elle devait agir comme une poutre seulement. Le moment de flexion le long de la portée de la membrure est composé d'un moment primaire $M_0 \left(1 - \frac{z}{L}\right)$ dû au moment M_0 et d'un moment secondaire $P \cdot v$ où v est la déflexion de la membrure. Étant donné que certaines sections le long de la membrure deviennent inélastiques, la déflexion v augmente et le moment $P \cdot v$ mobilise une plus grande partie de la capacité de la section en flexion. Éventuellement, la membrure devient incapable de supporter une

augmentation du moment M_0 et, par conséquent, la valeur de M_0 diminue avec l'augmentation de la déflexion.

Le comportement de la membrure dans le plan du chargement est représenté par la courbe de la Figure 5-3 et la courbe en trait plein à la Figure 5-4. Ce comportement reflète des conditions optimales. Certaines autres conditions non optimales peuvent être causées par le déversement et/ou le flambement local. Différentes possibilités et conditions sont montrées à la Figure 5-4. La courbe A montre la possibilité du déversement élastique dans le plan du chargement $(M_0)_{crE}$. La courbe B montre la possibilité du déversement inélastique $(M_0)_{crI}$ et le moment maximal $(M_0)_{LTB}$. La courbe C montre la possibilité du flambement local. La charge critique qui produit la bifurcation dans le domaine élastique est égale au moment maximal, tandis que dans le domaine inélastique, la bifurcation aura lieu avant l'atteinte du moment maximal (courbe B).

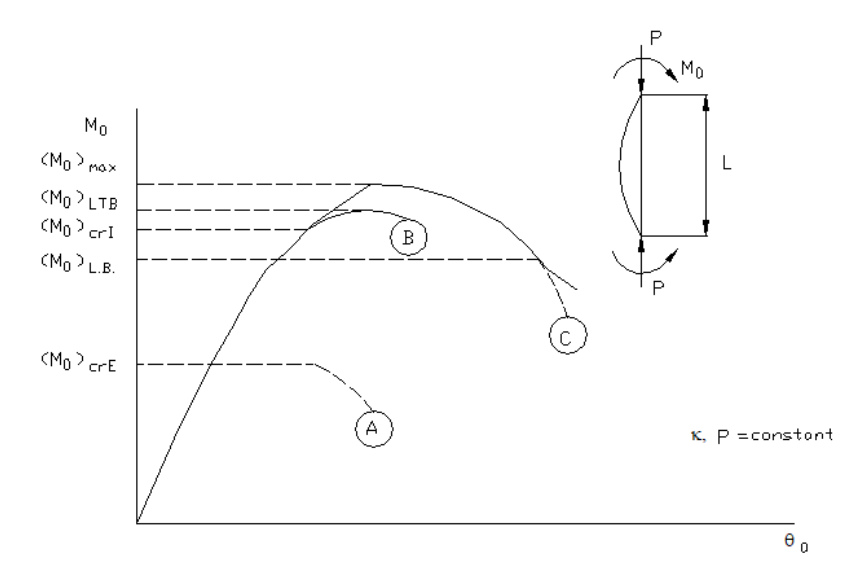


Figure 5-4 : Effets du déversement et du flambement local

5.3 COMPORTEMENT ÉLASTIQUE D'UN POTEAU-POUTRE

5.3.1 Équations différentielles d'un poteau-poutre

Les équations différentielles qui gouvernent le comportement élastique de la membrure montrée à la Figure 5-2, sont données par :

$$B_x v'' + Pv - Px_0 \phi = M_0 \left[-1 + \frac{z}{L} (1 - \kappa) \right] \quad (5.1)$$

$$\text{où } B_x = -M_0, \quad M_{By} = M_{Ty} = 0, \quad M_{Tx} = \kappa M_0,$$

$$B_y u'' + Pu + M_0 \phi \left[1 - \frac{z}{L} (1 - \kappa) \right] + Py_0 \phi = 0 \quad (5.2)$$

et

$$C_w \phi''' - (C_T + \bar{K}) \phi' + M_0 u' \left[1 - \frac{z}{L} (1 - \kappa) \right] + Py_0 u' - Px_0 v' + \frac{M_0}{L} (1 - \kappa) u = 0 \quad (5.3)$$

Les équations (5.1), (5.2) et (5.3) ne sont pas indépendantes les unes des autres et la première équation n'est pas homogène. Donc, ces équations ne décrivent pas une bifurcation, étant donné que les déformations u , v et ϕ seront présentes dès le début du chargement. De façon à obtenir les déflexions seulement dans un plan parallèle à un axe principal, on doit avoir minimalement un axe de symétrie. En plus, les moments appliqués M_0 et κM_0 doivent agir dans le plan de symétrie qui est le plan y-z. Ceci est accompli en posant $x_0 = 0$ dans (5.1), (5.2) et (5.3), ce qui permet de réécrire (5.1) et (5.3) tel que :

$$B_x v'' + P v = M_0 \left[-1 + \frac{z}{L} (1 - \kappa) \right] \quad (5.4)$$

$$C_w \phi''' - (C_T + \bar{K}) \phi' + M_0 u' \left[1 - \frac{z}{L} (1 - \kappa) \right] + P y_0 u' + \frac{M_0}{L} (1 - \kappa) u = 0 \quad (5.5)$$

L'équation (5.2) reste inchangée parce que la variable x_0 n'y figure pas. Le dérivé de (5.2), (5.4) et (5.5) ainsi que le remplacement des coefficients β_x , β_y , C_T et C_w par leurs valeurs élastiques EI_x , EI_y , GK_T et EI_w donne respectivement :

$$EI_x v^{iv} + P v'' = 0 \quad (5.6)$$

$$EI_y v^{iv} + P u'' + M_0 \left[1 - \frac{z}{L} (1 - \kappa) \right] \phi'' - \frac{2M_0}{L} (1 - \kappa) \phi' + P y_0 \phi'' = 0 \quad (5.7)$$

$$EI_w \phi^{iv} - (GK_T + \bar{K}) \phi'' - \bar{K} \phi' + M_0 \left[1 - \frac{z}{L} (1 - \kappa) \right] u'' + P y_0 u'' = 0 \quad (5.8)$$

avec :

$$K_T : \text{moment d'inertie à la torsion } \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n b_i t_{ij}^3, \text{ mm}^4$$

$$G : \text{module de cisaillement } \frac{E}{2(1+\nu)}, \text{ MPa}$$

$$I_w : \text{constante de gauchissement, mm}^6$$

et $\bar{K} = \int_A \sigma a^2 dA$ avec a qui la distance entre le point où la contrainte σ agit et le centre de torsion.

La valeur de $\bar{K} = \int_A \sigma a^2 dA$ est calculée pour une contrainte $\sigma = -\frac{P}{A} + \frac{M_x}{I_x} y$. La composante due à $-\frac{P}{A}$ est égale à $-P r_0^2$ et la composante due à $\frac{M_x}{I_x} y$ est égale à $M_x \beta_x$. Donc :

$$\begin{aligned}\bar{K} &= P r_0^2 + M_x \beta_x \\ r_0^2 &= x_0^2 + y_0^2 + \frac{I_x + I_y}{A} \\ \beta_x &= \frac{\int y(x^2 + y^2) dA}{I_x} - 2y_0\end{aligned}\tag{5.9}$$

avec (x_0, y_0) , la coordonnée du centre de torsion. Le moment M_x dans (5.9) représente tout moment le long de la membrure et sa valeur est donnée par :

$$M = M_0 \left[1 - \frac{z}{L} (1 - \kappa) \right]\tag{5.10}$$

Donc, (5.8) peut être écrite sous la forme :

$$EI_w \phi^{iv} - (GK_T - P \bar{r}_0^2 + M_x \beta_x) \phi'' + M_0 \beta_x \phi' (1 - \kappa) / L + M_x u'' + P y_0 u'' = 0\tag{5.11}$$

L'équation différentielle (5.6), indépendante des équations différentielles (5.7) et (5.11), définit les déformations dans le plan de la symétrie. Les deux autres équations différentielles définissent les conditions critiques au début du déversement.

5.3.2 Résistance d'un poteau-poutre dans le plan du chargement

La déformation d'un poteau-poutre dans le plan y-z est définie par (5.6) telle que :

$$v^{iv} + F_v^2 v'' = 0 \quad (5.12)$$

où :

$$F_v^2 = \frac{P}{EI_x} \quad (5.13)$$

La solution de (5.12) s'écrit donc :

$$v = C_1 \sin F_v z + C_2 \cos F_v z + C_3 z + C_4 \quad (5.14)$$

avec comme conditions aux limites :

$$\begin{aligned} v|_{z=0} &= v|_{z=L} = 0 \\ v''|_{z=0} &= \frac{-M_0}{EI_x} \\ v''|_{z=L} &= \frac{-\kappa M_0}{EI_x} \end{aligned} \quad (5.15)$$

Les deux dernières conditions aux limites de (5.15) sont les résultats des moments appliqués aux extrémités de la membrure, M_0 et κM_0 . Les conditions aux limites permettent de déterminer les constantes d'intégration de (5.14) et l'expression finale de la déflexion devient :

$$v = \frac{M_0}{P} \left[\left(\frac{\kappa - \cos F_v L}{\sin F_v L} \right) \sin F_v z + \cos F_v z + \frac{z}{L} (1 - \kappa) - 1 \right] \quad (5.16)$$

Le moment de flexion à une distance z est donné par :

$$M = -EI_x v'' = M_0 \left[\left(\frac{\kappa - \cos F_v L}{\sin F_v L} \right) \sin F_v z + \cos F_v z \right] \quad (5.17)$$

De façon à pouvoir déterminer la contrainte maximale dans la membrure pour une certaine charge donnée, on doit avoir la valeur maximale du moment M . Le moment maximal aura lieu à une distance \bar{z} et peut être obtenu à partir de :

$$\frac{dM}{dz} = 0 = M_0 F_v \left[\left(\frac{\kappa - \cos F_v L}{\sin F_v L} \right) \cos F_v \bar{z} - \sin F_v \bar{z} \right] \quad (5.18)$$

$$\tan F_v \bar{z} = \frac{\kappa - \cos F_v L}{\sin F_v L} \quad (5.19)$$

En substituant (5.19) dans (5.17), le moment maximal est :

$$M_{\max} = M_0 \left(\tan F_v \bar{z} \sin F_v \bar{z} + \cos F_v \bar{z} \right) \quad (5.20)$$

Ce qui peut être simplifié à :

$$M_{\max} = \frac{M_0}{\cos F_v \bar{z}} \quad (5.21)$$

De (5.19), les relations circulaires données sur la Figure 5-5 permettent de réécrire (5.21) sous la forme :

$$M_{\max} = M_0 \varphi \quad (5.22)$$

avec φ , un facteur de modification de M_0 pour obtenir le moment maximum M_{\max} et donné par

$$\varphi = \frac{1}{\cos F_v \bar{z}} = \frac{\sqrt{1 + \kappa^2 - 2\kappa \cos F_v L}}{\sin F_v L} \quad (5.23)$$

La solution de (5.19) peut donner des valeurs négatives de \bar{z} ce que veut dire que la relation exprimée par (5.17) n'a pas de valeur maximale dans l'intervalle $0 \leq z \leq L$. Les cas possibles sont montrés à la Figure 5-6 où un diagramme des moments est montré pour le cas où M_{\max} est dans la travée et en dehors de la travée.

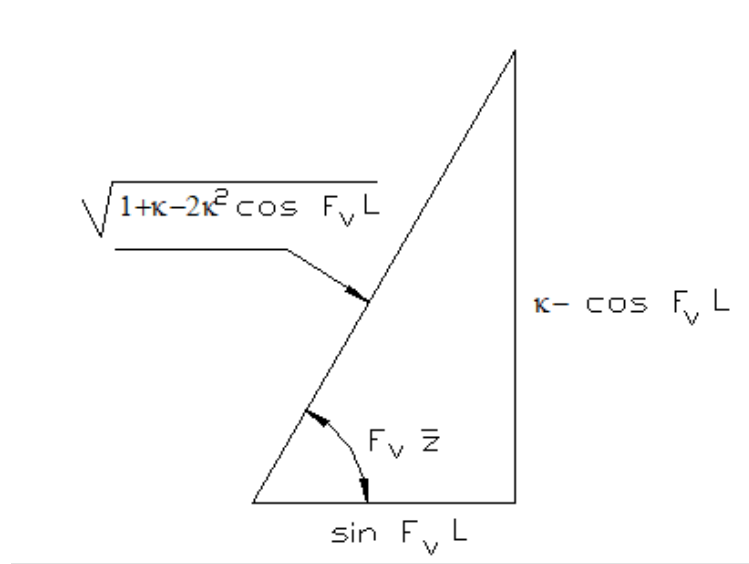


Figure 5-5 : Relations trigonométriques

Dans le deuxième cas, le moment maximal est à l'intérieur de l'intervalle $0 \leq z \leq L$ et à $z = 0$, il est égal à M_0 et par conséquent, selon (5.23), $\varphi = 1$. La limite entre les deux types de situations aura lieu lorsque $\bar{z} = 0$ et donc, $\kappa = \cos F_v L$ selon (5.19). Donc, il faut utiliser la valeur de φ calculée à partir de (5.23) lorsque $\kappa \geq \cos F_v L$ et poser $\varphi = 1$ lorsque $\kappa \leq \cos F_v L$. Un autre cas de situation limite peut avoir lieu lorsque la charge axiale P est égale à la charge critique du

flambement : $P_E = \frac{\pi^2 EI_x}{L^2}$. Dans ce cas, la membrure ne peut pas supporter un moment de flexion en plus de P_E et de (5.22), on peut écrire :

$$M_0 = \frac{M_{\max}}{\varphi} = 0 \quad (5.24)$$

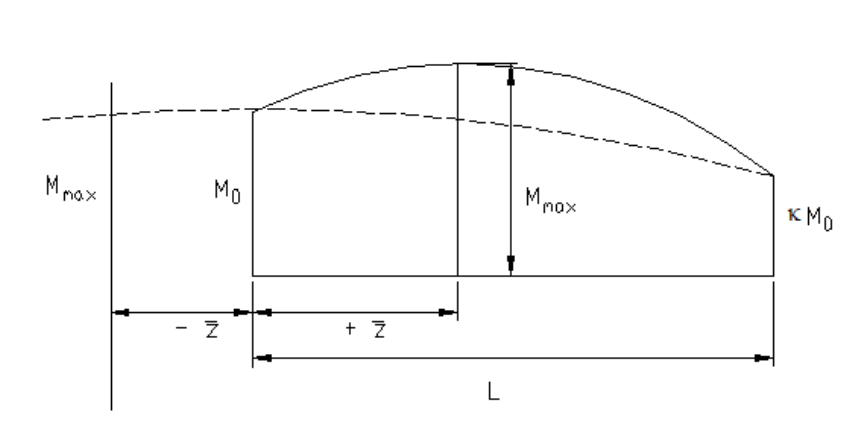


Figure 5-6 : Différentes possibilités pour la position du moment maximal

Cette situation est vraie et pourra avoir lieu si $\varphi = \infty$. De (5.23), on constate que cette condition est valide lorsque $\sin F_v L = 0$, ce qui donne :

$$(F_v L)_{\max} = \pi \quad (5.25)$$

La limite de validité de l'application de ces équations pour les poteaux-poutres élastiques est le point à lequel la contrainte maximale est atteinte (σ_Y). Conséquent de la contrainte admissible du matériau, on obtient :

$$\sigma_{\max} = \sigma_Y = \frac{P}{A} + \frac{M_{\max}}{S_x} \quad (5.26)$$

En introduisant les variables suivantes : $\frac{P}{P_Y} = \frac{P}{A\sigma_Y}$ et $\frac{M_0}{M_Y} = \frac{M_0}{S_x\sigma_Y}$, on obtient l'équation d'interaction :

$$\frac{P}{\phi P_Y} + \frac{M_0}{\phi M_Y} = 1 \quad (5.27)$$

Avec l'équation d'interaction (5.27), on est en mesure d'étudier les effets des variables qui affectent la résistance élastique des poteaux-poutres chargés aux extrémités. La limite élastique est définie comme étant le critère de la résistance. Le moment maximal que la membrure peut supporter est atteint après avoir dépassé la limite élastique (Figure 5-4). Les paramètres qui affectent la résistance élastique sont les ratios P/P_Y , M_0/M_Y , κ et $F_v L$ avec :

$$F_v = L\sqrt{P/EI_x} = \pi\sqrt{P/P_E} = \frac{L}{r_x}\sqrt{\varepsilon_y(P/P_Y)} \quad (5.28)$$

et $\varepsilon_y = \sigma_Y/E$. Donc, la résistance élastique pour les poteaux-poutres dans le plan du chargement peut être représentée à l'aide des paramètres suivants : P/P_Y , M_0/M_Y , κ et $(L/r_x)\sqrt{\varepsilon_y}$. L'équation d'interaction de la résistance est représentée, habituellement, sous la forme de courbe telles que montrées à la Figure 5-7.

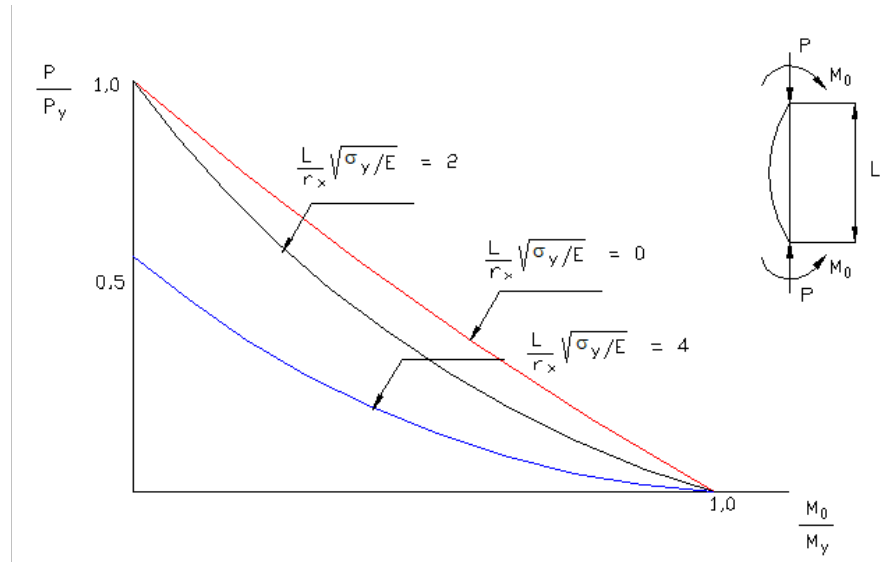


Figure 5-7 : Courbes d'interaction pour $\kappa = 1.0$

Les courbes montrées à la Figure 5-7 sont valides pour les sections doublement symétrique ou à un seul axe de symétrie appartenant à des membrures chargées par une force axiale de compression et des moments de flexion qui agissent dans le plan de la symétrie. L'influence de la variation de l'élancement de la membrure qui est reflétée par le paramètre $(L/r_x)\sqrt{\varepsilon_Y}$ est montrée à la Figure 5-7 pour un poteau-poutre en simple courbure provoqué par deux moments égaux aux extrémités de la membrure ($\kappa = 1.0$). Trois courbes sont montrées pour $(L/r_x)\sqrt{\varepsilon_Y} = 2$ et 4, ce qui correspond à $(L/r_x) = 51,3$ et $102,6$ pour une limite élastique $\sigma_Y = 300$ MPa et un module de Young $E = 200$ GPa. Les trois courbes convergent à $M_0 = M_Y$ lorsque $P = 0$. À cette limite, la membrure se comporte comme une poutre et M_0 va atteindre M_Y au moment où la contrainte atteint la limite élastique. Lorsque $M_0 = 0$, nous avons le cas d'un poteau qui peut supporter $P = P_Y$ lorsque $P_E > P_Y$ et $P = P_E$ lorsque $P_E < P_Y$. Plus l'élancement augmente, plus la résistance du poteau-poutre diminue. La courbe pour $(L/r_x)\sqrt{\varepsilon_Y} = 4$ est naturellement plus basse

que la courbe qui correspond à un élancement égal à zéro. Cette situation est logique étant donné que les membrures élancées subissent plus de déflexion et une grande partie du moment total provient de Pv . L'effet de la variation du ratio des moments aux extrémités de la membrure peut être résumé comme suit : Pour une membrure en simple courbure causée par deux moments égaux $\kappa = 1$, la résistance est à sa limite inférieure. Par contre, pour une membrure en double courbure avec $\kappa = 1$, la résistance atteint sa limite supérieure. Pour ce cas, le moment maximal se produit aux extrémités de la membrure, et ce, indépendamment de sa longueur, donc $\varphi = 1.0$ dans (5.27).

5.3.3 Approche approximative pour d'autres cas de chargement

La résistance dans le plan du chargement pour un poteau-poutre ayant une section prismatique possédant une simple ou double symétrie et chargé par des moments de flexion aux extrémités, est définie par l'équation d'interaction de la résistance (5.27). Cette équation d'interaction peut être utilisée aussi dans d'autres situations. Par exemple, dans le cas des membrures avec des charges concentrées et/ou distribuées appliquées le long de la membrure. Le principe de la superposition peut être appliqué à condition de prendre en considération l'effet de la force axiale dans chaque sous-solution. La membrure montrée à la Figure 5-8 peut être traitée par superposition de la solution d'une membrure sollicitée par des moments aux extrémités (Figure 5-8b) et à laquelle s'ajoute la solution d'une membrure sollicitée par une charge uniformément répartie (Figure 5-8c).

Dans chacun des deux cas, P doit être incluse étant donné que le moment est augmenté dans les deux cas dû à la présence de la force axiale P (effet $P-\delta$). L'équation différentielle qui décrit le comportement de la membrure dans le plan du chargement pour le cas de la charge uniformément répartie est:

$$EI_x v^{iv} + Pv'' = q \quad (5.29)$$

avec comme conditions aux limites : $v|_{z=0} = v|_{z=L} = v''|_{z=0} = v''|_{z=L} = 0$.

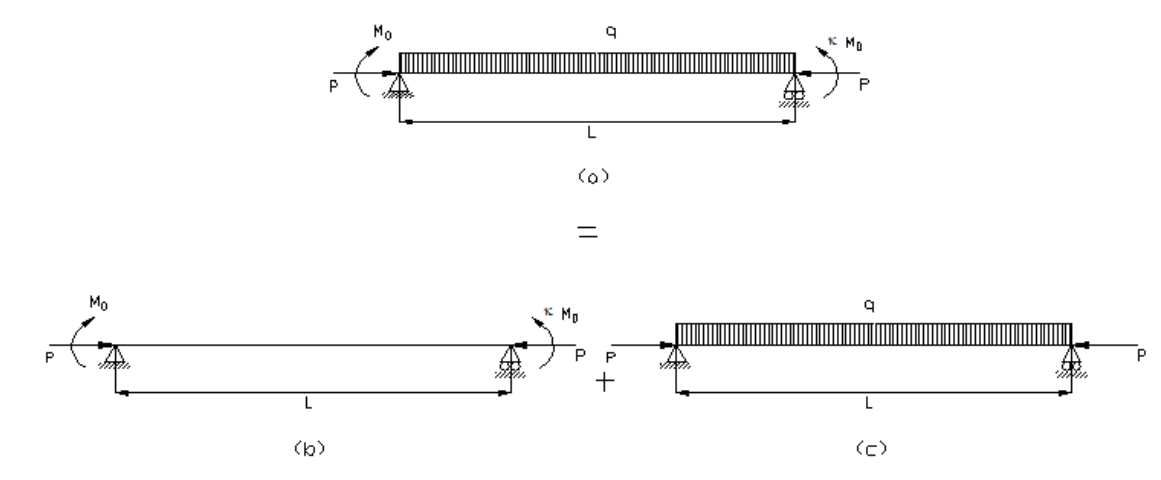


Figure 5-8 : Superposition de deux cas de charge

La solution de (5.29) est donnée par :

$$v = \frac{q}{PF_v} \left\{ \left(\frac{1 - \cos F_v L}{\sin F_v L} \right) \sin F_v z + \cos F_v z - \frac{F_v L^2}{2} \left[\frac{z}{L} - \left(\frac{z}{L} \right)^2 \right] - 1 \right\} \quad (5.30)$$

Le moment maximal, quant à lui, est égal à :

$$M_{\max} = \varphi M_0 \quad (5.31)$$

où :

$$\varphi = \begin{cases} 0 & \text{pour } A \leq \cos F_v L \\ \frac{(1 + B) \sqrt{1 + A^2 - 2A \cos F_v L}}{\sin F_v L} - B & \text{pour } A \geq \cos F_v L \end{cases} \quad (5.32)$$

avec :

$$A = \frac{\kappa + B}{1 + B}, \quad B = \frac{qEI_x}{M_0 P} \quad (5.33)$$

De (5.31), on peut constater que l'équation d'interaction de la résistance d'une membrure agissant comme poteau-poutre peut être déterminée par (5.27). Tout autre type de chargement qui sollicite un poteau-poutre peut être représenté par cette équation d'interaction pour un comportement élastique. On peut aussi utiliser la méthode d'énergie pour obtenir une solution approximative ou une procédure d'intégration numérique. La méthode de Newmark (Dhatt & Touzot, 1981) permet la résolution numérique d'équations différentielles du second ordre. Elle convient, non seulement pour des systèmes différentiels linéaires, mais aussi pour des systèmes fortement non-linéaires avec une matrice de masse et une force appliquée. Une façon considérée comme la plus efficace pour l'utilisation des équations d'interaction élastique dans la conception est de se doter des graphiques pour diverses conditions de chargement pour éviter certaines répétitions des calculs numériques de φ . Il existe aussi d'autres procédures qualifiées d'approximatives, qui sont d'usage courant vu leur simplicité, tout en mentionnant que ces procédures approximatives donnent des résultats moins précis mais sécuritaires. Parmi ces dernières, la procédure suivante peut être aussi utilisée pour obtenir une solution plus simple, mais moins précise, (5.27) peut s'écrire telle que :

$$\frac{P}{P_y} + C_m \left(\frac{M_0}{M_y} \right) \varphi_{\kappa=1,0} = 1,0 \quad (5.34)$$

où $\varphi_{\kappa=1}$ est pour $\kappa = 1$ et C_m , un terme de correction employé pour tenir compte des cas lorsque $\kappa \neq 1$. De (5.23) on obtient :

$$\varphi_{\kappa=1} = \frac{\sqrt{2 - 2 \cos F_v L}}{\sin F_v L} \quad (5.35)$$

et

$$C_m = \frac{\varphi}{\varphi_{\kappa=1}} = \sqrt{\frac{1 + \kappa^2 - 2\kappa \cos F_v L}{2(1 - \cos F_v L)}} \quad (5.36)$$

Le terme $\varphi_{\kappa=1}$ de (5.35) peut être approximé par :

$$\varphi_{\kappa=1} = \frac{1}{1 - P/P_E} = \frac{1}{1 - (F_v L/\pi)^2} \quad (5.37)$$

et le moment maximal aura lieu à $z = L/2$ avec $M_{\max} = M_0 + P\nu$. Il existe diverses formulations approximatives pour exprimer C_m dans les spécifications américaines (c'est le même terme désigné par ω_1 dans spécifications canadiennes). (Austin, 1961; Massonnet, 1959) proposent respectivement :

$$C_m = \sqrt{0,3\kappa^2 + 0,4\kappa + 0,3} \quad (5.38)$$

$$C_m = 0,6 + 0,4\kappa \geq 0,4 \quad (5.39)$$

Les deux expressions ne donnent pas une très bonne approximation de C_m parce que C_m ne dépend pas uniquement de κ , mais aussi de $F_v L$. Toutefois, lorsque ces deux valeurs sont utilisées dans l'équation d'interaction (5.34), le résultat est acceptable, spécialement pour $-0,5 \leq \kappa \leq 1,0$. Donc, pour les poteaux-poutres sollicités par des moments aux extrémités, nous pouvons définir la limite d'utilisation dans le domaine élastique via l'équation d'interaction :

$$\frac{P}{P_Y} + \frac{C_m M_0}{M_Y (1 - P/P_E)} = 1,0 \quad (5.40)$$

La valeur de C_m est déterminée à partir de (5.38) ou (5.39). L'équation approximative d'interaction (5.40) ne considère pas le cas pour lequel le moment maximal aura lieu à l'extrémité de la membrure. Dans ce cas, une condition additionnelle doit être satisfaite soit :

$$\frac{P}{P_Y} + \frac{M_0}{M_Y} = 1,0 \quad (5.41)$$

Dans le cas des charges transversales le long de la membrure, le moment peut être déterminé via l'expression :

$$M_{\max} = \bar{M}_{\max} + \frac{P \bar{v}_{\max}}{1 - \frac{P}{P_E}} \quad (5.42)$$

avec \bar{M}_{\max} , le moment maximal en travée si $P = 0$ et \bar{v}_{\max} , la déflexion maximale pour $P = 0$.
Donc, pour un poteau-poutre sollicité par une charge répartie, le moment maximal est :

$$M_{\max} = \frac{pL^2}{8} + \frac{5qL^4}{384EI_x (1 - P/P_E)} \quad (5.43)$$

5.3.4 Résumé pour le cas des poteaux-poutres à comportement élastique

La résistance élastique dans le plan de chargement est définie comme étant la combinaison des charges qui produit une contrainte maximale égale à la limite élastique $\sigma_{\max} = \sigma_Y$ dans la membrure. Pour les membrures fléchies en simple ou en double courbure, la résistance élastique peut être représentée par une équation d'interaction de la résistance telle que (5.27). En plus de la

résistance élastique, on doit aussi vérifier la possibilité du déversement élastique. Dans le cas des sections asymétriques ou le cas des moments de flexion appliqués suivant les deux axes principaux, on se trouve dans une situation de flexion biaxiale. Donc, pour déterminer le déversement élastique des membrures ayant des telles sections asymétriques, les équations différentielles générales doivent être résolues. Ces équations différentielles de l'équilibre pour le cas général des excentricités bi-axiales ont été résolues par (Prawel & Lee, 1964) en utilisant différentes procédures numériques.

5.4 RÉSISTANCE MAXIMALE DES POTEAUX-POUTRE

5.4.1 Comportement dans le domaine inélastique

La théorie élastique donne des moyens rationnels et relativement simples pour l'analyse et la conception des poteaux-poutres en acier. Les limites de la validité de cette théorie sont l'atteinte de la limite élastique ou l'instabilité due au déversement. Toutefois, il existe certains défauts à cette approche, notamment : 1) La résistance maximale peut être considérablement plus élevée (30 % à 40 % dans certains cas) que la charge qui correspond à la limite élastique. 2) Il n'existe pas de moyen satisfaisant pour un cas où $M_0 = 0$, c'est-à-dire lorsque la membrure agit comme un poteau et qu'il existe une transition entre le flambement élastique et la pleine plasticité. 3) La limite élastique n'a pas un sens réel en relation avec la résistance maximale du cadre dont le poteau-poutre fait partie.

5.4.2 Comportement dans le plan du chargement

Une courbe typique $M_0 - \theta_0$ est montrée sur les Figure 5-3 et Figure 5-4. Après une réponse initiale linéaire de la structure jusqu'à la limite élastique, la relation $M_0 - \theta_0$ devient non linéaire, un pic est alors atteint et la capacité en flexion diminue. Pour des poteaux-poutres en acier, la limite élastique est atteinte lorsque la somme des contraintes dues aux charges appliquées et aux

contraintes résiduelles devient égale à la limite élastique σ_Y . L'équation d'interaction de la résistance qui définit cette limite est:

$$\frac{P}{P_Y} + \varphi \frac{M_0}{M_Y} = 1 - \frac{\sigma_{rc}}{\sigma_Y} \quad (5.44)$$

Les courbes $M_0 - \theta_0$ ont un pic parce qu'éventuellement, $M_0 + Pv \rightarrow M_{pc}$ où M_0 est le moment du premier ordre et M_{pc} est le moment plastique de la section transversale. Étant donné que P et M_{pc} sont constantes, M_0 doit diminuer autant que la déflexion augmente. De la Figure 5-2, le moment à une section située à une distance z de l'appui est : $M_x = M_0 \left[1 - \frac{z}{L}(1 - \kappa) \right] + Pv$. Le moment externe est repris par un moment interne qui est fonction de la courbure Φ . Dans le domaine élastique $(M_x)_{\text{int}} = \Phi EI_x$ et dans le domaine inélastique, cette fonction est beaucoup plus complexe, donc $(M_x)_{\text{int}} = f(\Phi, P, EI_x)$. La courbure Φ est égale à $-v''$ si on retient l'hypothèse des petites déformations des sections planes et que les déformations dues au cisaillement sont négligeables. Ces hypothèses sont raisonnables aussi dans le domaine inélastique du fait que les rotations sont petites. L'équation d'équilibre est obtenue en posant $M_{\text{ext}} = M_{\text{int}}$ tel que :

$$M_0 \left[1 - \frac{z}{L}(1 - \kappa) \right] + Pv = f(v'', P, EI_x) \quad (5.45)$$

Les déflexions et les rotations aux extrémités de la membrure sont obtenues par l'intégration de (5.45). À cause de la forme complexe de la relation $M - P - \Phi$, la solution de cette équation doit être traitée par des techniques numériques.

5.4.3 Relation moment - force axiale - courbure

La relation $\mathbf{M} - \mathbf{P} - \Phi$ du côté droit de (5.45) va dépendre de la séquence de l'application de P et M . Pour toute valeur de P et M , la courbure inélastique résultante sera différente. Si, par exemple, P et M augmentent proportionnellement ou si P est appliquée en premier et M par la suite. Donc, il n'y a pas une relation unique parmi les trois quantités $\mathbf{M} - \mathbf{P} - \Phi$. Habituellement, les courbes $\mathbf{M} - \mathbf{P} - \Phi$ sont obtenues par l'application de P en premier qui est maintenue constante pendant que la relation correspondante entre $\mathbf{M} - \Phi$ est établie. Cette approche a donné des résultats très satisfaisants. Malgré le fait que la plupart des poteaux-poutres ne sont pas chargés dans cette séquence, l'erreur résultante est petite. Examinons le cas d'une section rectangulaire montrée à la Figure 5-9. La section est composée d'un matériau élasto-plastique idéal qui obéit à la relation contrainte/déformation montrée à la Figure 5-9b.

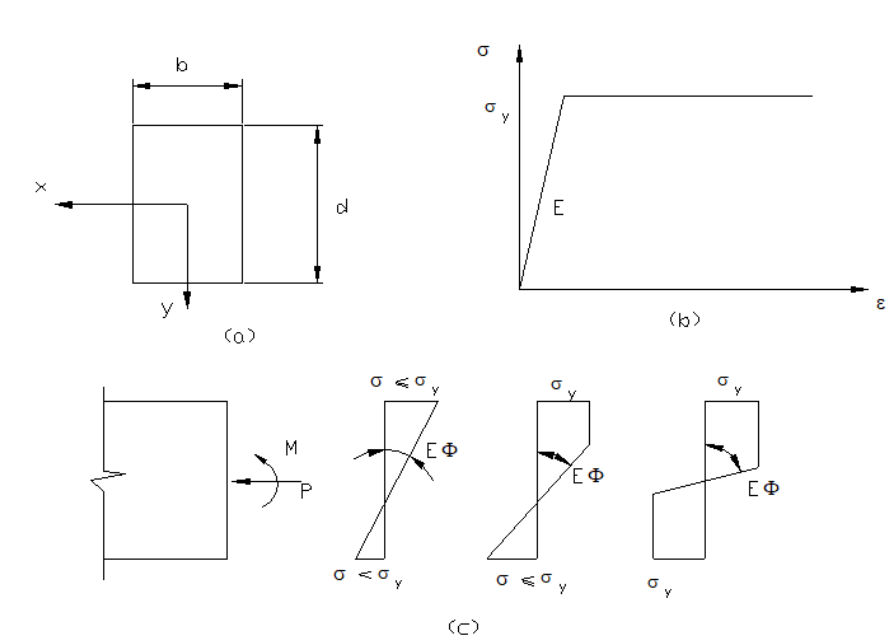


Figure 5-9 : Distribution progressive des contraintes dans une section d'un poteau-poutre

À une section donnée, la membrure est sollicitée en premier par une force axiale de compression P qui est maintenue constante et un moment de flexion qui varie de zéro à une valeur maximale qui conduit à la plastification totale de la section. Il y a trois possibilités de la distribution des contraintes montrées à la Fig. 5.9c. La relation $M - \Phi$ pour une valeur constante de P est obtenue de l'équilibre $\int_A \sigma dA = P$ et $\int_A \sigma y dA = M$ et de la géométrie des diagrammes des contraintes. Les équations résultantes $M - P - \Phi$ sont :

$$\frac{M}{M_Y} = \frac{\Phi}{\Phi_Y} \text{ pour } 0 \leq \frac{\Phi}{\Phi_Y} \leq \left(1 - \frac{P}{P_Y}\right) \quad (5.46)$$

$$\frac{M}{M_Y} = 3 \left(1 - \frac{P}{P_Y}\right) - \frac{2(1 - P/P_Y)^{3/2}}{(\Phi/\Phi_Y)^{1/2}} \text{ pour } \left(1 - \frac{P}{P_Y}\right) \leq \frac{\Phi}{\Phi_Y} \leq \frac{1}{1 - P/P_Y} \quad (5.47)$$

$$\frac{M}{M_Y} = \frac{3(1 - P/P_Y)^{3/2}}{2} - \frac{1}{2(\Phi/\Phi_Y)^2} \text{ pour } \left(\frac{1}{1 - P/P_Y}\right) \leq \frac{\Phi}{\Phi_Y} \leq \infty \quad (5.48)$$

avec $P_Y = bd\sigma_Y$, $M_Y = \frac{bd^2}{6}\sigma_Y$, $\Phi_Y = \frac{2\sigma_Y}{Ed}$.

Les courbes correspondantes aux équations (5.46) à (5.48) sont données à la Figure 5-10 pour différentes valeurs de P/P_Y . Lorsque $\Phi \rightarrow \infty$, les courbes deviennent asymptotiques pour $M = \frac{3}{2} \left[1 - (P/P_Y)^2\right] M_Y$. Ce moment est celui qui correspond à la plastification totale de la section. Le moment plastique est réduit à sa valeur M_p lorsque $P = 0$ tel que :

$$M_{pc} = \left[1 - (P/P_Y)^2\right] M_p \quad (5.49)$$

$$\text{où } M_p = \frac{3}{2} M_Y = \frac{bd^2}{4} \sigma_Y.$$

Les courbes $\mathbf{M} - \mathbf{P} - \Phi$ pour d'autres formes de sections et d'autres matériaux peuvent être obtenues de la même façon. (Timoshenko & Gere, 1961) ont présenté une méthode générale pour déterminer la relation $\mathbf{M} - \mathbf{P} - \Phi$ de façon graphique, et ce, pour toute section et toute relation déformations-contraintes. Les courbes $\mathbf{M} - \mathbf{P} - \Phi$, pour des sections en I, montrent la formation de rotules plastiques à des courbures relativement plus petites que celles présentées par des sections rectangulaires. Des résultats satisfaisantes pour le calcul de M_{pc} peuvent être obtenues des équations empiriques :

$$\left(\frac{M_{pc}}{M_p} \right)_x = 1,18 \left(1 - \frac{P}{P_Y} \right) \quad (5.50)$$

$$\left(\frac{M_{pc}}{M_p} \right)_y = 1,19 \left(1 - \frac{P}{P_Y} \right) \quad (5.51)$$

Avec l'hypothèse d'une courbe idéale $\sigma - \varepsilon$ élasto-plastique, les valeurs de M_{pc} obtenues de (5.50) et (5.51) représentent les plus grands moments de flexion qu'une section en I peut supporter pour une valeur spécifique de la force axiale P .

5.5 MÉTHODE DE RÉOLUTION DES CAS DE POTEAUX-POUTRES INÉLASTIQUES

Les courbes $\mathbf{M} - \mathbf{P} - \Phi$ constituent l'information de base à partir de laquelle l'intégration de l'équation d'équilibre d'un poteau-poutre et tel que défini par (5.45) peut être exécutée. Étant donné que l'expression analytique de ces courbes est complexe, l'intégration de (5.45) peut être effectuée par l'utilisation des procédures d'intégration numériques. Pour les sections

rectangulaires, il existe diverses solutions analytiques exactes. La Figure 5-10 montre des courbes typiques décrivant la relation $\mathbf{M} - \mathbf{P} - \Phi$ pour différents ratios de P/P_y et M/M_y .

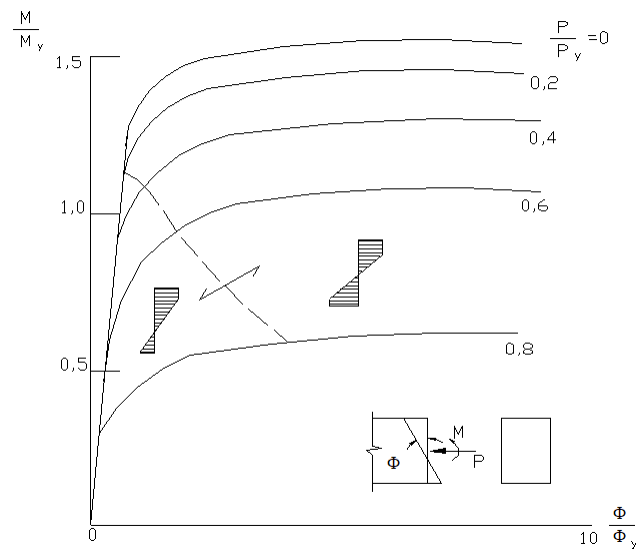


Figure 5-10 : Relation $\mathbf{M} - \mathbf{P} - \Phi$ pour une section rectangulaire poutre

5.5.1 Méthode analytique exacte

Une solution exacte a été donnée par (Ježek, 1937) pour une membrure de section rectangulaire, chargée par une force axiale excentrique en compression et montrée à la Figure 5-11.

Pour cette section et avec l'hypothèse d'une courbe $\sigma - \varepsilon$ élasto-plastique, les relations $\mathbf{M} - \mathbf{P} - \Phi$ décrites par les équations (5.46) à (5.48) sont valides. Le moment de flexion à une section située à une distance z de l'extrémité est : $M = P(e + v)$.

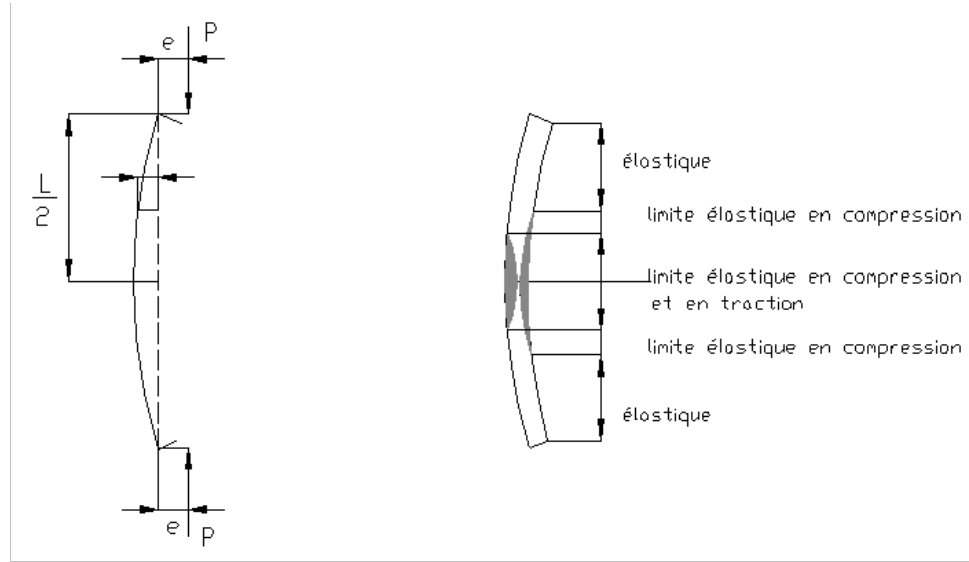


Figure 5-11 : Membrane chargée excentriquement

En égalisant ce moment externe au moment interne défini par les équations (5.46) à (5.48), on obtient les équations différentielles pour les trois zones montrées à la Figure 5-11 tel que :

1. Zone élastique

$$P(e + v) = -EIv'' \quad (5.52)$$

2. Limite élastique en compression seulement

$$P(e + v) = M_Y \left[3 \left(1 - \frac{P}{P_Y} \right) - \frac{2(1 - P/P_Y)^{3/2}}{(-Edv''/2\sigma_Y)^{1/2}} \right] \quad (5.53)$$

3. Limite élastique en compression et en traction

$$P(e + v) = M_Y \left\{ \frac{3 \left[1 - \left(\frac{P}{P_Y} \right)^2 \right]}{2} - \frac{2\sigma_Y^2}{E^2 d^2 (v'')^2} \right\} \quad (5.54)$$

Dans les équations (5.52) à (5.54), Φ est remplacé par $-v''$. Les équations (5.53) et (5.54) peuvent alors être réarrangées et résolues à l'aide des tables d'intégrales elliptiques. Les constantes de l'intégration sont obtenues des conditions de l'égalité des déflexions et rotations aux points où deux zones se rencontrent et la courbe $P - v$ peut être déterminée. Le pic de cette courbe est la valeur maximale de P .

5.5.2 Méthodes approximatives

L'intégration de (5.45) est fastidieuse et ce, même pour une section rectangulaire. Pour des formes géométriques plus complexes, il n'est pas conseillé d'utiliser une telle méthode. Plusieurs solutions approximatives ont été développées pour traiter les cas des poteaux-poutres avec différents types de chargement. Certaines de ces méthodes utilisent les courbes exactes $M - P - \Phi$ et supposent une déformée convenable, tandis que d'autres se basent sur des intégrales analytiques approximatives de la relation $M - P - \Phi$. Les relations pertinentes $M - P - \Phi$ pour une section rectangulaire sont données par les équations (5.46) à (5.48). Une des solutions approximatives est basée sur le raisonnement qui stipule que lorsque la charge maximale est atteinte, la courbe charge/déflexion doit atteindre son pic et le moment externe augmente avec le même taux que le moment interne fourni par les contraintes. Si l'augmentation du moment externe est plus grande que le système interne peut fournir, l'équilibre peut être maintenu seulement par une diminution du moment externe, et par le fait même, de la diminution des charges appliquées. Dans ce contexte, le gradient de la courbe charge/déflexion devient négatif. D'un autre côté, si le moment résistant interne est plus grand, le gradient est positif et le pic ne peut pas être atteint.

Donc, le pic est caractérisé par l'égalité des changements dans les moments externes et internes aux sections les plus déformées. Pour la membrure montrée à la Figure 5-11, la section la plus déformée se trouve à mi-portée ($z = L/2$) où la déflexion est égale à v_0 et le moment externe est égal à $P(e + v_0)$. Étant donné que la courbure est proportionnelle à la déflexion v_0 , nous pouvons définir la condition de la membrure au moment de l'atteinte de la valeur maximale de la charge, comme étant :

$$\frac{dM_{ext}}{dv_0} = \frac{d[P(e + v_0)]}{dv_0} = \frac{dM_{int}}{dv_0} \quad (5.55)$$

Pour pouvoir compléter cette solution, nous avons besoin de supposer une déformée convenable du poteau-poutre. Nous pouvons supposer que la déformée de la membrure obéit à la relation : $v = v_0 \sin \frac{\pi z}{L}$. Cette déformée remplit la condition que $v|_{z=0} = v|_{z=L} = 0$ et la courbe est symétrique par rapport à la déflexion v_0 à mi-hauteur. En introduisant l'équation de la déformée, nous pouvons résoudre (5.53) et (5.54). La courbure à mi-hauteur est égale à :

$$\Phi_0 = -v''(L/2) = v_0 \frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi}{2} = v_0 \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \quad (5.56)$$

ou encore, sous sa forme adimensionnelle :

$$\frac{\Phi_0}{\Phi_Y} = 6 \frac{v_0}{d} \frac{P_E}{P_Y} \quad (5.57)$$

et

$$\frac{P_E}{P_Y} = \frac{\pi^2 E}{\sigma_Y (L/r)^2} = \frac{\pi^2 (d/L)^2}{12 \varepsilon_Y} \quad (5.58)$$

Le moment externe sous sa forme adimensionnelle à $(z = L/2)$ est :

$$\frac{M}{M_Y} = \frac{P(e + v_0)}{M_Y} = \frac{Pe}{M_Y} + \frac{6Pv_0}{bd^2 \sigma_Y} = \frac{M_0}{M_Y} + 6 \frac{v_0}{d} \frac{P}{P_Y} \quad (5.59)$$

où $Pe = M_0$ et $P_Y = A\sigma_Y = bd\sigma_Y$. L'équilibre aux sections les plus déformées exige que

$M_{ext} = M_{int}$. Deux limites élastiques sont considérées :

1. Limite élastique en compression seulement.
2. Limite élastique en compression et en traction (Figure 5-9c et Figure 5-11). Le moment externe est décrit par (5.59) et les moments internes sont donnés par (5.47) et (5.48) respectivement pour les deux cas de la limite élastique. Les équations d'équilibres résultantes sont :

$$\frac{M_0}{M_Y} + 6 \frac{v_0}{d} \frac{P}{P_Y} = 3 \left(1 - \frac{P}{P_Y} \right) - \frac{2(1 - P/P_Y)^{3/2}}{[6(v_0/d)(P/P_Y)]^{1/2}} \quad (5.60)$$

$$\frac{M_0}{M_Y} + 6 \frac{v_0}{d} = \frac{3 \left[1 - \left(\frac{P}{P_Y} \right)^2 \right]}{2} - \frac{1}{[6(v_0/d)(P/P_Y)]^2} \quad (5.61)$$

Dans (5.60) et (5.61), Φ/Φ_Y est remplacée par l'expression obtenue de (5.57) et la condition à

laquelle le pic sur la courbe $M_0 - v_0$ est donnée par (5.55) telle que :

$$\frac{d(M_{ext}/M_Y)}{d(v_0/d)} - \frac{d(M_{int}/M_Y)}{d(v_0/d)} = \frac{d[(M_{ext} - M_{int})/M_Y]}{d(v_0/d)} \quad (5.62)$$

Pour le cas de la limite élastique par compression seulement :

$$\frac{d}{d(v_0/d)} \left[\frac{M_0}{M_Y} + 6 \frac{v_0}{d} \frac{P}{P_Y} - 3 \left(1 - \frac{P}{P_Y} \right) + \frac{2(1 - P/P_Y)^{3/2}}{(6P_E/P_Y)^{1/2} (v_0/d)^{1/2}} \right] \quad (5.63)$$

Si on multiplie (5.63) par $(v_0/d)^{1/2}$, la dérivée de l'expression résultante donne :

$$\frac{v_0}{d} = \frac{1 - P/P_Y}{6P/P_Y} - \frac{M_0/M_Y}{18P/P_Y} \quad (5.64)$$

L'expression (5.64) donne la valeur de la déflection à mi-hauteur pour la limite élastique en compression seulement, et ce, pour la valeur maximale de M_0 . En introduisant v_0/d de (5.64) dans (5.60), on pourra obtenir une équation d'interaction qui lie les paramètres de la géométrie et du chargement à la charge maximale telle que :

$$\frac{M_0}{M_Y} = 3 \left(1 - \frac{P}{P_Y} \right) \left[1 - \frac{(P/P_Y)^{1/3}}{(P_E/P_Y)^{1/3}} \right] \quad (5.65)$$

Si on exécute une séquence d'opérations similaires pour le cas de la limite élastique par traction et compression, on pourra obtenir la déflection maximale correspondante à la charge maximale :

$$\frac{v_0}{d} = \frac{(3/2) \left[1 - (P/P_Y)^2 \right] - M_0/M_Y}{9(P/P_Y)} \quad (5.66)$$

Ainsi que l'équation d'interaction :

$$\frac{M_0}{M_Y} = \frac{3}{2} \left[1 - \left(\frac{P}{P_Y} \right)^2 - \frac{(P/P_Y)^{2/3}}{(P_E/P_Y)^{2/3}} \right] \quad (5.67)$$

Le domaine d'application de (5.65) et (5.67) est défini par les limites auxquelles les relations $M - P - \Phi$ (5.47) et (5.48) sont applicables. De (5.57), (5.64) et (5.65), on trouve que pour le cas de la limite élastique par compression seulement :

$$\frac{\Phi}{\Phi_Y} = \left(1 - \frac{P}{P_Y} \right) \left(\frac{P_E/P_Y}{P/P_Y} \right)^{2/3} \quad (5.68)$$

La courbure définie par (5.68) est applicable sur l'intervalle $1 - P/P_Y \leq \Phi/\Phi_Y \leq 1/(1 - P/P_Y)$ tel que décrit par (5.47). Une limite de (5.65) et (5.68) survient lorsque $\frac{\Phi}{\Phi_Y} = 1 - P/P_Y$ ou lorsque $P/P_E = 1,0$. L'autre limite est atteinte lorsque $\frac{\Phi}{\Phi_Y} = \frac{1}{(1 - P/P_Y)}$ ou, de (5.68), $P/P_E = (1 - P/P_Y)^3$. Donc, (5.65) est valide pour l'intervalle $(1 - P/P_Y)^3 \leq P/P_E \leq 1,0$. De façon similaire, on peut montrer que (5.67) est valide pour l'intervalle $0 \leq P/P_E \leq (1 - P/P_Y)^3$, fournissant ainsi les équations d'interaction :

$$\frac{M_0}{M_Y} = 3 \left(1 - \frac{P}{P_Y} \right) \left[1 - \left(\frac{P}{P_E} \right)^{1/3} \right] \text{ pour } (1 - P/P_Y)^3 \leq P/P_E \leq 1 \quad (5.69)$$

$$\frac{M_0}{M_Y} = \frac{3 \left(1 - (P/P_Y)^2 - (P/P_Y)^{2/3} \right)}{2} \text{ pour } 0 \leq P/P_E < (1 - P/P_Y)^3 \quad (5.70)$$

Les équations (5.69) et (5.70) associent le moment $M_0 = Pe$, la force axiale P et le ratio $(L/r)\sqrt{\varepsilon_Y}$, qui est la variable du terme P_E/P_Y dans (5.58) pour une membrure de section rectangulaire, chargée comme montrée à la Figure 5-11, et supportant un moment d'extrémité maximal M_0 sous l'effet d'une charge axiale donnée P . Les trois paramètres sans unité qui définissent la condition maximale sont les mêmes qui définissent la charge de la limite élastique.

5.5.3 Intégrales numériques

La résistance maximale d'un poteau-poutre dans le plan du chargement, pour toute condition des charges, peut être déterminée par intégration numérique, tel que montré à la Figure 5-12 pour un poteau-poutre sollicité par des moments aux extrémités selon un ratio $\kappa = 0,5$. Les étapes de la solution pour des valeurs spécifiques de M et P sont :

1. Obtenir les courbes $M - P - \Phi$ pour une section, un matériau et une distribution des contraintes résiduelles données.
2. Spécifier une valeur de M_0 supérieure à celle qui peut causer la plastification.
3. Supposer une géométrie raisonnable de la déformée et comme premier essai, utiliser la déformée élastique déterminée à partir de (5.16).
4. À partir de la déformée choisie et les moments aux extrémités, déterminer le moment de flexion $M(z) + P\delta$ à différentes sections le long de la membrure.
5. Déterminer la courbure correspondante au moment total à chaque section, à partir des courbes $M - P - \Phi$.
6. Déterminer une nouvelle déformée par l'intégration numérique de la courbure. L'intégration numérique peut être exécutée convenablement par la méthode de *Newmark*.
7. Répéter les étapes 4, 5 et 6 avec une nouvelle déformée jusqu'à convergence de la déformée ou encore jusqu'à divergence du processus d'intégration. Dans ce cas, la

valeur du moment calculée, M_0 , est plus grande que la valeur maximale que la membrure peut supporter.

8. Répéter les étapes 2 à 7 avec une nouvelle valeur de M_0 .
9. Finalement, une courbe $M_0 - v$ peut être tracée, pour laquelle la plus grande valeur de M_0 peut être obtenue. Le résultat recherché de ces calculs est le moment maximal M_0 , qui correspond à une valeur spécifique de P et de L pour une section et un matériau donnés.

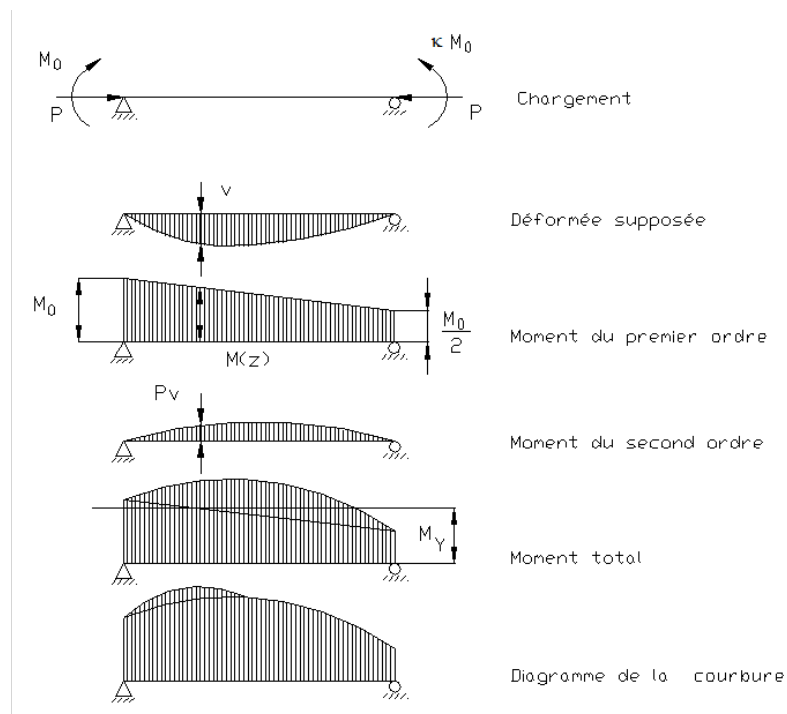


Figure 5-12 : Construction du diagramme de la courbure d'une membrure sollicitée par une charge axiale et des moments de flexion aux deux extrémités

5.6 ÉQUATIONS D'INTERACTION APPROXIMATIVES

L'utilisation des courbes d'interactions de la résistance ou des tables peut être évitée en utilisant des formules empiriques obtenues, vérifiées et calibrées sur la base des informations exactes. Les courbes d'interaction pour $\kappa = 0$ (voir Figure 5-13) et $\kappa = 1,0$ (voir Figure 5-14) peuvent être substituées de façon approximative, et ce, pour un niveau d'exactitude très acceptable par :

$$\frac{P}{P_{cr}} + \frac{C_m^* M_0}{M_p (1 - P/P_E)} = 1,0 \quad (5.71)$$

où :

P_{cr} : est la charge axiale maximale que la membrure peut supporter si le moment de flexion est nul;

C_m^* : coefficient qui tient compte de l'effet des moments inégaux aux extrémités de la membrure (coefficient d'uniformisation des moments);

M_0 et P : moment de flexion maximal à l'extrémité de la membrure et la force axiale respectivement;

M_p : moment plastique total pour $P = 0$;

P_E : charge élastique du flambement de la membrure dans le plan de l'application des moments.

La valeur de C_m^* peut être obtenue approximativement par (5.38). L'expression (5.71) est très similaire à la limite élastique de (5.40) à l'exception que P_{cr} représente soit la résistance élastique ou inélastique du poteau. Cette équation fournit une transition empirique et simple entre une limite lorsque $M_0 = 0$ et $P = P_{cr}$ et une autre limite lorsque $M_0 = M_p$ et $P = 0$ tant que $C_m^* = 1,0$. Si

$C_m^* \neq 1,0$ (et que $\kappa \neq 0$ et donc $C_m^* < 1,0$), (5.71) va donner $M_0 > M_p$ lorsque $P = 0$, donc il existe des points où (5.71) n'est plus valide. Ces points sont le reflet de la formation d'une rotule plastique à une extrémité du poteau-poutre. Pour les poteaux-poutres de section en I avec des ailes larges et fléchies selon l'axe fort, la condition de la rotule plastique est définie par (5.50) telle que :

$$\frac{M_0}{M_p} = 1,18 \left(1 - \frac{P}{P_y} \right) \leq 1,0 \quad (5.72)$$

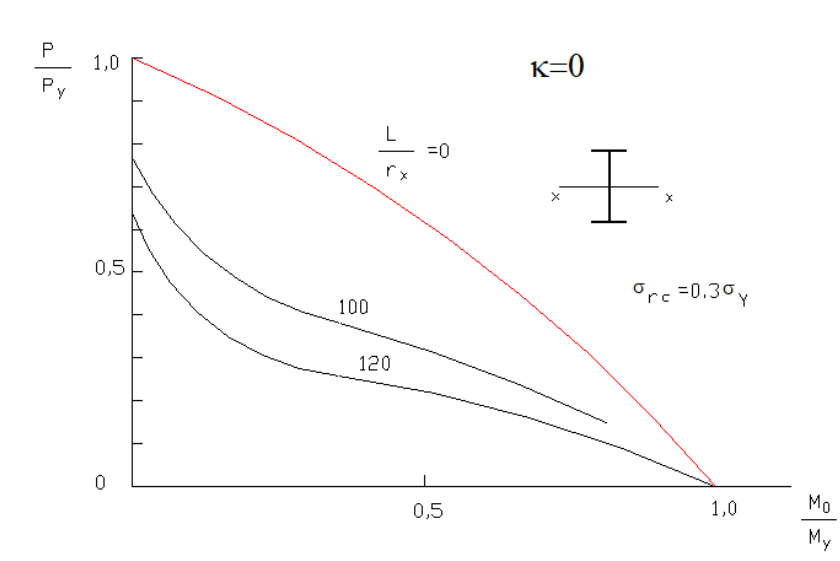


Figure 5-13 : Courbes d'interaction pour poteau-poutre de sections en I fléchies suivant l'axe fort ($\kappa = 0$)

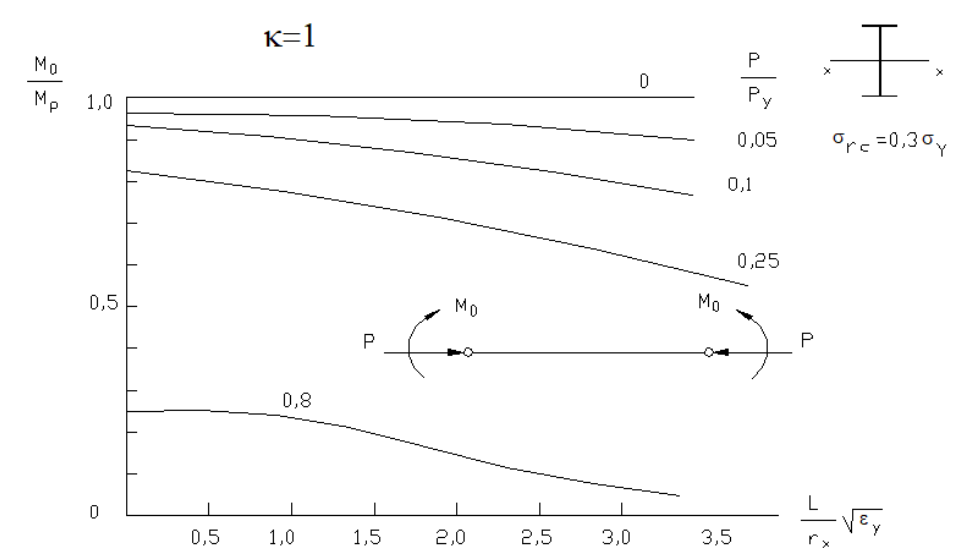


Figure 5-14 : Courbes d'interaction pour poteau-poutre de sections en I fléchies suivant l'axe fort ($\kappa = 1$)

Les relations définies par (5.71) et (5.72) sont montrées à la Figure 5-15 où les courbes d'interaction sont tracées pour P/P_y versus M_0/M_p pour une valeur donnée de l'élancement.

La courbe inférieure pour $\kappa = 1,0$ représente les cas de chargement les plus sévères, cette courbe est toujours concave vers le bas; elle relie $M_0 = M_p$ et $P = P_{cr}$. Pour $\kappa < 1,0$, la courbe de (5.71) pivote vers le haut de son origine à $P = P_{cr}$ et ne passe pas par M_p . Au-delà de son point d'intersection avec (5.72), elle n'est plus valide. Donc, l'enveloppe montrée à la Figure 5-15, définit la résistance maximale estimée. Dans toutes les situations, nous devons vérifier, de (5.71) et (5.72), celle qui donne la plus petite valeur de la résistance. L'exactitude des équations empiriques d'interaction a été vérifiée par des tests expérimentaux et comparée avec les courbes d'interaction déterminées par intégrations numériques. Elles donnent une bonne représentation de la résistance maximale dans le plan du chargement pour les poteaux-poutres sur l'intervalle $0 \leq \kappa \leq 1,0$. La corrélation devient moins satisfaisante lorsque la valeur de κ approche -1 , mais reste considérée comme une approximation suffisamment bonne pour être utilisée avec confiance dans en phase de

conception. Plusieurs spécifications techniques utilisent ces équations comme base pour les calculs des poteaux-poutres.

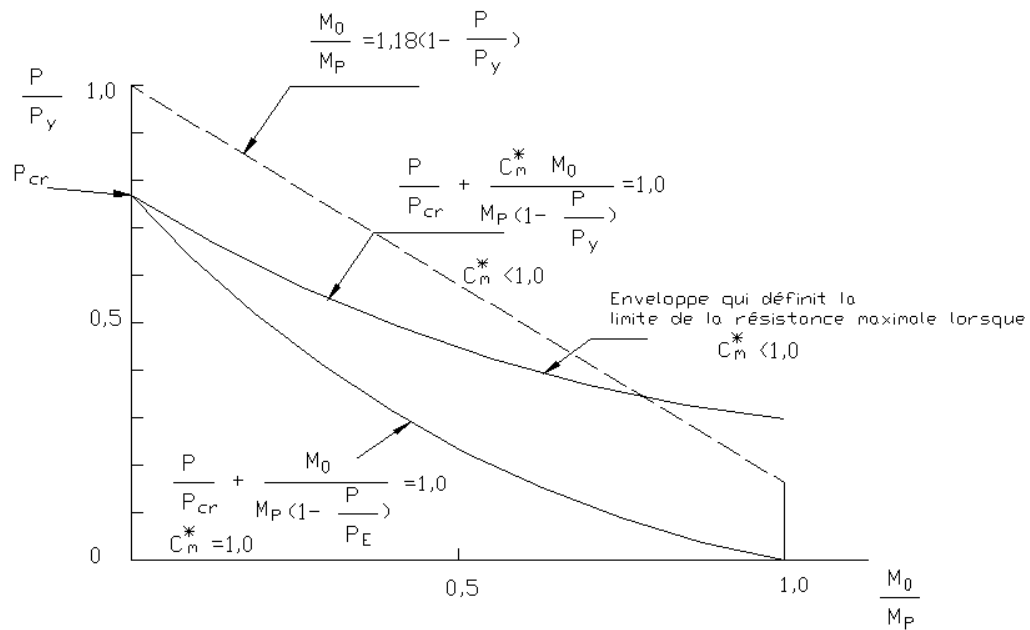


Figure 5-15 : Équations d'interaction empiriques

CHAPITRE 6

ÉQUATIONS D'INTERACTION POUR LE CALCUL DES POTEAUX-POUTRES

6.1 COMPARAISON ET ÉVOLUTION DES SPÉCIFICATIONS TECHNIQUES CANADIENNES

Ce chapitre présente une comparaison détaillée des approches pour la conception et le dimensionnement des poteaux-poutres dans les structures d'acier et ce, telles que spécifiées dans les standards canadiens, américains, européens et australiens. Ce chapitre décrit aussi une procédure pour modifier les spécifications américaines afin de pouvoir éviter le calcul des facteurs de la longueur effective. Ce chapitre discute des différentes philosophies et procédures pour la conception des poteaux-poutres et résume les similarités et différences parmi les différentes spécifications. Malgré que le sujet de la stabilité des cadres soit considéré comme mature, il n'en demeure pas moins que les approches pour considérer la stabilité dans la conception des cadres d'acier varient largement entre les spécifications courantes à travers le monde. De plus, un grand nombre de méthodes de calcul a été proposé dans une vaste littérature qui traite le sujet de la stabilité des cadres. Plusieurs de ces méthodes présentent des différences subtiles, ce qui a de grandes implications en ce qui concerne leurs applications. Les spécifications considérées sont : **CSA/CAN-S16-09, AISC 2005, Eurocode 3** et **AS4100-1990**. Il existe plusieurs différences parmi ces spécifications en ce qui a trait à la stabilité et la résistance des poteaux-poutres. Ces différences sont :

- Les facteurs de résistance (coefficients de tenue des matériaux) et des charges (coefficients de pondération).
- Les formules de résistance des poteaux (nombre de courbes de résistance adoptées).
- Les charges nominales et les combinaisons des actions conformément à chacun des standards.
- Les formules de résistance des poutres.
- Le nombre, le format et la configuration des courbes d'interaction qui représentent le couplage entre la résistance en flexion et celle en compression axiale.
- L'usage ou le non-usage des modèles de flambement ainsi que la détermination des facteurs de la longueur effective associés.
- La modification des moments de flexion pour tenir compte des imperfections géométriques et des effets de la distribution de la plasticité à travers l'application des charges latérales fictives.

Cependant, toutes ces spécifications techniques exigent le calcul des effets du second ordre, soit par analyse directe ou par des amplifications approximatives des effets élastiques de premier ordre. Dans ce chapitre nous porterons notre attention sur l'examen et l'évolution des équations d'interaction de la norme **CSA/CAN-S16** ainsi que sur les principales distinctions parmi les approches pour la vérification des résistances suivant chacune des quatre spécifications. Le chapitre se termine par un résumé des équations contenues dans chacune des spécifications, exprimées dans une notation unifiée, ainsi que les grandes lignes des différentes similarités et différences dans les philosophies ainsi que la logique derrière chacune de ces approches. La méthode de calcul des poteaux-poutres, faisant partie des cadres rigides libres de se déplacer latéralement, basée sur le concept de la longueur effective KL , est abandonnée par les spécifications canadiennes et ce depuis la mise en vigueur de l'édition (**CAN-S16.1-M89**). Le calcul des éléments poteaux-poutres dans une ossature a fait l'objet de diverses recherches et discussions. Même dans certains cas, il y a eu de la controverse. Les équations utilisées dans les calculs doivent prédire correctement le comportement des pièces et avoir un sens physique. La simplicité des équations aide les

concepteurs à éviter les erreurs et les mauvaises interprétations. Une prédiction exacte de la résistance d'un élément, travaillant comme poteau-poutre, demande des procédures itératives et des techniques numériques, spécialement dans le domaine inélastique où se trouvent la plupart des membrures faisant partie d'une ossature. Des approches simples sont indispensables pour faciliter le travail des concepteurs; pour cela, des équations linéaires d'interaction peuvent représenter le comportement des poteaux-poutres avec des coefficients qui tiennent compte de la non-linéarité géométrique. Le Tableau 6-1 résume quelques distinctions et similitudes parmi les approches de conception pour le dimensionnement des poteaux-poutres dans chacune des quatre spécifications.

Tableau 6-1 : Comparatif des différents aspects du calcul des poteaux-poutres à l'état limite ultime (Picard, Beaulieu, & Kennedy, 1992)

ITEM	CSA/CAN-S16-09	AISC LRFD, 2005	AS4100- 1990	<i>Eurocode 3</i>
Effets $P - \Delta$	Tous les cadres	Tous les cadres	Les cadres contreventés peuvent être exclus	Certains cadres contreventés peuvent être exclus
Analyse directe	Oui	Oui	Oui	Oui
Facteur d'amplification $U_2 = 1 / (1 - \Sigma C_f / \Sigma C_e)$	Oui	Oui	Oui	Oui
Limite supérieure de U_2	Non spécifiée	1,5	1,4	1,33

ITEM	CSA/CAN-S16-09	AISC LRFD, 2005	AS4100- 1990	Eurocode 3
Longueur effective des poteaux faisant partie des cadres libres de se déplacer latéralement	Longueur réelle	$KL, K \geq 1,0$	Longueur réelle	1. Longueur réelle 2. $KL, K \geq 1,0$ Comme alternative à condition d'amplifier les moments sollicitant les poutres de 20 %
Moments max. à utiliser pour le dimensionnement	$U_1(M_{fg} + U_2 M_{ft})$	$U_1 M_{fg} + U_2 M_{ft}$	$U_1 (M_{fg} + U_2 M_{ft})$	$U_1 (M_{fg} + U_2 M_{ft})$
Cadres libres de se déplacer, sollicités par des charges de gravité seulement	Charge horizontale minimale à chaque étage égale à $0,005 \Sigma C_f$	Vérification de la stabilité avec $KL, K \geq 1,0$ ou Charge horizontale minimale à chaque étage égale à $0,002 \Sigma C_f$	Charge horizontale minimale à chaque étage égale à $0,002 \Sigma C_f$	Charge horizontale minimale à chaque étage égale à $0,005 \Sigma C_f$, cette charge diminue en fonction du nombre de poteaux et d'étages
Charge horizontale fictive minimale utilisée en combinaison avec les charges réelles	Toutes combinaisons des charges	Charges de gravité et autres forces horizontales	Charges de gravité seulement	Charges de gravité et autres forces horizontales, sauf dans les combinaisons des actions où interviennent des charges horizontales significatives telles que celles résultant de l'action du vent

ITEM	CSA/CAN-S16-09	AISC LRFD, 2005	AS4100- 1990	Eurocode 3
Équations d'interaction pour : <ul style="list-style-type: none"> • Résistance de la section • Résistance globale suivant le plan de chargement • Résistance globale hors du plan de chargement 	Oui Oui Oui	Une seule expression pour les différents modes de rupture	Oui Oui Oui	Oui Oui Oui
Équations d'interaction pour différentes classes de sections	Fonctions graduelles pour 4 classes de sections	Oui, avec une diminution graduelle de M_r , lorsque b/t augmente	Oui, avec une diminution graduelle de M_r , lorsque b/t augmente	Fonctions graduelles pour 4 classes de sections
Résistance en flexion majorée pour les sections de classe 1	Oui, pour tous les modes de rupture	Oui	Oui, pour tous les modes de rupture	Oui, pour la résistance de la section seulement
$U_1 = \frac{0,6-0,4\kappa}{(1-C_f/C_e)}$	Oui	Oui	Oui	Autre expression
$U_1 < 1.0$ pour la flexion dans le plan de chargement	Oui	Non	Non	N/A
Moment résistant réduit pour tenir compte du déversement	Oui	Oui	Oui	Oui

ITEM	CSA/CAN-S16-09	AISC LRFD, 2005	AS4100- 1990	Eurocode 3
Moments non-uniformes par rapport à l'axe fort, valeur rehaussée du moment résistant qui cause le déversement élastique	Oui	Oui	Oui	Oui
Nombre de courbes de résistance poteaux	2	1	5	4
Différentes courbes de résistance des sections en I suivant les axes forts et faibles	Non	Non	Oui	Non
Usage de modèles de flambement et des longueurs effectives associées	$K=1,0$ est retenue comme valeur, à moins que pour le cas des cadres contreventés, le degré de retenue en rotation aux extrémités de la longueur non-retenue peut donner des valeurs inférieures à 1,0	Le calcul de la charge du flambement est requis; le facteur de la longueur effective K peut être inférieur ou égal à 1,0 dépendamment des retenues latérales	$K=1,0$ est retenue comme valeur, à moins que pour le cas des cadres contreventés, le degré de retenue en rotation aux extrémités de la longueur non-retenue peut donner des valeurs inférieures à 1,0	Les longueurs effectives similaires à celles des structures contreventées peuvent être utilisées à condition d'exécuter une analyse du second ordre; alternativement, les moments de premier ordre peuvent être utilisés avec des valeurs de K obtenues d'un mode libre de se déplacer latéralement, toutefois, les moments dans les poutres et les connexions doivent être amplifiés

6.2 COMPARAISON DES DIFFÉRENTES SPÉCIFICATIONS TECHNIQUES POUR LE CALCUL DES POTEAUX-POUTRES

Il est possible d'observer à travers les comparaisons résumées dans le Tableau 6-1 qu'il y a deux philosophies différentes pour incorporer les effets de la stabilité du cadre dans la conception des poteaux-poutres. La première philosophie est basée sur l'utilisation d'une analyse explicite ou implicite du flambement et/ou les longueurs effectives associées des poteaux dans la détermination de la résistance du poteau désignée par $P_{n(KL)}$. Cette approche est connue sous l'appellation d'approche de la longueur effective (AISC, 2005). La deuxième philosophie est basée sur la considération des effets de la stabilité à travers le calcul des forces internes au moyen d'une analyse élastique du second ordre et l'utilisation des charges latérales fictives; cette approche est connue sous l'appellation d'approche des charges fictives (**AISC LRFD, 2005, S16-09, ENV 1993 octobre 2005, 1993 et AS4100, 1990**). Les spécifications qui emploient les charges fictives n'exigent aucune analyse du flambement ni de calculer les longueurs effectives. Dans ces spécifications, le terme de la résistance du poteau est calculé en se basant sur la longueur réelle non supportée L de la membrure ou, dans le cas d'**Eurocode 3 (ENV 1993)**, $KL \leq L$, c'est-à-dire en se basant sur une longueur effective contreventée. Les deux procédures utilisées dans les quatre spécifications considérées (analyse du flambement et les charges horizontales fictives) ont d'importantes et différentes justifications fondamentales en ce qui a trait à leurs utilisations.

6.2.1 Équations d'interaction des spécifications CSA/CAN-S16-09

Comme montré au Tableau 6-1, les spécifications canadiennes, européennes et australiennes basent leurs évaluations de la capacité des poteaux-poutres sur des résistances séparées de la section transversale, de la membrure dans le plan du chargement et hors du plan de chargement (déversement). Pour un ratio donné de flexion sur la compression axiale, la résistance qui gouverne est obtenue comme étant la plus restrictive des équations utilisées séparément. Ces équations sont

exprimées en termes d'efforts pondérés et sont adaptées pour les calculs aux états limites. Les membrures ayant des sections en I doublement symétriques de classes 1 et 2 devant résister à des moments de flexion et à un effort de compression axiale, doivent être dimensionnées pour satisfaire la relation :

$$\frac{C_f}{C_r} + \frac{0,85U_{1x}M_{fx}}{M_{rx}} + \frac{\beta U_{1y}M_{fy}}{M_{ry}} = 1,0 \quad (6.1)$$

où C_f et M_f représentent les effets maximaux des efforts de compression et de flexion incluant les effets de la stabilité (effets du second ordre) et :

$$\beta = 0,6 + 0,4\lambda_y \leq 0,85 \quad (6.2)$$

avec

$$\lambda_y = \frac{KL}{r_y} \sqrt{\frac{F_y}{\pi^2 E}} \quad (6.3)$$

La capacité de l'élément doit être examinée pour les cas suivants :

1. la résistance de la section (éléments de cadres contreventés seulement) où $\beta = 0,6$, auquel cas :
 - i. C_r doit être calculé par :

$$C_r = \frac{\phi A F_y}{(1 + \lambda^{2n})^{1/n}} \quad (6.4)$$

en considérant $\lambda = 0$, ce qui donne $C_r = \phi A F_y$ avec ϕ , le coefficient de tenue des matériaux (acier) spécifié comme étant égal à 0,9 pour la flexion et la

compression. Le paramètre n de (6.4) définit chacune des trois courbes de comportement des pièces en compression pure adoptées par les spécifications canadiennes **CSA/CAN S16-09**. La valeur de n pour la courbe 1 est 2,24, pour la courbe 2 est 1,34 et pour la courbe 3 est 1,0.

- ii. M_r qui est la résistance pondérée d'un élément soumis à la flexion uniaxiale selon son axe fort et dont la semelle comprimée est retenue latéralement de façon continue et efficace, ou d'un élément qui ne présente pas une tendance au déversement. Pour des sections de classes 1 et 2, M_r est donné par :

$$M_r = \phi Z_x F_y = \phi M_p \quad (6.5)$$

et pour les sections de la classe 3 :

$$M_r = \phi S_x F_y = \phi M_y \quad (6.6)$$

- iii. U_{1x} et U_{1y} tiennent compte des effets du second ordre dus à la déformation de l'élément entre ses extrémités avec :

$$U_1^{CSA} = \frac{\omega_1^{CSA}}{1 - (P_f / P_{e(L)})} \geq 1,0 \quad (6.7)$$

avec ω_1^{CSA} , qui est le facteur du moment uniforme équivalent pour une membrure sollicitée par des moments aux extrémités est donné par :

- pour les éléments non soumis à des charges transversales entre les appuis : $\omega_1^{CSA} = 0,6 - 0,4\kappa \geq 0,4$
- pour les éléments soumis à une charge répartie ou à une série de charges s'exerçant en plusieurs points entre les appuis : $\omega_1^{CSA} = 1,0$

- pour les éléments soumis à un moment ou à une charge concentrée entre les appuis : $\omega_1^{CSA} = 0,85$

Ce facteur convertit le moment maximal d'extrémité $M_{f(fort)}$ associé avec une certaine distribution du moment sur la longueur non supportée, à un moment uniforme réduit d'une valeur égale à $\omega_1^{CSA} M_{f(fort)}$. Le concept du moment uniforme équivalent est basé sur les travaux de (Austin, 1961; Ketter, 1961). Le terme κ est le rapport entre le moment pondéré le plus faible et le moment pondéré le plus fort aux extrémités de l'élément; ce rapport est positif dans le cas d'une courbure double et négatif dans le cas d'une courbure simple:

$$\kappa = \frac{M_{f(faible)}}{M_{f(fort)}} \quad (6.8)$$

2. la résistance globale de l'élément, auquel cas :
 - i. C_r est calculée à l'aide de (6.4) en considérant $K = 1$, sauf que pour la flexion uniaxiale, C_r doit être selon l'axe de flexion.
 - ii. M_r est la résistance pondérée d'un élément soumis à la flexion uniaxiale selon son axe fort et selon la classe de section appropriée et dont la semelle comprimée est retenue latéralement de façon continue et efficace, ou d'un élément qui ne présente pas une tendance au déversement (équations (6.5) et (6.6))
 - iii. U_{1x} et U_{1y} doivent avoir une valeur de 1,0 pour les éléments des cadres non contreventés. U_{1x} et U_{1y} doivent être déterminés selon (6.7), pour les éléments des cadres contreventés
3. la résistance au flambement en torsion-flexion, s'il y a lieu, auquel cas :

- i. C_r est calculée à l'aide de (6.4), en considérant le flambement en flexion par rapport à l'axe faible de la pièce ou le flambement en flexion-torsion. Le coefficient d'élancement K_y est choisi en fonction des conditions de retenue aux extrémités de la pièce $K_y \leq 1,0$
- ii. Pour les sections de classes 1 et 2 à symétrie double, à l'exception des sections HSS carrées et circulaires, M_{rx} est calculée à l'aide de :

$$M_r = 1,15\phi M_p \left[1 - \frac{0,28M_p}{M_u} \right] \leq \phi M_p \text{ si } M_u > 0,67M_p$$

$$M_r = \phi M_u \text{ avec } M_u = \frac{\omega_2 \pi}{L} \sqrt{EI_y GJ + \left(\frac{\pi E}{L} \right)^2 I_y C_w} \text{ si } M_u \leq 0,67M_p \quad (6.9)$$

avec

$$\omega_2 = \frac{4M_{\max}}{\sqrt{M_{\max}^2 + 4M_a^2 + 7M_b^2 + 4M_c^2}} \leq 2,5 \quad (6.10)$$

et où :

C_w : constante de torsion de gauchissement, égale à 0 pour les sections tubulaires rectangulaires

J : constante de torsion de St-Venant

L : longueur du segment non contreventée de la poutre

M_{\max} : moment de flexion pondéré maximal de la longueur non contreventée

M_a : moment de flexion pondéré au quart de la longueur non contreventée

M_b : moment de flexion pondéré au centre de la longueur non contreventée

M_c : moment de flexion pondéré au trois quarts de la longueur non contreventée

ω_2 : coefficient tenant compte de la majoration du moment résistant d'une section de poutre sans appui latéral soumise à un gradient de moment. Si la variation du moment de flexion est linéaire sur la longueur non contreventée, le coefficient du moment équivalent ω_2 peut être égal à $1,75 + 1,05\kappa + 0,3\kappa^2 \leq 2,5$.

Dans le cas de segments de poutres non contreventés supportant des charges appliquées au-dessus du centre de cisaillement entre les points de contreventement, l'effet déstabilisateur des charges doit être pris en compte si le mécanisme d'application des charges n'offre pas de retenue latérale ni de retenue en rotation.

Dans le calcul de P_f et M_f , les spécifications **CSA-S16-09** exigent, que pour les combinaisons de charges de gravité, les moments produits par le déplacement latéral, obtenus d'une analyse élastique de premier ordre, doivent être plus grands ou égaux aux moments produits par les charges latérales fictives égales à 0,005 fois la charge totale pondérée de gravité qui sollicite l'étage. Cela implique donc que si les moments causés par le déplacement latéral sous l'application des charges de gravité sont plus petits que ceux causés par l'application des charges latérales fictives à chaque niveau, les effets de ces charges fictives doivent être inclus dans le calcul des effets des charges de gravité. Ces charges latérales fictives sont équivalentes à un défaut de verticalité uniforme de 0,005 fois la hauteur. Dans le cas où une analyse directe élastique du second ordre est employée, une interprétation conservatrice de ces exigences sera d'appliquer ces charges fictives dans les analyses des effets des charges de gravité suivant la direction où le cadre se déplace sous l'effet de ces dernières. (Kennedy, Kitipornchai, Hancock, & Bradford, 1995) avait observé, qu'en général, ces charges fictives doivent être appliquées avec toutes les combinaisons des charges, que ce soit pour les charges de gravité ou pour les charges de gravité et les charges latérales et ce, afin de transformer un problème de bifurcation en flambement en un problème de résistance en flexion.

6.2.2 Équations d'interaction des spécifications **AISC LRFD**

Les courbes d'interaction des poteaux-poutres, des spécifications **AISC LRFD**, peuvent être exprimées pour la flexion, soit selon l'axe fort ou encore, selon l'axe faible sous la forme :

$$\frac{P_r}{P_c} + \frac{9}{8} \left(\frac{M_{rx}}{M_{cx}} + \frac{M_{ry}}{M_{cy}} \right) \leq 1,0 \quad \text{pour} \quad \frac{P_r}{P_c} \geq 0,2 \quad (6.11)$$

$$\frac{P_r}{2P_c} + \left(\frac{M_{rx}}{M_{cx}} + \frac{M_{ry}}{M_{cy}} \right) \leq 1,0 \quad \text{pour} \quad \frac{P_r}{P_c} < 0,2$$

où P_r est la résistance axiale requise de compression (provenant d'une analyse élastique de la structure) et P_c , la résistance de la membrure en compression axiale, $P_c = \phi_c P_n$ avec $P_n = F_{cr} A_g$, la résistance de la membrure en compression axiale et ϕ_c , le facteur de la résistance en compression = 0,90. La contrainte critique du flambement en flexion F_{cr} est donnée par :

$$F_{cr} = \left[0,658 \frac{F_y}{F_e} \right] F_y \quad \text{pour} \quad \frac{KL}{r} \leq 4,71 \sqrt{\frac{E}{F_y}} \quad (\text{ou } F_e \geq 0,44F_y)$$

$$F_{cr} = 0,877 F_e \quad \text{pour} \quad \frac{KL}{r} > 4,71 \sqrt{\frac{E}{F_y}} \quad (\text{ou } F_e < 0,44F_y) \quad (6.12)$$

où L est la longueur non contreventée de la membrure, r , le rayon de giration de la section transversale et K , le facteur de la longueur effective dans le plan de la flexion, déterminé à l'aide d'une analyse du flambement ou pris égal à 1,0 à condition que toutes les combinaisons des charges incluent des charges latérales additionnelles (approche des charges latérales fictives).

M_r est le moment maximal pondéré obtenu d'une analyse élastique du second ordre et $M_c = \phi_b M_n$ avec M_n , la capacité nominale de la membrure en flexion en l'absence de charges axiales et ϕ_b , le facteur de résistance pour la flexion égal à 0,9. Pour les sections compactes doublement symétriques (aucune possibilité de flambement local des parois constituant la section), la capacité nominale est égale à la plus petite valeur entre la capacité plastique en flexion et le moment de flexion qui produit le déversement :

1. Plastification

$$M_n = M_p = F_y Z_x \quad (6.13)$$

où F_y et Z_x représentent respectivement la limite élastique minimale de l'acier et le module plastique de la section selon l'axe fort de la section.

2. Déversement

$L_b \leq L_p$: le déversement ne gouverne pas la résistance en flexion

$$L_p < L_b \leq L_r : M_n = C_b \left[M_p - (M_p - 0,7F_y S_x) \left(\frac{L_b - L_p}{L_r - L_p} \right) \right] \leq M_p \quad (6.14)$$

$$L_b > L_r : M_n = F_{cr} S_x \leq M_p$$

où L_b est la longueur entre les points retenus contre le déplacement latéral de l'aile en compression ou les points de retenue contre la rotation de la section et :

$$F_{cr} = \frac{C_b \pi^2 E}{\left(\frac{L_b}{t_{ts}} \right)^2} \sqrt{1 + 0,078 \frac{Jc}{S_x h_0} \left(\frac{L_b}{t_{ts}} \right)^2} \quad (6.15)$$

où E est le module d'élasticité de l'acier, J est la constante de torsion, S_x est le module élastique de la section selon l'axe fort de la section et

$$C_b = \frac{12,5M_{\max}}{2,5M_{\max} + 3M_A + 4M_B + 3M_C} R_m \leq 3,0 \quad (6.16)$$

Les limites des longueurs L_p et L_r sont respectivement :

$$L_p = 1,76r_y \sqrt{\frac{E}{F_y}}$$

$$L_r = 1,95r_{ts} \frac{E}{0,7F_y} \sqrt{\frac{Jc}{S_x h_0}} \sqrt{1 + \sqrt{1 + 6,76 \left(\frac{0,7F_y}{E} \frac{S_x h_0}{Jc} \right)^2}} \quad (6.17)$$

avec $c = 1$, $r_{ts}^2 = \frac{\sqrt{I_y C_w}}{S_x}$ et h_0 , la distance entre les centres de gravité des semelles.

Bien que la configuration des courbes d'interaction de la résistance puisse être différente dans le cas de la flexion uniaxiale suivant l'axe fort et l'axe faible, les spécifications **AISC LRFD** ne font pas de distinction entre les deux cas. Cette simplification est basée sur le fait que pour les sections en I doublement symétriques avec des valeurs de L/r supérieures à environ 40, les effets combinés de la plasticité et de la stabilité donnent des courbes d'interaction de résistance presque similaires à celles pouvant être obtenues d'une analyse inélastique du second ordre (zone plastique) indépendamment de l'axe selon lequel la flexion est produite (Le Messurier, 1997). Le développement des équations d'interaction **AISC LRFD** est basé, en partie, sur un paramétrage exhaustif des solutions obtenues des analyses qualifiées d'exactes (Liew & Chen, 1997; Liew, White, & Chen, 1991).

6.2.3 Équations d'interaction des spécifications d'Eurocode 3

Pour les sections standards laminées en I ou H, définies comme classe 1 ou 2, **Eurocode 3 (ENV 1993)** spécifie la résistance de la section pour la flexion suivant l'axe fort comme :

$$\frac{P'}{\phi' P_y} + 0,9 \frac{M'}{\phi' M_{px}} \leq 1, \quad \frac{M'}{\phi' M_{px}} \leq 1 \quad (6.18)$$

et pour la flexion suivant l'axe faible :

$$\begin{aligned} \frac{M'_y}{\phi' M_{py}} &\leq 1,56 \left(1 - \frac{P'}{\phi' P_y} \right) \left(\frac{P'}{\phi' P_y} + 0,6 \right) \text{ pour } \frac{P'}{\phi' P_y} > 0,2 \\ \frac{M'_y}{\phi' M_{py}} &\leq 1,0 \text{ pour } \frac{P'}{\phi' P_y} \leq 0,2 \end{aligned} \quad (6.19)$$

et où P' , M'_x et M'_y sont la force axiale et les moments maximum élastiques du second ordre suivant l'axe fort et l'axe faible respectivement, incluant les effets des imperfections géométriques équivalentes. Ces imperfections géométriques peuvent être appliquées comme des charges latérales fictives aux niveaux des planchers et elles sont supposées tenir compte des effets réels des défauts de verticalité et de rectitude, des excentricités mineures associées aux connexions, des contraintes résiduelles, de la distribution et la propagation de la plasticité sur les forces et les déflexions de la structure au point qu'un état limite soit atteint dans la membrure la plus critique du système structural. Le concepteur est tenu d'inclure ces imperfections équivalentes ou des charges fictives dans l'analyse, et ce, pour toutes les combinaisons des charges. Les magnitudes des charges fictives sont spécifiées dans **Eurocode 3** en fonction du nombre d'étages et des poteaux compris dans le plan du cadre, avec une valeur limite maximale égale à $0,005\Sigma P$ (ΣP représente la totalité des charges de gravité à l'étage considéré). Les termes ϕ' dans (6.18) et (6.19) sont les facteurs de la résistance effective, égaux à l'inverse des facteurs de sécurité partiels d'**Eurocode 3** et qui sont les mêmes pour la flexion et la compression axiale ($\phi' = 0,9 = 1/1,1$). Les équations (6.18) et (6.19) sont des équations simplifiées applicables à toutes les sections standards laminées en I ou en H . Des équations alternatives plus précises sont spécifiées dans **Eurocode 3**, mais qui obligent le concepteur à introduire les caractéristiques géométriques des sections en I ou en H . Toutefois, **Eurocode 3** permet aussi des règles plus simples que celles représentées dans (6.18) et (6.19), et ce, en spécifiant que pour le cas de la flexion suivant l'axe fort des sections ouvertes, si la force axiale ne dépasse pas la moitié de la résistance axiale plastique de l'âme ou un quart de la résistance plastique de la section, l'interaction de la résistance plastique entre la flexion et la force axiale peut être négligée. De façon similaire, pour la flexion suivant l'axe faible des sections ouvertes, les effets

de l'interaction peuvent être négligés si la force axiale ne dépasse pas la résistance axiale plastique de l'âme. La justification de ces règles est que l'érouissage contrebalance les effets de la force axiale en autant que la force axiale ne dépasse pas les limites mentionnées précédemment (**ENV 1993**). L'équation de la résistance dans le plan (applicable pour les sections de classe 1 et 2) a la même forme pour la flexion suivant l'axe fort et l'axe faible. Pour la flexion suivant l'axe fort est :

$$\frac{P'}{\phi' P_{n(KL \leq L)_x}} + U_{1x}^{EC3} \frac{M'_x}{\phi' M_{px}} \leq 1 \quad (6.20)$$

où $P_{n(KL \leq L)_x}$ est la capacité associée à la rupture suivant l'axe FORT de la flexion de la membrure agissant comme poteau et ce, basée sur la longueur effective d'un système contreventé (actuellement **Eurocode 3** exige que les valeurs minimales de $P_{n(KL \leq L)_x}$ et de $P_{n(KL \leq L)_y}$ doivent être utilisées dans (6.20)). U_{1x}^{EC3} est l'équivalent dans **Eurocode 3** du terme U_{1x}^{CSA} dans les spécifications canadiennes. Les deux termes qui affectent, le moment M'_x dans **Eurocode 3** et M_{fx} dans **CSA-S16-09** pour tenir compte des effets du second ordre dus à la déformation de l'élément entre ses extrémités est donné par :

$$U_{1x}^{EC3} = 1 - \mu_x \frac{P'}{P_{n(KL \leq L)_x}} \leq 1,5 \quad (6.21)$$

où

$$\mu_x = \lambda_{c(KL \leq L)_x} \left(\frac{2}{\omega_{1x}^{EC3}} - 4 \right) + \left(\frac{Z_x}{S_x} - 1 \right) \leq 0,9 \quad (6.22)$$

et

$$\omega_{1x}^{EC3} = \frac{1}{1,8 + 0,7\kappa_x} \quad (6.23)$$

est un coefficient du moment uniforme équivalent qui donne approximativement les mêmes valeurs que ω_{1x}^{CSA} . Les termes Z_x et S_x sont les modules plastique et élastique de la section, et ce, pour la flexion suivant l'axe fort tels que :

$$\lambda_{c(KL \leq L)_x} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{KL}{r} \right)_x \sqrt{\frac{F_y}{E}} \quad \text{avec } KL \leq L \quad (6.24)$$

Pour la résistance au déversement d'une membrure de classe 1 ou 2 fléchie suivant son axe fort, **Eurocode 3** spécifie l'équation :

$$\frac{P'}{\phi' P_{n(KL \leq L)_y}} + U_{1LT}^{EC3} \frac{M'_x}{\phi' M_{nx}} \leq 1 \quad (6.25)$$

où

$$U_{1LT}^{EC3} = 1 - \mu_{LT} \frac{P'}{\phi' P_{n(KL \leq L)_y}} \leq 1 \quad (6.26)$$

et

$$\mu_{LT} = 0,15 \left(\frac{\lambda_{c(KL \leq L)_y}}{\omega_{1LT}^{EC3}} - 1 \right) \leq 0,9 \quad (6.27)$$

Le terme ω_{1LT}^{EC3} a la même forme que ω_{1x}^{EC3} , mais les moments d'extrémités sont les valeurs aux endroits des supports dans la direction de y (hors du plan), tandis que les moments

d'extrémités utilisés dans l'évaluation de $\omega_{1,x}^{EC3}$ sont ceux aux extrémités de la longueur non supportée L_x .

6.2.4 Équations d'interaction des spécifications australienne *AS4100*

L'équation de la résistance de la section suivant l'axe fort présentée dans les spécifications australiennes, est identique à celle de **CSA-S16.1** à l'exception de la force axiale et des moments appliquée qui sont calculés différemment (ces forces sont désignées par P^* et M_x^* et celles-ci sont équivalentes à P_f et M_{fx} dans les équations de **CSA**) tels que :

$$\frac{P^*}{\phi P_y} + \frac{1}{1,18} \frac{M_x^*}{\phi M_{px}} \leq 1,0, \quad \frac{M_x^*}{\phi M_{px}} \leq 1,0 \quad (6.28)$$

L'équation de la résistance de la section suivant l'axe faible est :

$$\left(\frac{P^*}{\phi P_y} \right)^2 + \frac{1}{1,19} \frac{M_y^*}{\phi (1,5 S_y F_y)} \leq 1,0, \quad \frac{M_y^*}{\phi (1,5 S_y F_y)} \leq 1,0 \quad (6.29)$$

Pour une section en I, le terme $1,5 S_y F$ est utilisé comme étant la résistance à la flexion suivant l'axe faible; cette valeur étant une valeur limite de la résistance en flexion. Le facteur de la résistance ϕ est égal à 0,9 pour la flexion et la compression axiale (similaire à **CSA-S16.1**). Les termes P^* , M_x^* et M_y^* dans (6.28) et (6.29) sont la force axiale et les moments maximum obtenus d'une analyse élastique du second ordre, incluant les effets d'une non-verticalité minimale égale à $0,002L$ pour les combinaisons des charges de gravité dans les structures à étages. Toutefois, la norme **AS4100**

n'exige pas de considérer ces imperfections pour les structures à un seul étage ou pour les combinaisons des charges impliquant des charges latérales. Pour les cas de combinaisons de charges de gravité dans les structures à étages, la norme **AS4100** exige que des charges latérales fictives, chacune égale à 0,002 fois la charge totale de gravité à l'étage, soient appliquées au niveau de chaque étage pour prendre en considération les effets des défauts de verticalité. La norme **AS4100** fournit une équation pour la résistance dans le plan du chargement des membrures composées de sections compactes doublement symétriques pour le cas de la flexion suivant l'axe fort telle que :

$$\frac{M^*}{\phi M_{px}} \leq \left[1 - \left(\frac{1 + \kappa_x}{2} \right)^3 \right] \left(1 - \frac{P^*}{\phi P_{n(L)x}} \right) + 1,18 \left(\frac{1 + \kappa_x}{2} \right)^3 \sqrt{\left(1 - \frac{P^*}{4P_{n(L)x}} \right)} \quad (6.30)$$

avec $\frac{M^*}{\phi M_{px}} \leq 1$, $1 - \frac{P^*}{\phi P_{n(L)x}} \leq 1$. La charge axiale limite définie par $\frac{P^*}{\phi P_{n(L)x}} \leq 1$, qui ne faisait pas partie de la version originale de la norme publiée en 1990, a été incluse dans l'amendement aux standards en août 1992. Elle permet d'assurer que la courbe d'interaction décrite par (6.30), qui est définie en utilisant le terme de la résistance axiale $P_{n(L)x}$ basée sur la longueur réelle de la membrure, soit limitée par la résistance du poteau $\phi P_{n(L)x}$, basée sur la longueur effective KL . L'équation (6.30) est applicable aussi pour la flexion suivant l'axe faible. La norme **AS4100** considère la stabilité hors du plan (déversement) des membrures composées de sections compactes doublement symétriques en forme de I en utilisant l'expression :

$$\frac{U_{1LT}^{AS4100} M_x^*}{\phi M_{nox}} = \sqrt{\left(1 - \frac{P^*}{\phi P_{n(L)y}} \right) \left(1 - \frac{P^*}{\phi P_{0z}} \right)} \quad (6.31)$$

où M_{nox} est la résistance de la membrure sollicitée par un moment uniforme et une force axiale nulle. U_{1LT}^{AS4100} est l'équivalent de U_{1LT}^{EC3} , mais applicable aux poteaux-poutres (les deux

termes convertissent le moment M'_x dans **Eurocode 3** et M_x^* dans **AS4100** à un effet de moment qui peut être utilisé dans les équations de la résistance au déversement, mais U_{1LT}^{AS4100} inclut aussi un ajustement basé sur l'intensité de la force axiale). Ce terme est :

$$U_{1LT}^{AS4100} = \left(\frac{1 - \kappa_x}{2} \right) + \left(\frac{1 - \kappa_x}{2} \right)^3 \left(0,4 - 0,23 \frac{P^*}{\phi P_{n(L)y}} \right) \quad (6.32)$$

où κ_x est le ratio des moments élastiques du second ordre aux supports latéraux dans la direction y . Le terme P_{oz} dans (6.31) est la capacité maximale de la section à résister au flambement-torsion-flexion tel que :

$$P_{oz} = \frac{(GJ + \pi^2 EC_w L^2)}{(I_x + I_y) / A} \quad (6.33)$$

où J est le moment d'inertie à la torsion, C_w est la constante de gauchissement, A est l'aire de la section, G est le module d'élasticité au cisaillement, I_x et I_y , les moments d'inertie de la section suivant l'axe fort et l'axe faible respectivement.

6.3 COMPARAISON DES PHILOSOPHIES ADOPTÉES DANS LES DIFFÉRENTES SPÉCIFICATIONS

À partir du Tableau 6-1, on peut constater certaines grandes différences entre les spécifications **AISC LRFD** et les autres spécifications. Ces différences sont :

1. Les spécifications **LRFD** n'utilisent qu'un seul format d'équation d'interaction pour évaluer tous les modes possibles de rupture, à savoir la plastification et le déversement.

Ceci représente une simplification utile qui paraît ne pas affecter, de façon significative, l'exactitude des prédictions de la résistance par rapport aux solutions, dites exactes et qui sont basées sur l'approche des zones plastiques. En réalité, le fondement principal des équations d'interaction de la résistance dans les spécifications **LRFD** est que les équations d'interaction ne doivent pas, nécessairement, considérer la résistance et la stabilité séparément étant donné qu'en général, tous les poteaux de longueurs pratiques peuvent atteindre la ruine pour une certaine combinaison de flexion inélastique et des effets de la stabilité. Toutefois, cette simplification paraît être conservatrice dans certains cas pour la prédiction de la résistance hors du plan. L'utilisation d'une équation d'interaction séparée pour prédire la résistance hors du plan, comme c'est le cas dans les autres spécifications, fournit un mécanisme pour mieux représenter cette résistance, étant donné que l'interaction réelle de la résistance hors du plan n'a pas nécessairement la même forme que celle pour la résistance dans le plan. Les spécifications canadiennes, européennes et australiennes emploient des courbes d'interaction séparées pour prédire la résistance de la section ainsi que la résistance de la membrure dans le plan et hors du plan (résistance au déversement).

2. L'adoption de l'approche basée sur l'utilisation des charges latérales fictives dans les spécifications **LRFD** diffère des trois autres spécifications dans la façon de considérer les imperfections géométriques et les contraintes résiduelles initiales dans l'évaluation de la résistance. Les équations (6.11) provenant des spécifications **LRFD** tiennent compte de ces effets sur la résistance dans le plan, et ce, dans le calcul de $P_{n(KL)}$. Les effets de la continuité de la membrure considérée et l'ensemble de la structure, sont inclus dans le terme $P_{n(KL)}$, et ce à travers le calcul des charges de flambement et les longueurs effectives correspondantes. Les effets des imperfections géométriques et des contraintes résiduelles sont inclus implicitement dans le calcul de la résistance de la membrure hors du plan M_n pour le cas où le déversement inélastique est celui qui

gouverne. Les autres spécifications sont similaires aux spécifications **LRFD** dans la considération des effets des contraintes résiduelles et des imperfections géométriques sur la résistance de la membrure hors du plan M_{nx} ou M_{nox} . Pour le déversement élastique, **Eurocode 3** et **AS4100** réduisent la résistance de la membrure pour considérer les effets de ces imperfections, tandis que **CSA-S16-09** et **AISC LRFD** ne le font pas. Toutefois, ces différentes approches prédisent que $M_{nx} = M_{px}$ dans plusieurs des cas typiques des poteaux-poutres. À noter que dans ces approches, les effets des contraintes résiduelles et des imperfections géométriques sur la résistance de la membrure dans le plan sont considérés à travers les résistances des poteaux $P_{n(L)}$ ou $P_{n(KL \leq L)}$ ou à travers l'application des charges latérales fictives. L'interprétation la plus exacte de l'approche des charges latérales fictives dans les analyses élastiques et le dimensionnement est que les charges latérales fictives, employées en conjonction avec une analyse élastique produisent des augmentations des forces et déflexions qui peuvent refléter les forces et déflexions réelles dans le plan du chargement, au point qu'un état limite soit atteint dans la membrure la plus critique du système structural. De plus, si des vérifications séparées de la résistance de la section et de la membrure sont considérées, il peut être statué que le but des vérifications de la membrure est : 1) de s'assurer contre un mode de rupture isolé dans le plan pour des membrures agissant comme poteaux-poutres pour lesquels le gradient du moment est petit ($\kappa \leq 0$); 2) de considérer les effets additionnels de la stabilité pour les membrures très élancées qui peuvent voir leurs résistances réduites comparé aux résistances obtenues de la section transversale. Ces interprétations sont équivalentes à la logique et la philosophie derrière les spécifications **Eurocode 3**.

3. Pour les membrures fléchies en double courbure suivant l'axe fort ($\kappa > 0$), avec un petit paramètre de l'élancement L/r soit petit ($L/r \leq 40$), la résistance de la section transversale (incluant les effets des charges fictives) représente avec exactitude la

résistance obtenue d'une analyse des zones plastiques (Liew, White, & Chen, 1994). Toutefois, pour ces cas, des effets additionnels de la stabilité dans le plan, sur la résistance de la membrure, doivent être considérés. Dans l'approche basée sur les charges fictives, les spécifications **LRFD** vérifient la résistance de la section transversale et la résistance de la membrure dans le plan par une seule courbe telle que (M. J. Clarke & Bridge, 1995) :

$$\begin{aligned} \frac{P^{**}}{\phi_c P_{n(L)}} + \frac{9}{8} \frac{M^{**}}{\phi_b M_n} &\leq 1, \text{ pour } \frac{P^{**}}{\phi_c P_{n(KL)}} \geq 0,2 \\ \frac{P_u}{2\phi_c P_{n(KL)}} + \frac{M_u}{M_n} &\leq 1, \text{ pour } \frac{P_u}{\phi_c P_{n(KL)}} < 0,2 \end{aligned} \quad (6.34)$$

où $P_{n(L)}$ est la résistance axiale minimale de la membrure agissant comme un poteau chargé concentriquement et basée sur la longueur réelle non supportée pour la flexion suivant les axes forts et faibles de la section. Donc, $P_{n(L)} = \min(P_{n(L)x}, P_{n(L)y})$. Aussi P^{**} et M^{**} sont respectivement la force axiale et le moment maximal élastique du second ordre incluant les effets des charges fictives. La possibilité d'un mode de rupture isolé dans le plan du chargement est vérifiée de façon conservatrice par le calcul de la capacité du poteau $P_{n(L)}$, basée sur la longueur réelle non supportée dans le plan du cadre.

4. Pour des cadres simples non redondants, les équations d'interaction de **LRFD** sont paramétrées de façon à ce que leurs prédictions basées sur une analyse élastique du second ordre ne soient jamais supérieures à 5 % comparé aux solutions exactes (zones plastiques incluant les imperfections géométriques et les contraintes résiduelles).
5. Les charges latérales fictives sont utilisées avec les trois équations d'interaction (résistance de la section transversale, la résistance de la membrure dans le plan et la résistance de la membrure hors du plan) dans les spécifications canadiennes, européennes et australiennes. Toutefois, des différences majeures existent entre ces

trois spécifications concernant les magnitudes des charges fictives et si ces dernières doivent être appliquées dans toutes les combinaisons des charges ou seulement aux combinaisons impliquant des charges de gravité. **Eurocode 3** permet l'utilisation de facteurs de la longueur effective K inférieurs à l'unité dans les vérifications de la résistance de la membrure faisant partie des cadres contreventés, tandis que les autres spécifications ne le permettent pas.

6. Toutes les procédures et les approches discutées ont des avantages et aussi des limitations. Il n'y a pas une approche philosophique particulière ou un ensemble de formules d'interaction donnée par ces spécifications qui peuvent être qualifiés de supérieurs dans tous les aspects. Toutefois, en comparant les avantages et les limitations des ces différentes approches, des changements potentiels peuvent avoir lieu dans ces méthodes, ce qui pourra donner comme résultat d'améliorer leurs précisions relatives au comportement physique et la simplification de leurs applications dans la conception.

6.4 HYPOTHÈSES DE BASE DES ÉQUATIONS D'INTERACTION POUR LES POTEaux-POUTRES

Ces équations sont basées sur les hypothèses suivantes:

1. Une membrure supportée latéralement peut atteindre la rupture lorsque sa résistance à la force axiale et à la flexion est atteinte.
2. Une membrure non supportée latéralement peut voir sa résistance limitée par le flambement latéral (déversement) où la pièce atteint la ruine par une combinaison de flambement par rapport à l'axe faible et la torsion.
3. Une membrure relativement courte peut atteindre sa totale résistance, qu'elle soit supportée latéralement ou non supportée latéralement.
4. Lorsque la membrure est sollicitée par une force axiale de compression, sa résistance est fonction de son élancement.

5. Les membrures fléchies suivant l'axe faible ne présentent pas un comportement hors du plan et elles peuvent atteindre la pleine capacité en flexion.
6. Un moment de flexion constant ou uniforme présente le cas le plus sévère pour la résistance dans le plan de la membrure. Une autre distribution des moments peut être remplacée par un diagramme uniforme équivalent d'une intensité maximale inférieure à celle du diagramme appliqué. Cette uniformisation des moments produit le même effet pour la résistance en plan.
7. Tel que mentionné auparavant, les moments sont amplifiés dus à la présence des forces axiales (effets $P-\delta$) et cette amplification des moments est maximale lorsque le moment présente le cas le plus sévère, à savoir un diagramme uniforme.

CHAPITRE 7

FLAMBEMENT EN FLEXION DES POTEAUX ET CADRES

7.1 GÉNÉRALITÉS

Le flambement simple affecte les pièces sollicitées en compression concentrique. Son étude est due à *Euler*. La théorie d'*Euler* est fondée sur les hypothèses suivantes:

- La membrure est droite et articulée à ses extrémités.
- La membrure est sollicitée par un effort normal de compression centrée.
- Les dimensions transversales sont faibles en par rapport à celle de la longueur.
- Les moments d'inertie de la section transversale est maximum par rapport à l'axe fort (y) et minimum par rapport à l'axe faible (z) (voir Figure 7-1).

Considérons une membrure AB soumise à l'action d'une force de compression P_c agissant selon l'axe longitudinal de la membrure. À une certaine magnitude de cette force de compression, l'état d'équilibre rectiligne initial évolue vers un état curviligne fléchi (Figure 7-1). Si la membrure présente une rectitude presque parfaite, la force étant initialement bien centrée, induit une flèche d'abord insensible et qui va s'accroître brusquement, entraînant ainsi la ruine de la pièce. C'est le phénomène du flambement !

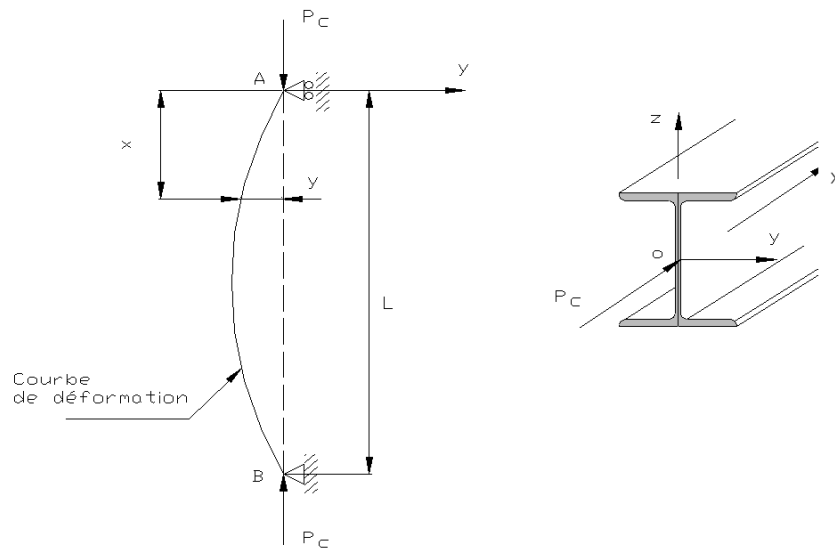


Figure 7-1 : Membrane droite articulées aux extrémités et chargée axialement

7.2 THÉORIE D'EULER

L'expérience montre que le phénomène du flambement (bifurcation) se produit pour des valeurs voisines d'une charge bien définie appelée la charge critique du flambement. Cette charge est déterminée pour les cas types le plus courants à partir de l'équation différentielle de la déformée.

7.2.1 Hypothèses

La membrure AB parfaitement droite avant déformation, est articulée aux deux extrémités et chargée de façon concentrique suivant son axe. Les deux extrémités de la membrure sont empêchées de se déplacer, l'une par rapport à l'autre. Désignons par P_c la charge qui s'oppose à la réaction de la membrure initialement fléchie et la maintient en équilibre. Soit, y le déplacement de la section d'abscisse x . À une distance x , le moment de flexion M produit par la charge agissant sur la membrure déformée est donné par :

$$M = P_c y \quad (7.1)$$

et l'équation de la déformée donnée par :

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -P_c y \quad (7.2)$$

En posant :

$$k^2 = P_c / EI \quad (7.3)$$

(7.2) devient :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = 0 \quad (7.4)$$

L'équation différentielle du deuxième ordre (7.4) a une solution générale de la forme :

$$y = A \cos kx + B \sin kx \quad (7.5)$$

La résolution de (7.5) est obtenue à partir des conditions aux limites : $y(0) = y(L) = 0$. Donc, $A = 0$ et $B \sin kL = 0$. Puisque $B \neq 0$, il faut donc que $\sin kL = 0$ avec $k = \sqrt{P_c / EI} = n\pi / L$. Cependant, d'après la forme expérimentale de la déformée, il faut que $n = 1$ d'où : $k = \pi / L$ et :

$$y = B \sin \frac{\pi x}{L} \quad (7.6)$$

Le coefficient B représente l'amplitude de la déformée à mi-longueur de la membrure. En réalité, l'amplitude de cette configuration déformée ne peut pas être déterminée avant que le flambement aura lieu (tant que l'équilibre peut être maintenu). Au moment du flambement, on obtient de (7.3) :

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (7.7)$$

La charge P_c est donc indépendante de l'amplitude de cette flèche. D'après le principe d'action-réaction, les efforts transmis de la membrure vers les appuis a la même valeur; c'est la réaction P_c due à la déformation élastique. Trois cas peuvent se présenter :

$P < P_c$: la membrure étant fléchie, se redresse et la flèche disparaît complètement (stabilité).

$P = P_c$: la membrure demeure fléchie. Un faible effort latéral suffit à modifier la flèche (équilibre neutre).

$P > P_c$: la flèche augmente (instabilité qui peut entraîner la ruine).

À noter que le développement précédent est basé sur la théorie des petits déplacements dans un cadre linéaire. L'équation d'Euler peut aussi être utilisée lorsque les conditions de retenue aux extrémités de la pièce comprimée sont différentes de celles du modèle de base. Il est possible de tenir compte de cet effet dans l'équation de base en modifiant la longueur L de la pièce. Cette approche considérée comme pratique nous conduit au concept de la longueur effective, qui reste utilisé jusqu'à présent dans certaines spécifications techniques qui régissent le calcul et le dimensionnement des structures d'acier. La longueur effective KL est définie comme étant la

longueur d'une pièce articulée équivalente qui donne la même charge critique que la pièce dont les extrémités sont soumises à des conditions de fixité différentes.

Considérons, comme exemple, le cas illustré à la Figure 7-2 qui consiste en une membrure sollicitée en compression pure, encastree à une extrémité et articulée à l'autre. Les extrémités de la membrure sont empêchées de se déplacer l'une par rapport à l'autre.

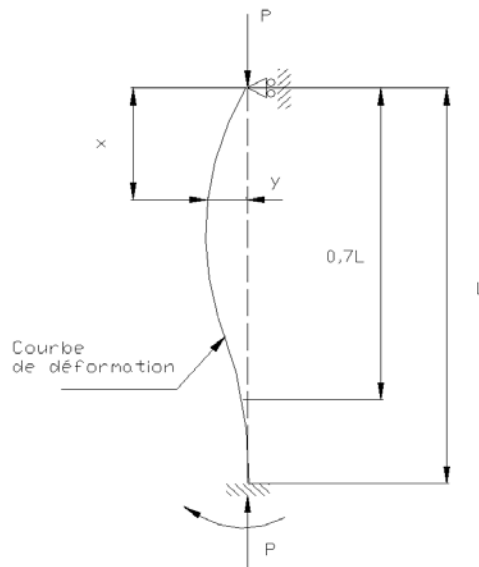


Figure 7-2 : Membrure droite articulée à une extrémité et encastree à l'autre extrémité

Le moment de flexion de la section d'abscisse x, s'écrit :

$$M = Py - \frac{M_0 x}{L} \quad (7.8)$$

Posons :

$$\begin{aligned}
 k^2 &= P / EI \\
 -\frac{M}{EI} &= -\frac{[Py - M_0 x / L]}{EI} \\
 \frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y &= \frac{M_0 x}{EIL}
 \end{aligned} \tag{7.9}$$

La solution de l'équation différentielle (7.9) est donnée par :

$$y = A \sin kx + B \cos kx + \frac{M_0 x}{PL} \tag{7.10}$$

Les constantes A et B sont obtenues en considérant les conditions aux limites : $y(0) = y(L) = 0$ et $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=L} = 0$. Avec les deux premières conditions, on obtient : $B = 0$ et $A = \frac{-M_0}{P \sin kL}$. Donc, l'équation de la déformée peut s'exprimer telle que :

$$y = \frac{M_0}{P} \left(\frac{x}{L} - \frac{\sin kx}{\sin kL} \right) \tag{7.11}$$

Avec la troisième condition aux limites, on obtient $\tan kL = kL$, ce qui se vérifie pour $kL = 4,4934$. Si on remplace k par sa valeur, on obtient :

$$\begin{aligned}
 k &= \sqrt{\frac{P_{cr}}{EI}} = \frac{4,4934}{L} \\
 P_{cr} &= \frac{20,19EI}{L^2}
 \end{aligned} \tag{7.12}$$

En comparant P_{cr} , ainsi obtenu à P_c de (7.7) nous pouvons écrire :

$$K = \sqrt{\frac{P_c}{P_{cr}}} = \sqrt{\frac{\pi^2}{20,19}} = 0,7 \quad (7.13)$$

Donc la longueur effective KL est égale à $0,7 L$, telle qu'illustrée sur la Figure 7-2 et où K est le coefficient de la longueur effective d'une membrure équivalente articulée aux extrémités. Pour d'autres cas de membrures sollicitées en compression pure dont les extrémités ne sont pas libres de se déplacer l'une par rapport à l'autre, les valeurs de K provenant d'une analyse structurale sont toujours inférieures ou égales à l'unité ($K \leq 1,0$). Contrairement au cas précédent, on va examiner une membrure sollicitée en compression pure, dont les extrémités sont libres de se déplacer l'une par rapport à l'autre (voir Figure 7-3).

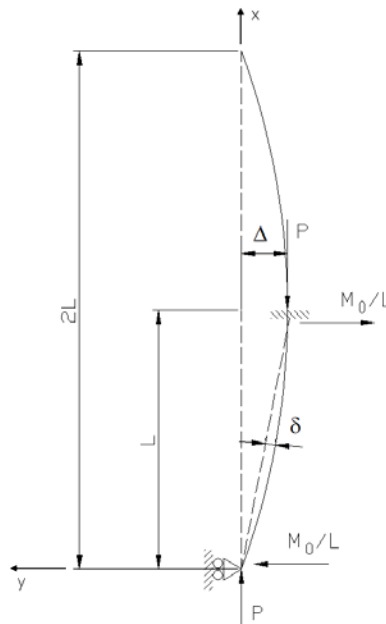


Figure 7-3 : Membrure en compression représentant un déplacement relatif entre les deux extrémités

Le moment de flexion de la section d'abscisse x , s'écrit :

$$M = Py + \frac{M_0 x}{L} \quad (7.14)$$

et l'équation de la déformée devient avec $k^2 = \frac{P}{EI}$:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = -\frac{M_0 x}{EIL} \quad (7.15)$$

La solution générale de cette équation différentielle est de la forme :

$$y = A \cos kx + B \sin kx - \frac{M_0 x}{PL} \quad (7.16)$$

Les constantes A et B sont déterminées en considérant les conditions aux limites : $y(0) = y(L) = 0$ et $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=L} = 0$, ce qui permet d'écrire avec $A = 0$, $Bk \cos kL = 0$ et $B \neq 0, \cos kL = 0, kL = n\pi / 2$:

$$\frac{P_{cr}}{EI} = \frac{\pi^2}{(2L)^2} \quad (7.17)$$

Dans ce cas, le facteur de la longueur effective $K = 2$ et la longueur effective de la membrure est égale à deux fois la longueur réelle. On remarque que, dans les cas des pièces dont les extrémités sont libres de subir des déplacements relatifs, le coefficient de la longueur effective demeure supérieur ou égal à l'unité ($K \geq 1,0$). Dans une charpente dont la rigidité des assemblages assure seule la stabilité de la structure (cadres rigides), les poteaux sont dimensionnés pour des valeurs de K supérieures à l'unité puisque, dans pareil cas, le déplacement relatif des extrémités des poteaux n'est pas nul.

7.3 CONDITIONS RÉELLES

La rectitude parfaite et le centrage rigoureux ne sont jamais faciles à obtenir dans les cas pratiques. Le comportement réel des poteaux en acier diffère sensiblement de celui décrit sur la bases des conditions idéales. La majeure partie des poteaux faisant partie des charpentes d'acier, présentent généralement une défaillance par instabilité dans le domaine plastique avant d'atteindre la charge de flambement eulérienne. La différence entre les comportements réel et théorique est due aux diverses imperfections présentent dans le poteau "réel" soient : défaut de rectitude, contraintes résiduelles, excentricité des charges appliquées et écrouissage. Le comportement réel s'écarte nettement plus des courbes théoriques dans le domaine des élancements intermédiaires que dans celui des grands élancements. Dans la zone des valeurs intermédiaires de l'élancement (ce qui couvre la plupart des poteaux utilisés en pratique), l'effet des imperfections structurales est significatif et doit être pris soigneusement en considération.

Reprenons le cas d'une membrure dans des conditions plus voisines de la réalité et dont les extrémités sont empêchées de subir des déplacements relatifs (voir Figure 7-4). La membrure représente un défaut initial de rectitude. L'amplitude de la déformée initiale est égale à a . L'application de la charge P produit donc un moment de flexion Pa ce qui force la pièce à se déformer davantage d'une quantité f avant que la membrure se stabilise de nouveau. Donc, à cet instant, le moment de flexion à une section située à la mi-longueur de la membrure devient égal à $P(a + f)$. À mesure que la charge P augmente, le moment s'accroît proportionnellement à la déformée. L'équilibre se produit à une charge P_{cr} légèrement inférieure à la charge critique théorique d'Euler, P_c . Admettons que l'équation de la courbure est décrite par la forme sinusoïdale:

$$y_0 = a \sin \pi x / L \quad (7.18)$$

Si y est la déformation élastique, donc la déformation totale s'écrit : $y + a \sin \pi x / L$ et le moment de flexion, M , est donné par :

$$M = Py + Pa \sin \pi x / L \quad (7.19)$$

L'équation différentielle s'écrit :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = -k^2 a \sin \pi \frac{x}{L} \quad (7.20)$$

avec $k^2 = \frac{P}{EI}$. La solution générale de (7.20) est :

$$y = A \cos kx + B \sin kx + \frac{a \sin \pi x / L}{(\pi / kL)^2 - 1} \quad (7.21)$$

avec comme conditions aux limites : $y(0) = y(L) = 0$ et $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=\frac{L}{2}} = 0$. La solution est donnée par :

$$y = \frac{a \sin \pi x / L}{(\pi / kL)^2 - 1} \quad (7.22)$$

et la flèche à mi-longueur de la membrure s'écrit :

$$f_1 = y_{\frac{L}{2}} = \frac{a}{\frac{\pi^2 EI}{PL^2} - 1} = \frac{a}{\frac{P_c}{P} - 1} = \frac{\frac{P}{P_c}}{1 - \frac{P}{P_c}} a \quad (7.23)$$

La flèche totale s'exprime comme suit :

$$f_t = f + a = a / (1 - P/P_c) \quad (7.24)$$

Le terme entre parenthèse, communément appelé coefficient d'amplification, est un coefficient non linéaire, il est fonction de la charge de compression P et s'écrit :

$$U_1 = \frac{1}{1 - \frac{P}{P_c}} \quad (7.25)$$

L'examen de ce cas montre qu'un défaut de rectitude initiale de la membrure affecte sa résistance en compression comparé au cas d'une membrure parfaitement droite ayant les mêmes caractéristiques géométriques et les mêmes conditions de retenue aux extrémités. De (7.24) si $P \rightarrow 0$, $f_t = a$ (état initial) ou encore, si $P \rightarrow P_c$, $f_t = \infty$ (état de ruine). Dans l'une des recommandations (28.6.4) de la norme canadienne S16-09 pour le calcul des charpentes d'acier, la déviation, limite la déviation initiale (a) des pièces comprimées à un millième la distance comprise entre les points de retenue ($a \leq L/1000$).

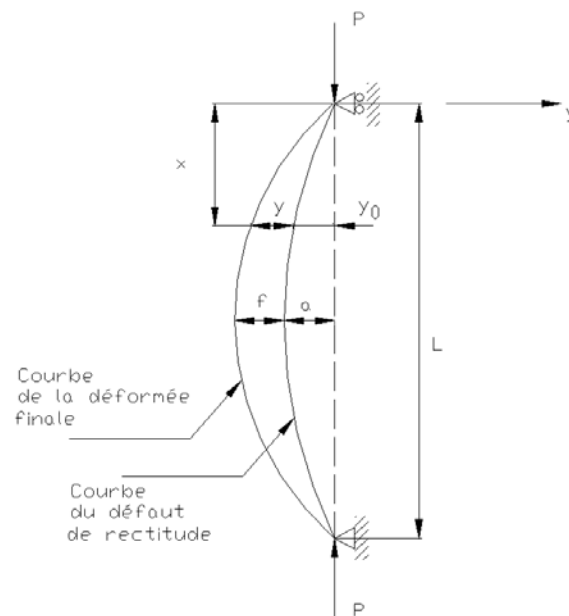


Figure 7-4 : Membrure droite avec un défaut de rectitude

7.4 INFLUENCE DES DÉFAUTS DE RECTITUDE

Pour une pièce parfaitement droite et chargée de façon concentrique, le flambement est soudain et on est en présence d'un problème de bifurcation. Par contre, la présence des imperfections géométriques, rend le problème du flambement des poteaux étroitement lié à une réponse charge/déflexion. La courbure maximale est supposée à mi-longueur et de forme sinusoïdale. La configuration réelle associée à la « non-rectitude » initiale d'un poteau est très compliquée; elle est souvent exprimée en fonction des irrégularités simultanées suivant les axes principaux de la section. La valeur de la « non-rectitude » initiale est limitée par les spécifications et est exprimée en ratio de la longueur de la pièce entre les points de retenues. Les mesures disponibles, montrent des valeurs de « non-rectitude » qui se rapprochent de $L/1500$ pour des sections en I. Dans le développement des critères de calcul des poteaux, la valeur maximale permise pour la non verticalité initiale est limitée à $L/1000$ (norme **S16-09**), ce qui est considéré comme une valeur conservatrice. Les résultats des études montrent la nécessité d'incorporer le défaut de la non verticalité initiale des membrures dans les modèles qui sont utilisés pour déterminer les résistances des poteaux. Il s'agit là d'un des principes fondamentaux de l'approche basée sur les charges fictives, et cette approche est traitée dans le Chapitre 4.

7.5 LONGUEUR EFFECTIVE DES POTEaux DANS LES CADRES RIGIDES

Dans les normes nord-américaines (à l'exception des normes canadiennes depuis 1989), on utilise pour le calcul des éléments en compression ou en « compression-flexion », un coefficient de longueur effective K qui permet de déterminer la longueur de flambement KL où L est la longueur réelle de l'élément (soit la distance entre ses points de retenue). Pour calculer le coefficient K on utilise une méthode basée sur deux nomogrammes d'alignement, qui tiennent compte de la rigidité flexionnelle des autres éléments attachés aux extrémités de l'élément étudié.

L'un des nomogrammes donne des valeurs du coefficient K comprises entre 0 et 1 pour les ossatures contreventées (noeuds fixes). L'autre nomogramme, qui est utilisé pour les ossatures

« non-contreventées » (nœuds déplaçables) où seuls les assemblages « poteau-poutre » assurent la stabilité, donne des valeurs du coefficient K comprises entre 1 et l'infini. Le concept de la longueur effective a été abandonné par les normes canadiennes **CSA/CAN S16.1-M89**, au profit du concept des charges fictives. Pour utiliser ces nomogrammes, on calcule les rigidités relatives en tête G_U et à la base G_L du poteau à l'aide de l'équation :

$$G = \frac{\Sigma(I_c / L_c)}{\Sigma(I_p / L_p)} \quad (7.26)$$

où la somme (Σ) s'applique à toutes les pièces raccordées rigidement au joint considéré et comprises dans le plan de flambement du poteau et :

I_c : moment d'inertie des poteaux, calculé par rapport aux axes perpendiculaires au plan de flambement

L_c : longueur des poteaux entre les points de retenue

I_p : moment d'inertie des poutres, calculé par rapport aux axes perpendiculaires au plan de flambement

L_p : longueur des poutres entre les points de retenue

La droite tracée entre les valeurs de G_U et G_L sur le nomogramme approprié (structures libres ou empêchées de se déplacer latéralement) détermine la valeur de K . À noter que pour une extrémité articulée $I_p = 0$ et $G = \infty$ et pour une extrémité encastree $I_p = \infty$ et $G = 0$. En théorie, lorsque l'assemblage reliant la base d'un poteau au système de fondation se comporte comme une rotule $G_L = \infty$ la norme **S16** recommande une valeur de G_L égale à 10 pour tenir compte de la

rigidité partielle qu'offre ce type d'assemblage. Dans le cas où l'assemblage reliant la base d'un poteau au système de fondation se comporte comme un encastrement $G_L = 0$ dans ce cas la norme **S16** recommande une valeur de G_L égale à 1 pour tenir compte de l'impossibilité presque certaine de réaliser un encastrement parfait. Plusieurs articles et recherches concernant l'utilisation de la méthode des nomogrammes pour le calcul des éléments comprimés des ossatures à nœuds déplaçables, ont donné lieu à une certaine polémique, ce qui a donné naissance à l'expression « le paradoxe du coefficient K ». Il existe en réalité deux types de coefficients de longueur effective : le coefficient K obtenu des nomogrammes d'alignement et le coefficient K obtenue par une analyse structurale. Les coefficients de longueur effective calculés par ces deux méthodes peuvent être très différents. Les deux équations qui ont servi au tracé des nomogrammes d'alignement sont :

Structures libres de se déplacer latéralement :

$$\frac{G_U G_L (\pi/K)^2 - 36}{6(G_U + G_L)} = \frac{\pi/K}{\tan(\pi/K)} \quad (7.27)$$

Structures empêchées de se déplacer latéralement :

$$\frac{G_U G_L}{4} \left(\frac{\pi}{K} \right)^2 + \left(\frac{G_U + G_L}{2} \right) \left(1 - \frac{\pi/K}{\tan(\pi/K)} \right) + \frac{2 \tan(\pi/2K)}{\pi/K} = 1 \quad (7.28)$$

Pour une configuration structurale donnée, il est en effet possible d'obtenir des valeurs du coefficient K très différentes selon que l'on utilise la méthode des nomogrammes ou une autre analyse de stabilité. Après une analyse de nombreux résultats de recherche, le comité de rédaction de la norme canadienne de calcul des charpentes d'acier **CSA/CAN S16**, a décidé d'abandonner l'utilisation des nomogrammes, et elle recommande une analyse du deuxième ordre et l'utilisation d'un facteur de la longueur effective égale à l'unité. Pour des structures à nœuds déplaçables, le flambement d'un poteau ne peut être considéré comme un phénomène individuel. Dans les

charpentes « non-contreventées », les poteaux interagissent l'un avec l'autre de sorte que ceux qui peuvent offrir une certaine résistance au déplacement latéral avant d'atteindre la rupture, servent de retenue pour les autres poteaux. Dans la méthode des nomogrammes d'alignement, le poteau est en quelque sorte extrait de la charpente et étudié de façon isolée, ce qui est inadéquat pour les charpentes « non-contreventées », mais acceptable pour celles qui le sont. Le concept de la longueur effective de flambement KL est un moyen jugé simple pour réduire les problèmes d'évaluation des contraintes critiques de flambement via une équivalence avec un poteau articulé aux extrémités et empêché de se déplacer latéralement. La contrainte critique de flambement s'exprime par :

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} \quad (7.29)$$

Dans certaines situations, l'utilisation des nomogrammes d'alignement peut aller à l'encontre des principes de base qui ont conduit au tracé de ces mêmes nomogrammes. Parmi les principales hypothèses simplificatrices qui ont conduit au tracé des nomogrammes, nous pouvons énumérer les suivantes :

Domaine élastique

La méthode des nomogrammes d'alignement considère un comportement élastique de la charpente jusqu'à la rupture. Il existe une multitude de cas pratiques où cette hypothèse n'est pas respectée. La contrainte critique de flambement σ_{cr} est fonction de l'élancement de la membrure KL/r . À cause de la présence des contraintes résiduelles, et des imperfections géométriques, l'action inélastique est supposée prendre place à un niveau de contrainte égal à environ $0,5F_y$ (*Allowable Stress Design*). La valeur de KL/r qui correspond à cette contrainte est désignée C_c dans les spécifications américaines (**AISC LRFD**). Cette valeur définit la frontière entre l'action inélastique et élastique. Par exemple, pour l'acier A36 ($F_y \approx 260$ MPa), $C_c = 126$, ce qui signifie

que la plupart des poteaux dans les structures à étages se comportent dans le domaine inélastique. Pour un poteau dans le domaine élastique, la rigidité est proportionnelle à EI . Par contre dans le domaine inélastique, la rigidité est proportionnelle à $E_T I$ et où E_T est le module tangent. Donc, la contrainte inélastique de flambement devient :

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E_T}{(L/r)^2} \quad (7.30)$$

La limite de validité de l'application de la théorie d'Euler est telle que $P_e \leq P_y$. Avec $P_y = \sigma_y A$, et A , l'aire de la section transversale de la membrure. Si on retient aussi l'hypothèse que les poutres stabilisatrices connectées aux poteaux se comportent toujours dans le domaine élastique, elles peuvent donc offrir une plus grande retenue relative, ce qui modifie le paramètre de la rigidité G . Pour tenir compte de l'effet du comportement inélastique des poteaux, plusieurs techniques ont été proposées, parmi lesquelles celle proposée par (Yura, 1971). Cette dernière consiste à modifier le paramètre G en fonction des valeurs des résistances C_{cr} qui renferme les effets de plasticité et C_E qui décrit le comportement élastique idéal. Cette technique est illustrée à l'aide d'un exemple numérique qui fait partie d'un chapitre subséquent.

Flambement simultané de tous les poteaux du même étage

Le dimensionnement des pièces sollicitées en compression qui est basé sur le concept de la longueur effective et déterminé à partir des nomogrammes d'alignement, est raisonnablement correct si tous les poteaux individuels dans un étage flambent simultanément sous l'effet de leurs charges verticales de compression. Dans cette situation, les poteaux ne peuvent pas offrir des retenues pour les autres poteaux. La totalité de la capacité de chaque poteau est disponible pour résister à sa propre charge. Il existe beaucoup de situations où un poteau individuel a une résistance excessive au flambement. Un cas typique, est celui d'un étage où tous les poteaux ont la même section, donc les poteaux de rive peuvent offrir une stabilité pour les poteaux intérieurs. La charge critique des poteaux intérieurs est augmentée et par conséquent, leurs longueurs effectives

diminuent. L'effet de la stabilisation, peut réduire la longueur effective de certains poteaux pour atteindre $K = 1$ même si la structure n'est pas dotée d'un système de contreventement. La rupture ne survient que lorsque tous les poteaux à un étage donné ont atteint leur charge critique. Il s'agit, dans ce cas, d'un phénomène de comportement global qui touche la totalité de l'étage. Dans les charpentes qui ne sont pas libres de se déplacer latéralement (charpentes contreventées), le flambement d'un poteau quelconque ne dépend pas de la résistance au flambement des autres poteaux du même étage, c'est un comportement individuel, où seule la résistance au flambement du poteau est à considérer.

Joints rigides

Les cas des charpentes qui contiennent des membrures avec une ou des extrémités articulées ou encastrées, sont fréquents dans la pratique. En ce qui concerne les poutres, on peut dans certains cas apporter des corrections à (7.26) en affectant la rigidité de la membrure considérée par un facteur correctif, qui tient compte des conditions de retenue et de la nature des assemblages aux extrémités de la membrure. Les poteaux, par contre, sont traités d'une façon différente et les calculs sont plus élaborés et peuvent conduire à des valeurs de K plus ou moins sécuritaires, dépendant que le poteau traité est un poteau de rive ou en travée, faisant partie d'une structure à nœuds déplaçables ou une structure contreventée. Lorsque les assemblages « poutre-poteau » offrent une rigidité partielle (connexions semi-rigides), les nomogrammes d'alignement ne peuvent pas être utilisés directement, et dans ce cas, il faut modifier le paramètre de la rigidité G pour tenir compte de la retenue effective à la rotation offerte à une extrémité du poteau. La difficulté d'utiliser cette approche réside dans la nécessité de connaître le degré de flexibilité de chaque assemblage. Devant la confusion engendrée par les multiples correctifs à apporter à la méthode des nomogrammes d'alignement, il est question de considérer systématiquement les effets du deuxième ordre, et de déterminer un facteur d'amplification (U_2 ou B_2) qui tient compte du comportement global de la structure. Les effets du deuxième ordre de types $P - \Delta$ et $P - \delta$ sont traités dans les chapitres précédents.

7.6 DIMENSIONNEMENT DES PIÈCES SOLLICITÉES EN COMPRESSION PURE

Déterminer la résistance maximale d'une pièce sollicitée en compression pure (poteau), peut s'avérer un processus compliqué, qui nécessite des intégrations numériques, surtout lorsque les imperfections géométriques initiales de la pièce, la « non-linéarité » du matériau ainsi que les contraintes résiduelles sont à considérer. Le concepteur à qui incombe la responsabilité de concevoir des structures contenant plusieurs éléments, ne peut accomplir convenablement sa tâche, en procédant à des calculs numériques longs et fastidieux. Le concepteur doit disposer des moyens pratiques, fiables et simples pour accomplir ces tâches. Pour ce faire, de nombreuses formules simples sont fournies par les spécifications et les standards et contiennent les différents paramètres affectant la résistance d'un élément et qui sont :

- La limite d'élasticité.
- Les caractéristiques géométriques de l'élément.
- Les caractéristiques géométriques de la section.
- Les facteurs de sécurité et coefficients de pondération.

Les pièces en compression pure, peuvent, en fonction de leur comportement, être classées en deux catégories :

1. Les poteaux qui se comportent dans le domaine élastique, sont dimensionnés sur la base de la théorie d'Euler.
2. Les poteaux qui se comportent dans le domaine inélastique, sont dimensionnés sur la base des formules empiriques.

7.6.1 Outils de dimensionnement

Les formules empiriques, les tableaux et les graphiques utilisés dans le dimensionnement des poteaux, sont développées principalement à partir des outils suivants :

Formules empiriques basées sur les résultats des tests

Ces formules, basées sur la compilation des résultats des tests, sont applicables uniquement pour la section et le matériau pour lesquels les tests sont effectués. Aussi, ces formules empiriques ne sont pas représentatives des vraies conditions de retenues aux extrémités de la pièce.

Formules basées sur la limite élastique

Ces formules définissent la résistance d'un poteau, comme étant la charge axiale qui donnera une contrainte élastique égale à la limite d'élasticité, pour un élément ayant des imperfections géométriques initiales. Les formules prennent en considération les défauts de rectitude et les excentricités des charges, en adoptant certains facteurs de sécurité.

Formules basées sur la théorie du module tangent

Dans ces formules, les défauts de rectitude et les excentricités des charges, sont considérés comme facteurs qui induisent la flexion dans les équations d'interaction. Cette approche est utilisée par certaines normes européennes.

Formules basées sur la résistance maximale

Les nouvelles tendances dans le dimensionnement des poteaux nécessitent des formules qui sont sous formes numériques, obtenues de l'analyse de la résistance maximale des poteaux représentatifs des imperfections géométriques, des contraintes résiduelles et des défauts de centrage des charges. Il a été suggéré que la résistance maximale des poteaux, soit représentée à l'aide des courbes multiples (**CECM, Convention Européenne pour la construction métallique**).

7.6.2 Fondements des courbes de flambement de la CECM

A partir de 1960, un programme expérimental a été mené au niveau international par la CECM en vue d'étudier le comportement des poteaux courants. Plus de 1000 essais de flambement ont été effectués sur une variété de membrures (I, H, T, U, sections tubulaires de forme circulaire et carrée), pour différentes valeurs d'élancement (comprises entre 55 et 160). Une approche probabiliste, sur la base des valeurs expérimentales de résistance, combinée à une analyse théorique, a montré qu'il était possible de dessiner des courbes décrivant la résistance d'un poteau en fonction de son élancement réduit. Les imperfections qui ont été considérées lors de cette étude sont les suivantes : une imperfection géométrique dont l'allure est celle d'un demi-sinusoïde et dont l'amplitude est fixée à 1/1000 de la longueur du poteau et des contraintes résiduelles spécifiques pour chaque type de profilé. Les courbes européennes de flambement sont désignées par a, b, c ou d :

- La courbe a correspond aux profilés quasiment parfaits : sections en I laminées ($h/b > 1,2$) à ailes peu épaisses (épaisseur des ailes : $t_f \leq 40 \text{ mm}$) pour le flambement autour de l'axe fort ; elle s'applique également aux profils laminés de forme tubulaire ;
- La courbe b couvre les profilés possédant un degré moyen d'imperfection. Elle détermine le comportement de la plupart des caissons soudés mais aussi le comportement des profilés laminés à section en I lorsqu'ils sont en danger de flambement autour de l'axe faible, des profilés soudés en I à ailes peu épaisses ($t_f \leq 40 \text{ mm}$) et des profilés laminés en I à épaisseur d'ailes moyenne ($40 < t_f \leq 100 \text{ mm}$) lorsqu'ils flambent autour de l'axe fort. Elle concerne également les profils tubulaires formés à froid;
- La courbe c est relative aux profilés qui possèdent de nombreuses imperfections : les profilés en U, L et T ainsi que les sections soudées en caisson à soudures épaisses appartiennent à cette catégorie. Se réfèrent également à la courbe c, les sections tubulaires formées à froid dimensionnées sur la base de la limite d'élasticité moyenne de l'élément après formage, les sections laminées en H ($h/b = 1,2$ et $t_f = 100 \text{ mm}$) en

danger de flambement autour de l'axe faible ainsi que certaines sections soudées en I ($t_f = 40$ mm, flambement autour de l'axe faible et $t_f > 40$ mm, flambement autour de l'axe fort) ;

- La courbe d s'applique aux profilés dont les imperfections sont extrêmement importantes; elle doit être utilisée pour les profilés laminés en I à ailes très épaisses ($t_f > 100$ mm) et pour les profilés soudés en I à ailes épaisses ($t_f > 40$ mm), lorsque le flambement se produit autour de l'axe faible.

7.7 FLAMBEMENT EN COMPRESSION-FLEXION

Il s'agit, dans ce cas, d'un poteau idéal rectiligne sollicité simultanément par un effort normal C et un moment fléchissant M . En comparaison au flambement simple, il y a, dans ce cas, une amplification de la déformée et donc, des contraintes de compression et de flexion. Si le moment initial est désigné par $M_0(x)$, le moment fléchissant total dans la membrure comprimée et fléchie est égal à :

$$M(x) = M_0(x) + Cy \quad (7.31)$$

Dans ce cas, la déformée est donnée par :

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} + Cy = -M_0(x) \quad (7.32)$$

Pour des fonctions simples de $M_0(x)$, la résolution de l'équation différentielle se fera par des techniques simples d'intégration. Considérons les deux cas les plus courants de la flexion plus la compression :

- Moment dû à une charge concentrée transversale;
- Moment dû à une charge uniformément répartie transversale.

Charge concentrée transversale Q

Selon ce cas de chargement (voir Figure 7-5), la valeur du moment est donnée par :

$$\text{Si } x \leq a, M(x) = Qx \frac{(l-a)}{l} \quad (7.33)$$

$$\text{Si } x \geq a, M(x) = Qa \frac{(l-x)}{l} \quad (7.34)$$

La solution est donnée par :

$$\text{Si } 0 \leq x \leq a, y(x) = A \cos kx + B \sin kx + \frac{Q}{c} \frac{l-a}{l} \quad (7.35)$$

$$\text{Si } a \leq x \leq l, y(x) = C \cos kx + D \sin kx + \frac{Q}{c} a \frac{l-x}{l} \quad (7.36)$$

Les coefficients A, B, C et D sont déterminés à partir des conditions : $y(0) = y(L) = 0$ tel que $A = 0, B = -\frac{Q}{kc} \frac{\sin k(l-a)}{\sin kl}, C = -D + \tan kl, D = \frac{Q}{kc} \frac{\sin ka}{\tan kl}$. Avec $k = \sqrt{\frac{C}{EI}}$, l'expression générale de la déformée est donnée par :

$$\text{Si } 0 \leq x \leq a, y(x) = \frac{Q}{kc} \frac{\sin l-a}{\sin kl} \sin kx + \frac{Q}{c} x \frac{l-a}{l} \quad (7.37)$$

$$\text{Si } a \leq x \leq l, y(x) = -\frac{Q}{kc} \frac{\sin ka}{\sin kl} \sin k(l-x) + \frac{Q}{c} a \frac{l-x}{l} \quad (7.38)$$

Pour $a = \frac{l}{2}$ et $x = \frac{l}{2}$ avec

$$u = \frac{kl}{2} = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{C}{EI}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{C}{C_e}} \quad (7.39)$$

et $C_e = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$, on obtient la déformée telle que :

$$y_{\max} = -\frac{Ql^3}{48EI} \frac{3(\tan u - u)}{u^3} \quad (7.40)$$

avec un moment maximum donné par :

$$M_{\max} = \frac{Ql}{4} \frac{\operatorname{tg} u}{u} \quad (7.41)$$

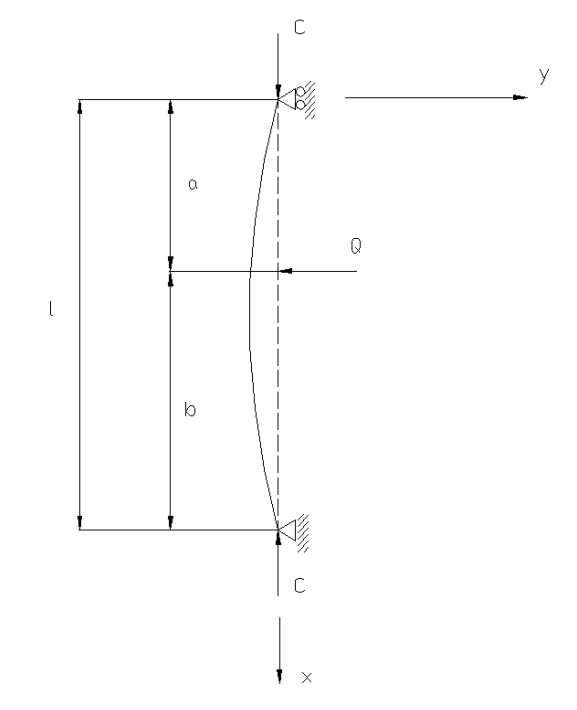


Figure 7-5 : Poteau articulé aux extrémités - Sollicité en compression et en flexion

Charge uniformément répartie q

Pour ce cas de chargement, le moment est donné par :

$$M(x) = \frac{qx}{2} (l - x) \quad (7.42)$$

En posant $u = \frac{kl}{2}$, on obtient l'expression de la déformée telle que :

$$y(x) = \frac{ql^4}{16EI u^4} \left[1 - \frac{\cos \left[u \left(1 - \frac{2x}{l} \right) \right]}{\cos u} \right] + \frac{ql^2 x}{8EI u^2} (l - x) \quad (7.43)$$

La flèche maximale pour $x = \frac{l}{2}$ s'écrit :

$$y_{\max} = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI} \frac{24(1 - \cos u) - 12 u^2 \cos u}{5 u^4 \cos u} \quad (7.44)$$

et le moment maximal s'écrit :

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} \frac{2(\cos u - 1)}{u^2 \cos u} \quad (7.45)$$

7.8 INFLUENCE DE L'EFFORT TRANCHANT SUR LE FLAMBEMENT DES PIÈCES

La présence d'efforts tranchants dans les pièces fléchies entraîne des déformations. En fait, la présence d'un effort tranchant ne modifie de manière significative que la charge critique dans les poutres à treillis et ce, conséquent du fait que les membrures, qui constituent l'âme d'une poutre à treillis au voisinage des appuis, supportent des efforts tranchants importants comparé aux efforts de flexion. Considérons le cas d'une telle poutre « bi-articulée » et sollicitée en compression pure, nous retrouvons :

$$M = C y, \quad V = \frac{dM}{dx} = C \frac{dy}{dx} \quad (7.46)$$

L'équation de la déformée s'écrit en prenant en compte les déformations engendrées par l'effort tranchant :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} + \frac{d}{dx} \left(\frac{V}{GA_1} \right) \quad (7.47)$$

avec A_1 , l'aire de la section réduite à l'effort tranchant. En remplaçant (7.46) dans (7.47), on obtient :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{C y}{EI} + \frac{C}{GA_1} \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (7.48)$$

et en regroupant les termes, (7.48) s'écrit :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} \left(1 - \frac{C}{GA_1} \right) + \frac{C}{EI} y = 0 \quad (7.49)$$

En posant $\beta^2 = \frac{C}{EI \left(1 - \frac{C}{GA_1} \right)}$, (7.49) devient :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \beta^2 y = 0 \quad (7.50)$$

La charge critique de flambement qui valait $C_e = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$ est réduite en raison de l'influence de l'effort tranchant et devient:

$$C'_e = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 EI}{l^2} \frac{1}{GA_1}} \quad (7.51)$$

avec A_1 , l'aire réduite à l'effort tranchant et :

$$C'_e = \frac{C_e}{1 + \frac{C_e}{GA_1}} \quad (7.52)$$

Si le terme A_1 est très grand, $\beta^2 = k^2 = \frac{C}{EI}$ et $C'_e = C_e$. Si, au contraire I est très grand, $\frac{d^2y}{dx^2} \left(1 - \frac{C}{GA_1} \right) = 0$. Ce qui est vérifié pour $\frac{C}{GA_1} = 1$ c'est-à-dire, que la charge critique de flambement due à l'effort tranchant est :

$$C''_e = GA_1 \quad (7.53)$$

En général, on a $C_e = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \left(1 - \frac{C}{GA_1} \right)$, c'est-à-dire : $C_e = C'_e \left(1 - \frac{C}{C''_e} \right)$. Si la diminution est faible et négligeable pour les poutres à âme pleine, elle est au contraire sensible pour les poutres triangulées.

7.9 ASPECTS EXPÉRIMENTAUX DU FLAMBEMENT

L'expérimentation en laboratoire effectuée sur des poutres laminées courantes qui sont soumises à des efforts de compression progressivement croissants, montre que la ruine de la membrure se manifeste de deux façons différentes, selon l'élancement des pièces :

1. Pour les pièces de faible élancement (forte section, faible hauteur, $\lambda < 20$), la ruine se manifeste par écrasement plastique sous des contraintes proches de la limite élastique de l'acier F_y . Dans ces cas, le flambement ne doit donc pas être vérifié.

2. Pour les pièces de grand élancement ($\lambda > 100$), la ruine intervient pour une contrainte d'écrasement σ_s inférieure à la limite élastique et à la contrainte critique d'Euler σ_{cr} pour laquelle, on peut observer une augmentation soudaine des déformations avec l'apparition des zones plastifiées, suivi d'un effondrement. En outre, la courbe contrainte/déformation n'est pas linéaire. La contrainte critique d'Euler σ_{cr} représente en fait une limite supérieure que l'on ne peut pas atteindre du fait que la théorie d'Euler est basée sur une barre idéale parfaitement rectiligne et soumise à un effort de compression parfaitement centré qui passe par le centre de gravité de la section et appliqué suivant l'axe moyen, ce qui est rarement le cas dans la pratique. En effet, après leur traitement en laminoir, les pièces subissent diverses manutentions et transports, ne sont pas rigoureusement rectilignes. Ce sont les défauts de rectitude :

- Les inerties ne sont pas constantes (tolérances de laminage).
- Les efforts de compression ne sont jamais parfaitement centrés (défauts de centrage).
- Les poteaux ne sont jamais parfaitement verticaux (tolérance de montage).
- Le module d'élasticité de l'acier E n'est pas vraiment constant du fait des contraintes résiduelles de laminage (défauts d'homogénéité).

Ces défauts contribuent à réduire la résistance des éléments, en raison des moments de flexion secondaires qu'ils créent et qui majorent considérablement les contraintes, notamment dans le cas de la flexion accompagnée par la compression.

7.10 PRISE EN COMPTE DES DÉFAUTS DE RECTITUDE

Considérons, tel que montré à la Figure 7-6, le cas d'un poteau sollicité en compression et doté d'une courbure initiale définie sous la forme $y_0 = f(x)$. Le moment fléchissant $M(x) = C(y + y_0)$ et l'équation de la déformée s'écrit :

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -M = -C(y + y_0) = 0 \quad (7.54)$$

La déformée de la poutre avant le chargement s'exprime par le développement en série trigonométrique telle que :

$$y_0 = a_1 \frac{\sin \pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots \quad (7.55)$$

qui, en première approximation, se résume à $y_0 = a \frac{\sin \pi x}{l}$, soit :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 \left(y + a \frac{\sin \pi x}{l} \right) = 0 \quad (7.56)$$

La solution générale de cette équation différentielle est de la forme $y = D \sin \frac{\pi x}{l}$. En posant

$\frac{dy}{dx} = D \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi x}{l}$, (7.56) devient :

$$\sin \frac{\pi x}{l} \left(ak^2 + Dk^2 - D \frac{\pi^2}{l^2} \right) = 0 \quad (7.57)$$

d'où $D = \frac{a}{\frac{\pi^2}{k^2 l^2} - 1}$ et la flèche additionnelle y donnée par :

$$y = \frac{a \sin \frac{\pi x}{l}}{\frac{\pi^2}{k^2 l^2} - 1} \quad (7.58)$$

Cette flèche est maximale à l'abscisse $x = \frac{l}{2}$, soit :

$$y_{\max} = \frac{a}{\frac{\pi^2}{k^2 l^2} - 1} = f \quad (7.59)$$

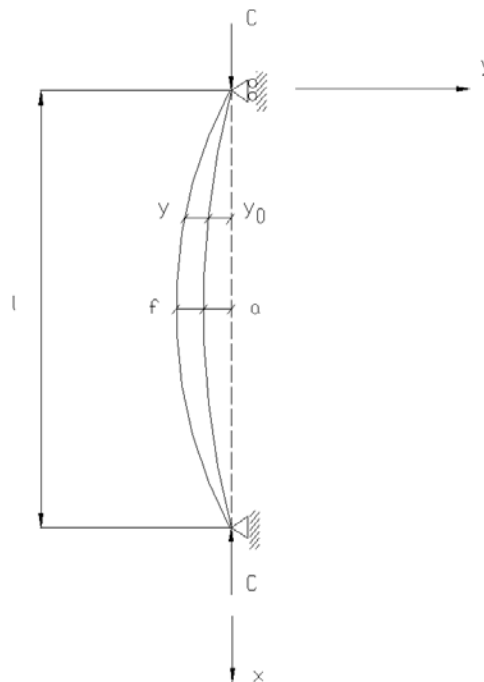


Figure 7-6 : Poteau bi-articulé représentant des défauts de rectitude

Compte tenu que $k^2 = \frac{C}{EI}$, et $C_e = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$:

$$f = \frac{a}{\frac{C_e}{C} - 1} \quad (7.60)$$

Les déformations croissent donc de façon hyperbolique avec C . La flèche totale f_t est égale à :

$$f_t = a + f = \frac{a}{1 - \frac{C}{C_e}} \quad (7.61)$$

Lorsque $C = 0$, $f_t = a$ et lorsque $C = C_e$, $f_t \rightarrow \infty$, ce qui correspond à l'état de ruine de la pièce.

7.11 PRISE EN COMPTE DES DÉFAUTS DE CENTRAGE

Les défauts de centrage proviennent de l'excentricité réelle ou accidentelle des charges transmises aux éléments travaillant en compression. En réalité, il est assez rare qu'une pièce, et particulièrement un poteau, soit sollicité en compression pure. Considérons la membrure montrée sur la Figure 7-7, chargée d'une force axiale C parallèle à son axe moyen, mais excentrée d'une distance e . Dans ce contexte, l'équation de la déformée est donnée par :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = 0 \quad (7.62)$$

La solution générale de (7.62) est donnée par : $y = A \sin kx + B \cos kx$. Les constantes A et B sont déterminées à partir des conditions aux limites : $y(0) = 0$ et : $y(l) = e$ soit $B = e$, $A = e \frac{1 - \cos kl}{\sin kl}$ d'où :

$$y = e \left(\cos kx + \sin kx \frac{1 - \cos kl}{\sin kl} \right) \quad (7.63)$$

La flèche totale maximale se produit à $x = \frac{l}{2}$ telle que :

$$e + f = e \left[\cos k \frac{l}{2} + \sin k \frac{l}{2} \frac{1 - \cos kl}{\sin kl} \right] \quad (7.64)$$

et $\cos kl = 1 - 2 \sin^2 \frac{kl}{2}$, $\sin kl = 2 \sin \frac{kl}{2} \cos \frac{kl}{2}$ d'où : $\frac{1 - \cos kl}{\sin kl} l = \operatorname{tg} \frac{kl}{2}$. La flèche totale vaut donc :

$$e + f = e \left[\cos \frac{kl}{2} + \sin \frac{kl}{2} \operatorname{tg} \frac{kl}{2} \right] = \frac{e}{\cos \frac{kl}{2}} \quad (7.65)$$

avec

$$f = e \left[\frac{1}{\cos \frac{kl}{2}} - 1 \right] \quad (7.66)$$

et où f varie hyperboliquement en fonction de C et a pour asymptote horizontale C_e . Le moment fléchissant maximal est donné par :

$$M_{f \max} = C(e + f) = \frac{C e}{\cos \frac{kl}{2}} \quad (7.67)$$

et la contrainte maximale caractérisant l'état de ruine est obtenue pour :

$$\sigma_e = \frac{C}{A} + \frac{C(e + f)}{I} v \quad (7.68)$$

où encore, en posant $c = \frac{r^2}{v}$ et f tirée de (7.66) :

$$\sigma_e = \frac{C}{A} \left[1 + \frac{e}{c \cos \frac{kl}{2}} \right] \quad (7.69)$$

avec $\cos \frac{kl}{2} = \cos \sqrt{\frac{C}{EI}} \frac{l}{2} = \cos \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{C}{EA}}$, (7.69) devient :

$$\sigma_e = \frac{C}{A} \left[1 + \frac{e}{c \cos \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{C}{EA}}} \right] \quad (7.70)$$

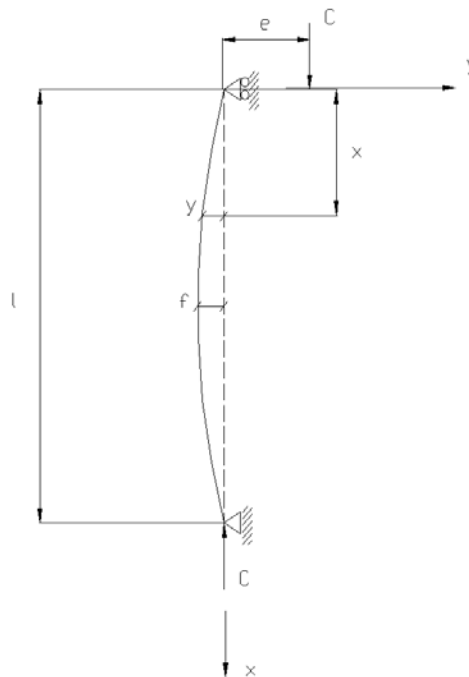


Figure 7-7 : Défauts de centrage

La charge de ruine C peut être obtenue par résolution de (7.70). Cependant, tant que C reste faible comparativement à C_e (petites déformations), on peut admettre avec une précision suffisante et kl étant faible, que :

$$\cos \frac{kl}{2} = 1 - \frac{k^2 l^2}{8} \quad (7.71)$$

L'expression (7.66) s'écrit alors :

$$f = e \left[\frac{k^2 l^2}{8 - k^2 l^2} \right] \quad (7.72)$$

En posant $k^2 = \frac{C}{EI}$, on obtient finalement :

$$C = \frac{8EI f}{l^2(e + f)} \quad (7.73)$$

7.12 RÉGLEMENTATION SUR LE FLAMBEMENT DANS LES NORMES EUROPÉENNES

La théorie d'Euler établie pour des structures idéales est très insuffisante en regard des imperfections de centrage, de rectitude, de verticalité et de la présence de contraintes résiduelles. Il est donc nécessaire de prendre en compte ces imperfections et leurs effets. À l'égard d'**Eurocode 3**, les considérations suivantes s'appliquent selon la nature du flambement.

7.12.1 Flambement simple

Le risque de flambement n'est à considérer que si $\bar{\lambda} > 0.2$, avec $\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_r}$, $\lambda_r = \pi \sqrt{\frac{E}{F_y}}$. Dans ce cas, la sollicitation de compression simple C doit être telle que $C \leq \chi \beta_A A \frac{F_y}{\gamma_{M_1}}$ avec χ , le coefficient

de réduction pour le mode de flambement à considérer. Ici, γ_{M1} est un facteur partiel de sécurité = 1,1. Pour les sections transversales de classes 1, 2 ou 3, $\beta_A = 1$ tandis que pour les sections transversales de classe 4, $\beta_A = A_{efy}/A$ avec A_{efy} , la section effective.

Pour les éléments à sections transversales constantes, sollicitées en compression axiale constante, la valeur de χ ($\chi \leq 1$) pour l'élancement réduit $\bar{\lambda}$ est déterminée par :

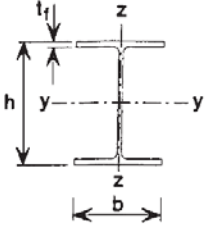
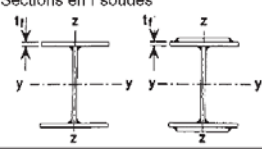

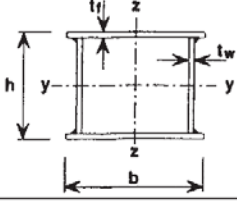

$$\chi = \frac{1}{\phi + [\phi^2 - \bar{\lambda}^2]^{0,5}} \quad (7.74)$$

où $\phi = 0,5[1 + \alpha(\bar{\lambda} - 0,2) + \bar{\lambda}^2]$ avec α , un facteur d'imperfection correspondant à la courbe de flambement appropriée (voir Tableau 7-1) et, $\bar{\lambda} = \left[\beta_A A \frac{F_y}{C_{cr}} \right]^{0,5} = \left(\frac{\lambda}{\lambda_1} \right) (\beta_A)^{0,5}$ avec λ , définissant l'élancement pour le mode de flambement approprié, $\lambda_1 = \pi \sqrt{\frac{E}{F_y}} = 93,9\varepsilon$, $\varepsilon = \sqrt{\frac{235}{F_y}}$ et C_{cr} , l'effort axial critique élastique pour le mode de flambement approprié. Le choix de la courbe de flambement correspondant à une section se fait via les données du Tableau 7-2.

Tableau 7-1 – Valeurs du facteur d'imperfection (α) selon la courbe de flambement

Courbe de flambement	a	b	c	d
Facteur d'imperfection (α)	0,21	0,34	0,49	0,76

Tableau 7-2 – Choix d'une courbe de flambement pour une section transversale selon Eurocode 3

Section transversale	Limites	Axe de Flambement	S460	S420
Sections en I laminés 	$h/b > 1,2$: $t_f \leq 40 \text{ mm}$ $40 \text{ mm} < t_f \leq 100 \text{ mm}$	$y - y$ $z - z$ $y - y$ $z - z$	a_0 a_0 a a	a a b b
	$h/b \leq 1,2$: $t_f \leq 100 \text{ mm}$ $t_f > 100 \text{ mm}$	$y - y$ $z - z$ $y - y$ $z - z$	a a c c	b b d d
Sections en I soudés 	$t_f \leq 40 \text{ mm}$ $t_f > 40 \text{ mm}$	$y - y$ $z - z$ $y - y$ $z - z$	b c c d	b c c d
Sections creuses 	finis à chaud	quel qu'il soit	a	a
	formés à froid - avec f_{yb} ¹⁾	quel qu'il soit	b	b
	formés à froid - avec f_{yd} ¹⁾	quel qu'il soit	c	c
Caissons soudés 	en général (sauf ci-dessous)	quel qu'il soit	b	b
	Soudures épaisses et : $b/t_f < 30$ $h/t_w < 30$	$y - y$ $z - z$	c c	c c
Sections en U, L, T et sections pleines 		quel qu'il soit	c	c

7.12.2 Flambement en flexion (Eurocode 5.5.4)

Les éléments sollicités simultanément en flexion et en compression axiale doivent satisfaire en diverses conditions selon la classe de leur section transversale.

Sections des classes 1 et 2

$$\frac{N}{\chi_{\min} \frac{N_{pl}}{\gamma_{M1}}} + \frac{K_y M_y}{\frac{M_{ply}}{\gamma_{M1}}} + \frac{K_z M_z}{\frac{M_{plz}}{\gamma_{M1}}} \leq 1 \quad (7.75)$$

avec χ_{\min} , la plus petite valeur de χ_z et χ_y , $N_{pl} = A F_y$, $M_{pl} = W_{pl} F_y$,

$$K_y = 1 - \frac{\mu_y N}{\chi_y A F_y}, \quad K_z = 1 - \frac{\mu_z N}{\chi_z A F_y} \quad (7.76)$$

avec $K_y \leq 1,5$, $K_z \leq 1,5$ et :

$$\mu_y = \bar{\lambda}_y (2\beta_{My} - 4) + \left[\frac{W_{ply} - W_{ely}}{W_{ely}} \right] \quad (7.77)$$

$$\mu_z = \bar{\lambda}_z (2\beta_{Mz} - 4) + \left[\frac{W_{plz} - W_{elz}}{W_{elz}} \right] \quad (7.78)$$

avec $\mu_y \leq 0,9$ et $\mu_z \leq 0,9$. β_{Mz} et β_{My} sont les facteurs de moment uniforme équivalent pour le flambement par flexion. Si le déversement représente un mode potentiel de ruine, il faut également vérifier :

$$\frac{N}{\chi_z \frac{N_{pl}}{\gamma_{M1}}} + \frac{k_{LT} M_y}{\chi_{LT} \frac{M_{ply}}{\gamma_{M1}}} + \frac{K_z M_z}{\frac{M_{plz}}{\gamma_{M1}}} \leq 1 \quad (7.79)$$

où $K_{LT} = 1 - \frac{\mu_{LT} N}{\chi_z A F_y}$, $K_{LT} \leq 1$, $\mu_{LT} = 0,15 \bar{\lambda}_z \beta_{MLT} - 0,15$ avec $\mu_{LT} \leq 0,9$. $\mu_{LT} = 0,15 \bar{\lambda}_z \beta_{MLT} - 0,15$ et $\mu_{LT} \leq 0,9 \beta_{MLT}$.
est le facteur de moment uniforme équivalent pour le déversement. Les autres

paramètres étant :

N : Effort normal en général

N_{pl} : Effort normal de plastification

N_K : Effort critique d'Euler

W_{el} : Module de résistance élastique

W_{pl} : Module de résistance plastique

β_M : Facteur de moment uniforme (flambement)

χ : Coefficient de réduction de flambement

χ_{LT} : Coefficient de réduction de déversement

Sections de classe 3

Les formules établies pour les sections de classes 1 et 2, que ce soit avec ou sans risque de déversement, restent valables à la condition de remplacer $M_{pl} = W_{pl} F_y$ par $M_{el} = W_{el} F_y$.

7.12.3 Longueurs de flambement

La longueur de flambement l_K d'un élément peut être déterminée en fonction de la longueur nominale l_0 et des facteurs de distribution de rigidité η_1 et η_2 respectivement en tête et au pied du poteau (voir Figure 7-8) tel que :

$$\eta_1 = \frac{K_c + K_1}{K_c + K_1 + K_{11} + K_{12}} \quad (7.80)$$

$$\eta_2 = \frac{K_c + K_2}{K_c + K_2 + K_{21} + K_{22}} \quad (7.81)$$

où :

K_c : rigidité du poteau concerné = $\frac{I}{l_o}$

K_1 et K_2 : rigidité des poteaux adjacents

K_{ij} : rigidité des poutres associées au nœud considéré

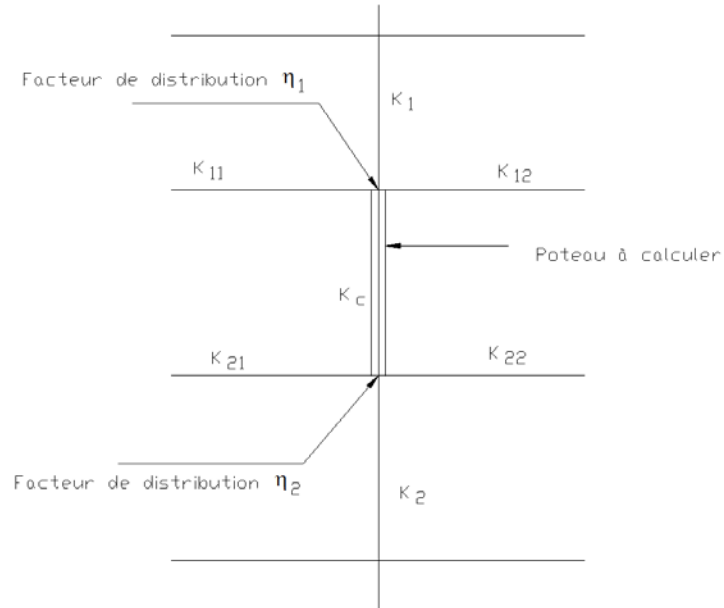


Figure 7-8 : Poteau faisant partie d'une structure à étages

Après avoir déterminé les facteurs de distribution de rigidité η_1 et η_2 , on peut déterminer le rapport $\frac{l_K}{l_o}$ à partir de l'expression :

$$\frac{l_K}{l_o} = \left[\frac{1 - 0,2(\eta_1 + \eta_2) - 0,12 \eta_1 \eta_2}{1 - 0,8(\eta_1 + \eta_2) - 0,6 \eta_1 \eta_2} \right]^{0,5} \quad (7.82)$$

pour les structures à nœuds déplaçables et

$$\frac{l_K}{l_o} = \left[\frac{1 + 0,145(\eta_1 + \eta_2) - 0,265 \eta_1 \eta_2}{2 - 0,364(\eta_1 + \eta_2) - 0,247 \eta_1 \eta_2} \right] \quad (7.83)$$

pour les structures à nœuds fixes.

7.13 CLASSIFICATION DE LA SECTION TRANSVERSALE DES PIÈCES

La classification des sections transversales est basée sur les facteurs suivants :

- Élancement des parois;
- Résistance de calcul;
- Capacité de rotation plastique;
- Risque de voilement local.

Quatre classes sont définies, allant de la section 1 (la plus performante) à la section 4 (la moins performante), soit :

Sections de classe 1 : Sections transversales pouvant atteindre leur résistance plastique, sans risque de voilement local et possédant une capacité de rotation importante pour former une rotule plastique.

Sections de classe 2 : Sections transversales pouvant atteindre leur résistance plastique, sans risque de voilement local, mais avec une capacité de rotation limitée.

Sections de classe 3 : Sections transversales pouvant atteindre leur résistance élastique en fibre extrême, mais non leur résistance plastique du fait des risques de voilement local.

Sections de classe 4 : Sections transversales ne pouvant atteindre leur résistance élastique du fait des risques de voilement local.

7.14 FLAMBEMENT DES CADRES RIGIDES

7.14.1 Mise en contexte

Les membrures en compression font souvent partie des cadres simples ou multiples, les extrémités de ces membrures étant retenues élastiquement par les membrures qui sont connectées à leurs extrémités. Dans la plupart des cas de structures composées de cadres, les membrures sont connectées de façon rigide, pour former ce qui est appelé communément cadres rigides. Dans un cadre rigide, il n'y a pas de possibilité pour une membrure de flamber de façon individuelle, sans que les autres membrures qui forment le cadre, se déforment elles aussi. En d'autres termes, les retenues élastiques aux extrémités d'une membrure en compression ne dépendent pas uniquement des membrures qui sont connectées directement à ces extrémités, mais aussi, de chaque membrure qui fait partie du cadre. Donc il est nécessaire, dans les problèmes relatifs à la stabilité, d'investiguer le comportement de l'ensemble de la structure.

Dans toute question liée à l'aspect de la stabilité des structures d'acier, les ingénieurs doivent déterminer si la structure étudiée est de type « contreventée » ou « non-contreventée ». Les spécifications **AISC LRFD** soulignent qu'une structure peut être qualifiée de « contreventée » lorsque la stabilité latérale est assurée par des diagonales, mur de cisaillement ou par des moyens équivalents. Toutefois, il n'existe pas de disposition spécifique en ce qui a trait à la

rigidité nécessaire pour empêcher la structure de se déplacer latéralement (structure contreventée). (Galambos, 1964; Salmon & Johnson, 1990) ont dérivé une formule simple pour évaluer la rigidité latérale minimale à fournir par un système de contreventement pour pouvoir qualifier la structure de « contreventée » telle que :

$$T_k = \frac{\sum P_n}{L_c} \quad (7.84)$$

où $\sum P_n$ représente la somme de toutes les résistances axiales en compression des poteaux se trouvant à un étage, déterminées en se basant sur un facteur de la longueur effective $K = 1,0$; L_c est la longueur non supportée du poteau. (Galambos, 1964) a appliqué l'expression (7.84) au cadre contreventé montré à la Figure 7-9 pour déterminer l'aire minimale requise des diagonales du système de contreventement en "X" et telles que données par :

$$A_b = \frac{\left[1 + (L_b/L_c)^2\right]^{3/2} \sum P_n}{(L_b/L_c)^2 E} \quad (7.85)$$

où A_b est l'aire de la section transversale de chaque diagonale du cadre contreventé, L_b , la portée de la poutre et E , le module d'élasticité de l'acier. D'après (Aristizabal-Ochoa, 1994), l'aire de la section transversale de la diagonale du cadre contreventé est d'environ 5.1% de l'aire de la section transversale du poteau.

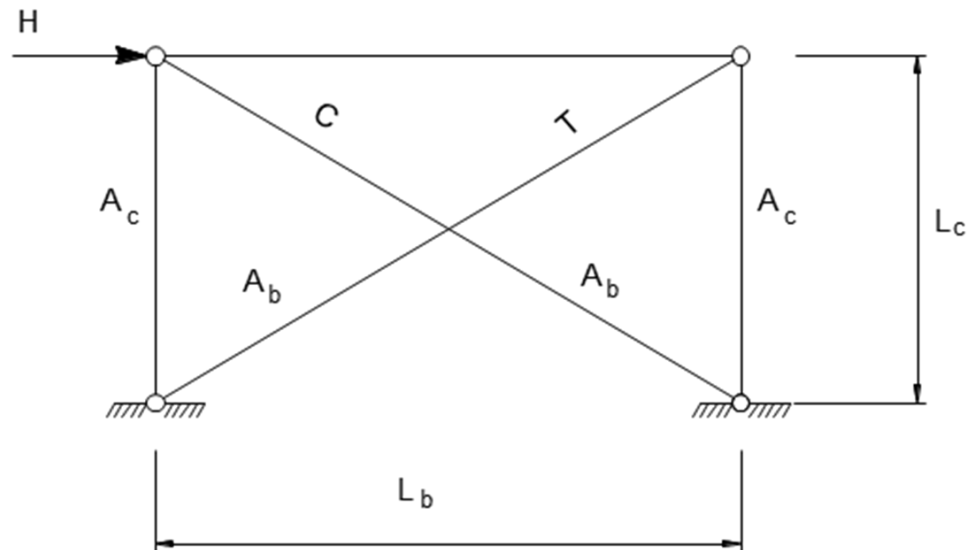


Figure 7-9 : Cadre contreventé en "X"

7.14.2 Modes de flambement

Examinons le cas d'un cadre rigide simple (une travée et un étage), montré sur la Figure 7-10. Les charges extérieures P agissent directement sur les poteaux de façon à ne pas avoir de flexion dans les membrures avant l'atteinte du flambement. Dans l'analyse des cadres, il est utile de les diviser en deux catégories : les cadres empêchés de se déplacer latéralement (cadres a et b, Figure 7-10) et les cadres libres de se déplacer latéralement (cadres c et d, Figure 7-10). Pour le cas où le cadre est empêché de se déplacer latéralement lorsque la charge critique est atteinte, le flambement commence et le cadre va se déformer tel qu'indiqué sur les Figure 7-10a et Figure 7-10b. Dans le cas du cadre de la Figure 7-10a, il est évident que la charge critique du flambement est égale à la charge critique des poteaux. Aussi, on peut constater que la rigidité à la flexion des membrures connectées rigidement en têtes des poteaux joue un rôle important dans le comportement des cadres au moment du flambement. Le problème peut être simplifié si la poutre est considérée infiniment rigide. Dans ce cas, la poutre doit demeurer droite, tandis que le cadre se déforme (voir Figure 7-10a). Les têtes de poteaux ne subissent ni déplacement ni rotation. Dans ce

cas, les poteaux se comportent comme s'ils sont encastres aux deux extremités, et la charge critique du flambement du cadre est égale à quatre fois la charge critique d'Euler des poteaux.

En contrepartie, si la poutre est infiniment flexible, elle ne pourra fournir aucune retenue à la rotation pour les têtes des poteaux (Figure 7-10b). Dans ce cas, les poteaux se comportent comme s'ils étaient encastres à leur base et articulés en tête; la charge critique du flambement du cadre est alors égale à environ deux fois la charge critique d'Euler, des poteaux. En pratique, la flexibilité de la poutre sera située entre ces deux cas extrêmes, et donc :

$$2P_e \leq P_{cr} \leq 4P_e \quad (7.86)$$

où P_{cr} est la valeur critique de la charge appliquée et $P_e = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$ est la charge critique d'Euler pour un poteau articulés aux extremités. Pour les cadres libres de se déplacer latéralement, on pourra suivre le même raisonnement utilisé dans le cas des cadres empêchés de se déplacer latéralement. Si la poutre est infiniment rigide, le cadre va atteindre le flambement tel que montré à la Figure 7-10c, les têtes des poteaux sont libres de se déplacer latéralement mais ne peuvent pas subir de grandes rotations en raison de la très grande rigidité flexionnelle de la traverse (c'est comme si la poutre dans le cadre rigide devient pratiquement une poutre simple, où les moment négatifs aux extremités de la traverse sont relativement petits). En contrepartie, la charge critique du flambement du cadre est égale à la charge d'Euler des poteaux. D'un autre côté, si la poutre est infiniment flexible, les têtes des poteaux sont libres de se déplacer latéralement et subissent de grandes rotations (Figure 7-10d). Dans ce cas, la charge critique du cadre est égale à 25% de la charge critique obtenu du cadre montré sur la Figure 7-10c. Donc, la charge critique du flambement des cadres libres de se déplacer latéralement, peut être exprimée par :

$$P_e/4 \leq P_{cr} \leq P_e \quad (7.87)$$

La comparaison des résultats obtenus de (7.86) pour une configuration symétrique du flambement, avec les résultats obtenus de (7.87), pour une configuration du flambement accompagnée de déplacement latéral, indique que les charge nécessaires pour produire un flambement symétrique, sont plus importantes que celles nécessaires pour produire un flambement accompagné de déplacement latéral et ce, indépendamment de la rigidité de la membrure. On peut donc conclure que le cadre montré à la Figure 7-10, va flamber suivant une configuration déplacée latéralement, à moins qu'il ne soit contreventé. Il a été montré par (Bleich, 1952) que cette conclusion est valide pour les cadres à étages.

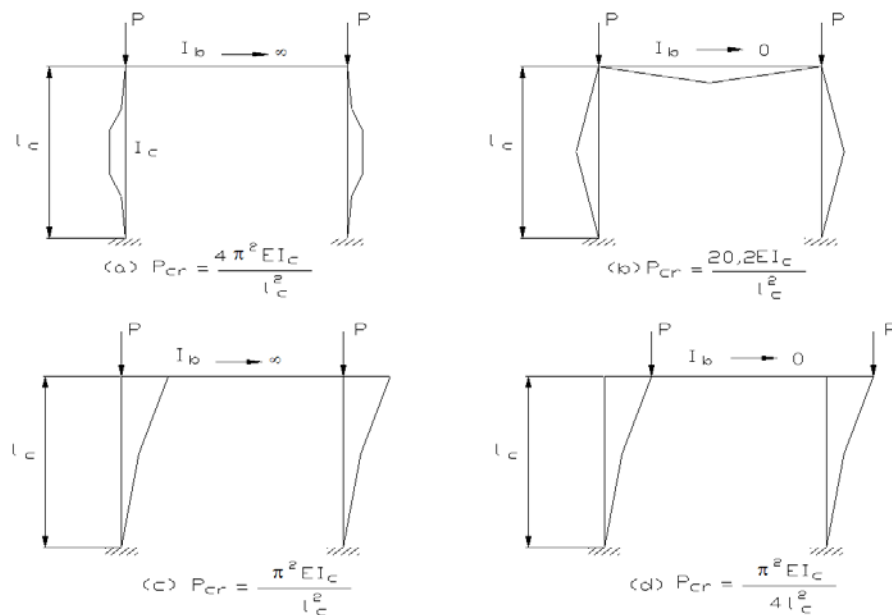


Figure 7-10 : Modes de flambement d'un cadre rigide simple

7.15 CHARGE CRITIQUE D'UN CADRE RIGIDE – MÉTHODE DE L'ÉQUILIBRE NEUTRE

7.15.1 Déplacement latéral permis

Le cadre montré à la Figure 7-11a est encastré à la base et libre de se déplacer latéralement en tête. Il est supposé que les déformations demeurent petites et il n'y a pas de flexion dans le cadre avant le flambement. La configuration du cadre au moment du flambement est montrée sur la Figure 7-11a. Les forces qui agissent sur chacune des membrures individuelles du cadre déformé, sont montrées sur la Figure 7-11b. À noter que l'effort tranchant V qui provient de la flexion de la membrure horizontale est négligeable par rapport à l'intensité de la charge appliquée P . L'équation d'équilibre associée au moment pour la membrure verticale (voir Figure 7-11c), est donnée par :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k_1^2 y = \frac{M_A}{EI_1} \quad (7.88)$$

où, $k_1^2 = P/EI_1$ la solution générale de l'équation devient :

$$y = A \sin k_1 x + B \cos k_1 x + \frac{M_A}{P} \quad (7.89)$$

À partir des conditions aux limites $y(0) = 0$ et $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 0$, nous pouvons déterminer les

constantes A et B telles que : $A = 0$ et $B = -\frac{M_A}{P}$. La déformée s'exprime donc par :

$$y = \frac{M_A}{P} (1 - \cos k_1 x) \quad (7.90)$$

Désignant le déplacement latéral en tête du poteau à $x = l_1$ par δ , (7.90) peut être écrite sous la forme :

$$\delta = \frac{M_A}{P}(1 - \cos k_1 l_1) \quad (7.91)$$

L'équilibre du moment exige que :

$$\delta = \frac{M_A + M_B}{P} \quad (7.92)$$

La substitution de cette relation dans (7.91), donne :

$$M_A \cos k_1 l_1 + M_B = 0 \quad (7.93)$$

L'application des équations de la méthode des rotations à la membrure horizontale donne :

$$M_B = \frac{2EI_2}{l_2}(2\theta_B + \theta_C) \quad (7.94)$$

et étant donné que $\theta_B = \theta_C$, (7.94) devient :

$$M_B = \frac{6EI_2}{l_2}\theta_B \quad (7.95)$$

La condition de la compatibilité des déformations au nœud B, exige que θ_B soit égale à $\frac{dv}{dx} x = l_1$. Donc, (7.93) et (7.94) peuvent être réécrits respectivement sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{M_B l_2}{6EI_2} &= \frac{M_A}{k_1 EI_1} \sin k_1 l_1 \\ \frac{6I_2}{k_1 I_1 I_2} M_A \sin k_1 l_1 - M_B &= 0 \end{aligned} \quad (7.96)$$

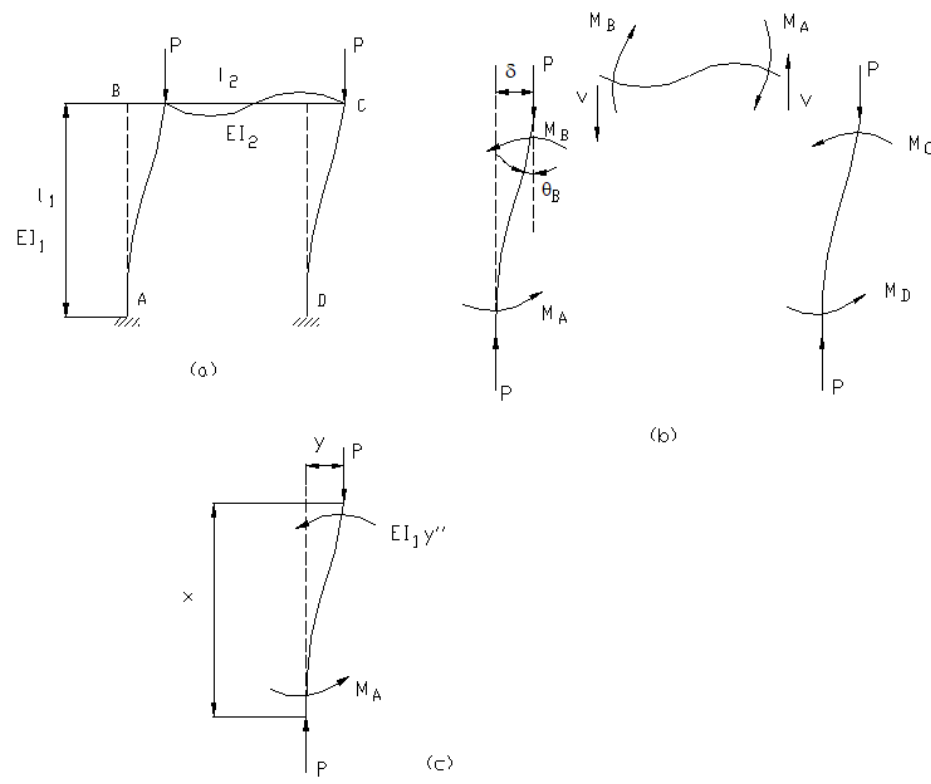


Figure 7-11 : Flambement avec déplacement latéral

Les expressions (7.93) et (7.96) représentent les conditions d'équilibre pour le cadre. De façon générale, un cadre qui comprend n membrures, aura besoin de n équations. Toutefois, dans notre cas, les membrures verticales sont identiques, et deux équations s'avèrent suffisantes. Pour déterminer la condition de la stabilité, nous posons le déterminant (atteinte de l'instabilité) de (7.93), égal à zéro, ce qui donne :

$$\frac{\tan k_1 l_1}{k_1 l_1} = -\frac{I_1 l_2}{6 I_2 l_1} \quad (7.97)$$

La charge critique est définie par la plus petite racine de cette équation. Si on suppose que $I_1 = I_2 = I$ et $l_1 = l_2 = l$, (7.97) peut être écrite sous la forme :

$$\frac{\tan(kl)}{kl} = -\frac{1}{6} \quad (7.98)$$

ce qui donne $kl = 2,71$ et $P_{cr} = \frac{7,34EI}{l^2}$, ce qui représente la charge critique du flambement d'un cadre rigide simple encastré à la base et libre de se déplacer latéralement en tête.

7.15.2 Déplacement latéral empêché (flambement symétrique)

Si le cadre est empêché de se déplacer latéralement, le flambement aura lieu suivant la configuration symétrique montrée sur la Figure 7-12a. Lorsque ce mode de flambement est atteint, les forces qui agissent sur les membrures individuelles, sont montrées sur la Figure 7-12b. L'équilibre des moments pour la membrure verticale, Figure 7-12c exige que :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k_1^2 = \frac{M_A}{EI_1} \left(1 - \frac{x}{l_1}\right) + \frac{M_B}{EI_1} \left(\frac{x}{l_1}\right) \quad (7.99)$$

avec $k_1^2 = P/EI_1$. La solution de l'équation (7.99) est donnée par :

$$y = A \sin k_1 x + B \cos k_1 x + \frac{M_A}{P} \left(1 - \frac{x}{l_1}\right) + \frac{M_B}{P} \left(\frac{x}{l_1}\right) \quad (7.100)$$

Des conditions $y(0) = 0$ et $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 0$, on obtient les constantes $B = -\frac{M_A}{P}$ et $A = \frac{M_A - M_B}{k_1 P l_1}$

. Donc, (7.100) devient :

$$y = \frac{M_A}{P} \left(\frac{1}{k_1 l_1} \sin k_1 x - \cos k_1 x + 1 - \frac{x}{l_1} \right) + \frac{M_B}{P} \left(\frac{x}{l_1} - \frac{1}{k_1 l_1} \sin k_1 x \right) \quad (7.101)$$

Étant donné que la structure ne peut pas se déplacer latéralement, donc $y(l_1) = 0$. L'équation (7.87) est donc est réduite à :

$$M_A (\sin k_1 l_1 - k_1 l_1 \cos k_1 l_1) + M_B (k_1 l_1 - \sin k_1 l_1) = 0 \quad (7.102)$$

De façon similaire, une deuxième équation est obtenue en considérant la membrure horizontale. L'application des équations de la méthode de rotation, donne :

$$M_B = \frac{2EI_2}{l_2} (2\theta_B + \theta_c) \quad (7.103)$$

Étant donné que $\theta_B = -\theta_c$, (7.103) devient :

$$M_B = \frac{2EI_2}{l_2} \theta_B \quad (7.104)$$

La compatibilité des rotations au joint B, exige que θ_B pour la membrure horizontale soit égale à $-\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=l_1} = 0$ de la membrure verticale et donc :

$$\frac{M_B I_2}{2EI_2} = -\frac{M_A}{P} \left(\frac{1}{l_1} \cos k_1 l_1 + k_1 \sin k_1 l_1 - \frac{1}{l_1} \right) - \frac{M_B}{P} \left(\frac{1}{l_1} - \frac{1}{l_1} \cos k_1 l_1 \right) \quad (7.105)$$

Et,

$$M_A (\cos k_1 l_1 + k_1 l_1 \sin k_1 l_1 - 1) + M_B \left(1 - \cos k_1 l_1 + \frac{I_1 l_1 k_1^2 l_2}{2I_2} \right) = 0$$

Pour obtenir la condition de la stabilité, nous posons le déterminant de (7.102) égal à zéro, ce qui donne :

$$2 - 2 \cos k_1 l_1 - k_1 l_1 \sin k_1 l_1 + \frac{l_2 I_1 k_1}{2 I_2} (\sin k_1 l_1 - k_1 l_1 \cos k_1 l_1) = 0 \quad (7.106)$$

La charge critique est définie par la plus petite racine de (7.106). Si on suppose que $I_1 = I_2 = I$ et $l_1 = l_2 = l$, nous obtenons : $kl \sin kl + 4 \cos kl + k^2 l^2 \cos kl = 4$, ce qui donne $kl = 5,02$ et $P_{cr} = \frac{25,2EI}{l^2}$, ce qui représente la charge critique du flambement d'un cadre encastré à la base, et dont toutes les membrures ont la même rigidité. Le cadre est alors empêché de se déplacer latéralement. On constate que dans ce cas, la charge critique du flambement est considérablement plus élevée que la charge critique du flambement d'un cadre similaire, libre de se déplacer latéralement. Ceci s'explique par le fait que la configuration de la déformée du cadre au moment où le flambement est atteint se rapproche du cas d'une membrure chargée de façon concentrique et dont ses extrémités ne subissent aucun déplacement latéral.

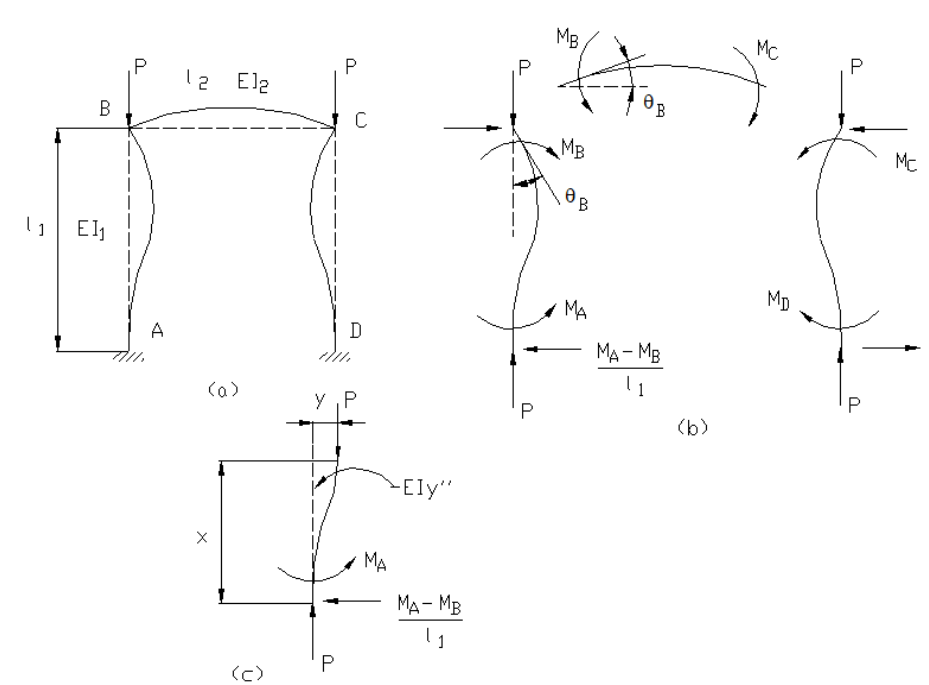


Figure 7-12 : Flambement symétrique d'un cadre rigide simple

7.16 CHARGE CRITIQUE D'UN CADRE RIGIDE – MÉTHODE DES ROTATIONS

L'application des équations différentielles ainsi que les équations de la méthode des rotations pour des cadres à plusieurs travées et à plusieurs étages, peut s'avérer très fastidieux. Toutefois, il a été démontré (Winter, Hsu, Koo, & Loh, 1948) qu'une réduction significative de la complexité des calculs peut être obtenue, si on utilise les équations de la méthode des rotations des membrures chargées axialement, pour chaque membrure du cadre. Pour illustrer cette méthode, nous allons considérer le cadre à deux étages, montré sur la Figure 7-13. Le cadre est empêché de se déplacer latéralement, et la rigidité à la flexion EI/l est la même pour toutes les membrures du cadre. Le cadre est donc complètement symétrique et une seule moitié de la structure sera retenue pour l'analyse. En posant $K = EI/l$, les moments s'expriment par :

$$\begin{aligned}
 M_{BA} &= K(\alpha_{n1}\theta_B) \\
 M_{BE} &= K(\alpha_{n2}\theta_B + \alpha_{f2}\theta_E) \\
 M_{BC} &= K(\alpha_{n3}\theta_B + \alpha_{f3}\theta_C) \\
 M_{CB} &= K(\alpha_{n3}\theta_C + \alpha_{f3}\theta_B) \\
 M_{CD} &= K(\alpha_{n4}\theta_C + \alpha_{f4}\theta_D) \\
 \alpha_n &= \frac{\phi_n}{\phi_n^2 - \phi_f^2}, \quad \alpha_f = \frac{\phi_f}{\phi_n^2 - \phi_f^2} \\
 \phi_n &= \frac{1}{(Kl)^2}(1 - Kl \cos Kl) \\
 \phi_f &= \frac{1}{(Kl)^2}(Kl - \csc Kl - 1)
 \end{aligned} \tag{7.107}$$

Étant donné que les deux membrures horizontales ne sont pas chargées axialement, $\alpha_{n2} = \alpha_{n4} = 4$ et $\alpha_{f2} = \alpha_{f4} = 2$. De plus, en raison de la symétrie, nous avons : $\theta_C = -\theta_B$ et $\theta_D = -\theta_C$. Donc, les expressions (7.107) deviennent :

$$M_{BA} = K(\alpha_{n1}\theta_B)$$

$$M_{BE} = K(2\theta_B)$$

$$M_{BC} = K(\alpha_{n3}\theta_B + \alpha_{f3}\theta_C) \quad (7.108)$$

$$M_{CB} = K(\alpha_{n3}\theta_C + \alpha_{f3}\theta_B)$$

$$M_{CD} = K(2\theta_C)$$

Les équations d'équilibre des moments aux nœuds B et C, étant :

$$M_{BA} + M_{BE} + M_{BC} = 0 \quad (7.109)$$

et

$$M_{CB} + M_{CD} = 0 \quad (7.110)$$

La substitution des moments de (7.108) dans (7.109) et (7.110), donne :

$$\theta_B(\alpha_{n1} + \alpha_{n3} + 2) + \theta_C(\alpha_{f3}) = 0 \quad (7.111)$$

et

$$\theta_C(\alpha_{n3} + 2) + \theta_B(\alpha_{f3}) = 0 \quad (7.112)$$

Pour obtenir la condition de la stabilité, nous posons le déterminant du système matriciel obtenu de (7.111) et (7.112) à zéro, ce qui donne :

$$(\alpha_{n3} + 2)(\alpha_{n4} + \alpha_{n3} + 2) - (\alpha_{f3})^2 = 0 \quad (7.113)$$

L'équation (7.113) peut être résolue par essai et erreur. Étant donné que $K_1 = \sqrt{2P/EI}$, $K_3 = \sqrt{P/EI}$, il s'en suit que $K_1 = \sqrt{2}K_3$. Une procédure d'essais et erreurs permet d'obtenir : $K_3 l = 3,55$ et $P_{cr} = \frac{12,6EI}{l^2}$.

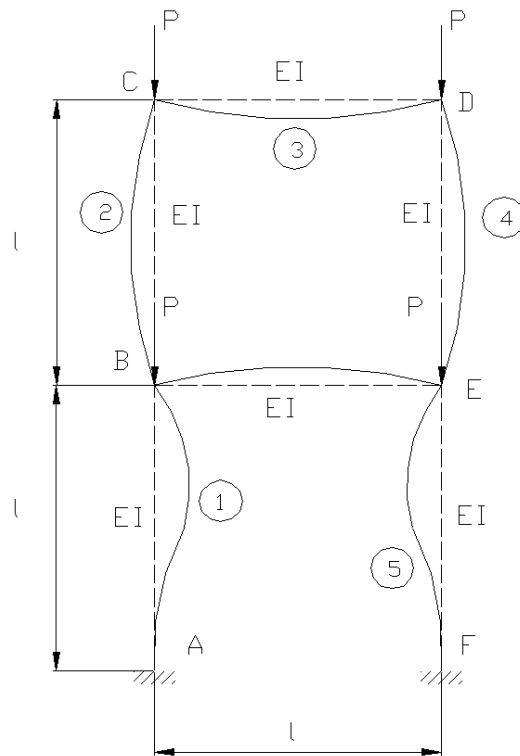


Figure 7-13 : Cadre à deux étages avec des membrures ayant les mêmes caractéristiques

CHAPITRE 8

COURBES DE RÉSISTANCE DES POTEAUX

8.1 GÉNÉRALITÉS

Les poteaux sont des membrures verticales utilisées pour la reprise de charges axiales de compression. On rencontre de tels éléments de structure dans les bâtiments où ils supportent des planchers, des toitures ou des ponts roulants. Lorsqu'ils sont en plus soumis à des moments de flexion significatifs, on parle d'éléments comprimés-fléchis (poutres-poteaux). Le terme « élément comprimé » s'applique aux composantes d'une structure soumise à des charges axiales de compression; il peut donc couvrir les poteaux (dans des conditions spéciales de chargement) mais se rapporte aussi aux pièces comprimées et biarticulées que l'on rencontre dans les treillis et les systèmes de contreventement. Les poteaux réels sont des membrures pour lesquelles les excentricités des charges axiales et surtout les charges transversales ne sont généralement pas négligeables.

Du fait de l'élancement relativement important de la plupart des membrures comprimées en acier, le flambement peut apparaître. Cette instabilité qui se caractérise par l'apparition d'un moment de flexion dans le poteau soumis à effort axial, doit être soigneusement vérifiée. Ce chapitre s'attarde à expliquer le comportement des poteaux trapus et élancés; il fournit également

le fondement des courbes de flambement, appelées aussi courbes de résistance des poteaux, utiles au dimensionnement des poteaux élancés

8.2 PRINCIPAUX TYPES DE MEMBRURES COMPRIMÉES

8.2.1 Membrures simples à section transversale uniforme

La capacité des éléments comprimés à transmettre des efforts importants de compression est liée à la valeur élevée du rayon de giration, r , correspondant à la direction de flambement considérée. A cet égard, les tubes circulaires représentent une solution optimale, dans la mesure où ils permettent de maximiser ce paramètre, quelle que soit la direction de flambement. Les assemblages impliquant de tels profils sont par contre coûteux et plutôt difficiles à dimensionner. Il est également possible de recourir à des sections tubulaires carrées ou rectangulaires (les tubes carrés constituent le meilleur choix) ; les assemblages sont plus simples à réaliser mais restent néanmoins coûteux. Les sections laminées à chaud sont en fait les sections les plus couramment utilisées pour les éléments comprimés. La plupart d'entre elles sont à ailes larges, ce qui les rend propices à la reprise d'efforts de compression. Leur allure carrée leur confère une valeur relativement élevée du rayon de giration transversal r et l'épaisseur de leurs ailes prévient l'instabilité par voilement local. Une attention toute particulière doit toutefois être accordée aux sections H à parois plus élancées, ou à haute limite d'élasticité. Les profils ouverts issus des techniques traditionnelles de laminage facilitent la réalisation des assemblages poutres-poteaux.

Les caissons soudés et les profils en H reconstitués par soudage peuvent également convenir, à condition de se prémunir contre le voilement prématuré des parois. Ils peuvent être dimensionnés pour reprendre les charges requises et sont faciles à assembler à d'autres éléments ; ils peuvent être renforcés à l'aide de plats de recouvrement soudés. Il convient de noter que :

- Le type d'assemblage utilisé est important en vue du dimensionnement des membrures simples comprimées dans la mesure où il détermine la valeur de la longueur effective de

flambement à prendre en considération. Les sections circulaires ne constituent donc pas la solution optimale si leurs longueurs effectives dans les deux directions principales de flambement ne sont pas identiques ; dans ce cas, les sections non symétriques doivent être préférées.

- Les membrures sont fréquemment soumises à des moments de flexion en plus du chargement axial. Les sections en I peuvent alors être préférées aux sections en H.

8.2.2 Compression pure sans instabilité

Les poteaux courts (ou trapus) sont caractérisés par un élancement très faible, ne sont pas influencés par les phénomènes d'instabilité et peuvent être dimensionnés sur la base de l'atteinte de la limite élastique F_y . Si aucune instabilité locale par voilement ne limite la résistance en compression (ce qui peut être supposé pour les sections transversales de classe 1, 2 ou 3 selon les spécifications **CSA/CAN S16-09**), le mode de ruine est conforme au comportement parfaitement plastique de la section transversale toute entière dans la mesure où il survient théoriquement lorsque la limite élastique du matériau F_y est atteinte dans chaque fibre. Il convient de noter que les contraintes résiduelles et les imperfections géométriques sont pratiquement sans effet sur la charge de ruine de ce type de poteau et que la plupart des pièces courtes testées expérimentalement atteignent la rupture pour des contraintes supérieures à la limite d'élasticité en raison de l'écroutissage. La résistance maximale P_{max} en compression est par conséquent égale à la résistance plastique de la section transversale telle que :

$$P_{max} = A_{eff} F_y \quad (8.1)$$

avec A_{eff} , l'aire effective de la section. Pour les sections de classe 4, l'aire effective est représentative des dimensions réduites de la section pour satisfaire les conditions d'élancement des parois relatives à une section de classe 3.

L'aire effective des sections transversales utilisées pour le dimensionnement des membrures comprimées, dans le cas des sections de classe 1, 2 ou 3, s'identifie à l'aire de la section brute calculée sur la base des dimensions nominales. Les trous, s'ils sont utilisés pour placer les organes d'assemblage, ne doivent pas être déduits.

8.2.3 Stabilité des poteaux élancés en acier

Les poteaux présentent, selon leur élancement, deux types différents de comportement : ceux dont l'élancement est élevé flambent quasiment dans le domaine élastique de comportement tandis que les autres, d'élancement intermédiaire, sont très sensibles aux imperfections géométriques. Le dimensionnement des poteaux fait un large usage des courbes de résistance des poteaux. Une courbe de résistance des poteaux est un tracé définissant la relation entre la résistance du poteau (charge ou contrainte), et le ratio de l'élancement du poteau KL/r .

La courbe de résistance pour un poteau parfaitement droit, dans le domaine élastique ou inélastique, peut être déterminée à l'aide des valeurs propres. Toutefois, les poteaux, dans les cas pratiques, sont rarement parfaitement droits. La détermination de la courbe de résistance d'un poteau avec des défauts de rectitude est très complexe et demande un recours à de laborieuses techniques numériques.

8.3 THÉORIE FONDAMENTALE DES POTEAUX

Le développement des formules de dimensionnement des poteaux est une longue et intéressante histoire qui remonte à environ 250 ans à l'époque des travaux de *Leonard Euler*. Les ingénieurs concepteurs ont, toujours, été conscients que le dimensionnement des membrures de dimensions pratiques, travaillant principalement en compression, n'est pas régi par un comportement dans le domaine élastique. Fondamentalement, il existe trois lignes directrices qui ont régis le dimensionnement des poteaux au courant des dernières 150 années, à partir de

l'époque qui a connu le commencement de l'utilisation des poteaux métalliques dans la construction :

1. Formules purement empiriques, basées sur des tests conduits aux laboratoires sur des sections et matériaux spécifiques.
2. Formules dérivées analytiquement qui tiennent compte des défauts et imperfections géométriques.
3. Formules basées sur la théorie du module tangent.

Durant les 100 dernières années, il a été reconnu que la résistance des poteaux dépend de la courbe contrainte/déformation du matériau, des contraintes résiduelles présentes dans les sections, de la forme de la section transversale, de l'excentricité de la charge appliquée et des inévitables imperfections géométriques. Multiple études et recherches ont été conduites pour définir des courbes qui décrivent la relation entre la contrainte critique et l'élancement de la membrure. Les spécifications techniques en Amérique du Nord des années 1960 et 1970, ont adopté le concept du module tangent comme base pour la conception et le dimensionnement des membrures travaillant en compression. La dérivation des formules de dimensionnement des poteaux est reliée à l'une des deux méthodes suivantes :

1. Méthode basée sur l'approche de la bifurcation (valeurs propres);
2. Méthode basée sur l'approche de la stabilité (relation charge-déplacement).

8.3.1 Méthode basée sur l'approche de la bifurcation

Pour les poteaux parfaitement droits, la charge qui correspond à l'état limite de l'équilibre, soit dans une configuration droite ou légèrement courbée, est déterminée à l'aide de la théorie linéaire des poteaux. Une équation différentielle linéaire est écrite pour la configuration légèrement déformée et la valeur propre de l'équation caractéristique de cette équation différentielle est sous la forme :

$$P_E = \frac{\pi^2 EA}{\left(\frac{KL}{r}\right)^2} \quad (8.2)$$

avec :

P_E : la charge critique d'Euler

E : le module d'élasticité de l'acier

A : l'aire de la section transversale

KL : la longueur effective du poteau

r : le rayon de giration de la section transversale dans le plan du flambement

La charge critique d'Euler P_E définit le point où la bifurcation de la position d'équilibre se produit pour un poteau qui se comporte de façon élastique, ce qui est montré sur la Figure 8-1 (courbe i). Lorsque la charge appliquée atteint P_E , le déplacement latéral δ va augmenter sans limite et le poteau atteint la ruine par instabilité élastique.

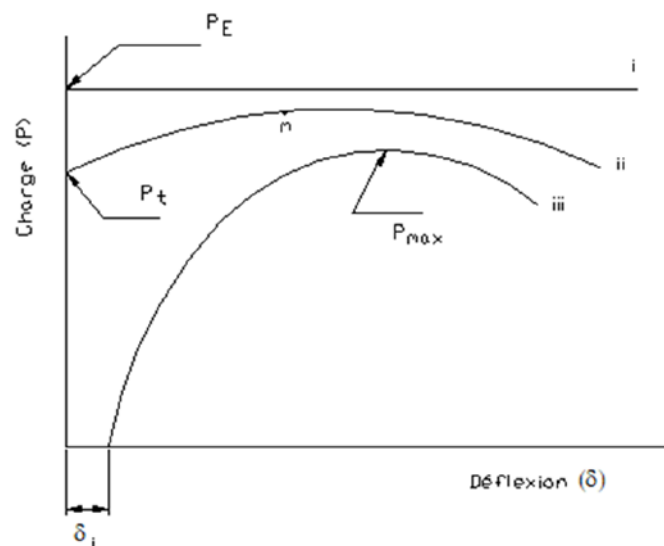


Figure 8-1 : Courbe charge/déflexion pour un poteau articulé aux extrémités

L'équation (8.2) est valide uniquement si la membrure est parfaitement droite et se comporte de façon élastique. Ce comportement est typique pour une membrure élancée où les contraintes de compression restent inférieures à la limite élastique du matériau. Lorsque les contraintes axiales de compression atteignent la limite élastique du matériau, la plasticité commence à prendre place. Pour des poteaux courts, c'est la charge qui correspond à la limite élastique, et non celle d'*Euler*, qui va contrôler le comportement du poteau. La Figure 8-2 montre une courbe typique d'*Euler* avec une limite supérieure correspondant à la limite élastique. La ligne continue sur la courbe donne la charge qui contrôle le comportement du poteau pour un niveau donné de l'élancement λ . Le paramètre de l'élancement λ est donné par :

$$\lambda = \frac{KL}{r} \sqrt{\frac{F_y}{E\pi^2}} \quad (8.3)$$

À partir des résultats des tests sur des poteaux en acier, les charges qui produisent le flambement pour des membrures avec des élancements intermédiaires sont inférieures à celles données par la courbe continue de la Figure 8-2. Cette réduction de la résistance est due principalement à la présence des contraintes résiduelles induites durant le processus de la fabrication. La Figure 8-3 montre la relation contrainte/déformation pour un acier structural. La courbe est obtenue d'un test sur un coupon (voir discontinuité sur la Figure 8-3) et d'un test sur un poteau trapu (ligne continue sur la Figure 8-3).

La courbe contrainte/déformation résultant d'un test sur un coupon d'acier structural, peut être représentée schématiquement comme étant parfaitement « élasto-plastique ». Étant donné que le coupon est libre de contraintes résiduelles, toutes les fibres demeurent élastiques jusqu'au moment où les contraintes appliquées atteindront la limite élastique. Après cette phase, la plastification commence à prendre place. D'un autre côté, la relation contrainte/déformation, pour un poteau trapu, montre que la limite élastique est atteinte graduellement. Ceci s'explique du fait que les fibres, qui ont déjà un état de contrainte résiduelle de compression, vont pouvoir atteindre la limite

de l'écoulement en premier, suivies par les fibres qui ont un état de contrainte résiduelle de traction, au fur et à mesure que les contraintes appliquées augmentent. Ainsi, l'écoulement est graduel. La pente de la courbe contrainte/déformation d'un poteau trapu est appelée module tangent, E_t . Pour prendre en considération l'effet des contraintes résiduelles, l'équation (8.2), peut être modifiée en remplaçant le module élastique E par le module tangent E_t , ce qui donne :

$$P_t = \frac{\pi^2 E_t A}{\left(\frac{KL}{r}\right)^2} \quad (8.4)$$

avec P_t , la charge correspondante au module tangent. Étant donné que la charge P_t est fonction de E_t et que E_t reflète l'influence des contraintes résiduelles, l'utilisation de la charge du module tangent prend en considération la non-linéarité du matériau.

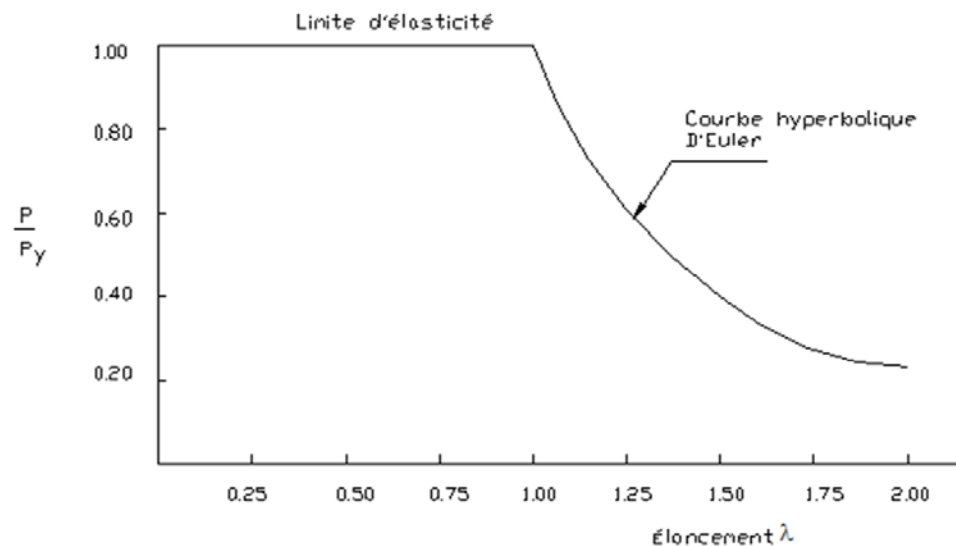


Figure 8-2 : Courbe d'Euler avec une limite élastique supérieure

À la place d'un test sur un poteau trapu, la charge relative au module tangent peut être déterminée analytiquement en supposant une distribution et des intensités des contraintes

résiduelles. En accord avec le concept qui stipule que la charge axiale et le moment de flexion augmentent simultanément lorsque la charge critique vient d'être atteinte et qu'au moment du flambement, aucune inversion des déformations ne pourra avoir lieu; seulement le noyau de la section demeurant effectif pour supporter la charge appliquée. Donc, la charge relative au module tangent peut être exprimée comme suit :

$$P_t = \frac{\pi^2 EA(I_e/I)}{\left(\frac{KL}{r}\right)^2} \quad (8.5)$$

avec I_e , le moment d'inertie de la partie élastique de la section. Le ratio I_e/I dépend de la distribution des contraintes résiduelles, de la géométrie de la section et de l'axe par rapport à lequel le flambement se produit. La charge critique correspondante au module tangent P_t marque le point à lequel les déformations latérales commencent, et ce, pour un poteau inélastique et parfaitement droit. Ce point est montré schématiquement sur la Figure 8-1, courbe ii. Il est possible de montrer qu'après l'atteinte de la charge P_t , une augmentation de la déflexion latérale δ est accompagnée d'une légère augmentation de la charge P , jusqu'à ce que le point M soit atteint. Après avoir atteint le point M, sur la courbe ii de la figure 8.1, la charge diminue pendant que la déformation latérale augmente. Finalement, le poteau atteint la ruine par instabilité latérale lorsque les déformations latérales deviennent excessives. Vu que la charge maximale (qui correspond au point M) est plus grande que P_t , la charge relative au module tangent représente une solution limite inférieure au problème des poteaux inélastiques et parfaitement droits.

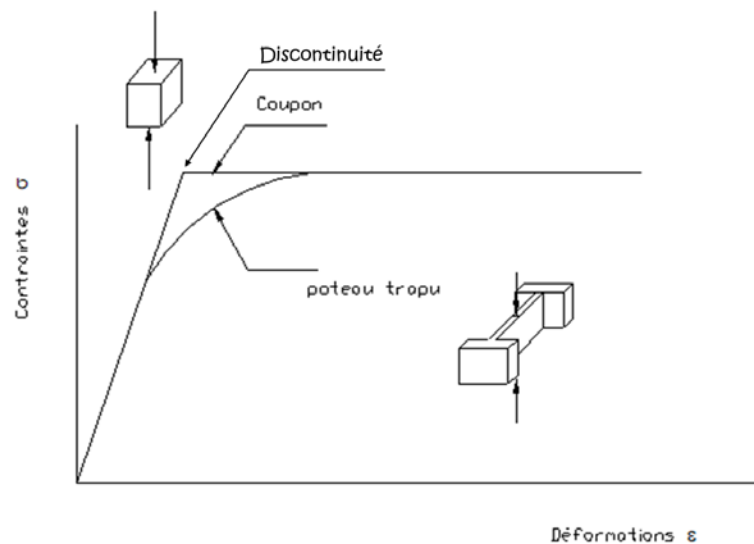


Figure 8-3 : Courbe contrainte/déformation pour l'acier

En 1972, (Bjorhovde, 1972) a mené une étude exhaustive pour examiner les caractéristiques déterministes et probabilistes de la résistance des poteaux en compression. À travers cette étude, *Bjorhovde* a développé une base élargie de données dédiée aux résistances maximales des membrures chargées concentriquement en compression. L'étude en question a couvert une grande plage de sections, grades d'acier et méthodes de fabrication utilisées couramment dans le domaine de la construction métallique. L'étude a démontré à partir de la construction de 112 courbes différentes de résistance, une grande variabilité de la résistance des poteaux. Des investigations parallèles et subséquentes à celle menée par *Bjorhovde*, ont confirmé l'existence de grande variabilité dans les résistances maximales des poteaux en compression (Birkmoe, 1977a, 1977b; Bjorhovde, 1988, 1991; Fukumoto, Nethercot, & Galambos, 1983; Kato, 1977).

Le développement des critères rationnels, représentatifs et suffisamment fiables de la résistance des poteaux en compression doit tenir compte de cette grande variabilité observée à travers les différentes études et recherches. Cet objectif peut être atteint soit par l'utilisation d'une courbe moyenne de la bande de variation des résistances, ou en subdivisant cette bande de

variation en différents sous-groupes de courbes, et en identifiant une courbe moyenne pour chaque sous-groupe. Cette deuxième approche est à l'origine du concept des courbes multiples de résistance des poteaux (Bjorhovde, 1972; Bjorhovde & Tall, 1971).

Les recherches et développement conduisant à l'utilisation des courbes multiples de résistance ont été poursuivis durant une trentaine d'années entre les années 1950 et les années 1980. En 1959, les normes allemandes **DIN 4114** ont introduit une courbe spéciale pour les sections tubulaires et une autre courbe identifiée aux autres sections. Subséquemment, les travaux menés sous les auspices de la convention européenne de la construction métallique (**CECM**) (Beer & Schultz, 1970; Jacquet, 1970; Sfintesco, 1970) ont mené à l'adoption des courbes de résistance des poteaux dans différents standards techniques à travers le monde. Les courbes du **CECM** dans leur forme modifiée, font partie d'**Eurocode 3**, EN 1993 (calcul des structures en acier). L'Association canadienne de normalisation, dans ses éditions de 1974, 1981 et 1994, a adopté les courbes du SSRC (Structural Stability Research Council). Les principales recherches relatives au développement des courbes multiples de résistance des poteaux en Amérique du nord, ont été conduites à l'Université de Lehigh à partir des années 1960.

La résistance maximale des poteaux d'acier dépend, en plus de la longueur de flambement, de la propriété des sections et des matériaux (F_y et E), de la magnitude et de la distribution des contraintes résiduelles, de la forme et la magnitude des défauts de rectitude, de la nature et de la rigidité des retenues aux extrémités des membrures. Ces trois derniers effets doivent être considérés dans toute procédure conduisant au dimensionnement des membrures travaillant en compression. L'état actuel de la recherche, fait de sorte que si ces informations sont disponibles, des calculs exacts peuvent être conduits pour déterminer la résistance maximale des poteaux (Bjorhovde, 1972, 1978; Chen & Lui, 1985).

La résistance maximale peut être calculée en adoptant des idéalizations convenables et réalistes de façon à dériver des expressions algébriques, ou d'autres techniques numériques. Les contraintes résiduelles et les défauts de rectitude sont des propriétés aléatoires, et des données

statistiques complètes font encore aujourd'hui défauts. En particulier, les données relatives aux retenues aux extrémités des membrures en termes de courbes relatant la relation $M - \varphi$, sont limitées, due au fait de la grande variété des assemblages utilisés dans les constructions d'acier. Beaucoup de recherches ont été conduites pour évaluer les effets des retenues aux extrémités des membrures, sur la résistance maximale en compression (Ackroyd & Bjorhovde, 1981; Chapuis & Galambos, 1982; Chen, 1980). Le modèle de base qui continue à être utilisé dans les différentes investigations et recherches est celui d'un poteau rotulé aux deux extrémités et chargé concentriquement. Les études qui ont été faites pour obtenir les courbes multiples de résistance, ont utilisé ce modèle. Grâce aux études menées par (Bjorhovde, 1972), des expressions algébriques ont été dérivées pour définir trois courbes de résistance représentatives de l'ensemble des résultats. Il s'agit en fait des courbes de résistance du SSRC telles que montrées aux Figure 8-4 à Figure 8-7.

Néanmoins, le **CRC** (Column Research Council) recommande la charge relative au module tangent comme étant la charge ultime à laquelle les poteaux peuvent atteindre la ruine dans le domaine inélastique. L'utilisation de (8.3), combinée avec une hypothétique distribution des contraintes résiduelles, peut conduire à générer des courbes relatives au module tangent et ce, pour des sections idéales en I (dans les sections en I , la contribution de l'âme à la résistance est négligée).

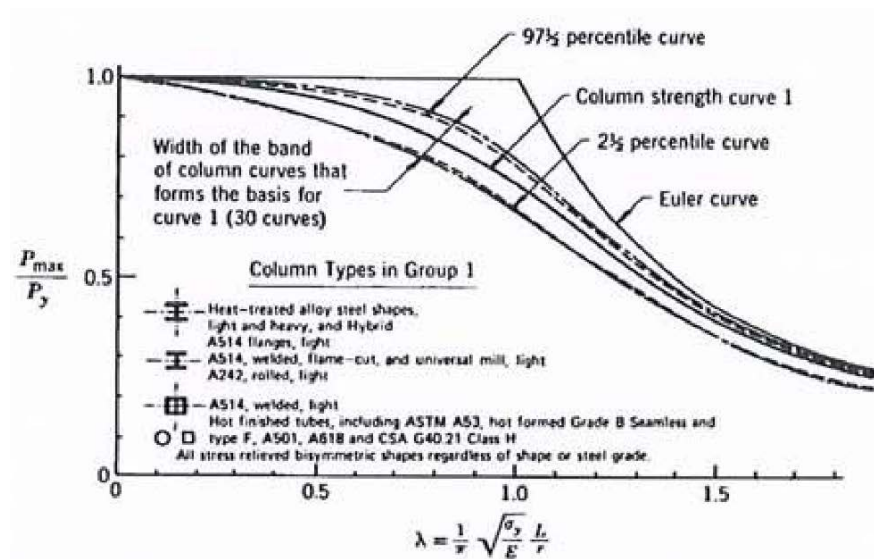


Figure 8-4 : Courbe 1 du SSRC

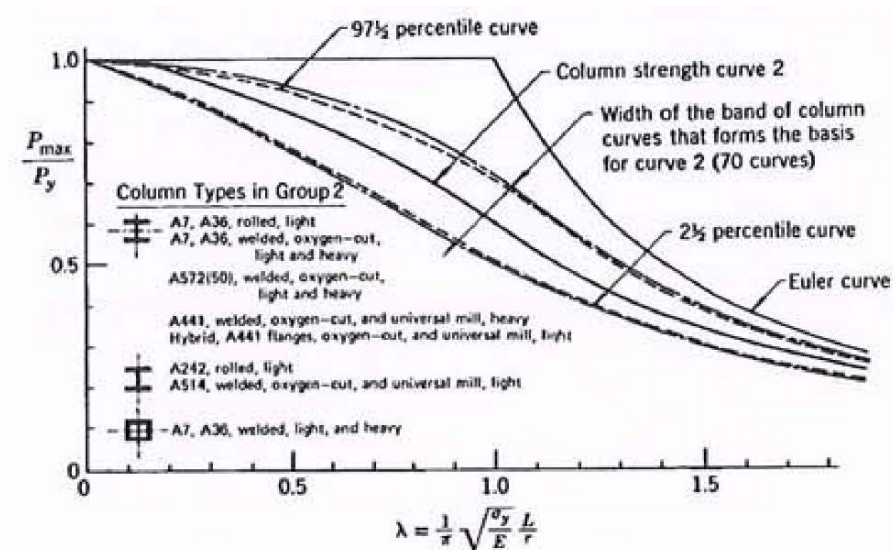


Figure 8-5 : Courbe 2 du SSRC

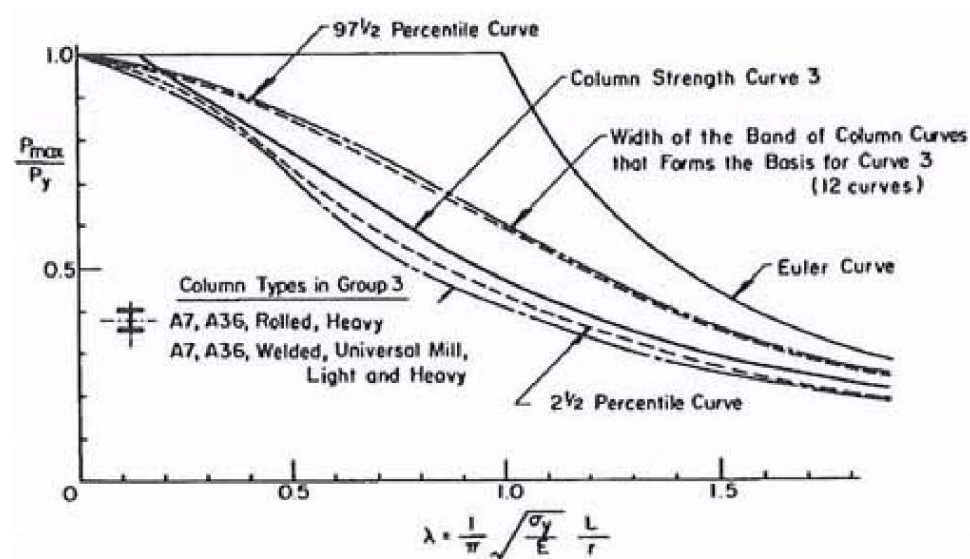


Figure 8-6 : Courbe 3 du SSRC

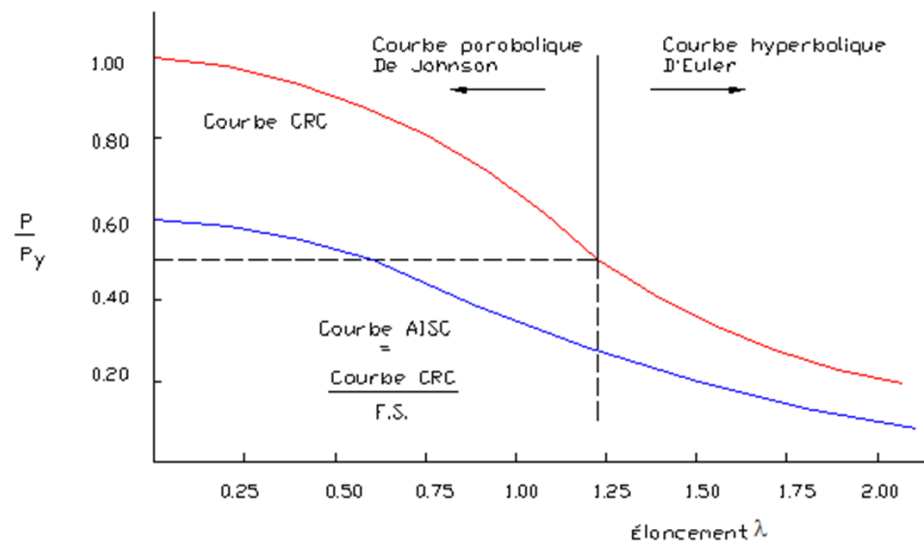


Figure 8-7 : Courbes de la résistance des poteau suivant CRC et AISC

8.3.2 Méthode basée sur l'approche de la stabilité

Les hypothèses à la base de l'approche de la bifurcation, sont : (1) le poteau est supposé parfaitement droit; (2) seule la charge critique qui correspond au point de la bifurcation de la position d'équilibre est obtenue. Par contre, l'approche basée sur la stabilité prend en considération le fait que (1) le poteau peut présenter des défauts géométriques; (2) la courbe complète charge/déplacement, qui commence avec le début du chargement jusqu'à la ruine finale, est tracée à l'aide de techniques numériques. La capacité portante maximale du poteau est obtenue à partir du point qui représente le pic de la courbe charges/déplacement. Une de ces courbes charges/déplacement est montrée sur la Figure 8-1 (courbe iii). À la différence d'un poteau parfaitement droit, un poteau avec des défauts de rectitude commence à fléchir dès l'application de la charge. Pour obtenir la courbe de la résistance du poteau, un certain nombre de ces courbes charge/déflexion doivent être tracées. Chacune de ces courbes est évaluée pour un ratio spécifique L/r . La charge maximale obtenue de chaque courbe établit un point sur la courbe de la résistance du poteau. Lorsqu'on obtient suffisamment de points, la courbe du poteau peut être tracée par lissage des courbes. Cette procédure est montrée schématiquement sur la Figure 8-8.

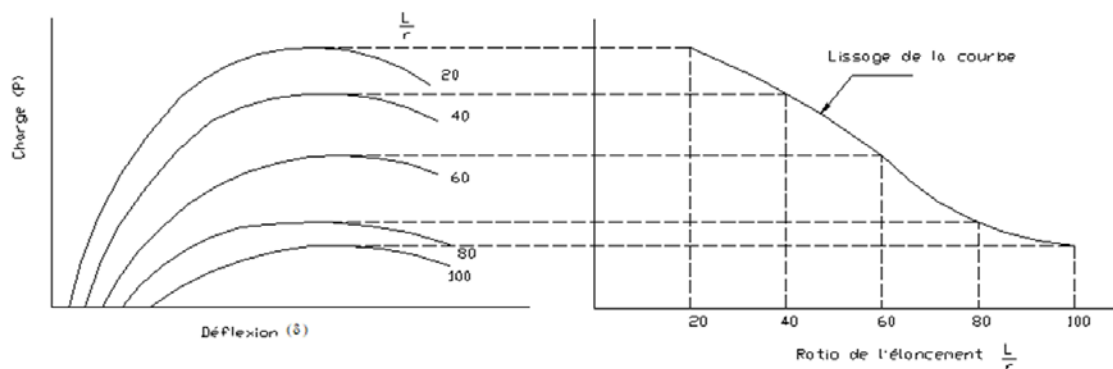


Figure 8-8 : Détermination de la courbe de résistance du poteau à partir des courbes charge/déflexion, pour un poteau avec des défauts de rectitude initiaux

À noter que cette procédure est très laborieuse et demande beaucoup de temps, de sorte que l'utilisation des techniques numériques s'avère souvent nécessaire pour tracer les courbes charge/déflexion. En plus, vu que seuls des points sont obtenus sur la courbe du poteau, le lissage de la courbe à travers les différents points est nécessaire pour décrire la relation entre la charge P et l'élancement L/r . Ceci est en contraste avec l'approche basée sur la bifurcation, dans laquelle la charge est obtenue directement en fonction de l'élancement avec la solution des équations qui décrivent la déformée.

Le développement des courbes des poteaux avec des défauts de rectitude est obtenu par (Bjorhovde & Tall, 1971), sur la base d'un modèle sur ordinateur développé pour un poteau qui représente des défauts géométriques caractérisés par un défaut de verticalité à mi-longueur, égal à $0,001L$ incluant de vraies valeurs mesurées des contraintes résiduelles. Un ensemble composé de trois courbes multiples a été développé pour un total de 112 poteaux investigués. Chacune de ces courbes représente la résistance en rapport avec une catégorie de poteaux. Dans les catégories couvertes par ces courbes, on trouve des membrures laminées à chaud, d'autres formées à froid, des sections tubulaires ainsi que des sections composées de plaques. Le **SSRC**, dans sa troisième édition du guide (1976), présente trois courbes et l'expression générale de ces trois courbes est donnée par :

$$\frac{P}{P_y} = C_1 + C_2 \lambda^{k_1} + C_3 \lambda^{k_2} \quad (8.6)$$

et où C_1 , C_2 , C_3 , k_1 et k_2 sont des constantes de lissage des courbes. Pour décrire chaque courbe, de neuf à douze constantes sont nécessaires pour lisser les formes paraboliques et hyperboliques, afin de désigner les courbes caractéristiques du poteau, qui sont des courbes arithmétiques moyennes des trois catégories. Cette approche peut être qualifiée de fastidieuse. En plus, le manque de transition douce d'une courbe à une autre peut signifier qu'il y aura un « bond » dans la résistance

pour certains poteaux, où la résistance peut être proche de celle d'un autre poteau. Un tracé de ces trois courbes du **SSRC** est montré sur la Figure 8-9.

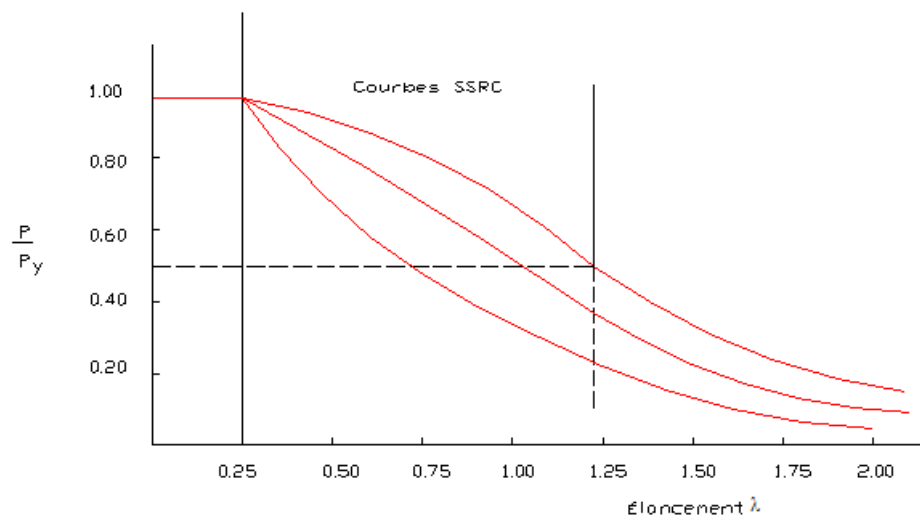


Figure 8-9 : Courbes de la résistance selon SSRC

Les études expérimentales et théoriques ont montré que la résistance des différents types d'acier structural provenant de différentes procédures de fabrication et ce, pour différentes formes géométriques et différents axes de flexion peut varier considérablement. Dans ce contexte, l'utilisation de plus d'une courbe peut être nécessaire. À noter que les courbes du **SSRC** sont développées en utilisant l'approche de la stabilité et le concept de l'état limite ultime de résistance, et non pas le concept de la bifurcation discuté précédemment. Les courbes du **SSRC** sont considérées plus représentatives que celles du **CRC** parce qu'elles considèrent non seulement les imperfections géométriques de façon explicite, mais aussi une large différence dans la résistance du poteau due à une variété dans les procédures de fabrication. Aussi, les courbes du **SSRC** sont plus précises que celles du **CRC** dans la représentation de la longueur du poteau. À rappeler que toutes ces courbes multiples sont développées avec l'hypothèse d'un défaut de verticalité à mi-longueur égal à $0,001L$. Une question peut se poser : est-ce que ces courbes multiples peuvent être utilisées

si le défaut de la verticalité initial n'est pas égal à $0,001L$. Donc, il faudra présenter une équation qui identifie explicitement les facteurs qui influencent la résistance du poteau, de façon à ce que le concepteur puisse avoir une meilleure façon d'aborder les problèmes reliés au dimensionnement des poteaux.

Dérivation de l'équation du poteau

L'équation du poteau est dérivée sur la base d'une membrure agissant comme poteau-poutre. Une caractéristique essentielle d'un poteau-poutre, est le moment secondaire provenant de l'effet $P-\delta$ (défaut de rectitude local qui affecte une membrure individuelle). Le modèle utilisé est montré sur la Figure 8-11. La membrure représente un défaut de rectitude égale à δ_i , à mi-longueur. Avec l'application d'une force axiale concentrique P , un moment secondaire M est induit à mi-hauteur de la membrure. Comme pour le cas du poteau, la résistance ultime est atteinte lorsque la force axiale P est égale à la force relative au module tangent P_t . Aussi, comme pour le cas d'une poutre, la résistance ultime est atteinte lorsque le moment secondaire M , est égal au moment M_{mc} , défini comme étant une valeur moyenne entre le moment élastique M_{yc} et le moment plastique M_{pc} . Ce moment moyen correspondant à l'atteinte de la limite d'élasticité est montré sur la Figure 8-10. La résistance ultime de ce modèle poteau-poutre est atteinte lorsque :

$$\frac{P}{P_t} + \frac{M}{M_{mc}} = 1 \quad (8.7)$$

Étant donné que le moment secondaire M peut être exprimé sous la forme :

$$M = P(\delta_i + y) = \frac{P\delta_i}{1 - \frac{P}{P_E}} \quad (8.8)$$

où δ_i , y et $1 - \frac{P}{P_E}$ représentent respectivement le défaut de rectitude initiale à mi-hauteur, la déflexion latérale additionnelle à mi-hauteur due à la charge P et le facteur d'amplification basé sur l'analyse élastique. La substitution de (8.8), dans (8.7), donne :

$$\frac{P}{P_t} + \frac{P\delta_i}{M_{mc} \left(1 - \frac{P}{P_E}\right)} = 1 \quad (8.9)$$

Le moment moyen de la limite d'élasticité M_{mc} peut être exprimé comme étant le produit du module plastique de la section Z et de la contrainte moyenne de limite d'élasticité $\bar{\sigma}_y$ (qui tient compte de la variabilité des propriétés mécaniques sur la section considérée) tel que :

$$M_{mc} = Z\bar{\sigma}_y \quad (8.10)$$

La contrainte de l'écoulement est telle que :

$$\sigma_y / f \leq \bar{\sigma}_y \leq \sigma_y \quad (8.11)$$

où f représente le facteur de la forme géométrique de la section. Donc, (8.9) peut être écrite sous la forme :

$$\frac{P}{P_t} + \frac{P\delta_i}{\left(1 - \frac{P}{P_E}\right) Z\bar{\sigma}_y} = 1 \quad (8.12)$$

ou encore :

$$\left(\frac{P}{P_y}\right)\left(\frac{P_y}{P_E}\right)\left(\frac{P_E}{P_t}\right) + \frac{P\delta_i}{\left(1 - \frac{P}{P_y}\frac{P_y}{P_E}\right)\left(\frac{Z}{S}\right)S\left(\frac{\bar{\sigma}_y}{\sigma_y}\right)}\sigma_y = 1 \quad (8.13)$$

avec S , le module élastique de la section. En posant $\hat{E} = \frac{E}{E_t} = \frac{P_E}{P_t}$, $f = Z/S$, $\hat{\sigma} = \frac{\bar{\sigma}_y}{\sigma_y}$ et $\frac{P_y}{P_E} = \lambda^2$

avec $\lambda = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{F_y}{E}} \left(\frac{KL}{r}\right)$, (8.13) peut être écrite sous la forme :

$$\left(\frac{P}{P_y}\right)\lambda^2\hat{E} + \frac{P\delta_i}{\left(1 - \frac{P}{P_y}\lambda^2\right)f\hat{\sigma}_yS\sigma_y} = 1 \quad (8.14)$$

ou encore :

$$\left(\frac{P}{P_y}\right)\lambda^2\hat{E} + \frac{(P/P_y)}{\left(1 - \frac{P}{P_y}\lambda^2\right)}\hat{\eta} = 1 \quad (8.15)$$

avec

$$\hat{\eta} = \frac{\delta_i A}{fS\hat{\sigma}_y} \quad (8.16)$$

le paramètre de l'imperfection. La solution de (8.15), en terme de P/P_y , donne :

$$\frac{P}{P_y} = \frac{\hat{\eta} + (1 + \hat{E})\lambda^2 - \sqrt{[\hat{\eta} + (1 + \hat{E})\lambda^2]^2 - 4\hat{E}\lambda^4}}{2\hat{E}\lambda^4} \quad (8.17)$$

L'équation (8.17) est l'équation proposée pour le dimensionnement du poteau. La charge maximale que le poteau peut supporter est fonction de $\hat{\eta}$, \hat{E} et λ . Toute courbe de résistance du poteau peut être générée en utilisant (8.17), pourvu que les paramètres $\hat{\eta}$, \hat{E} et λ soient connus. Si le défaut de rectitude initial est exprimé comme étant une fonction de la longueur du poteau L , cela permet d'écrire :

$$\delta_i = \rho L \quad (8.18)$$

avec ρ , le coefficient qui exprime le défaut de rectitude en fonction de la longueur de la membrure. Puisque :

$$S = \frac{I}{c} = \frac{Ar^2}{c} \quad (8.19)$$

avec r et c définissant respectivement le rayon de giration et la distance entre l'axe neutre et la fibre extrême, (8.16) peut être écrite sous la forme :

$$\hat{\eta} = \frac{c\rho L}{f\hat{\sigma}_y r^2} \quad (8.20)$$

ou en fonction de λ (avec $K=1$, pour un poteau articulé aux extrémités) tel que :

$$\hat{\eta} = \sqrt{\frac{E}{F_y}} \rho \left(\frac{1}{f} \right) \left(\frac{c}{r} \right) \left(\frac{\lambda}{\hat{\sigma}_y} \right) \quad (8.21)$$

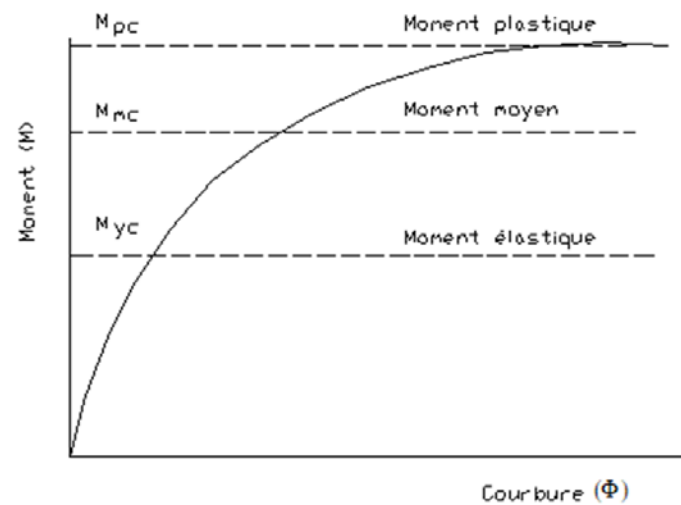


Figure 8-10 : Représentation schématique du moment moyen de l'écoulement

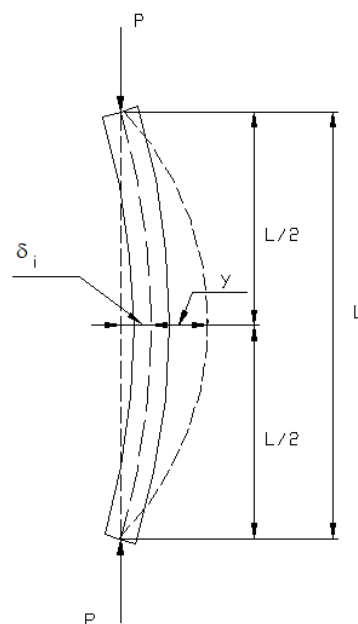


Figure 8-11 : Modèle d'un poteau représentant un défaut de rectitude

La contrainte limite de l'écoulement $\bar{\sigma}_y$ dépend du degré de la plastification de la section ; elle est fonction du type du poteau et du niveau des charges appliquées. Étant donné que pour un poteau, le degré de la plastification dépend de l'intensité de la charge appliquée et que cette dernière est fonction de l'élancement du poteau, cette contrainte limite de l'écoulement peut donc être vue comme étant une fonction de l'élancement, λ . Si λ , est très grand et P/P_y est très petit, le problème va ressembler à un cas de poutre et le moment ultime plastique M_{pc} est celui qui gouverne l'état limite de résistance. Dans ce cas $\bar{\sigma}_y$ va approcher σ_y . D'un autre côté, si λ , est très petit, P/P_y va approcher l'unité et le problème dans ce cas va ressembler à un cas d'un poteau court chargé axialement. Le moment élastique M_{yc} va gouverner l'état limite de résistance et $\bar{\sigma}_y$ va approcher $\frac{\bar{\sigma}_y}{f}$. En accord avec cette approche, la contrainte limite d'écoulement peut s'écrire :

$$\bar{\sigma}_y = \left(\frac{1}{\zeta \lambda^2 + f} \right) \sigma_y \quad (8.22)$$

avec ζ , le paramètre de la plasticité. Ce dernier peut être déterminé à partir des tests expérimentaux ou par un calibrage à partir des courbes de résistance des poteaux. La substitution de (8.22) dans (8.21), donne :

$$\hat{\eta} = \left[\pi \sqrt{\frac{E}{F_y}} \rho \left(\frac{1}{f} \right) \left(\frac{c}{r} \right) \right] (\zeta \lambda^3 + f \lambda) \quad (8.23)$$

On peut constater que le paramètre de l'imperfection diminue lorsque λ , ρ et c/r diminuent et que F_y et f augmentent. Cette observation concorde avec les observations expérimentales suivantes :

- La capacité portante du poteau augmente lorsque l'élancement diminue.
- Les courbes de résistance des poteaux ayant des sections moyennes ou légères, sont relativement plus hautes que celles pour des sections lourdes.
- La résistance est plus grande si l'acier structural est d'un grade plus élevé.
- La résistance est plus grande en autant que le défaut de rectitude est plus petit.
- Le poteau offre plus de résistance si la flexion se produit suivant l'axe fort ($f=1.12$, pour les sections laminées en I) comparativement à la flexion suivant l'axe faible ($f=1.55$, pour les sections laminées en I).

Pour un poteau donné, les termes entre parenthèses de l'équation (8.28) sont connus de façon à pouvoir écrire (8.23) sous une forme générale telle que :

$$\begin{aligned}\hat{\eta} &= \hat{a}\lambda^3 + \hat{b}\lambda \\ \hat{a} &= \sqrt{\frac{E}{F_y}} \left(\frac{1}{f} \right) \left(\frac{c}{r} \right) \zeta \\ \hat{b} &= \pi \sqrt{\frac{E}{F_y}} \rho \left(\frac{c}{r} \right)\end{aligned}\tag{8.24}$$

Le ratio des modules \hat{E} peut être évalué si le module tangent E_t est connu, soit à partir des tests ou à partir des approches théoriques. Rappelons que le module tangent est la pente de la partie non linéaire de la courbe contrainte vs déformation. Cette non-linéarité est due à la présence des contraintes résiduelles dans les sections en acier. Donc, le ratio des modules reflète la non-linéarité du matériau et les imperfections géométriques. En termes simples, le ratio des modules est considéré comme étant le ratio de la courbe d'Euler et la courbe du **CRC** tel que :

$$\begin{aligned}\hat{E} = \frac{E}{E_t} &= \frac{P_E}{P_{CRC}} = \frac{4}{(4 - \lambda^2)\lambda^2} \quad \text{pour } \lambda \leq \sqrt{2} \\ &= 1 \quad \text{pour } \lambda > \sqrt{2}\end{aligned}\tag{8.25}$$

En résumé, l'équation de la résistance du poteau est exprimée par :

$$\frac{P}{P_y} = \frac{\hat{\eta} + (1 + \hat{E})\lambda^2 - \sqrt{[\hat{\eta} + (1 + \hat{E})\lambda^2]^2 - 4\hat{E}\lambda^4}}{2\hat{E}\lambda^4} \quad (8.26)$$

avec $\hat{\eta} = \hat{a}\lambda^3 + \hat{b}\lambda$ et (8.25).

Poteaux chargés excentriquement

Le modèle d'un poteau chargé excentriquement est montré sur la Figure 8-12. La différence entre un poteau chargé avec une certaine excentricité e_0 et un poteau avec défaut de rectitude initial δ_i , réside dans le fait que l'expression du facteur d'amplification du moment est différente d'un cas à l'autre. La Figure 8-13 montre une comparaison entre les deux facteurs d'amplification du moment. Le facteur d'amplification du moment pour un poteau chargé excentriquement, peut être exprimé sous la forme :

$$FAM = \sec \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_E}} \approx \frac{1 + 0,25 \left(\frac{P}{P_E} \right)}{1 - \left(\frac{P}{P_E} \right)} \quad (8.27)$$

Le critère qui décrit la mise hors d'état d'utilisation d'un poteau chargé excentriquement, peut s'écrire :

$$\frac{P}{P_t} + \frac{Pe_0 \sec \frac{\pi}{2} \sqrt{P/P_E}}{M_{mc}} = 1 \quad (8.28)$$

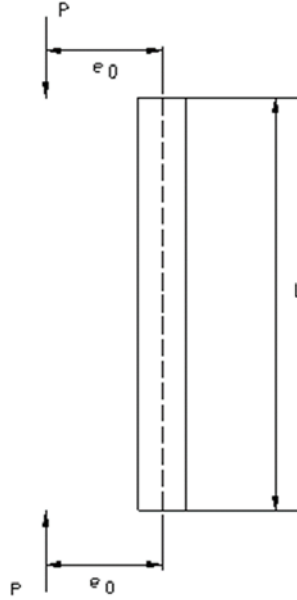


Figure 8-12 : Modèle d'un poteau chargé excentriquement

Avec (8.10), (8.27) et (8.28), on obtient :

$$\frac{P}{P_t} + \frac{Pe_0 \left[1 + 0,25 \left(\frac{P}{P_E} \right) \right]}{\left(1 - \frac{P}{P_E} \right) Z \bar{\sigma}_y} = 1 \quad (8.29)$$

ou sous la forme :

$$\left(\frac{P}{P_y} \right) \left(\frac{P_y}{P_E} \right) \left(\frac{P_E}{P_t} \right) + \frac{Pe_0 \left[1 + 0,25 \left(\frac{P}{P_y} \right) \left(\frac{P_y}{P_E} \right) \right]}{\left(1 - \frac{P}{P_y} \frac{P_y}{P_E} \right) \left(\frac{Z}{S} \right) S \left(\frac{\bar{\sigma}_y}{\sigma_y} \right) \sigma_y} = 1 \quad (8.30)$$

ou encore sous la forme

$$\left(\frac{P}{P_y}\right)\lambda^2\hat{E} + \frac{\left(\frac{P}{P_y}\right)\left[1 + 0,25\left(\frac{P}{P_y}\right)\lambda^2\right]}{\left(1 - \frac{P}{P_y}\lambda^2\right)}\bar{\eta} = 1 \quad (8.31)$$

avec $\bar{\eta} = e_0 A / f \hat{\sigma}_y S$. La résolution de (8.31) pour P/P_y , donne :

$$\frac{P}{P_y} = \frac{\left[\bar{\eta} + (1 + \hat{E})\lambda^2 - \sqrt{\left[\bar{\eta} + (1 + \hat{E})\lambda^2\right]^2 - 4\left[\hat{E}\lambda^4 - 0,25\lambda^2\right]}\right]}{(2\hat{E}\lambda^4 - 0,5\bar{\eta}\lambda^2)} \quad (8.32)$$

L'équation (8.32) peut être utilisée pour générer les courbes de résistance d'un poteau chargé excentriquement. La formule de la sécante est exprimée par :

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{e_0 c}{r^2} \sec \left(\frac{KL}{2r} \sqrt{\frac{P}{EA}} \right) \right] \quad (8.33)$$

avec :

σ_{\max} : la contrainte maximale à la fibre extrême

P : la charge axiale appliquée

A : l'aire de la section transversale

e_0 : l'excentricité de la charge appliquée

c : la distance entre l'axe neutre et la fibre extrême

r : le rayon de giration

KL : la longueur effective du poteau

Si on pose $\sigma_{\max} = \sigma_y$ (la limite élastique du matériau) et qu'on exprime (8.33) en terme de λ , on obtient :

$$\frac{P}{P_y} = \left[1 + \left(\frac{e_0 c}{r^2} \right) \sec \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_E}} \lambda \right) \right]^{-1} \quad (8.34)$$

La valeur de $\frac{P}{P_y}$ est évaluée à partir de (8.34), par essais et erreurs.

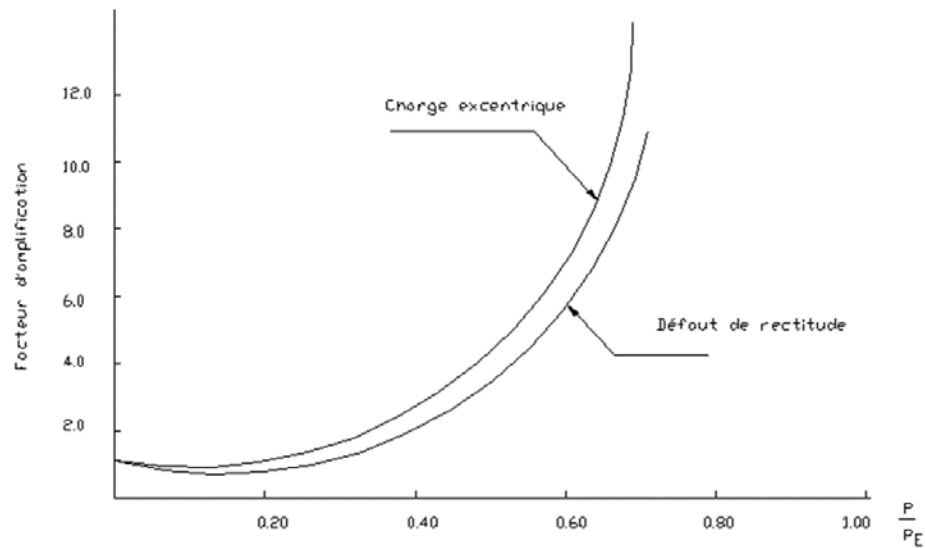


Figure 8-13 : Comparaison du facteur d'amplification pour un poteau chargé excentriquement et un poteau avec un défaut de rectitude

Poteau avec défaut de rectitude initial et chargé excentriquement

La résistance ultime du poteau montré sur la Figure 8-14, est donné par :

$$\frac{P}{P_t} + \frac{P\delta_i}{\left(1 - \frac{P}{P_E}\right)M_{mc}} + \frac{Pe_0 \sec \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_E}}}{M_{mc}} = 1 \quad (8.35)$$

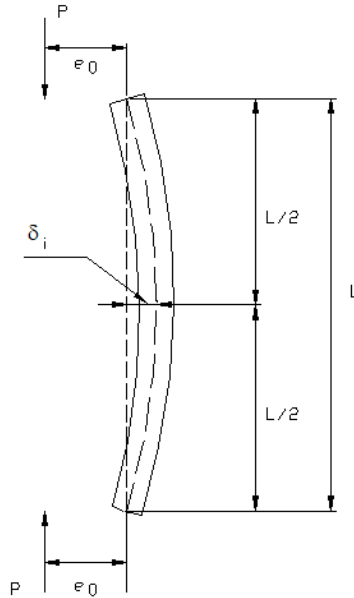


Figure 8-14 : Modèle d'un poteau avec défaut de rectitude initial et chargé excentriquement

Et le terme sans unité $\frac{P}{P_y}$, est exprimé par :

$$\frac{P}{P_y} = \frac{q - \sqrt{q^2 - 4p}}{2p} \quad (8.36)$$

avec $p = \hat{E}\lambda^4 - 0,25\bar{\eta}\lambda^2$ et $q = \hat{\eta} + \bar{\eta} + (1 + \hat{E})\lambda^2$.

À noter que si $\bar{\eta} = 0$, (8.36) est réduite à (8.26) et si $\hat{\eta} = 0$, (8.36) est réduite à (8.32).

Application au dimensionnement

Les formules de dimensionnement utilisées de nos jours dans différentes spécifications techniques à travers le monde sont toutes basées essentiellement sur les mêmes données et la même méthodologie de calcul. La philosophie de base, dans toute méthode de dimensionnement des poteaux, est que la charge appliquée à une membrure structurale doit être reprise par la membrure avec une marge de sécurité suffisante. La différence entre les différentes méthodes de dimensionnement est résumée au Tableau 8-1.

Dimensionnement plastique (AISC partie II)

Le dimensionnement plastique a la forme :

$$R_n \geq \sum_{i=1}^j \gamma_i Q_{ni} \quad (8.37)$$

avec R_n , Q_n et γ représentant respectivement la résistance nominale exprimée en forme de charge, l'effet des charges nominales appliquées, exprimé en forme de charges et le facteur de pondération des charges. Dans ce format de dimensionnement, le facteur de sécurité est appliqué aux charges, sous forme de coefficients de pondération.

Dimensionnement à l'état limite ultime de résistance (AISC partie III, CSA/CAN S16.1-94)

Le dimensionnement à l'état limite ultime a la forme :

$$\phi R_n \geq \sum_{i=1}^j \gamma_i Q_{ni} \quad (8.38)$$

avec ϕ , le coefficients de tenu des matériaux, inférieurs à l'unité. Dans ce format de dimensionnement, le facteur de sécurité est appliqué aux charges, sous forme de coefficients de pondération.

Tableau 8-1– Méthode de dimensionnement des poteaux selon la spécification

Spécification	Facteur de résistance, ϕ	P_{cr}/P_y	Remarques
AISC, AISI, AASHTO USA	0,9	$0,658\lambda^2$	$\lambda \leq 1,5$
		$\frac{0,877}{\lambda^2}$	$\lambda > 1,5$
CSA, Canada Afrique du sud	0,9	$[1 + \lambda^{2n}]^{-\frac{1}{n}}$	Courbes SSRC Courbe I, $n = 2,24$ Courbe II, $n = 1,34$ Courbe III, $n = 1,0$
EC, Europe	0,909	$\frac{1}{Q + \sqrt{Q^2 - \lambda^2}} \leq 1,0$ $Q = 0,5[1 + \alpha(\lambda - 0,2) + \lambda^2]$	Courbe α a 0,21 b 0,34 c 0,49 d 0,76
As, Australie	0,9	$\xi \left[1 - \sqrt{\left(\frac{90}{\xi \bar{\lambda}} \right)^2} \right]$	$\bar{\lambda} = \pi \lambda \sqrt{800}$ $\xi = \frac{\left(\frac{90}{\xi \bar{\lambda}} \right)^2 + 1 + \eta}{2 \left(\frac{90}{\xi \bar{\lambda}} \right)^2}$ $\eta = 0,00326(\bar{\lambda} - 13,5) \geq 0$
AII, Japan	0,9 $0,9 - 0,05 \left[\frac{\lambda - 0,15}{\frac{1}{\sqrt{0,6}} - 0,15} \right]$ 0,85	1,0 $1,0 - 0,5 \left[\frac{\lambda - 0,15}{\frac{1}{\sqrt{0,6}} - 0,15} \right]$ $\frac{1}{1,2\lambda^2}$	$\lambda \leq 0,15$ $0,15 < \lambda \leq \frac{1}{\sqrt{0,6}}$ $\lambda > \frac{1}{\sqrt{0,6}}$

CHAPITRE 9

THÉORIE DU FLAMBEMENT

INÉLASTIQUE DES POTEAUX

9.1 GÉNÉRALITÉS

Les théories sur la stabilité ont été élaborées afin de déterminer les conditions par lesquelles une structure en équilibre cesse d'être stable. L'instabilité est essentiellement une propriété des structures de géométrie extrême, comme par exemple les éléments comprimés d'élanement important, les plaques minces ou encore les coques minces cylindriques. Normalement, on considère des systèmes avec un paramètre variable N qui représente classiquement la charge extérieure, mais qui peut aussi être la température (flambement thermique) ou d'autres phénomènes. Pour chaque valeur de N , il n'existe qu'une configuration hors flambement. Dans les problèmes classiques de flambement, le système est stable si N est assez petit et devient instable quand N est grand. La valeur de N pour laquelle le système cesse d'être stable est appelée : valeur critique N_{cr} . Plus généralement, il faut déterminer :

- Les configurations d'équilibre de la structure sous les chargements imposés.
- Celles parmi ces configurations qui sont stables.
- La valeur critique des chargements et les conséquences sur le comportement qu'ont ces niveaux de charge.

9.2 ÉTATS D'ÉQUILIBRE STABLE ET INSTABLES

D'une manière générale, on peut définir la stabilité comme la capacité d'un système physique à revenir à l'équilibre lorsqu'il est perturbé légèrement. Si on considère un système élastique conservatif, initialement en état d'équilibre sous l'action d'un ensemble de forces, le système s'écartera de cet état d'équilibre seulement s'il subit une force perturbatrice temporaire. Si l'énergie fournie au système par cette force perturbatrice est W , on a alors :

$$W = T + V = \text{constante}$$

Dans cette relation, T représente l'énergie cinétique du système et V l'énergie potentielle. Une faible augmentation de T s'accompagne d'une faible diminution identique de V et *vice versa*. Si le système est initialement en configuration d'équilibre d'énergie potentielle minimale, alors l'énergie cinétique T du déplacement libre correspondant décroît dans la mesure où V doit croître. Par conséquent, le déplacement depuis l'état initial restera faible et l'état d'équilibre est stable.

9.3 FLAMBEMENT PAR BIFURCATION

La stabilité d'un système élastique statique ou d'une structure peut aussi s'expliquer par des considérations de rigidité. Une rigidité positive implique un état stable, tandis qu'à la limite de la stabilité, la rigidité disparaît. Pour une structure, la rigidité exprimée sous forme matricielle sera définie positive si elle garantit à la structure un état stable. Le point auquel l'état d'un système change, pour passer d'un état d'équilibre stable à un état d'équilibre neutre, est appelé « limite de stabilité ».

Si un poteau n'est pas initialement parfaitement rectiligne, la déflexion commence dès le début du chargement. Il n'y aura alors pas flambement soudain par bifurcation mais augmentation continue des déplacements. Ce phénomène est appelé « divergence d'équilibre » et il n'y a pas de limite de stabilité stricte. Si le matériau reste élastique, la rigidité du poteau demeure positive, mais

une petite perturbation produira de très grands déplacements. La diminution de rigidité d'un élément de structure est en général due à un changement soit de la géométrie, soit des propriétés mécaniques. La diminution de rigidité due à une modification de la géométrie ne crée généralement pas de perte de stabilité, mais conduit à de grands déplacements. Par ailleurs, des diminutions importantes de rigidité proviennent de changements dans les propriétés mécaniques (élastiques ou de rupture) du matériau et de ce fait, peuvent conduire à la défaillance de l'élément. Les éléments de structure réels ne se comportent pas exactement comme le prédit la théorie de la bifurcation élastique. Tout d'abord, le matériau n'est pas infiniment élastique ; le résultat est que l'on a un comportement élasto-plastique et un flambement inélastique. Puis, les éléments de structure sont affectés de plusieurs types d'imperfections (principalement de nature géométrique et/ou mécanique) qui peuvent affaiblir sérieusement leur capacité de charge. La modification rapide de la déformation lorsque la charge appliquée augmente (caractéristique du phénomène de flambement), donne aussi lieu à des effets du second ordre qui, lorsqu'ils sont combinés avec un comportement du matériau inélastique, ont pour résultat un comportement non-linéaire global de la structure.

Les équations qui décrivent le flambement élastique des poteaux sont d'un usage limité, étant donné que le flambement élastique est un phénomène qui touche uniquement les poteaux avec de grands élancements. Dans la plupart des cas pratiques, les poteaux ont un comportement inélastique. Les théories qui ont été développées pour traiter le flambement inélastique, sont :

1. La théorie du module tangent.
2. La théorie du module réduit (double module).
3. Modèle de *Shanley*.

9.4 DÉVELOPPEMENT DES THÉORIES DU FLAMBEMENT INÉLASTIQUE

En 1678, 66 années avant les travaux d'Euler, *Robert Hook* a fourni par ses travaux un constat préliminaire, jugée nécessaire au développement de la théorie du flambement élastique, lorsqu'il a

avancé que le déplacement de tout ressort est en proportion avec la charge qui produit le déplacement. Cette déduction fut basée sur de nombreux tests. En 1705, *Jacob Bernoulli* a étudié la déflexion et la courbure d'une poutre en porte-à-faux. Bernoulli a affirmé, sur la base de la loi de *Hooke*, que la courbure en tout point d'une tige fléchie est proportionnelle au moment résistant développé dans la tige.

Leonard Euler a étudié sous la supervision de *John Bernoulli* (frère de *Jacob Bernoulli*). *Euler* a adopté l'hypothèse de *Jacob Bernoulli* en ce qui a trait à la relation moment-courbure et, dans l'appendice de son livre paru en 1744 sur le calcul variationnel, il a présenté sa formule de la charge critique du flambement. Cette formule a gardé, depuis cette date, le nom d'équation d'*Euler*. Une traduction anglaise de cet appendice a été faite par *C.A. Ellis et D.M. Brown (1744)*. Cette traduction se lit comme suit : la charge d'*Euler* est la charge critique à laquelle un poteau élancé peut être maintenu dans une configuration fléchie sous l'effet de la seule charge axiale. *Euler* a dérivé sa formule en se basant sur ce qu'il a exprimé comme étant « la rigidité flexionnelle », qui est égale en tout point du poteau à $\frac{Ek^2}{\rho}$, où Ek^2 est une constante déterminée par des tests expérimentaux et

ρ , le rayon de courbure de la membrure fléchie. *Euler* avait des idées 'imparfaites' de la relation entre la forme de la section transversale de la membrure et la quantité Ek^2 . Il a déclaré dans son traité sur les poteaux en 1759 (selon la traduction faite par *Van der Broek, 1947*) : « il paraît que la rigidité flexionnelle est proportionnelle au carré de l'épaisseur, ou même au cube de celle-ci ». Les incertitudes d'*Euler* illustrent le fait que le concept du moment d'inertie de la section transversale n'était pas connu à ce moment, ainsi que la distribution des contraintes et la position de l'axe neutre correspondant à la configuration fléchie.

Pour exprimer la force nécessaire pour faire fléchir le poteau, *Euler* a écrit sa formule sous la forme :

$$P_e = \pi^2 Ek^2 / L^2 \quad (9.1)$$

La variable E est définie comme étant une propriété de la résistance et k est une propriété dimensionnelle du poteau. Malgré le fait qu'*Euler* n'avait pas toute l'information pour déterminer E et k^2 de façon indépendante, néanmoins, il a proposé que la constante combinée qui lie la flexion à la courbure puisse être déterminée à partir des tests sur une membrure en porte-à-faux sollicitée par une charge axiale P à l'extrémité libre de la membrure. En désignant la déflexion latérale à l'extrémité de la membrure par Δ , on obtient :

$$Ek^2 = PL^3/\Delta \quad (9.2)$$

La conversion de la quantité Ek^2 à celle connue de nos jours, EI , exige l'application de la loi de *Hooke* combinée avec une évaluation correcte de la distribution des contraintes à travers la section transversale de la membrure fléchie.

Mariotte (1620-1684) a conduit en 1680 une série de tests sur une poutre en porte-à-faux. Dans les résultats publiés à titre posthume en 1686, *Mariotte* était le premier à reconnaître que les fibres sur la face convexe subissent une elongation, tandis que les fibres sur la face concave subissent un raccourcissement. En 1684, *Leibniz* a affirmé sur la base d'essais les conclusions faites par *Mariotte*, et a recommandé l'application de la loi de *Hooke* au problème.

Malgré le fait que la formule d'*Euler*, de nos jours, soit reconnue universellement comme étant la base du dimensionnement des poteaux élancés en acier, il reste qu'elle a été largement critiquée dans les années 1800. Les critiques viennent surtout du fait de l'échec constaté avec l'utilisation de la formule pour déterminer la charge critique du flambement des membrures ayant des proportions géométriques pratiques (non élancés) et faites de différents matériaux, autre que l'acier.

C'est environ 100 ans après l'apparition de la formule d'*Euler* que les matériaux qui s'adaptent mieux à l'application de la formule soit disponibles pour un usage commercial.

En 1905, *Johnson, Bryan et Turneaure* ont recommandé que la formule d'*Euler* soit précédée par une modification en forme de coefficient égal à 0,785 dans le cas d'un poteau rotulé aux extrémités, et ce pour se rapprocher des résultats obtenus des tests expérimentaux.

Après l'apparition de la formule d'*Euler*, 150 années se sont écoulées sans réel progrès dans la théorie des poteaux. En 1889, *Considère* a montré, à l'aide d'une série de tests sur 32 poteaux, les lacunes de la formule d'*Euler* lorsqu'elle est utilisée pour déterminer les charges critiques du flambement des membrures non-élancées. *Considère* a suggéré, dans le cas où le flambement devra avoir lieu avec une charge qui donne une contrainte supérieure à la limite élastique du matériau, de remplacer le module élastique E par un module effectif E_{eff} . Il a déclaré que la valeur effective de ce module devra être située entre la valeur du module élastique E et le module tangent E_t . Indépendamment des travaux de *Considère*, *Engesser* a suggéré en 1889 que la résistance au flambement d'un poteau dans le domaine inélastique peut être obtenue en substituant le module élastique E , dans la formule d'*Euler* par le module tangent E_t . Pour un poteau rotulé aux deux extrémités, la contrainte critique du flambement correspondante au module tangent, désignée par σ_t , est :

$$\sigma_t = \pi^2 E_t / (L/r)^2 \quad (9.3)$$

L'équation (9.3) est connue comme étant la formule du module tangent, à ne pas confondre avec le module plastique qui est la pente de la courbe contrainte/déformation plastique.

En 1895, *Jasinki* en portant les travaux de *Considère* à l'attention d'*Engesser*, a incité ce dernier à procéder, la même année, à produire une formule générale dite 'corrigée' pour définir un module réduit, intermédiaire entre le module tangent E_t et le module élastique E . *Engesser* a ajouté que ce module réduit ne dépend pas uniquement des modules E_t et E , mais aussi de la forme géométrique de la section transversale.

En 1910, *Theodore von Kármán* a dérivé deux expressions pour déterminer la valeur du module réduit, une pour une section rectangulaire et l'autre pour une section en H bi-symétrique. Pour cette dernière, il retenu l'hypothèse que l'âme reliant les deux ailes a une aire égale à zéro. La formule générale de la charge critique correspondante au module réduit est :

$$P_r = \pi^2 E_r I / L^2, \quad E_r = f(E_t, E) \quad (9.4)$$

Les expressions du module réduit étant :

$$E_r = \frac{E_t E}{(\sqrt{E_t} + \sqrt{E})^2} \quad (9.5)$$

pour une section rectangulaire et :

$$E_r = \frac{2E_t E}{E + E_t} \quad (9.6)$$

pour une section en H. Il est supposé que le poteau peut être en équilibre que ce soit dans sa configuration droite ou sa configuration fléchie et ce, sans aucun changement de la charge du poteau. Cette hypothèse est similaire à celle retenue dans la formule d'Euler. Le concept du module réduit est aussi connu sous l'appellation du *double module*. Durant environ 35 années suivant les travaux de *von Kármán*, une controverse a persisté concernant le fondement des deux concepts. D'un point de vue instabilité dans le concept d'Euler, la théorie du double module paraît correcte, parce qu'elle indique à quelle charge un poteau initialement parfaitement droit peut être en équilibre dans une configuration, soit droite ou fléchie et accompagné d'aucun changement de charge du poteau. Toutefois, les résultats obtenus d'un grand nombre de tests rigoureusement menés ont donné des niveaux des charges causant la ruine, très proches ou parfois légèrement supérieurs à ceux déterminés selon le concept du module tangent.

En 1946, *Shanley* a trouvé une réponse à cette controverse, en affirmant qu'il soit possible pour un poteau de commencer à fléchir simultanément avec une augmentation de la force axiale et ce, jusqu'à l'atteinte d'une charge voisine de la charge du module tangent. Une année après l'annonce de son concept, *Shanley* a validé sa théorie par une analyse du flambement d'un modèle constitué par deux bras rigides, connectés au centre de la membrure à l'aide d'une cellule déformable. Le concept de *Shanley* est traité avec plus amples détails dans la prochaine section.

Dans une lettre publiée conjointement avec l'article de *Shanley* en 1947, *von Kármán* a redéfini la charge du module tangent en supportant le concept de *Shanley* et en déclarant: la charge du module tangent est la plus petite valeur de la charge axiale à laquelle une bifurcation de la configuration d'équilibre peut avoir lieu, nonobstant si la transition vers la configuration fléchie soit accompagnée par une augmentation de la force axiale.

Engesser, à l'origine du concept du module tangent, s'est rétracté à l'apparition du concept du module réduit et 57 ans plus tard, suite aux travaux de *Shanley* que sa charge du module tangent se voit reconnue comme étant la charge critique minimale du flambement. *Osgood* (1951) est le premier à suggérer que le nouveau concept attribué à *Shanley*, soit appelé 'théorie de *Engesser-Shanley*', et mérite une place de choix dans l'histoire du poteau, au même titre que la contribution d'*Euler*.

Duberg et Wilder (1950) ont appliqué le concept de *Shanley* sur un poteau idéalisé, ayant une section transversale en H et une déformabilité le long du poteau. Ils ont retenu l'hypothèse d'un matériau obéissant à une relation contrainte/déformation développée par *Ramberg et Osgood* (1943).

Les travaux de *Duberg et Wilder* (1952) sont venus confirmer les conclusions tirées du concept de *Shanley* et ont donné la définition suivante :

« Si le comportement d'un poteau parfaitement droit est considéré comme étant le comportement limite d'un poteau fléchi, au moment où le défaut de rectitude initiale disparaît, la

charge du module tangent est la charge critique du poteau, autrement dit, la charge à laquelle la flexion débute ».

9.5 CONCEPT DE SHANLEY

Durant près d'une cinquantaine d'années, les ingénieurs ont fait face à un dilemme. Ils étaient convaincus que le concept du module réduit était adéquat mais les charges critiques du flambement obtenus des tests expérimentaux, se rapprochaient plus des charges critiques obtenus du concept du module tangent. Pour cette raison, le concept du module tangent était utilisé pour le dimensionnement des poteaux et les différences mentionnées ont été attribuées aux défauts initiaux de rectitude et aux excentricités des charges, défauts jugées inévitables durant les tests expérimentaux.

Pour pouvoir expliquer ces différences, *Shanley* (1947) a conduit une série des tests sur des petits poteaux en aluminium et il a trouvé que la déflexion latérale du poteau s'amorce avec une charge très proche de la charge du module tangent. Aussi, tous les résultats obtenus de ses tests ont montré que les poteaux n'étaient pas en mesure de supporter des charges supérieures à celles déterminées par le concept du module tangent.

Shanley a développé un modèle simple montré à la Figure 9-1. Ce modèle consiste en un poteau composé de deux bras rigides identiques, assemblés à l'aide d'une cellule déformable faite d'un matériau déformable et ayant un comportement élastoplastique. Cette cellule déformable est située à mi-hauteur du poteau. Au moment où le flambement du poteau est amorcé, les déformations sont produites dans la cellule déformable, qui est composée de deux ailes d'une aire égale à $A/2$ chacune. Ces deux ailes sont liées par une âme d'une aire égale à zéro. Une des deux ailes est composée d'un matériau ayant un module d'élasticité désigné par E_1 , tandis que l'autre aile est composée d'un matériau ayant un module d'élasticité désigné par E_2 . La longueur totale du poteau est L , et elle est beaucoup plus grande comparée aux dimensions de la cellule déformable, d .

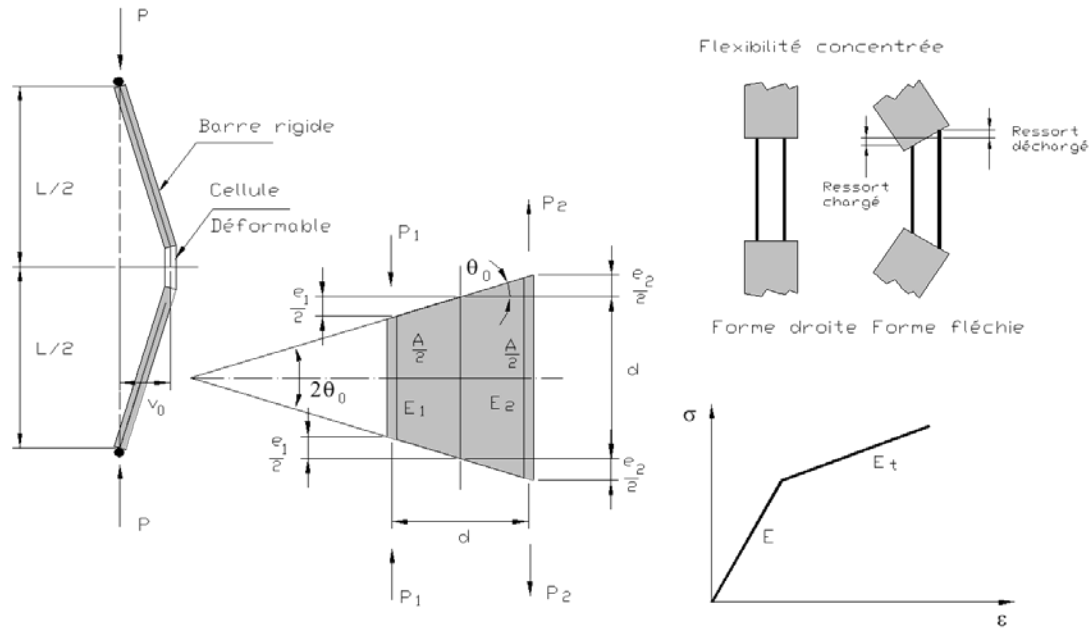


Figure 9-1 : Modèle de Shanley

Dans la configuration déformée, la relation entre la rotation à l'extrémité du poteau θ_0 et la déflexion latérale v_0 ($v_0 \ll d$) est donnée par :

$$v_0 = \frac{\theta_0 L}{2} \quad (9.7)$$

En exprimant la rotation θ_0 en fonction des déformations aux niveaux des ailes (e_1 et e_2) telle que :

$$\theta_0 = \frac{(e_1 + e_2)}{2d} \quad (9.8)$$

(9.7) devient :

$$v_0 = \frac{L(e_1 + e_2)}{4d} \quad (9.9)$$

Le moment externe, M_e , à mi-hauteur du poteau, est donné par :

$$M_e = Pv_0 = \frac{PL(e_1 + e_2)}{4d} \quad (9.10)$$

avec

$$v_0 = \frac{L(e_1 + e_2)}{4d} \quad (9.11)$$

Les forces dans les deux ailes sont données par :

$$P_1 = \frac{E_1 e_1 A}{2d} \text{ et } P_2 = \frac{E_2 e_2 A}{2d} \quad (9.12)$$

et le moment interne, M_i , à mi-hauteur du poteau, est :

$$M_i = \frac{d}{2} (P_1 + P_2) = \frac{d}{2} \left(\frac{E_1 e_1 A}{2d} + \frac{E_2 e_2 A}{2d} \right) = \frac{A}{4} (E_1 e_1 + E_2 e_2) \quad (9.13)$$

Avec la condition d'équilibre $M_e = M_i$, nous obtenons :

$$\frac{PL}{4d} (e_1 + e_2) = \frac{A}{4} (E_1 e_1 + E_2 e_2) \quad \text{et} \quad P = \frac{Ad}{L} \left(\frac{E_1 e_1 + E_2 e_2}{e_1 + e_2} \right) \quad (9.14)$$

Dans le cas où la cellule aurait un comportement élastique, $E_1 = E_2 = E$, on obtient :

$$P = \frac{AdE}{L} \quad (9.15)$$

Pour la charge du module tangent, $E_1 = E_2 = E_T$, on obtient :

$$P_T = \frac{AdE_T}{L} \quad (9.16)$$

Lorsqu'on considère le « déchargement » élastique de l'aile sollicitée en traction due à la flexion, $E_1 = E_T$, $E_2 = E$ et dans ce cas :

$$P = \frac{Ad}{L} \left(\frac{E_T e_1 + E e_2}{e_1 + e_2} \right) \quad (9.17)$$

En posant $\tau = \frac{E_T}{E}$, avec la substitution de e_1 de (9.11) et P_T de (9.16), nous trouvons :

$$P = P_T \left(1 + \frac{Le_2}{4dv_0} \left(\frac{1}{\tau} - 1 \right) \right) \quad (9.18)$$

Il existe deux forces P_1 et P_2 qui agissent sur les deux ailes de la cellule déformable dans le cas où la membrure est fléchie. La différence entre ces deux forces est équivalente à la quantité par laquelle la charge P est augmentée au-delà de la charge du module tangent. Ce qui peut s'exprimer par :

$$P = P_T + (P_1 - P_2) \quad (9.19)$$

En employant (9.11), (9.12) et (9.17),

$$P_1 - P_2 = \frac{AE_T}{2d} \left(\frac{4dv_0}{L} - \left(\frac{1}{\tau} - 1 \right) e_2 \right) \quad (9.20)$$

et

$$P = P_T \left(1 + \frac{2v_0}{d} - \frac{Le_2}{2d^2} \left(1 + \frac{1}{\tau} \right) \right) \quad (9.21)$$

En éliminant e_2 des équations (9.18) et (9.20), on obtient :

$$P = P_T \left(1 + \frac{1}{\frac{d}{2v_0} + \frac{(1+\tau)}{(1-\tau)}} \right) \quad (9.22)$$

Prenons l'exemple où $\tau = 0,5$ et que cette valeur demeure constante après que la charge P_T ait dépassé, (9.22) devient :

$$P = P_T \left(1 + \frac{1}{\frac{d}{2v_0} + 3} \right) \quad (9.23)$$

Lorsque $v_0 \rightarrow \infty$, $P = 1,333P_T$. En réalité, τ va varier avec la déformation, et autant que P augmente, τ va diminuer progressivement. Le concept du module réduit définit la charge à laquelle la déflexion est produite sans augmentation de la charge ($P_1 = P_2 = 0$). L'expression (9.20) devient alors :

$$\frac{AE_T}{2d} \left(\frac{4dv_0}{L} - \left(\frac{1}{\tau} - 1 \right) e_2 \right) = 0 \quad (9.24)$$

avec

$$e_2 = \frac{4v_0d}{L} \left(\frac{1}{1 + 1/\tau} \right) \quad (9.25)$$

La substitution de (9.25) dans (9.21), donne la charge du module réduit :

$$P_R = P_T \left(1 + \frac{1-\tau}{1+\tau} \right) \quad (9.26)$$

et P_R peut être défini comme étant la charge maximale qui peut théoriquement être atteinte lorsque la déflexion latérale v_0 approche l'infini.

L'équation (9.22) définit la relation entre la charge axiale P et la déflexion latérale à mi-hauteur du poteau, v_0 , pour une valeur constante du ratio des modules d'élasticité, τ . Lorsque $v_0 = 0$, $P = P_T$, qui est la charge du module tangent. Pour toute valeur de v_0 , la charge axiale est plus grande que P_T , ou inversement, si $P > P_T$, une déflexion latérale, v_0 , s'avère nécessaire pour maintenir l'équilibre. Malgré le fait que le modèle de *Shanley*, n'a pas de ressemblance avec un poteau réel, il reste que les enseignements tirés de cette analyse peuvent être appliqués aux membrures réelles. Nous pouvons résumer les conclusions obtenues du modèle de *Shanley*, comme suit :

- Le concept du module tangent donne la charge maximale qu'un poteau initialement parfaitement droit peut atteindre, tout en gardant sa verticalité jusqu'à la bifurcation de la configuration initiale.
- La charge réelle maximale dépasse la charge du module tangent, mais ne peut, en aucun cas, dépasser la charge du module réduit.
- Toute charge supérieure à la charge du module tangent, P_T , engendre une déflexion latérale du poteau.
- Pour toute charge située dans un intervalle $P_T < P < P_{max}$, un renversement de déformations se produit.

Shanley a donné une réponse au dilemme qui a persisté durant environ un demi-siècle et il a défini, en même temps, le concept de base du comportement inélastique des poteaux. Sur les traces de *Shanley*, plusieurs autres investigations ont été conduites et ont contribué à élargir et raffiner le concept de base (Hutchinson, 1974; Johnson, 1964; Needleman & Tvergaard, 1976; van der Heijden, 1979). Ces recherches ont consolidé les conclusions obtenues du modèle de *Shanley* et ont amené les faits suivants :

- Il est possible, théoriquement, d'avoir un nombre infini de charges critiques entre la charge du module tangent et la charge élastique du flambement. Au moment où la déflexion latérale est amorcé, le gradient de la courbe contrainte/déformation est positif

$(P_T < P < P_R)$, et égal à zéro lorsque $P = P_R$ et négatif lorsque la déflexion est accompagnée par un déchargement ($P_R < P < P_E$).

- En réalité, les poteaux parfaitement droits n'existent pas. Si le comportement d'un poteau droit peut être considéré comme un cas limite d'un poteau avec un défaut de rectitude et que ce défaut de rectitude devient nul, seule la charge critique significative parmi toutes les possibilités théoriques est la charge du module tangent P_T .

9.6 INFLUENCE DES CONTRAINTES RÉSIDUELLES SUR LA RÉSISTANCE DES POTEAUX LAMINÉES À CHAUD

Les contraintes résiduelles découlant des méthodes de fabrication ont un impact important sur la résistance en compression des colonnes, notamment pour celles de longueur intermédiaire. Les sections laminées à chaud développent des contraintes résiduelles qui se forment dans une membrure structurale suite à des déformations plastiques et sont donc présentes dans la section transversale avant l'application des charges externes. Les déformations plastiques résultent du refroidissement non uniforme du métal après le laminage à chaud. La formation des sections à froid ainsi que les opérations de soudures qui donnent lieu à une chaleur localisée dans les portions à assembler ainsi que le ceintrage et le cambrage des membrures, font aussi apparaître des contraintes résiduelles (voir Figure 9-2).

Les contraintes résiduelles sont principalement des contraintes longitudinales qui agissent dans la même direction que les contraintes induites par l'application des charges externes. La notion de contrainte résiduelle est expliquée à l'aide de la Figure 9-3 qui présente la distribution linéaire des contraintes telle que proposée par (Galambos & Ketter, 1959). Dans le cas d'un profilé en I , (*W dans les désignations Nord-Américaine*) laminé à chaud, les parties de la membrure qui se refroidiront le plus rapidement, suite au laminage à chaud, développeront des contraintes résiduelles en compression, alors que les parties demeurant plus chaudes vont devoir générer des contraintes en traction, afin que la somme des contraintes internes soit nulle. La distribution caractéristique des

contraintes dans un profilé en I est de forme parabolique, tel que présenté par **ECCS** (*European Convention for Constructional Steelworks*), (Szalai & Papp, 2005; Young, 1972). Toutefois, la majorité des études analytiques portant sur la résistance en compression de colonnes en acier ont retenu une distribution de forme linéaire avec une valeur maximale de $0,3F_y$ au bout des semelles. La distribution et la grandeur des contraintes résiduelles dépend d'un grand nombre de paramètres. Par exemple, dans les sections de taille régulière, laminées ou reconstituées par soudage, on retrouve des contraintes résiduelles de traction aux endroits où le refroidissement se fait en dernier. Ces dernières sont contrebalancées par des contraintes de compression dans le reste de la section droite.

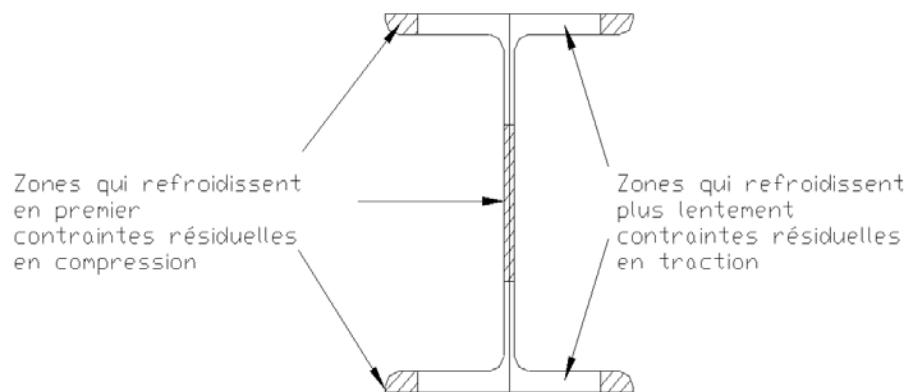


Figure 9-2 : Refroidissement non uniforme des sections en I laminées à chaud

Sous réserve que l'épaisseur de l'âme de ces sections ne soit pas trop grande, on peut aisément supposer que la grandeur des contraintes résiduelles est constante sur l'épaisseur de l'âme. Les résultats des tests indiquent que les contraintes résiduelles qui se trouvent dans les aciers de haute résistance ont les mêmes ordres de grandeur que pour l'acier structural à faible teneur en carbone et dont l'effet des contraintes résiduelles devient comparativement petit pour les aciers de haute résistance. La distribution des contraintes résiduelles peut être définie à l'aide de trois expressions (Young, 1972) définies par (en MPa) :

$$\begin{aligned}\sigma_{cr,1} &= 165 (1 - \chi/2.4\beta) \\ \sigma_{cr,2} &= 100 (1.5 + \chi/2.4\beta) \\ \sigma_{tr,1} &= 100 (0.7 + \chi/2\beta)\end{aligned}\tag{9.27}$$

et où $\sigma_{rc,1}$, $\sigma_{rc,2}$, $\sigma_{rt,1}$ représentent respectivement la contrainte résiduelle de compression aux bouts des ailes, à la mi-hauteur de l'âme et la contrainte résiduelle de traction à la jonction semelles-âme, $\chi = t_w / t_f$ et $\beta = b_f / (h - t_f)$ avec h , la hauteur de la section, b_f , la largeur de la semelle, t_f , l'épaisseur de la semelle et t_w , l'épaisseur de l'âme. L'équilibre des contraintes résiduelles à travers la section est assuré à l'aide de l'égalité :

$$\begin{aligned}(3\chi + 8\beta)\sigma_{rt,1}^3 + (16\beta\sigma_{rc,2} + 1.5\chi\sigma_{rc,1})\sigma_{rt,1}^2 - (2\beta\sigma_{rc,1}^2 + 8\chi\sigma_{rc,1}^2)\sigma_{rt,1} \\ = (6\beta\sigma_{rc,1}^2\sigma_{rc,2} + 4\chi\sigma_{rc,2}^2\sigma_{rc,1})\end{aligned}\tag{9.28}$$

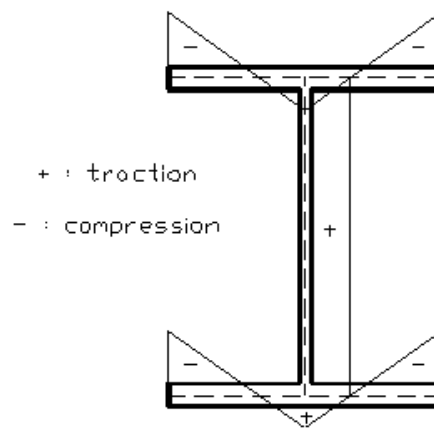


Figure 9-3 : Schéma des contraintes résiduelles pour une section en I (Galambos & Ketter, 1959)

La présence des contraintes résiduelles dans une membrure laminée à chaud peut être détectée par des tests sur des poteaux trapus. Si on soumet une toute petite longueur d'une membrure à la compression et que les déformations correspondantes sont enregistrées avec les valeurs correspondantes des contraintes moyennes P/A , on pourra obtenir une courbe contrainte/déformation, similaire à celle montrée sur la Figure 9-4. La courbe discontinue, qui caractérise la relation contrainte/déformation d'un échantillon est montrée pour des fins de comparaison. Étant donné qu'un échantillon est libre de toutes contraintes résiduelles, ces fibres demeurent élastiques jusqu'à l'atteinte de la limite élastique du matériau, dues aux charges appliquées. Par contre, pour le cas d'un poteau trapu, la présence des contraintes résiduelles fait en sorte que les fibres, avec la présence initiale de contraintes de compression, seront plastifiées avant que les contraintes appliquées n'atteignent la limite élastique du matériau.

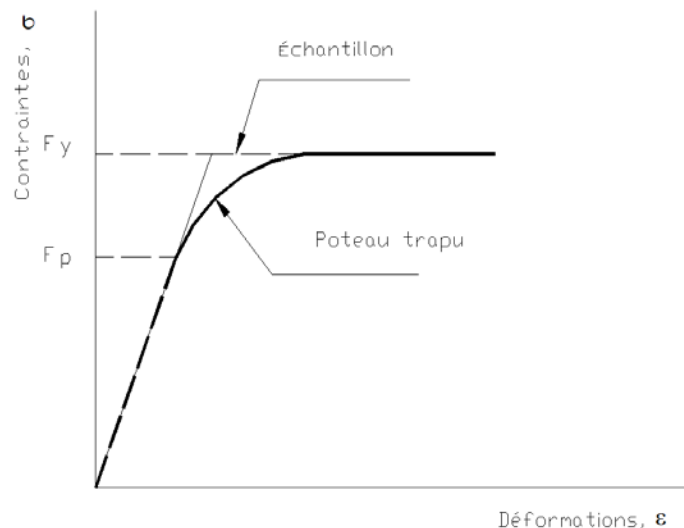


Figure 9-4 : Courbe contraintes déformations pour un poteau trapu

La plastification se propage de façon progressive, avec l'augmentation des charges appliquées à partir des fibres qui sont initialement en compression à celles qui n'ont pas initialement de contraintes de compression et finalement, à celles qui ont une contrainte initiale de traction. Donc,

la courbe contrainte/déformation d'un poteau trapu montre une plastification graduelle entre la limite admissible et la limite élastique et ce, due à la présence des contraintes résiduelles.

Par la présentation de la distribution des contraintes internes correspondantes à plusieurs niveaux de chargement, (Galambos & Ketter, 1959) a démontré de façon précise comment la présence des contraintes résiduelles affecte le comportement des membrures sollicitées en compression. Dans sa démonstration, il a utilisé une section en I avec une distribution linéaire de contraintes résiduelles, tel que montré à la Figure 9-3.

Avant l'application de la charge externe, seules les contraintes résiduelles sont présentes (Figure 9-5b). Avec l'application d'une charge externe, les contraintes se composent de la somme des contraintes résiduelles originales et des contraintes additionnelles requises pour équilibrer la charge appliquée (Figure 9-5c). La plastification commence au bout des ailes lorsque la contrainte moyenne appliquée (P/A), plus la contrainte résiduelle (σ_r) sera égales à la limite élastique du matériau (F_y) (Figure 9-5d). Si on désigne par F_p la limite admissible sur la courbe contrainte/déformation d'un poteau trapu, alors $F_p = F_y - \sigma_r$. Pour le cas considéré, on suppose que $F_p = 0,7F_y$. Avec l'augmentation de la valeur de la contrainte appliquée P/A à $0,7F_y$, la plastification va s'étendre du bout des ailes vers le centre (Figure 9-5e). À un état de contrainte $P/A = F_y$, toute la section commence à se plastifier (Figure 9-5f). La diminution de la rigidité, manifestée par le poteau trapu au-delà de la limite admissible, est donc attribuée à la réduction graduelle de l'aire effective de la section résistante à la charge.

Par exemple, considérons un poteau bi-articulé de section rectangulaire montrée sur la Figure 9-6a. Le matériau de la section obéit à une relation contrainte/déformation élasto-plastique idéalisée, comme celle montrée sur la Figure 9-7. La distribution des contraintes résiduelles à travers la section est montrée sur la Figure 9-6b. Cette dernière est constante sur le long du poteau et varient linéairement d'une contrainte de traction égale à $0,5\sigma_y$ au centre de la section à une contrainte de compression égale à $0,5\sigma_y$ aux bords de la section.

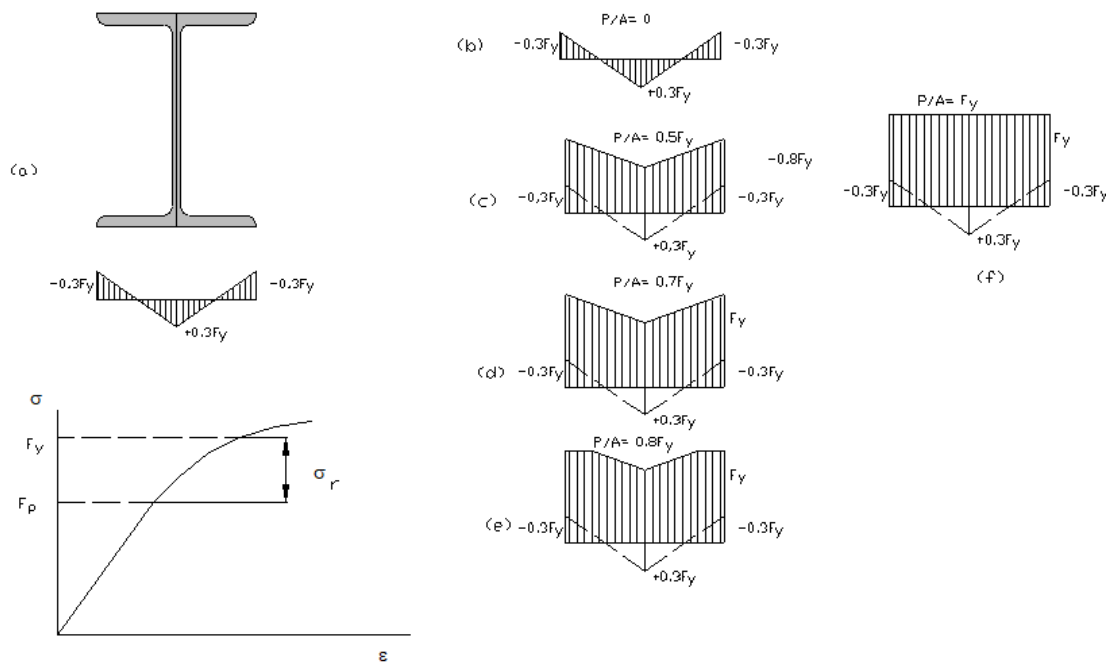


Figure 9-5 : Influence des contraintes résiduelles sur la courbe contrainte/déformation d'un poteau trapu

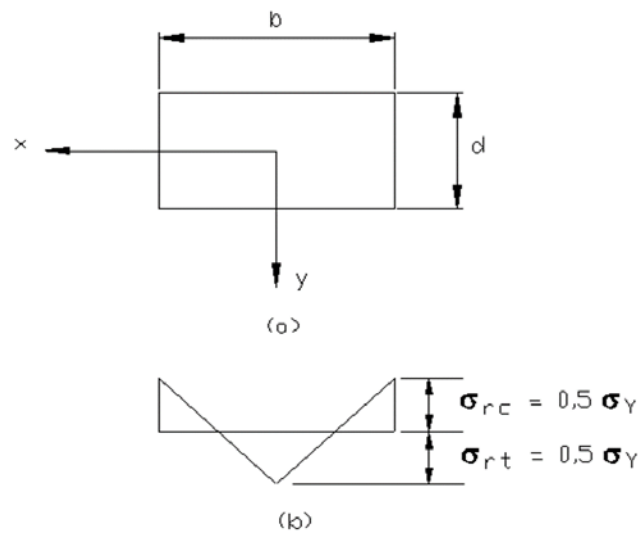


Figure 9-6 : Contraintes résiduelles à travers une section rectangulaire

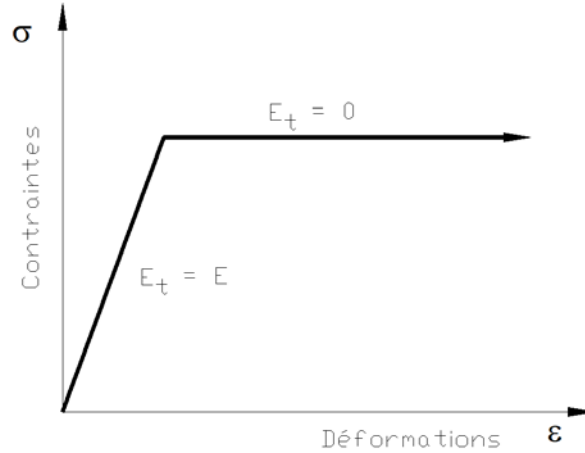


Figure 9-7 : Relation idéalisée contrainte/déformation d'un matériau élastique parfaitement plastique

Tel que montré à la Figure 9-8, toute contrainte σ induite dans la section due à une charge axiale externe est distribuée à travers cette dernière jusqu'à l'apparition, sur les bords, de la première plastification. La condition de cette plastification, est donnée par : $\sigma + \sigma_r = \sigma_y$. Cet état de contrainte est atteint à $\pm b/2$, lorsque $\sigma + \sigma_y/2 = \sigma_y$ ou $\sigma/\sigma_y = P/P_y = 1/2$. Pour toute augmentation de la charge axiale P , des parties de la section transversale vont se plastifier. De la condition d'équilibre $P = \int \sigma dA$, nous pouvons trouver la relation entre la contrainte appliquée σ et le paramètre α qui définit l'étendu du noyau élastique à travers la section transversale via l'expression :

$$\frac{P}{P_y} = \frac{\sigma}{\sigma_y} - \left(\frac{\sigma}{\sigma_y} - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \quad (9.29)$$

De la géométrie des triangles semblables (voir Figure 9-8b), on obtient :

$$\frac{\sigma}{\sigma_y} = \frac{3}{2} - 2\alpha \quad (9.30)$$

En combinant (9.29) et (9.30) on obtient :

$$\tau = \sqrt{2 \left(1 - \frac{P}{P_y} \right)} \quad (9.31)$$

Pour une augmentation infinitésimale de la contrainte de compression $d\sigma$, l'augmentation de la charge dP , est :

$$dP = d\sigma \times d \times 2\alpha b = A_E d\sigma \quad (9.32)$$

où A_E est l'aire du noyau élastique.

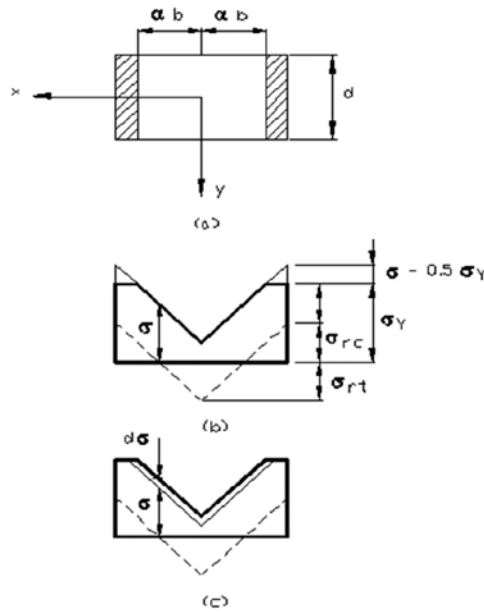


Figure 9-8 : Section rectangulaire - Contrainte externe de compression et les contraintes résiduelles

La valeur moyenne de l'augmentation de la contrainte $(dP)_m = dP / A$, et l'augmentation de la déformation $d\varepsilon$, est :

$$d\varepsilon = \frac{d\sigma}{E} = \frac{dP}{A_E E} \quad (9.33)$$

La pente de la courbe contrainte/déformation, à tout point, d'un poteau trapu, est :

$$\frac{(d\sigma)_m}{d\varepsilon} = \frac{dP/A}{dP/A_E E} = \frac{A_E E}{A} \quad (9.34)$$

On peut considérer cette pente de la courbe contrainte/déformation comme étant le module tangent de la section transversale, E_t tel que :

$$\frac{E_t}{E} = \tau = \frac{A_E}{A} \quad (9.35)$$

Dans la région du comportement inélastique du poteau, le ratio (τ) du module tangent sur le module élastique est égal au ratio de l'aire du noyau élastique sur l'aire totale de la section. Dans le cas de la section rectangulaire étudiée, on obtient de (9.31):

$$\tau = \frac{A_E}{A} = \frac{2abd}{bd} = 2\alpha \quad (9.36)$$

Les formules qui déterminent la résistance au flambement selon les deux axes principaux, x et y, incluant les effets des contraintes résiduelles, sont, dans le domaine élastique ($0 \leq P/P_y \leq 0,5$) :

$$P_x = \frac{\pi^2 EI_x}{L^2}, P_y = \frac{\pi^2 EI_y}{L^2} \quad (9.37)$$

avec la notation des élancements selon les axes x et y telle que :

$$\lambda_x = \frac{L}{r_x \pi} \sqrt{\frac{\sigma_y}{E}}, \lambda_y = \frac{L}{r_y \pi} \sqrt{\frac{\sigma_y}{E}} \quad (9.38)$$

On peut écrire (9.37) sous une forme adimensionnelle telle que :

$$(\lambda_x)_E = (\lambda_y)_E = \frac{1}{\sqrt{P/P_y}} \quad (9.39)$$

où $P_y = A\sigma_y$ est la charge correspondant à la limite élastique. La résistance au flambement relative au module tangent est dépendante du noyau élastique.

Dans la zone plastifiée, la résistance est donnée par :

$$P_T = \frac{\pi^2 EI_E}{L^2} \quad (9.40)$$

et

$$\lambda_T = \sqrt{\frac{I_E/I}{P/P_y}} \quad (9.41)$$

Pour le flambement selon y :

$$I_{Ey} = \frac{d}{12} (2\alpha b)^3, I_y = \frac{db^3}{12} \quad (9.42)$$

et selon x :

$$I_{Ex} = \frac{d^3}{12} (2\alpha b), I_x = \frac{bd^3}{12} \quad (9.43)$$

À partir de (9.36), le remplacement de la variable α dans (9.42) et (9.43) et la substitution de ces deux équations dans (9.41), donne les expressions de la charge du flambement du module tangent :

$$(\lambda_x)_T = \sqrt{\frac{\tau}{P/P_y}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2(1 - P/P_y)}}{P/P_y}}, (\lambda_y)_T = \sqrt{\frac{\tau^3}{P/P_y}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2(1 - P/P_y)^{3/2}}}{P/P_y}} \quad (9.44)$$

Il s'en suit que $P_{Ty}/P_y > P_{Ty}/P_y$. Pour les profilés en acier structural en forme de I (W) caractérisée par des ailes relativement larges, la résistance au flambement est principalement gouvernée par la rigidité des ailes et la distribution des contraintes résiduelles dans ces ailes est similaire à celle de la section rectangulaire traitée dans les précédents paragraphes. La résistance au flambement de ce type de profilés est beaucoup plus importante selon l'axe fort comparé de la résistance selon l'axe faible.

9.7 AUTRES FACTEURS QUI INFLUENCENT LA RÉSISTANCE DES POTEAUX

La prochaine section traite sommairement des effets inévitables associés aux imperfections qui résultent des procédés de fabrication sur la réponse des structures réelles. Ces effets ont déjà été traités dans d'autres chapitres de ce mémoire. L'acier structural est un matériau qui n'est pas infiniment élastique; le résultat est que l'on a un comportement élasto-plastique et lorsqu'une membrure de proportion pratique et faite de cet acier, est chargée axialement en compression, un flambement inélastique est à prévoir. Les éléments de structure sont affectés par plusieurs types d'imperfections, principalement de nature géométrique et/ou mécanique, qui peuvent affaiblir sérieusement leur capacité de charge. La modification rapide de la déformation lorsque la charge appliquée augmente (caractéristique du phénomène de flambement) donne aussi lieu à des effets du second ordre qui, lorsqu'ils sont combinés avec un comportement inélastique du matériau, ont pour résultat un comportement non-linéaire global de la structure.

9.7.1 Effet de la plasticité du matériau

Habituellement, on représente le comportement des nuances d'aciers au carbone ou faiblement alliés par la relation contrainte/déformation élasto-plastique parfait tel que montré sur la Figure 9-7. Lorsque la déformation élastique est faible, le modèle rigide-plastique parfait décrit de façon acceptable le comportement du matériau (voir Figure 9-9).

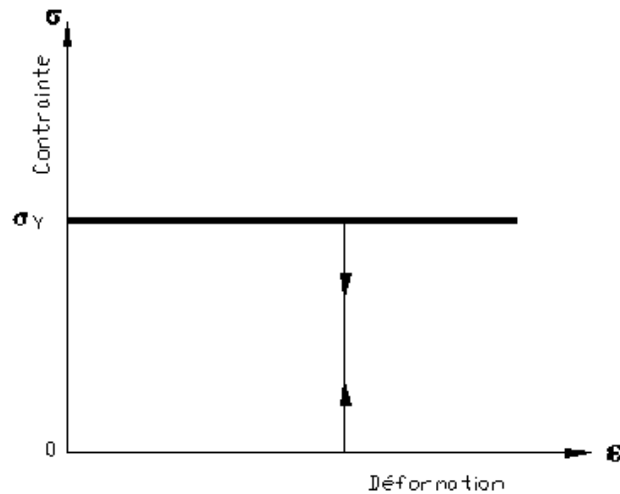


Figure 9-9 : Courbe contrainte/déformation rigide-plastique

Modèle de comportement rigide-plastique parfait

Le comportement rigide-plastique suppose que l'on ait ni déformation latérale ni axiale pour des valeurs faibles de l'effort normal, P . Chaque section droite fait l'objet de la même contrainte de compression uniformément répartie $\sigma = P/A$ et la déformation axiale n'est possible que lorsque σ atteint la limite d'élasticité F_y . À ce stade, une petite perturbation quelconque a pour effet de donner lieu à un déplacement latéral qui crée un moment fléchissant supplémentaire. L'élément s'effondre en raison d'une déformation confinée à une rotule plastique en un point quelconque de sa longueur (à mi-hauteur pour le cas d'un poteau bi-articulé). La distribution de contrainte est bi-rectangulaire, la déformation plastique se produisant aussi bien en traction qu'en compression. Après flambement, l'élément reste en équilibre à condition que P devienne plus faible que la charge d'écrasement. Plus le déplacement latéral est grand, plus le moment fléchissant au droit de la rotule plastique est grand et donc, plus petit sera l'effort normal de compression correspondant.

Modèle de comportement élasto-plastique parfait

Lorsque la charge critique de flambement élastique P_{cr} est plus faible que la charge d'écrasement P_{pl} , l'élément reste rectiligne et subit une déformation axiale élastique. Lorsque l'effondrement a lieu par flexion élastique critique à la charge $P = P_{cr}$, le déplacement latéral qui en résulte induit des moments de flexion. L'écoulement se produit, dans la partie centrale de l'élément, en compression et plus rarement en traction. Quand, par ailleurs, on atteint la charge plastique P_{pl} avant la charge critique de flambement P_{cr} , le comportement est similaire à celui d'une membrure rigide-plastique, mais avec des déformations axiales élastiques et une flexion supplémentaire.

Effets du comportement élasto-plastique réel sur le matériau

Si l'on compare le diagramme contrainte déformation réel avec le comportement élasto-plastique parfait, on voit apparaître trois différences principales :

1. Pour des déformations importantes, le matériau peut subir un écrouissage.
2. La déformation est limitée à une valeur maximale, au-delà de laquelle le matériau se rompt.
3. Le point d'écoulement plastique peut ne pas être clairement défini.

L'écrouissage n'affecte pas le premier écoulement plastique mais contribue à une augmentation de la charge d'effondrement. En pratique, on néglige les effets bénéfiques dus à l'écrouissage. D'autres types d'acier montrent des comportements contrainte/déformation différents ; en particulier les aciers à haute résistance n'ont généralement pas de point d'écoulement plastique clairement défini.

9.7.2 Effet des imperfections géométriques

Le flambement se caractérise par un champ de déplacement prédominant associé à la configuration après flambement de l'élément ; tout déplacement initial influera donc sur l'instabilité, de même que toute excentricité de la charge appliquée. Les effets secondaires de déstabilisation qui en résultent réduisent la capacité de charge par rapport à celle d'un élément parfait. En raison du fait que ces imperfections sont dans la gamme des tolérances normales de fabrication, elles ne sont généralement pas visibles et ne peuvent pas être quantifiées de manière précise à l'avance. Elles peuvent cependant être prises en compte, de manière appropriée, dans le calcul.

Défaut de rectitude initial

Le défaut de rectitude initial d'un poteau bi-articulé crée un moment de flexion secondaire dès l'application de l'effort de compression qui à son tour conduit à une déformation de flexion plus importante et une augmentation de l'amplitude du bras de levier des forces de compression appliquées au bord extérieur. Une configuration déformée stable est possible aussi longtemps que le moment extérieur, c'est-à-dire le produit de la charge par le déplacement latéral, ne dépasse pas la résistance du moment intérieur de la section.

Dans la mesure où la linéarité géométrique n'est plus vérifiée (l'équilibre exige la prise en compte de la configuration déformée), les effets de la flexion et de l'effort normal ne peuvent pas être simplement superposés pour permettre la description de la réponse réelle. Pour un chargement et des conditions d'appuis élémentaires, on peut utiliser une procédure directe, basée sur l'intégration de l'équation différentielle appropriée de l'équilibre décrivant la configuration déformée telle que :

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{P(v + v_0)}{EI_z} \quad (9.45)$$

où $v(x)$ et v_0 sont respectivement le déplacement de flambement supplémentaire associé à l'effort axial P et l'amplitude maximale du défaut initial de rectitude. Comme le premier mode de flambement d'un poteau bi-articulé est une demi-onde sinusoïdale, on peut choisir la courbure initiale de la même forme. L'amplitude du déplacement total v_t à la section critique (pour $x = 0,5 L$ dans ce cas) est :

$$v_t = \frac{v_0}{1 - P/P_{cr}}, P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_z}{L^2} \quad (9.46)$$

L'effort normal amplifie donc la non-linéarité initiale et le moment de flexion du premier ordre Pv_0 d'un coefficient amplificateur $1 - P/P_{cr}$. Le moment total est donné par :

$$M = Pv_t = \frac{Pv_0}{1 - P/P_{cr}} \quad (9.47)$$

Sur le bord concave du poteau, les contraintes de compression dues à l'effort normal et au moment fléchissant se superposent. Le premier écoulement plastique se produira à cet endroit si l'effort normal augmente régulièrement ; la valeur de P correspondant au premier écoulement plastique, appelée P_y , représente la limite de validité de la réponse élastique. Toute augmentation ultérieure de P au-delà de P_y a pour effet d'étendre l'écoulement plastique, à la fois le long du poteau et à l'intérieur de la section droite. D'où une dégradation plus grande de la rigidité du poteau, telle que l'on arrive à une charge maximale P_k , pour laquelle le poteau cède. La capacité de charge ultime est donc une fonction de deux sources de détérioration de la rigidité de flexion : l'effort normal (instabilité) et l'extension de l'écoulement plastique (plasticité).

Effets combinés des imperfections

Une courbure initiale, une excentricité initiale de la charge, des contraintes résiduelles ou un manque de clarté dans la définition du point d'écoulement plastique diminuent la résistance du poteau dans toute la gamme de l'élancement ou dans une partie. Par ailleurs, l'écroutissement

augmente probablement la courbe de résistance, bien qu'il n'affecte que la gamme des élancements faibles. L'effet bénéfique ainsi obtenu fait en général plus que compenser la perte de résistance due aux excentricités accidentelles; dans tous les cas, la courbe de résistance du poteau est considérée comme tronquée à $\bar{\sigma} = F_y$, de telle sorte que l'on ignore la réserve de résistance. Des expériences et des calculs numériques montrent clairement que :

- Les influences séparées des contraintes résiduelles et d'une irrégularité initiale ne peuvent pas être simplement ajoutées si l'on veut obtenir une bonne estimation de leur influence combinée sur la résistance ultime.
- Pour des rapports d'élancements intermédiaires et pour de faibles contraintes résiduelles, l'influence combinée est normalement inférieure à la somme des parties, alors que dans les autres cas, elle peut être supérieure.
- Des variations dans la forme de la répartition des contraintes résiduelles donnent lieu à des différences dans la résistance du poteau ; elles sont, cependant, plus faibles pour des poteaux avec irrégularité initiale que pour des poteaux initialement rectilignes.
- L'influence à la fois des non linéarités et des contraintes résiduelles est plus grande pour les poteaux qui ont des rapports d'élancement intermédiaires. Dans cette gamme, les charges d'écrasement et les charges critiques coïncident presque ; la résistance ultime dépend de la rigidité de flexion, de la limite d'élasticité du matériau, de l'amplitude et de la distribution des contraintes résiduelles et de l'irrégularité initiale. L'interaction entre ces dernières imperfections peut donner lieu à une chute importante de la résistance ultime lorsque comparée à la résistance axiale ultime du poteau parfait.

Dans la mesure où tous les écarts par rapport à un poteau et d'un matériau idéaux peuvent être soumis à une certaine variabilité statistique, il est impossible de prédire de manière exacte la résistance réelle d'un poteau standard. Pour des raisons de calcul, on utilise les courbes de limite inférieure de résistance et ce, de manière à s'assurer, pour une probabilité donnée, que les charges de flambement calculées ne surestiment pas la résistance ultime réelle.

CHAPITRE 10

MÉTHODE DE CALCUL DES CHARGES CRITIQUES DE FLAMBEMENT

10.1 GÉNÉRALITÉS

Ce chapitre se veut un recueil de méthodes numériques et d'exemples destinés au traitement de certains aspects et paramètres pouvant influencer le phénomène de la stabilité des structures d'acier et ce, d'un point de vue global (la structure dans sa globalité) ou individuel (les composants structuraux notamment les composants travaillant comme poteaux-poutres).

10.2 MEMBRURES AVEC DES CONDITIONS DE RETENUES DIFFÉRENTES

Cet exemple traite de la détermination de la charge critique de flambement élastique d'une membrure sollicitée par une charge axiale de compression centrée. Les retenues de la membrure située aux deux extrémités et en travée présentent des rigidités relatives à différents types de déformations. La solution du système aux valeurs propres est obtenue en écrivant les équations sous forme matricielle. Pour des poteaux ayant des conditions de retenues complexes aux extrémités et en travée, comme montré sur la Figure 10-1, la charge critique de flambement peut être déterminée selon la procédure suivante.

L'appui (1) représente une fondation élastique de rigidité K_1 qui fournit un moment proportionnel à la rotation θ_1 . L'appui (3) de rigidité K_3 fournit une réaction proportionnelle au

déplacement v_3 . On doit déterminer la plus petite valeur de la charge axiale P qui rend le poteau élastiquement instable. On traite le poteau en deux segments, soit 1-3 et 3-2 et ce, considérant que l'équation qui régit l'équilibre du système montré à la figure 10.1 est telle que :

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{Pv}{EI} - \frac{R_1x}{EI} - \frac{M_1}{EI} = 0 \quad (10.1)$$

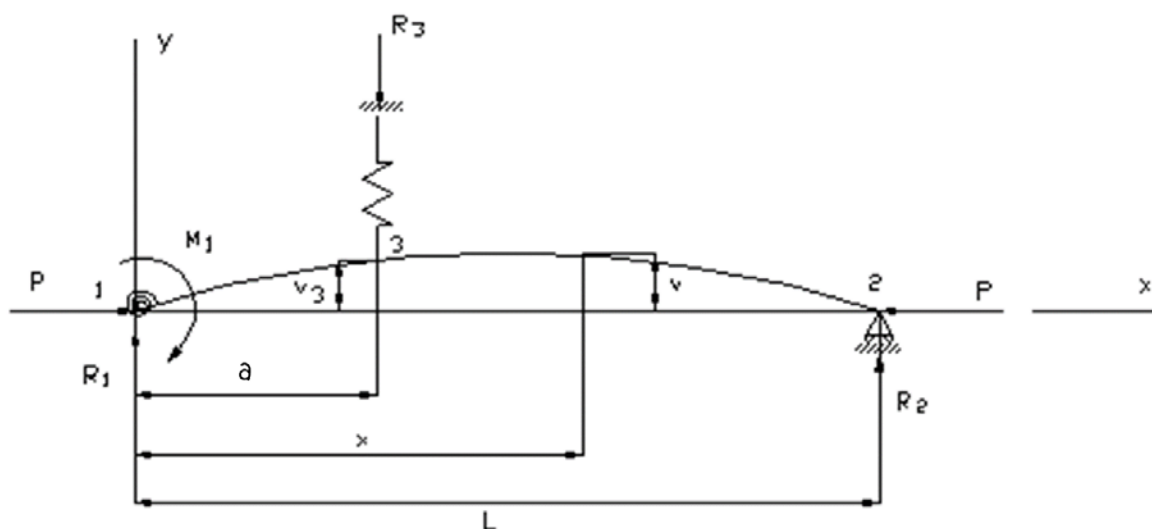


Figure 10-1 : Membrane sollicitée en compression axiale sous différentes conditions de retenue latérale

Segment 1-3

La solution de (10.1) est donnée par :

$$v = A_1 \sin \frac{2 \alpha x}{L} + B_1 \cos \frac{2 \alpha x}{L} + \frac{R_1 x}{P} + \frac{M_1}{P} \quad (10.2)$$

avec $\alpha = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_E}}$ et les trois conditions aux limites essentielles :

$$v(0) = 0, \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=0} = \theta_1, v(a) = v_3 \quad (10.3)$$

Segment 3-2

Sur ce segment, la solution de (10.1) s'écrit :

$$v = A_2 \sin \frac{2\alpha x}{L} + B_2 \cos \frac{2\alpha x}{L} + \frac{R_1 x}{P} + \frac{M_1}{P} - \frac{R_3(x-a)}{P} \quad (10.4)$$

avec comme conditions aux limites essentielles :

$$v(a) = v_3, v(L) = 0 \quad (10.5)$$

Conséquent du fait que les inconnus sont au nombre de sept (7), à savoir : $A_1, A_2, B_1, B_2, R_1, \theta_1$ et v_3 et que les conditions aux limites offrent cinq (5) équations, on doit donc établir les deux autres équations en considérant la continuité en 3, et le moment à l'extrémité 2 égal à zéro. En posant ces conditions à (10.4), on obtient le système matriciel :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{K_1}{P} & 0 \\ \frac{2\alpha}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{P} & -1 & 0 \\ \sin \frac{2\alpha a}{L} & \cos \frac{2\alpha a}{L} & 0 & 0 & \frac{a}{P} & \frac{K_1}{P} & -1 \\ 0 & 0 & \sin \frac{2\alpha a}{L} & \cos \frac{2\alpha a}{L} & \frac{a}{P} & \frac{K_1}{P} & -1 \\ 0 & 0 & \sin 2\alpha & \cos 2\alpha & \frac{L}{P} & \frac{K_1}{P} & \frac{-K_3(L-a)}{P} \\ \cos \frac{2\alpha a}{L} & -\sin \frac{2\alpha a}{L} & -\cos \frac{2\alpha a}{L} & \sin \frac{2\alpha a}{L} & 0 & 0 & \frac{K_3 L}{2P\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L & K_1 & -K_3(L-a) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \\ R_1 \\ \theta_1 \\ v_3 \end{Bmatrix} = 0 \quad (10.6)$$

qui peut être réécrit sous la forme synthétique $[C]\{x\} = 0$. Si les inconnus (x) ne sont pas égaux à zéro, le déterminant des coefficients de la matrice (C) devra être égal à zéro. Il est difficile de déterminer une solution générale; donc, on opte pour calculer le déterminant de (C) en variant la charge axiale par itération jusqu'à l'obtention de la condition $|C| = 0$. L'algorithme présenté à la Figure 10-2 illustre la méthode à employer.

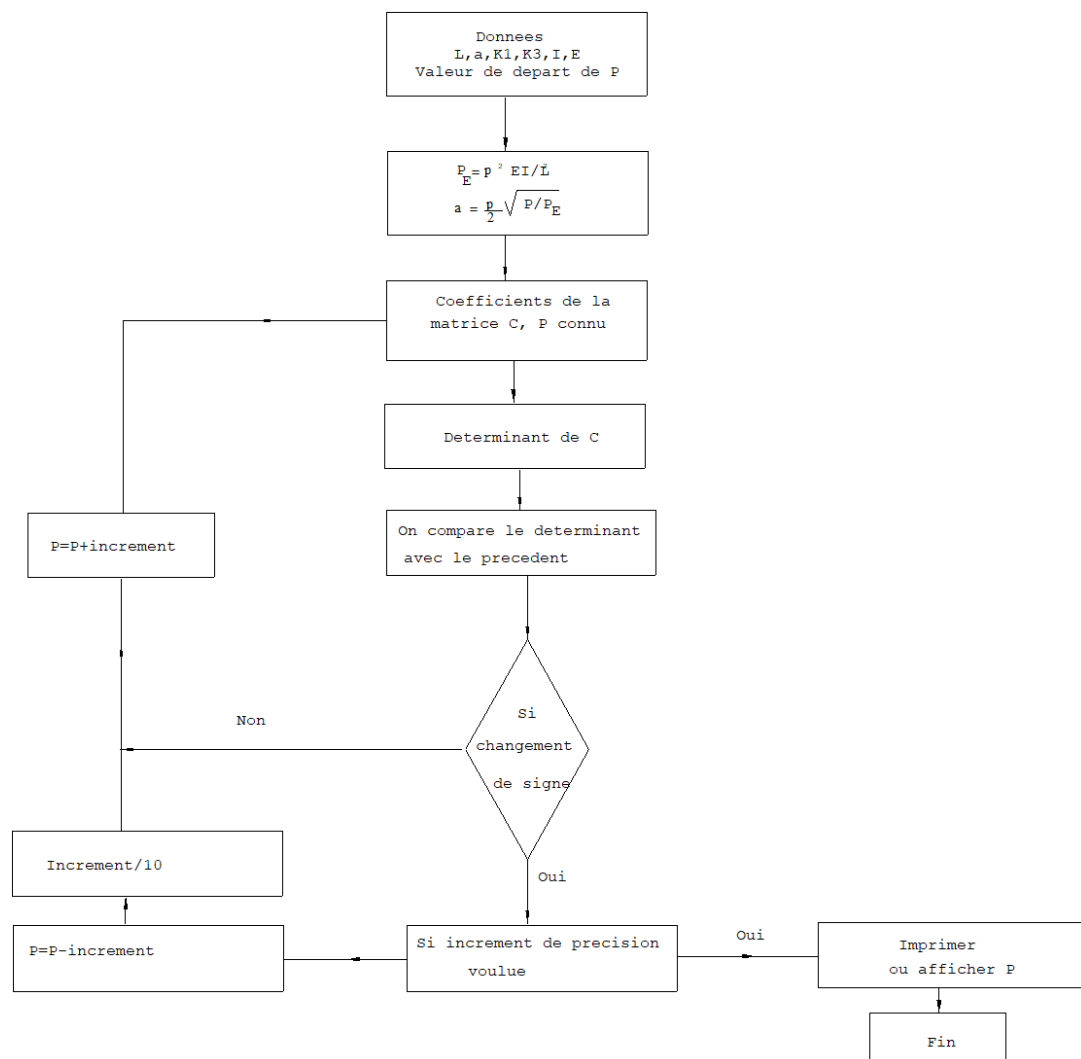


Figure 10-2 : Organigramme des étapes de calcul selon la méthode matricielle

10.3 CALCUL DE LA CHARGE CRITIQUE DES CADRES SIMPLES À PARTIR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENCIELLES DE LA DÉFORMÉE

Cet exemple traite de la détermination de la charge critique de flambement élastique d'un cadre simple à trois articulations, à l'aide des équations différentielles décrivant la déformée de la structure. Considérons le cadre montré à la Figure 10-3 pour lequel les joints A , B et D sont articulés.

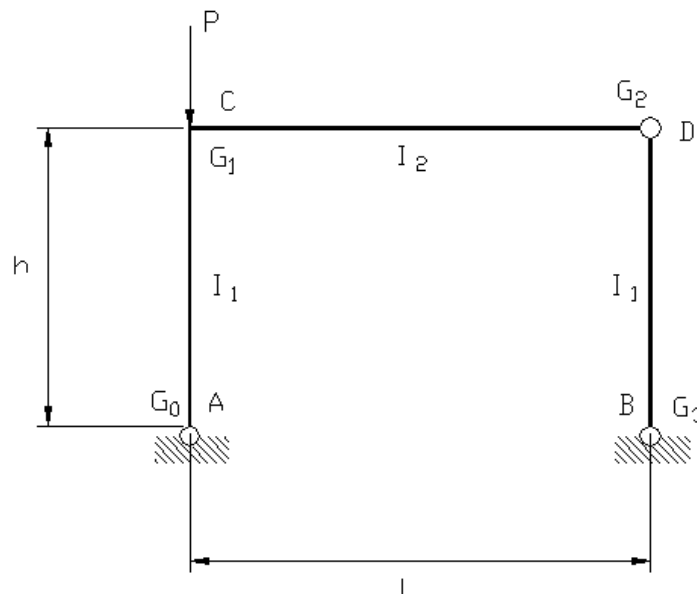


Figure 10-3 : Charge critique du flambement pour un cadre simple à trois articulations

Les inerties I_1 des poteaux AC et BD , et I_2 de la traverse CD sont constants le long de chaque membrure. La structure est sollicitée par une charge axiale P appliquée au nœud C . Il y aura flambement de la structure (instabilité) lorsque la figure d'équilibre correspondra à une déformée non rectiligne caractérisée par des déplacements non nuls $y(x)$ pour le poteau AC . La déformée $y(x)$ du cadre, telle que montrée à la Figure 10-4, est donnée par :

$$y(x) = A \cos Kx + B \sin Kx + \frac{M_0}{P} \left(1 - \frac{x}{h}\right) + \frac{M_1}{P} \frac{x}{h} + y_1 \frac{x}{h}$$

$$M_0 = 0 \text{ (articulation)} \quad (10.7)$$

$$A = -\frac{M_0}{P}$$

À $x = h$, $y = y_1$. Donc :

$$A \cos Kh + B \sin Kh + \frac{M_1}{P} = 0$$

$$B = -\frac{M_1}{K^2 EI_1} \frac{1}{\sin Kh} \quad (10.8)$$

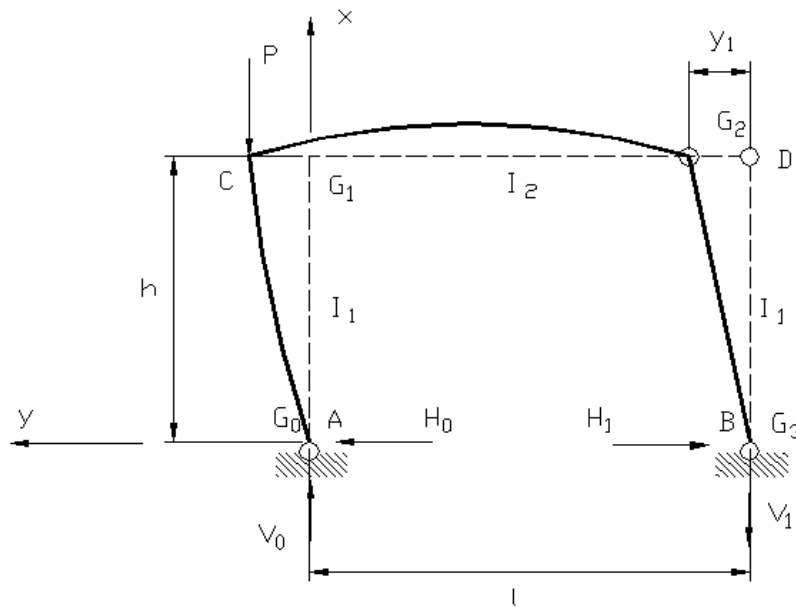


Figure 10-4 : Déformée du cadre à trois articulations

Le poteau BD ne peut être soumis à un effort autre qu'un effort normal (membrure articulée aux extrémités), la composante verticale de cet effort étant obtenue sachant que le moment au joint G_0 est nul :

$$V_1 = \frac{Py_1}{l} \quad (10.9)$$

La composante horizontale du même effort est obtenue en posant le moment par rapport à G_2 égal à zéro (présence d'une articulation) :

$$H_1 = V_1 \frac{y_1}{h} = \frac{Py_1^2}{hl} \quad (10.10)$$

Les équations d'équilibre de la structure donnent :

$$H_0 = H_1, \quad V_0 = P + V_1 \quad (10.11)$$

et le moment M_1 est déterminé en prenant les moments par rapport à G_1 tel que :

$$M_1 = -V_0 y_1 + H_0 h = -Py_1 - V_1 y_1 + V_1 \frac{y_1}{h} h = -Py_1 \quad (10.12)$$

$$y = B \sin Kx$$

L'expression $(dy/dx)_{x=h}$ représente la pente de la déformée en G_1 soit :

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=h} = BK \cos Kh = -\frac{M_1 h}{EI_1} \frac{\cot Kh}{Kh} \quad (10.13)$$

La continuité de la ligne moyenne en G_1 impose l'égalité de la rotation en ce point, entre le poteau et la traverse. La rotation de la traverse ω_1 s'écrit :

$$\begin{aligned}\omega_1 &= -M_1 \frac{l}{3EI_1} = BP \sin Kh \frac{l}{3EI_2} \\ M_1 &= -PB \sin Kh \\ \omega_1 &= BK^2 EI_1 \sin Kh \frac{l}{3EI_2} = BK^2 \frac{II_1}{3I_2} \sin Kh\end{aligned}\tag{10.14}$$

En plus de la solution $B = M_1 = 0$, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}Kh \cos Kh &= (Kh)^2 \sin Kh \frac{II_1}{3I_2 h} \\ Kh \cos Kh &= (Kh)^2 \frac{II_1}{3I_2} \frac{\sin Kh}{h}\end{aligned}\tag{10.15}$$

L'équation (10.15) peut être mise sous la forme :

$$\cot gKh = Kh \frac{II_1}{3I_2 h} \quad Kh \neq 0\tag{10.16}$$

La solution de cette équation est de la forme $Kh = \pi/n$ ($n > 2$); donc la longueur de flambement du poteau $\lambda = nh$. La charge critique de flambement s'écrit donc :

$$P_{cr} = \left(\frac{\pi}{hn} \right)^2 EI_1\tag{10.17}$$

Pour une traverse infiniment rigide, $\frac{I_2}{l} \gg \frac{I_1}{h}$ et on obtient :

$$\cos Kh = 0$$

$$Kh = \frac{\pi}{2}$$

$$P_{cr} = \left(\frac{\pi}{2h} \right)^2 EI_1$$

(10.18)

ce qui correspond à la déformation montrée à la Figure 10-5.

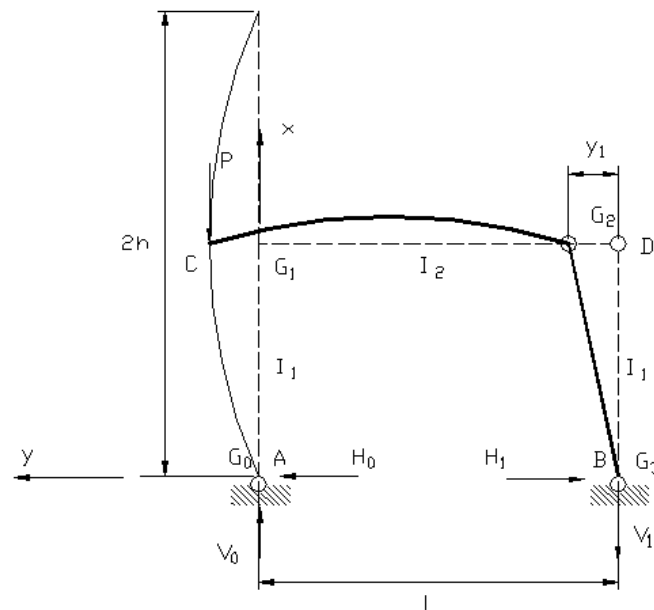


Figure 10-5 : Longueur effective du poteau faisant partie d'un cadre à trois articulations

10.4 ESTIMATION DE LA CHARGE CRITIQUE PAR LA MÉTHODE DES DIFFÉRENCES FINIES

Cet exemple traite de la détermination de la charge critique de flambement élastique d'une membrure isolée simplement retenues aux deux extrémités et exempte de défauts géométriques, à l'aide de la méthode des différences finies. La base de la méthode des différences finies d'Euler consiste à diviser le domaine d'intégration en un certain nombre de sous-domaines ou intervalles, en supposant les fonctions linéaires à l'intérieur du sous-domaine.

La méthode des différences finies est une méthode numérique pour obtenir des solutions approximatives d'équations différentielles. Dans cette méthode, l'équation différentielle est remplacée par un ensemble équivalent à des équations algébriques, qui sont souvent faciles à résoudre comparativement aux équations différentielles. La base de cette technique est que la dérivée d'une fonction à un point peut être approximée par une expression algébrique, qui consiste en la valeur de la fonction à ce point et à d'autres points adjacents. De ce fait, il est possible de remplacer les dérivés dans une équation différentielle par des expressions algébriques et de cette façon, l'équation différentielle devient une équation algébrique. En règle générale, les équations différentielles décrivent le comportement des systèmes continus, tandis que les équations algébriques décrivent le comportement des systèmes discrets. Le remplacement d'une fonction continue dans une équation différentielle par une expression algébrique qui définit la valeur de cette fonction à divers points est l'équivalent de remplacer le système continu par un système composé d'un nombre défini de masses localisées. La méthode des différences finies est similaire à la méthode d'énergie du point de vue que les deux méthodes simplifient la solution par la réduction du nombre de degré de liberté.

La méthode d'énergie réalise cela par l'approximation du comportement du système en supposant une forme de la déflexion tandis que la méthode des différences finies simplifie le système lui-même. En général, si le système continu est remplacé par n points de masses, la fonction

inconnue est remplacée par n variables algébriques et l'équation différentielle est remplacée par n équations algébriques simultanées. Étant donné que la dérivation de la fonction inconnue à un point est approximée par une expression qui consiste en la valeur de la fonction à ce point et à d'autres points adjacents, à mesure que les points sont rapprochés, mieux sera la concordance entre la dérivée et son approximation algébrique, et par conséquent, la solution du problème sera plus exacte. Toutefois, autant que le nombre des points est élevé, le nombre des équations simultanées à résoudre sera plus élevé. À cause de l'importance du travail numérique à accomplir dans la méthode des différences finies, celle-ci se prête mieux à l'usage des ordinateurs. Le principal inconvénient de cette méthode est qu'elle donne des valeurs numériques de la fonction inconnue à des points, au lieu d'une expression analytique générale qui soit valide pour l'ensemble du système. Si une expression analytique est requise, elle doit être obtenue par un lissage d'une courbe en fonction des valeurs obtenues de la solution. Cette approche est plus utile dans les problèmes d'équilibre que pour les problèmes aux valeurs propres, parce que les relations générales applicables peuvent être obtenues pour des charges critiques, tandis que des expressions continues pour les fonctions des déflexions ne sont jamais obtenues.

10.4.1 Ratios des différences

La dérivée d'une fonction à un point peut être exprimée approximativement en termes de la valeur de la fonction à ce point et à d'autres points adjacents. Une telle expression est connue sous l'appellation « Ratios des différences ». Si on considère la fonction $f(x)$ montrée sur la Figure 10-6, où sa valeur est connue à $x = i$, et à divers points uniformément espacés à droite et à gauche de $x = i$, la dérivée de la fonction $f(x)$ à un point x peut être exprimé par :

$$\frac{df}{dx} \cong \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (10.19)$$

À $x = i$, cette expression peut être écrite telle que :

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=i} \cong \Delta f_i = \frac{f_{i+h} - f_i}{h} \quad (10.20)$$

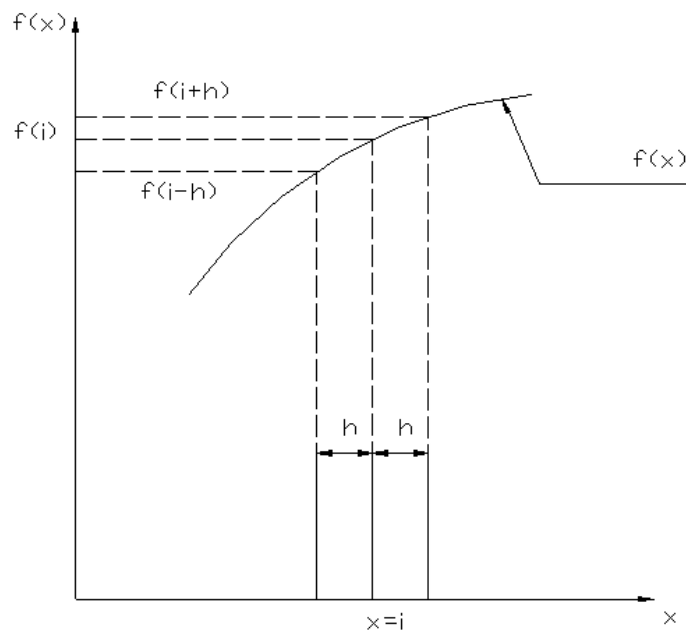


Figure 10-6 : Méthode numérique pour l'approche de la dérivée

Dans (10.20), f_i et f_{i+h} sont les valeurs de la fonction $f(x)$ à $x=i$ et à $x=i+h$, h étant la distance entre les deux points et Δf_i étant l'approximation de la dérivée df/df à $x=i$. Il est évident que la différence entre la dérivée et son approximation va diminuer en fonction de la diminution de la distance h . L'approximation de la dérivée df/df donnée par (10.20), implique la fonction f à $x=i$ et le point à la droite de $x=i$. Ce point est connu comme étant la différence avant. Une expression similaire impliquant la fonction f à $x=i$ et à $x=i-h$ est donnée par :

$$\Delta f_i = \frac{f_i - f_{i-h}}{h} \quad (10.21)$$

Cette forme d'approximation est connue comme étant la différence arrière. Une troisième expression possible impliquant des points adjacents à $x = i$, est :

$$\Delta f_i = \frac{f_{i+h} - f_{i-h}}{2h} \quad (10.22)$$

Cette expression est connue comme étant la différence centrale. Parmi ces trois approximations, la différence centrale est la plus exacte pour un espacement donné h . Une fois la première différence définie, la seconde différence peut être obtenue en prenant la différence de la première. Si Δ est défini comme étant l'opérateur de la différence qui correspond à l'opérateur différentiel d/dx , donc :

$$\begin{aligned} \Delta^2 f_i &= \Delta(\Delta f_i) = \frac{\Delta(f_{i+h/2} - f_{i-h/2})}{h} = \frac{\Delta f_{i+h/2} - \Delta f_{i-h/2}}{h} \\ &= \frac{\frac{f_{i+h} - f_i}{h} - \frac{f_i - f_{i-h}}{h}}{h} \\ &= \frac{f_{i+h} - 2f_i + f_{i-h}}{h^2} \end{aligned} \quad (10.23)$$

L'équation (10.23) donne la différence centrale seconde au point $x = i$. De façon similaire, les différences centrales troisième et quatrième, peuvent être obtenues comme suit :

$$\begin{aligned}
 \Delta^3 f_i &= \Delta^2(\Delta f_i) = \frac{\Delta^2 f_{i+h} - \Delta^2 f_{i-h}}{2h} \\
 &= \frac{\frac{f_{i+2h} - f_{i+h} + f_i}{h^2} - \frac{f_i - 2f_{i-h} + f_{i-2h}}{h^2}}{2h} \quad (10.24) \\
 &= \frac{f_{i+2h} - 2f_{i+h} + 2f_{i-h} - f_{i-2h}}{2h^3}
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \Delta^4 f_i &= \Delta^2(\Delta^2 f_i) = \frac{\Delta^2 f_{i+h} - 2\Delta^2 f_i + \Delta^2 f_{i-h}}{2h^3} \\
 &= \frac{\frac{f_{i+2h} - 2f_{i+h} + f_i}{h^2} - 2\left(\frac{f_{i+h} - 2f_i + f_{i-h}}{h^2}\right) + \frac{f_i - 2f_{i-h} + f_{i-2h}}{h^2}}{h^2} \quad (10.25) \\
 &= \frac{f_{i+2h} - 4f_{i+h} + 6f_i - 4f_{i-h} + f_{i-2h}}{h^4}
 \end{aligned}$$

La présentation graphique des équations (10.22) à (10.25) est montrée sur la Figure 10-7. Cette façon très convenable de représenter les ratios des différences finies attribuable aux travaux de (Bickley, 1939).

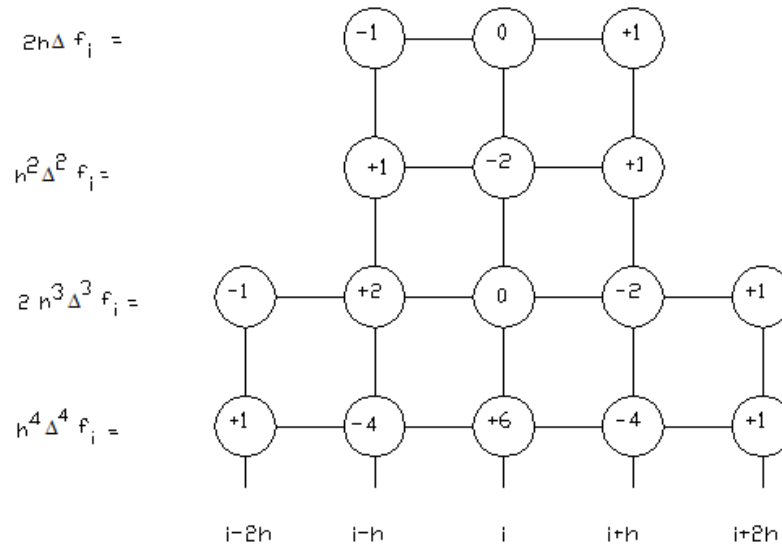


Figure 10-7 : Ratios des différences finies

10.4.2 Calcul de la charge critique

La méthode des différences finies sera utilisée pour calculer la charge critique du flambement du poteau montré sur la Figure 10-8. Il s'agit d'un poteau articulé aux extrémités. L'équation différentielle et les conditions aux limites pour le poteau bi-articulé est donnée par :

$$y'' + \frac{P}{EI} y = 0 \quad (10.26)$$

avec comme conditions aux limites : $y(0) = y(l) = 0$. Pour obtenir les relations correspondants en différences finies, la portée de la membrure est divisée en n segments d'égale hauteur, $h = l/n$, la déflexion au segment i est désignée par y_i (voir Figure 10-8). Conformément à (10.23), la dérivée seconde au point i , peut être approximée par le ratio :

$$\Delta^2 y_i = \frac{y_{i+h} - 2y_i + y_{i-h}}{h^2} \quad (10.27)$$

avec y_{i+1} et y_{i-1} , les déflexions aux points situés de part et d'autre du point i . Si (10.27) est substituée pour la dérivée seconde, dans (10.26), nous obtenons :

$$y_{i+h} - 2y_i + y_{i-h} + \frac{Ph^2}{EI} y_i = 0 \quad (10.28)$$

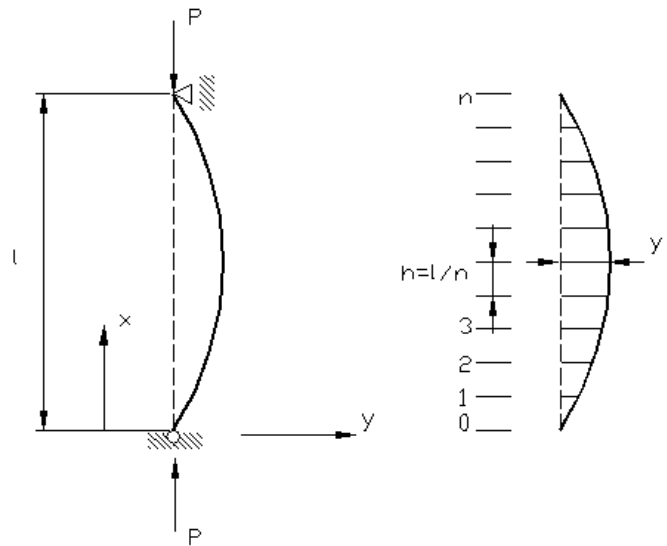


Figure 10-8 : Poteau articulé aux extrémités, subdivisé en n segments

C'est l'équation des différences au point i . L'équation différentielle est une expression exacte de la condition d'équilibre. En satisfaisant cette équation, on peut établir l'équilibre en tout point le long de la membrure. En comparaison, l'équation des différences finies exprime la condition d'équilibre uniquement de façon approximative, et en satisfaisant cette équation, on peut établir l'équilibre uniquement au point $x = i$.

Première approximation $n = 2$

La membrure est divisée en deux segments d'égale hauteur, $h = l/2$, les extrémités de ces deux segments sont désignées par 0, 1 et 2, comme montré sur la Figure 10-9. Dans ce cas, il est nécessaire d'écrire l'équation de la différence uniquement pour le point i . Aux deux points aux limites, la déflexion est nulle et l'équation est satisfaite.

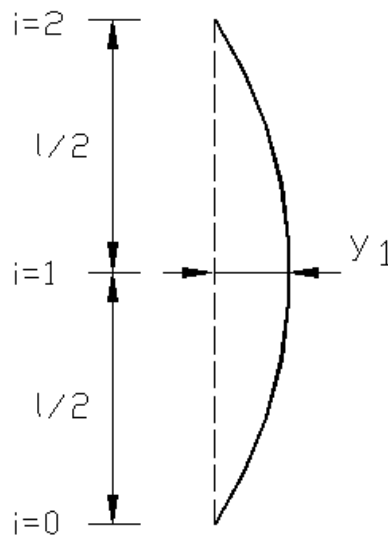


Figure 10-9 : Approximation avec $n=2$

L'équation (10.28) est écrite à $i = 1$, donne :

$$y_2 - 2y_1 + y_0 + \frac{Pl^2}{4EI} y_1 = 0 \quad (10.29)$$

À partir des conditions aux limites $y_0 = y_2 = 0$, on obtient :

$$y_1 \left(\frac{pl^2}{4EI} - 2 \right) = 0 \quad (10.30)$$

Comme c'est typique dans les problèmes du flambement linéaire, (10.30) mène à la solution de l'équilibre pour toute valeur de y_1 . La charge critique s'exprime donc par :

$$P_{cr} = \frac{8EI}{l^2} \quad (10.31)$$

La comparaison de ce résultat avec la solution exacte $9,87EI/l^2$, montre que l'approximation avec les différences finies, résulte d'une erreur d'environ 19%. Pour obtenir une solution plus exacte, il est nécessaire de satisfaire l'équation des différences finies à plus de points, le long de la membrure.

Première approximation $n = 3$

La membrure est divisée en trois segments d'égale longueur, $h = l/3$ comme montré sur la Figure 10-10. Il y a dans ce modèle deux points intérieurs, $i = 1$ et $i = 2$; à ces points, l'équation de la différence peut s'écrire comme suit :

$$y_2 - 2y_1 + y_0 + \lambda y_1 = 0 \quad (10.32)$$

et à $i = 2$, nous obtenons :

$$y_3 - 2y_2 + y_1 + \lambda y_2 = 0 \quad (10.33)$$

avec $\lambda = Pl^2/9EI$. Considérant les conditions aux limites, l'arrangement des termes donne :

$$\begin{aligned}(\lambda - 2)y_1 + y_2 &= 0 \\ y_1 + (\lambda - 2)y_2 &= 0\end{aligned}\tag{10.34}$$

Ces équations sont linéaires et homogènes. Elles ont une solution $y_1 = y_2 = 0$, et une autre solution peut être obtenue en posant le déterminant égal à zéro, donc :

$$\begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 \\ 1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0\tag{10.35}$$

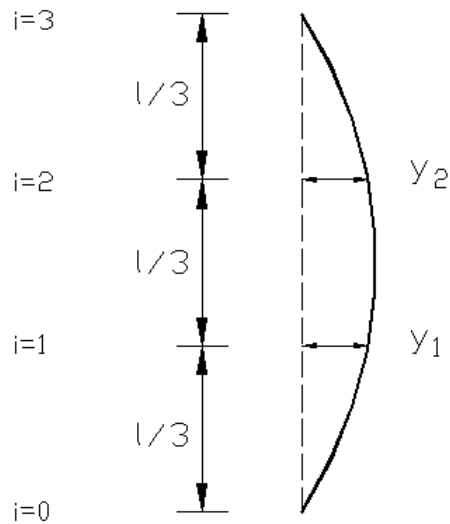


Figure 10-10 : Approximation avec n=3

L'expansion de (10.35), donne :

$$\lambda^2 + 4\lambda - 3 = 0\tag{10.36}$$

et pour laquelle la plus petite racine correspond à la charge critique. Les racines de (10.36) sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$, ce qui donne $P_1 = \frac{9EI}{l^2}$, $P_2 = \frac{27EI}{l^2}$. Donc, la charge critique est :

$$P_{cr} = \frac{9EI}{l^2} \quad (10.37)$$

Cette solution diffère de la charge d'Euler d'environ 9%.

Première approximation $n = 4$

La membrure, dans ce cas, est divisée en quatre segments d'égale longueur $h = l/4$, comme montré sur la Figure 10-11. Il y a, dans ce modèle, trois points intérieurs ($i = 1, 2$ et 3), où on pourra écrire les équations des différences finies. Toutefois, si on prend en considération le fait que le mode de flambement d'un poteau bisarticulé est symétrique, donc $y_1 = y_3$, le nombre d'équations qui doivent être écrites est réduit à deux. À $i = 1$, (10.28) donne :

$$y_2 - 2y_1 + y_0 + \frac{Pl^2}{16EI} y_1 = 0 \quad (10.38)$$

et à $i = 2$, nous obtenons :

$$y_3 - 2y_2 + y_1 + \frac{Pl^2}{16EI} y_2 = 0 \quad (10.39)$$

Avec les conditions aux limites et la symétrie, (10.38) et (10.39) peuvent être écrites sous la forme :

$$\begin{aligned}(\lambda - 2)y_1 + y_2 &= 0 \\ 2y_1 + (\lambda - 2)y_2 &= 0\end{aligned}\tag{10.40}$$

avec $\lambda = Pl^2/16EI$. Si on pose le déterminant de (10.40) égal à zéro, on obtient l'équation quadratique :

$$\lambda^2 - 4\lambda + 2 = 0\tag{10.41}$$

La plus petite racine de cette équation est $\lambda = 0,59$, donc :

$$P_{cr} = \frac{9,4EI}{l^2}\tag{10.42}$$

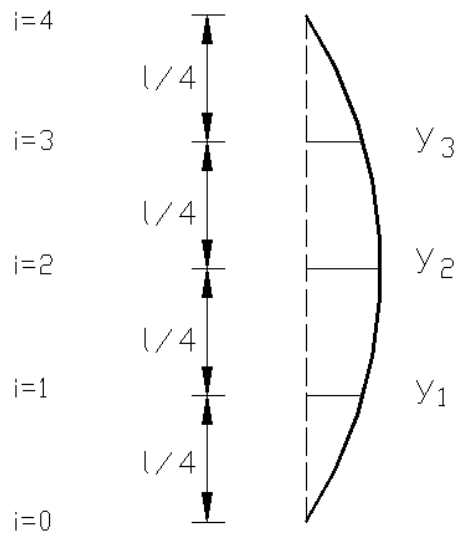


Figure 10-11 : Approximation avec $n=4$

La solution (10.42) diffère de la charge d'Euler d'environ 5%. En continuant d'augmenter le nombre de degrés de liberté et de satisfaire les équations des différences finies à plusieurs points, on pourra améliorer la précision de la solution. Toutefois, ce processus demande la solution d'un grand nombre d'équations simultanées. Une façon plus simple et rapide pour augmenter le degré d'exactitude de la solution est offerte par le schéma d'extrapolation de *Richardson* (Brezinski & Redivo Zaglia, 1991). Il peut être démontré que l'erreur e de la solution approximative, est grossièrement proportionnelle au carré de la dimension du segment h , donc :

$$e = Ch^2 \quad (10.43)$$

C'étant une constante. Si n_1 et n_2 sont le nombre de segments avec lesquels la membrure est divisée et que $h_1 = l/n_1$ et $h_2 = l/n_2$ sont les dimensions correspondantes des segments, et si β_1 et β_2 sont les approximations de la solution exacte β , donc les erreurs correspondantes sont :

$$e_1 = \beta - \beta_1 = C \frac{l^2}{n_1^2} \quad (10.44)$$

et

$$e_2 = \beta - \beta_2 = C \frac{l^2}{n_2^2} \quad (10.45)$$

L'élimination de C , entre ces deux relations, donne :

$$\beta = \frac{n_1^2 \beta_1 - n_2^2 \beta_2}{n_1^2 - n_2^2} \quad (10.46)$$

L'équation (10.46) donne la valeur extrapolée de la solution, pourvu que les approximations β_1 et β_2 approchent la solution exacte. Il est habituellement possible d'obtenir une rapide convergence

en choisissant une bonne séquence de n . Pour illustrer l'efficacité de l'extrapolation de *Richardson*, les résultats approximatifs obtenus pour le poteau bisarticulé avec $n=3$ et $n=4$, sont substitués dans (10.46), ce qui donne :

$$\beta = \frac{9(9) - 16(9,4)}{9 - 16} = 9,85 \quad (10.47)$$

et la charge critique :

$$P_{cr} = 9,85 \frac{EI}{l^2} \quad (10.48)$$

Cette solution diffère de la charge d'Euler d'environ 0,2%.

10.5 CHARGE CRITIQUE DE FLAMBEMENT D'UN CADRE RIGIDE

Cet exemple traite de la détermination de la charge critique de flambement élastique d'un cadre rigide simple libre de se déplacer latéralement et ce, pour deux conditions d'appuis: a) cadre rigide articulé aux pieds; b) cadre rigide parfaitement encastré aux pieds. La charge critique de flambement est obtenue par la résolution des équations différentielles de la fibre moyenne déformée. Les constantes d'intégration de la solution générale de déformations sont déterminées à partir des conditions aux limites.

Considérons, tel que montré à la Figure 10-12, le cas d'un cadre simple articulé aux pieds et libre de se déplacer latéralement. Le cadre est sollicité par des forces axiales de compression appliquées en tête des poteaux. Chaque élément vertical peut être considéré séparément comme une membrure comprimée retenue à sa partie inférieure et encastrée élastiquement à sa partie supérieure. En choisissant les axes des coordonnées tels qu'ils sont indiqués sur la Figure 10-12, l'équation différentielle de la courbe élastique de la membrure AB s'exprime comme suit :

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -Py \quad (10.49)$$

La solution de (10.49) satisfaisant aux conditions à l'extrémité inférieure est :

$$y = A \sin Kx \quad (10.50)$$

avec $K^2 = P/EI$. À la partie supérieure de la membrure AB , les angles m_1 et m doivent être égaux puisque la membrure horizontale BC est fléchie par deux couples égaux à $P(y)_{x=l}$, la condition d'équilibre à l'extrémité supérieure donne :

$$\begin{aligned} \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=l} &= \frac{Pb}{6EI_1} (y)_{x=l} \\ K \cos Kl &= \frac{Pb \sin Kl}{6EI_1} \end{aligned} \quad (10.51)$$

Dans le cas général, (10.51) peut être mise sous la forme suivante :

$$Kl \operatorname{tg} Kl = \frac{6I_1 l}{Ib} \quad (10.52)$$

La valeur critique de la charge P est facile à trouver pour toute valeur numérique du rapport $I_1 l / Ib$. Si l'on considère un cadre simple où toutes les membrures ont la même rigidité à la flexion EI , on aura :

$$Kl \operatorname{tg} Kl = 6 \quad (10.53)$$

d'où $Kl = 1,35$ et $P_{cr} = 1,82EI/l^2$.

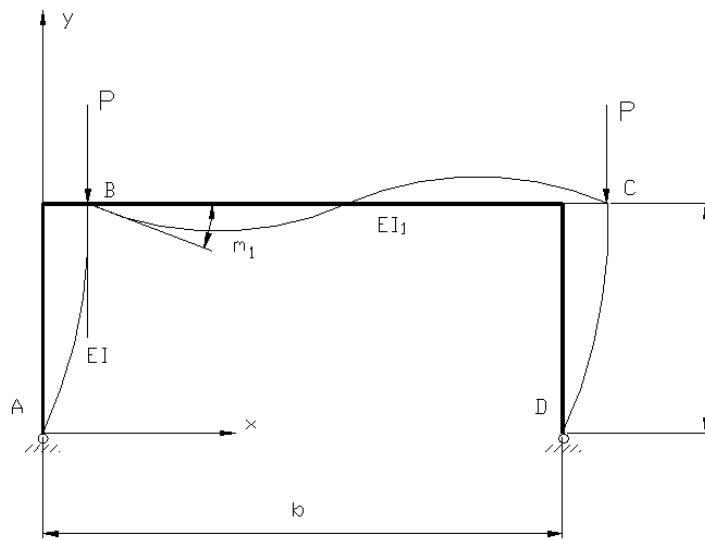


Figure 10-12 : Cadre rigide simplement articulé

Considérons maintenant un cadre simple encastré aux pieds dont l et L sont respectivement l'inertie et la longueur des poteaux et I_1 et b sont les mêmes quantités pour la traverse. Supposant que, sous l'action des charges verticales P , le cadre flambe latéralement comme montré sur la Figure 10-13, en appelant M les moments aux joints rigides, l'équation de la courbe élastique de l'un des montants sera :

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = P(\delta - y) - M \quad (10.54)$$

et la solution donnée par :

$$y = A \cos Kx + B \sin Kx + \delta - \frac{M}{P} \quad (10.55)$$

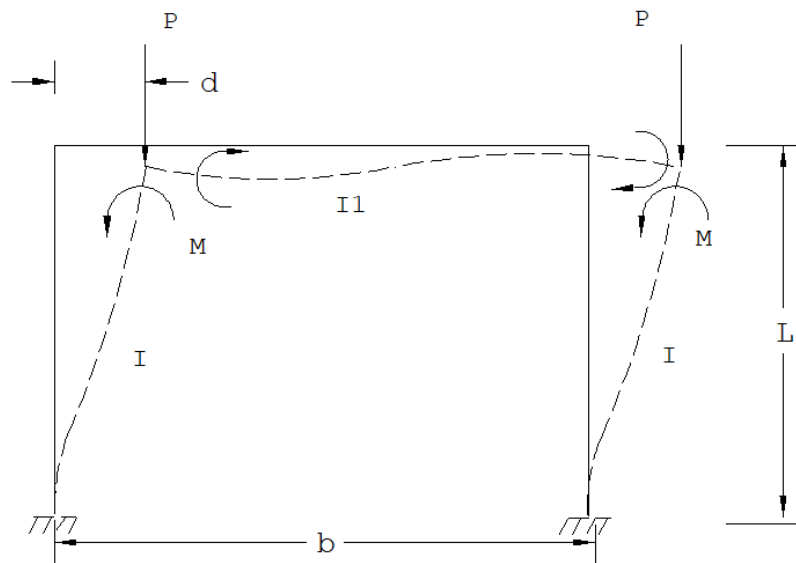


Figure 10-13 : Cadre rigide encastré

avec $K^2 = \frac{P}{EI}$. On détermine les constantes A et B par les conditions d'encastrement telles que :

$$y = \left(\delta - \frac{M}{P}\right)(1 - \cos Kx) \quad (10.56)$$

avec les conditions en tête de poteaux :

$$y_{x=l} = \delta \quad (10.57)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=l} = \frac{Mb}{6EI_1}$$

En portant la valeur de y , obtenue de (10.56), dans (10.57), on peut écrire :

$$\begin{aligned} \delta \cos Kl + M / P (1 - \cos Kl) &= 0 \\ \delta K \sin Kl - M / P (K \sin Kl + Pb / 6EI_1) &= 0 \end{aligned} \quad (10.58)$$

On trouve l'équation qui exprime la valeur de la charge critique P en égalant à zéro le déterminant dy système matriciel obtenu de (10.58), ce qui donne :

$$Kl / \operatorname{tg} Kl = 6lI_1 / bI \quad (10.59)$$

Jusqu'ici, on a négligé les variations des longueurs des barres verticales sous l'action du flambement. En raison de l'action des moments M , le montant de gauche du cadre est tendu et celui de droite est comprimé, chacun de ces efforts étant égal à $2M/b$. La variation de la longueur correspondante est $2MI/AEb$ et la rotation résultante de la membrure horizontale est $4MI/AEb^2$. La deuxième équation de (10.57) devient :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=l} = \frac{Mb}{6EI_1} + \frac{4MI}{AEb^2} \quad (10.60)$$

En effectuant le changement correspondant dans (10.58), on peut déterminer la valeur de la charge critique P à partir de la relation suivante :

$$\frac{Kl}{tgKl} = \frac{6I_1}{bI} + \frac{1}{1 + 24I_1 / Ab^3} \quad (10.61)$$

Le deuxième facteur au dénominateur du second terme de (10.61) représente l'effet de la déformation axiale des montants verticaux sur la charge critique. Le terme I_1 est en général très petit en comparaison de Ab^3 , de sorte que cet effet a peu d'importance et peut être négligé.

10.6 ANALYSE MATRICIELLE DE LA STABILITÉ ÉLASTIQUE

Cet exemple traite de la détermination de la charge critique de flambement élastique des membrures individuelles ayant différentes conditions d'appuis aux deux extrémités et ce, à l'aide de la méthode matricielle. Un ensemble d'équations simultanées, obtenues des conditions aux limites, est mis sous forme matricielle. La structure est instable lorsque le déterminant de la matrice de rigidité est nul.

10.6.1 Théorie de la solution unique suivant *Kirchoff*

Cette théorie stipule qu'un corps élastique assume une seule configuration d'équilibre sous l'effet des charges appliquées. La stabilité d'un système élastique peut être examinée en excitant le système. À partir de sa position d'équilibre, si le système n'est plus excité et qu'il retourne à sa position initiale, il est appelé système **stable**. Dans le cas contraire il est qualifié **d'instable**. La limite entre les deux cas est **l'équilibre neutre**.

D'un point de vue matriciel, l'instabilité signifie qu'une structure de comportement linéaire perd sa rigidité. Considérons le système matriciel résultant de l'analyse d'une structure tel que :

$$[K]\{r\} = \{R\} \quad (10.62)$$

avec $[K]$, $\{r\}$ et $\{R\}$ définissant respectivement la matrice de rigidité de la structure, le vecteur des déplacements et le vecteur des forces nodales. Lorsque l'effet des forces axiales est inclus, les éléments de la matrice de rigidité $[K]$ sont fonction des forces axiales et on peut écrire la relation entre forces et déplacements comme suit :

$$[K]\{r + \delta r\} = \{R\} \quad (10.63)$$

Le système montré sur la Figure 10-14 est constitué d'une barre AB infiniment rigide avec un seul degré de liberté, à savoir la rotation de la barre autour de l'articulation (A). Pour une petite rotation (ϕ) :

$$r = L\phi \quad (10.64)$$

La rotation ϕ correspond à un moment M_a . Dans la position déformée (déplacement latéral) :

$$M_a = s.rL \cos(\phi) \quad (10.65)$$

ϕ étant petit,

$$M_a = srL - Pr \quad (10.66)$$

En enlevant la source d'excitation ($M_a = 0$) :

Si $srL > Pr$ ou $P < sL$, la barre retourne à sa position initiale.

Si $P > sL$, la barre est instable.

Si $P = s L$, la barre AB est en état d'équilibre neutre, et P est la charge critique.

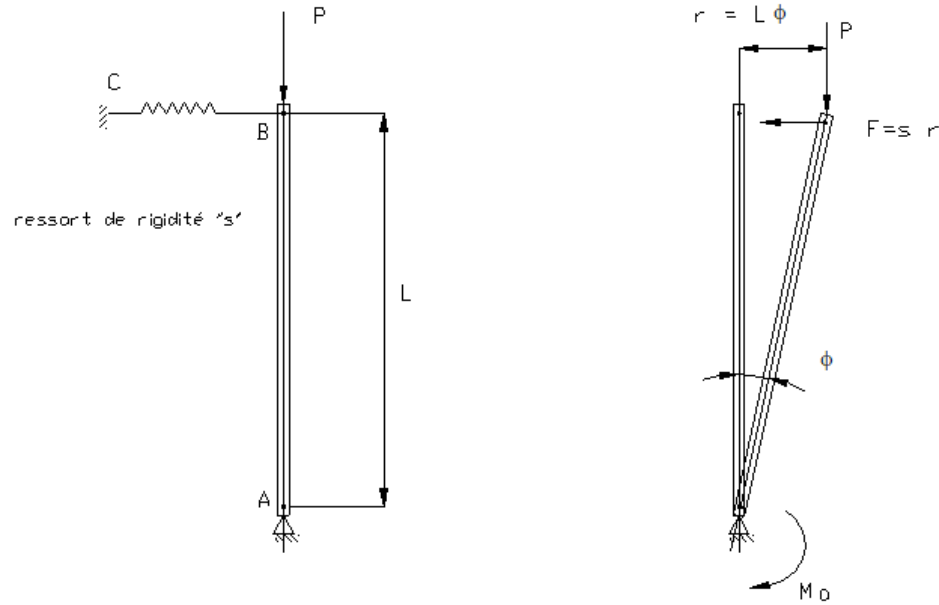


Figure 10-14 : Barre infiniment rigide retenue latéralement

Tant que le déplacement demeure relativement petit, la stabilité dépend de la relation entre la charge axiale P , la rigidité du ressort s et la géométrie de la structure L . De (10.66), on obtient :

$$R = \frac{M_a}{L} = s r - \frac{P r}{L} = \left(s - \frac{P}{L} \right) r \quad (10.67)$$

R étant la force qui produit le déplacement latéral et

$$K = s - \frac{P}{L} \quad (10.68)$$

Si $K = 0$, le système devient instable. La rigidité d'une structure consiste en deux parties soient la rigidité élastique s et la rigidité géométrique P/L , telles que :

$$[K] = \begin{pmatrix} \frac{4EI}{L} & & & \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & & \\ -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{12EI}{L^3} \end{pmatrix} - P \begin{pmatrix} \frac{2L}{15} & & & \\ -\frac{L}{30} & \frac{2L}{15} & & \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{6}{5L} & \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & -\frac{6}{5L} & \frac{6}{5L} \end{pmatrix} \quad (10.69)$$

Dans le cas d'une force de traction, le signe négatif qui précède P , devient alors positif. Le système (10.62) devient donc :

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4EI}{L} - \frac{2PL}{15} & & & \\ \frac{2EI}{L} + \frac{PL}{30} & \frac{4EI}{L} - \frac{2PL}{15} & & \\ -\frac{6EI}{L^2} + \frac{P}{10} & -\frac{6EI}{L^2} + \frac{P}{10} & \frac{12EI}{L^3} - \frac{6P}{5L} & \\ \frac{6EI}{L^2} - \frac{P}{10} & \frac{6EI}{L^2} - \frac{P}{10} & -\frac{12EI}{L^3} + \frac{6P}{5L} & \frac{12EI}{L^3} - \frac{6P}{5L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} \quad (10.70)$$

et où les sollicitations et degrés de liberté sont montrés sur la Figure 10-15.

Dans le cas montré sur la Figure 10-16, seul le déplacement r_4 n'est pas nul. Avec $r_1 = r_2 = r_3 = 0$, la solution de (10.70) s'écrit :

$$\begin{aligned}
 R_4 &= \left(\frac{12EI}{L^3} - \frac{6P}{5L} \right) r_4 \\
 |K| &= 0 \\
 \frac{12EI}{L^3} - \frac{6P}{5L} &= 0 \\
 P_{cr} &= \frac{10EI}{L^2} \approx \frac{\pi^2 EI}{L^2}
 \end{aligned} \tag{10.71}$$

et donc, un coefficient de longueur effective $K \approx 1$.

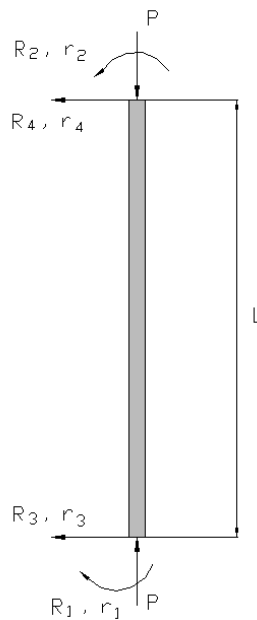


Figure 10-15 : Sollicitations et degrés de liberté appliquée sur le système

Examinons un autre cas où l'appui inférieur est rotulé tel que montré à la Figure 10-17. La rotation r_1 et le déplacement horizontal r_4 , sont les inconnus. La solution du système (10.70) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} - \frac{2PL}{15} & \frac{6EI}{L^2} - \frac{P}{10} \\ \frac{6EI}{L^2} - \frac{P}{10} & \frac{12EI}{L^3} - \frac{6P}{5L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_4 \end{bmatrix} \quad (10.72)$$

Posons $|K| = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{4EI}{L} - \frac{2PL}{15} \right) \left(\frac{12EI}{L^3} - \frac{6P}{5L} \right) - \left(\frac{6EI}{L^2} - \frac{P}{10} \right) \left(\frac{6EI}{L^2} - \frac{P}{10} \right) = 0 \\ & \frac{12(EI)^2}{L^4} - 5,2 \frac{PEI}{L^2} + 0,15P^2 = 0 \\ & \lambda = EI / L^2 \end{aligned} \quad (10.73)$$

L'équation quadratique en P résultant de (10.73) est telle que :

$$0,15P^2 - 5,2\lambda P + 12\lambda^2 = 0 \quad (10.74)$$

permet d'identifier la plus petite valeur de $P = 2,5\lambda$ telle que :

$$P_{cr} = \frac{2,5EI}{L^2} \approx \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} \quad (10.75)$$

ce qui donne une valeur du coefficient de la longueur effective $K \approx 2$.



Figure 10-16 : Poteau encastré à la base et libre de se déplacer en tête

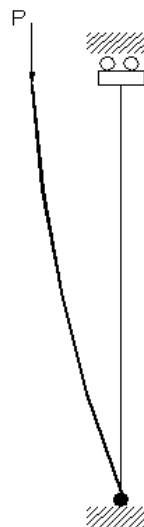


Figure 10-17 : Poteau rotulé à la base et libre de se déplacer en tête

Pour le cas d'un poteau encasté à sa base et libre en tête, tel que montré à la Figure 10-18, la rotation r_2 et le déplacement horizontal r_4 sont les inconnus. La solution du système (10.70) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} R_2 \\ R_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2EI}{L} + \frac{PL}{30} & \frac{6EI}{L^2} - \frac{P}{10} \\ \frac{6EI}{L^2} - \frac{P}{10} & \frac{12EI}{L^3} - \frac{6P}{5L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_2 \\ r_4 \end{bmatrix} \quad (10.76)$$

L'équation quadratique en P résultant de (10.76) est telle que :

$$0,15P^2 - 5,2\lambda P + 12\lambda^2 = 0 \quad (10.77)$$

et avec $\lambda = \frac{EI}{L^2}$, (10.77) permet d'identifier la plus petite valeur de $P = 2,5\lambda$ telle que :

$$P_{cr} = \frac{2,5EI}{L^2} \approx \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} \quad (10.78)$$

Ce qui donne, comme pour le cas précédent, une valeur du coefficient de la longueur effective $K \approx 2$.

Pour traiter certains cas, il faudra modéliser l'élément en deux tronçons et construire la matrice de rigidité en superposant les éléments des deux matrices de rigidité. Considérant celui montré à la Figure 10-19, La matrice de rigidité s'écrit telle que :

$$[K^a] = \begin{pmatrix} \frac{8EI}{L} - \frac{PL}{15} & & & \text{symétrique} \\ \frac{4EI}{L} + \frac{PL}{60} & \frac{8EI}{L} - \frac{PL}{15} & & \\ -\frac{24EI}{L^2} + \frac{P}{10} & -\frac{24EI}{L^2} + \frac{P}{10} & \frac{96EI}{L^3} - \frac{12P}{5L} & \\ -\frac{24EI}{L^2} - \frac{P}{10} & -\frac{24EI}{L^2} - \frac{P}{10} & -\frac{96EI}{L^3} + \frac{12P}{5L} & \frac{96EI}{L^3} - \frac{12P}{5L} \end{pmatrix} \quad (10.79)$$

pour la partie a et :

$$[K^b] = \begin{pmatrix} \frac{8EI}{L} - \frac{PL}{15} & & & \text{symétrique} \\ \frac{4EI}{L} + \frac{PL}{60} & \frac{8EI}{L} - \frac{PL}{15} & & \\ -\frac{24EI}{L^2} + \frac{P}{10} & -\frac{24EI}{L^2} + \frac{P}{10} & \frac{96EI}{L^3} - \frac{12P}{5L} & \\ -\frac{24EI}{L^2} - \frac{P}{10} & -\frac{24EI}{L^2} - \frac{P}{10} & -\frac{96EI}{L^3} + \frac{12P}{5L} & \frac{96EI}{L^3} - \frac{12P}{5L} \end{pmatrix} \quad (10.80)$$

pour la partie b. Le système matriciel devient alors :

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8EI}{L} - \frac{PL}{15} & \frac{4EI}{L} - \frac{PL}{60} & \frac{16EI}{L} - \frac{2PL}{15} & \frac{8EI}{L} - \frac{PL}{15} & \frac{96EI}{L^3} - \frac{12P}{5L} & \frac{192EI}{L^3} - \frac{24P}{5L} \\ 0 & \frac{4EI}{L} + \frac{PL}{60} & \frac{8EI}{L} - \frac{PL}{15} & 0 & \frac{-96EI}{L^3} + \frac{12P}{5L} & \frac{-96EI}{L^3} + \frac{12P}{5L} \\ \frac{-24EI}{L^2} + \frac{P}{10} & \frac{-24EI}{L^2} + \frac{P}{10} & 0 & \frac{-24EI}{L^2} + \frac{P}{10} & \frac{96EI}{L^3} - \frac{12P}{5L} & \frac{192EI}{L^3} - \frac{24P}{5L} \\ \frac{24EI}{L^2} - \frac{P}{10} & 0 & \frac{-24EI}{L^2} + \frac{P}{10} & \frac{-24EI}{L^2} + \frac{P}{10} & \frac{-96EI}{L^3} + \frac{12P}{5L} & \frac{-96EI}{L^3} + \frac{12P}{5L} \\ 0 & \frac{24EI}{L^2} - \frac{P}{10} & \frac{24EI}{L^2} - \frac{P}{10} & 0 & \frac{96EI}{L^3} - \frac{12P}{5L} & \frac{192EI}{L^3} - \frac{24P}{5L} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \end{bmatrix} \quad (10.81)$$

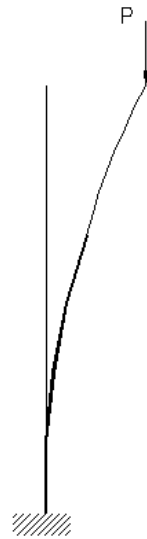


Figure 10-18 : Poteau encastré à sa base et libre en tête

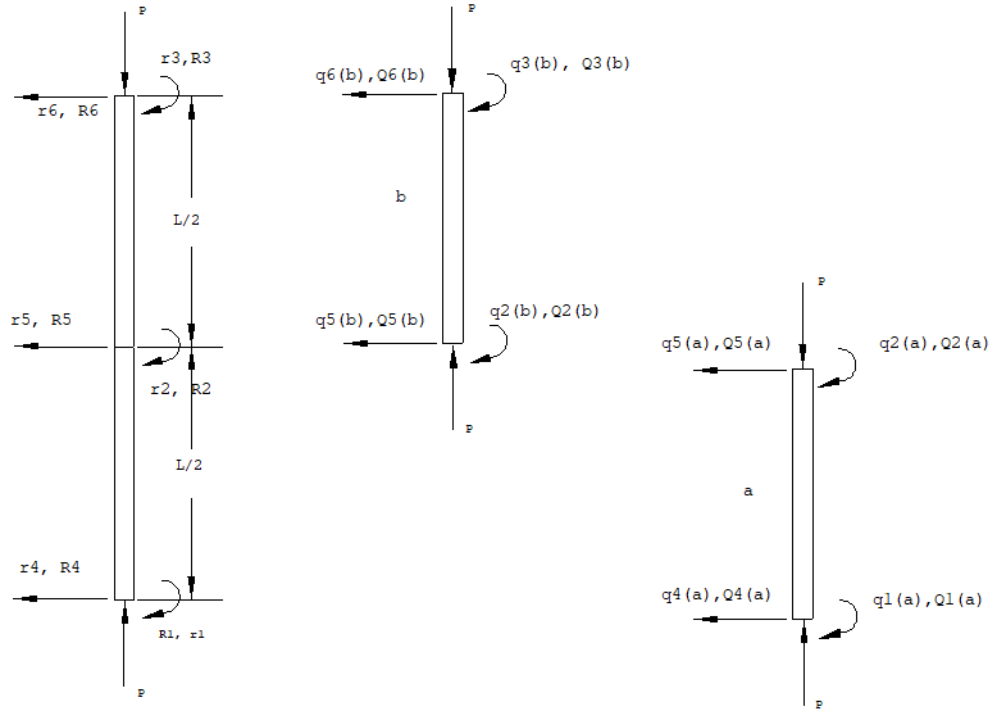


Figure 10-19 : Modélisation en deux tonçons d'un poteau-poutre

Considérant le cas d'un poteau articulé aux extrémités (voir Figure 10-20), le système matriciel (10.81) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_3 \\ R_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8EI}{L} - \frac{PL}{15} & 0 & \frac{24EI}{L^2} - \frac{P}{10} \\ 0 & \frac{8EI}{L} - \frac{PL}{15} & \frac{-24EI}{L^2} + \frac{P}{10} \\ \frac{24EI}{L^2} - \frac{P}{10} & \frac{-24EI}{L^2} + \frac{P}{10} & \frac{192EI}{L^3} - \frac{24P}{5L} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_3 \\ r_5 \end{pmatrix} \quad (10.82)$$

En raison de la symétrie $r_3 = -r_1$ (rotations), on peut considérer la moitié du poteau. En posant $|K| = 0$, on obtient, avec l'équation quadratique en P résultant de (10.82) :

$$0,3P^2 - 41,6P\lambda + 384\lambda^2 = 0 \quad (10.83)$$

avec $\lambda = \frac{EI}{L^2}$. La solution de (10.83) permet d'identifier la plus petite valeur de $P = 9,944\lambda$ telle que

$$P_{cr} = \frac{9,944EI}{L^2} \approx \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} \quad (10.84)$$

Ce qui donne, comme pour le cas précédent, une valeur du coefficient de la longueur effective $K \approx 1$.

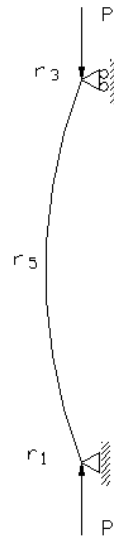


Figure 10-20 : Poteau rotulé aux deux extrémités

Pour le cas d'un poteau encasté aux extrémités (voir Figure 10-21), seul le déplacement à mi-hauteur est à déterminer. En posant $|K| = 0$, on obtient, avec l'équation quadratique en P résultant de (10.81) telle que :

$$\frac{192EI}{L^3} - \frac{24P}{5L} = 0 \quad (10.85)$$

La solution de (10.85) permet d'obtenir :

$$P_{cr} = \frac{40EI}{L^2} \approx \frac{4\pi^2 EI}{(KL)^2} \quad (10.86)$$

ce qui donne, comme pour le cas précédent, une valeur du coefficient de la longueur effective $K \approx 0,5$.



Figure 10-21 : Poteau encastré aux deux extrémités

10.6.2 Stabilité élastique d'un cadre rigide

Lorsque l'effet des forces axiales est considéré dans l'analyse élastique d'un cadre rigide, il faut construire les matrices de rigidité avec la partie géométrique. Dans les structures hyperstatiques, on ignore l'intensité des forces axiales et pour cela, on doit commencer par estimer ces forces, analyser la structure comme une structure linéaire, comparer les résultats de l'analyse avec les valeurs estimées et faire des révisions en cas de besoin. Pour un cadre rigide, si on considère que les membrures sont soumises à des forces axiales seulement (donc avant flambement), il n'y a pas de moments de flexion, ni d'effort tranchant.

Dans les cas pratiques, les charges agissent sur différents endroits des membrures et on essaie de les remplacer par des charges équivalentes aux noeuds. Considérons la structure montrée à la Figure 10-22 qui comporte cinq (5) membrures a, b, c, d et e. Chaque membrure a un système de 4 coordonnées pour identifier les déplacements aux nœuds r_i ($i = 1, 2, 3, 4$) et les forces nodales correspondantes R_i . La matrice de rigidité de chaque membrure sera déterminée ($[K^a], [K^b], \dots, [K^e]$). L'effet des forces axiales n'est pas inclus dans les rigidités des membrures d et e et donc, pas de force axiale initiale. La condition pour laquelle la structure devient instable, c'est lorsque le déterminant de $[K]$ est égal à zéro.

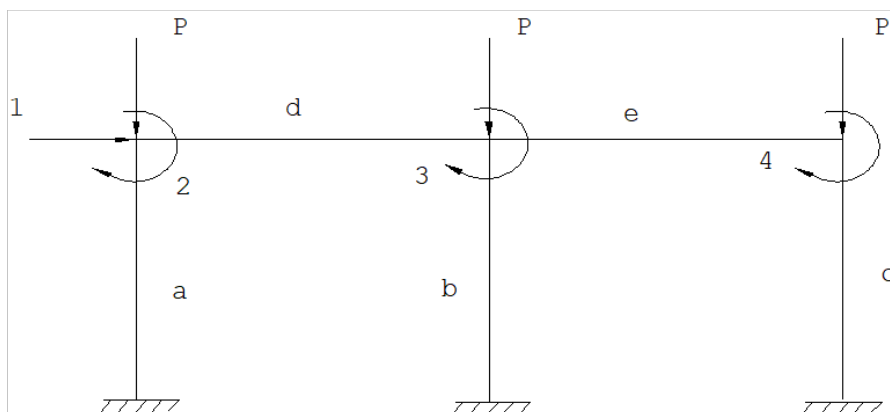


Figure 10-22 : Cadre rigide composé de cinq membrures

Une structure peut avoir plusieurs charges critiques et des modes de flambement associés à ces charges. La plus petite valeur de ces charges est appelée la première charge critique, et le mode de flambement associé à celle-ci, est appelé mode fondamental.

Considérons le cas d'un cadre simple, encastré aux pieds et dont les membrures verticales sont chargées axialement (voir Figure 10-23). La traverse a une rigidité flexionnelle du double de celle des poteaux. La Figure 10-24 montre les efforts attribuables à chaque membrure. Pour chacun des éléments (a) à (c), on retrouve respectivement :

$$\begin{bmatrix} K^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} - \frac{2PL}{15} & \frac{-6EI}{L^2} + \frac{P}{10} \\ \frac{-6EI}{L^2} + \frac{P}{10} & \frac{12EI}{L^3} - \frac{6P}{5L} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} K^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (10.87)$$

$$\begin{bmatrix} K^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} - \frac{2PL}{15} & \frac{-6EI}{L^2} + \frac{P}{10} \\ \frac{-6EI}{L^2} + \frac{P}{10} & \frac{12EI}{L^3} - \frac{6P}{5L} \end{bmatrix}$$

ce qui permet de construire le système :

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8EI}{L} - \frac{2PL}{15} & \frac{2EI}{L} & \frac{-6EI}{L^2} + \frac{P}{10} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{8EI}{L} - \frac{2PL}{15} & \frac{-6EI}{L^2} + \frac{P}{10} \\ \frac{-6EI}{L^2} + \frac{P}{10} & \frac{-6EI}{L^2} + \frac{P}{10} & \frac{24EI}{L^3} - \frac{12P}{5L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{Bmatrix} \quad (10.88)$$

En posant le déterminant de $[K] = 0$ avec $P = \lambda EI / L^2$ on obtient $\lambda \approx 7,5$ et $P_{cr} \approx 7,5 EI/L^2$.

Dans le cas d'un cadre empêché de se déplacer latéralement, $r_3 = 0$, et le système matriciel (10.88) devient :

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8EI}{L} - \frac{2PL}{15} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{8EI}{L} - \frac{2PL}{15} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{Bmatrix} \quad (10.89)$$

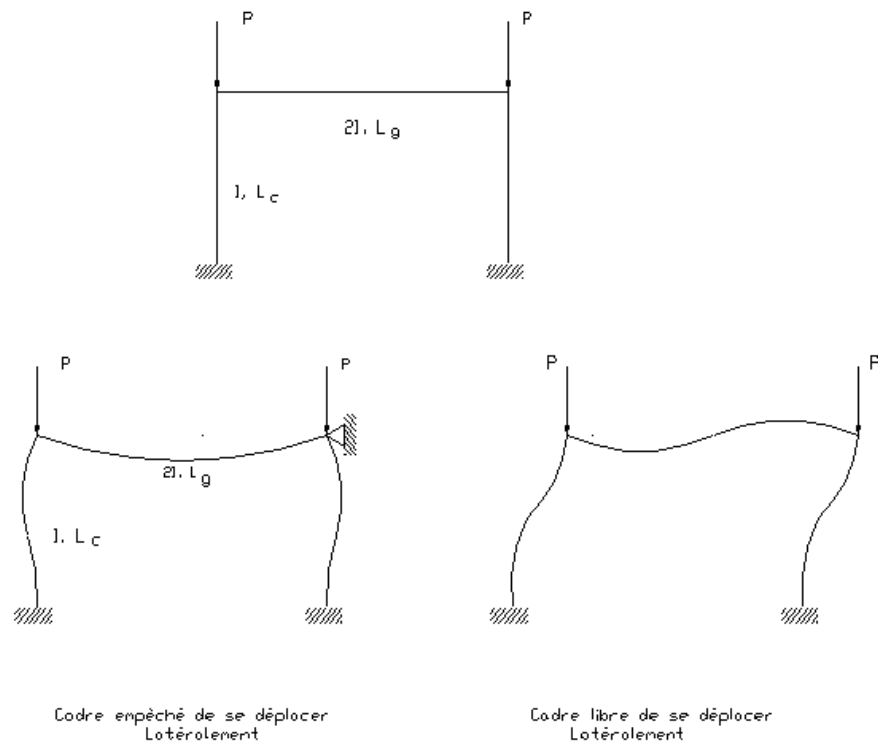


Figure 10-23 : Cadre simple encasté aux pieds et avec membrures verticales chargées axialement

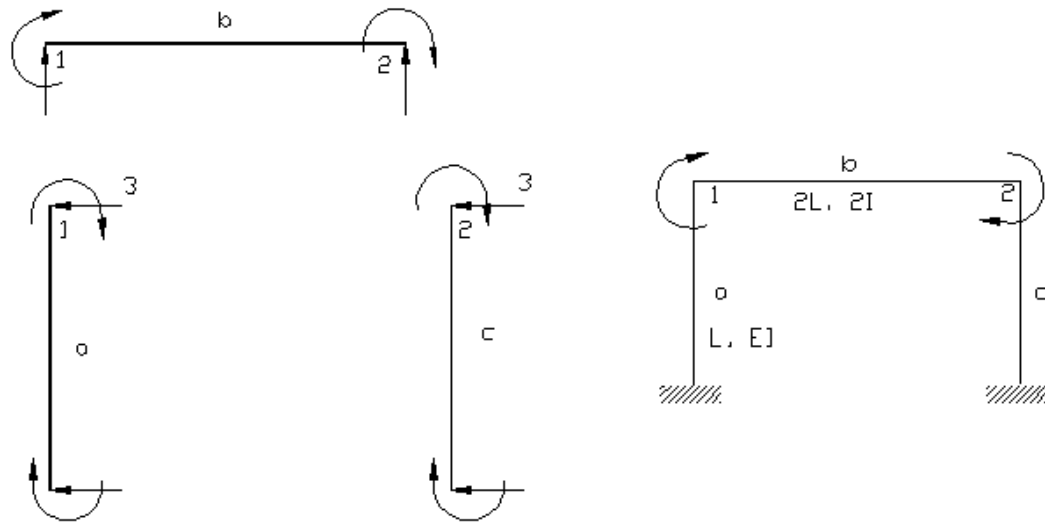


Figure 10-24 : Décomposition des efforts dans un cadre simple

En posant le déterminant de $[K] = 0$ avec $P = \lambda E I / L^2$, on obtient $\lambda = 45$ et $P_{cr} = \frac{45EI}{L^2}$, ce qui est supérieur à la charge critique pour un poteau encastré aux extrémités ($P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$). La charge critique pour un cadre rigide peut donc être exprimée sous la forme :

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_c}{(KL_c)^2} \quad (10.90)$$

avec L_c , la longueur effective du poteau et K , le facteur de la longueur effective. Pour un cadre empêché de se déplacer latéralement $K < 1$ et pour un cadre libre de se déplacer latéralement, $K > 1$.

10.7 MÉTHODE DE RAYLEIGH-RITZ

Une rigoureuse application de la théorie de l'énergie stationnaire aux systèmes continus demande l'usage du calcul des variations. Cette approche a deux inconvénients. Premièrement, le calcul des variations qui doit être utilisé est très complexe. Deuxièmement, seule une équation différentielle est obtenue et non la solution complète. Heureusement, il existe une méthode avec laquelle le principe de l'énergie stationnaire peut être appliqué de façon approximative; cette méthode est connue sous le nom de la méthode de Rayleigh-Ritz qui élimine les deux inconvénients mentionnés ci-dessus. Dans cette méthode, on suppose une forme convenable de la déformation du système et de cette façon, on passe d'un système continu, avec infiniment de degrés de liberté, à un système avec un nombre fini de degrés de liberté. Le principe de l'énergie potentielle stationnaire va mener à la configuration d'équilibre et on aura à exécuter uniquement des calculs différentiels ordinaires dans cette procédure.

10.7.1 Cas d'un poteau en porte-à-faux

Comme exemple, on va considérer le poteau en porte-à-faux, montré sur la Figure 10-25. Suivant le concept de l'équilibre neutre, la charge critique est définie comme étant la charge à laquelle le système peut être en équilibre dans une position légèrement fléchi. Le problème pour trouver la charge critique est donc l'équivalent de trouver la forme fléchi avec laquelle l'équilibre est possible. Le problème peut être résolu en exigeant que la première variation de l'énergie potentielle totale soit nulle. La courbe de la déflexion de la membrure est supposée être décrite par le polynôme de la forme : $y = a + bx + cx^2$. Deux des constantes (a , b) de cette équation peuvent être évaluées à partir des conditions aux limites à la base de la membrure soient $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$. Ce qui donne $a = b = 0$ et donc : $y = cx^2$.

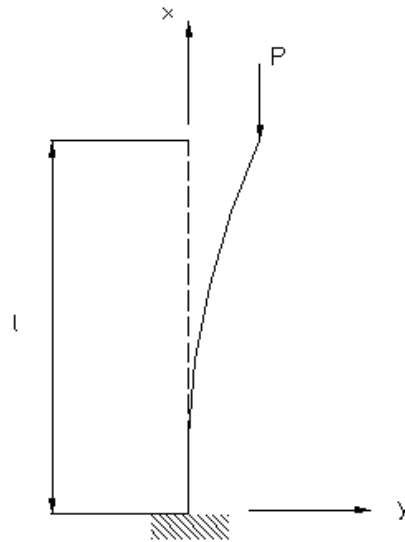


Figure 10-25 : Poteau en porte-à-faux

Cette relation satisfait les conditions géométriques pour une déflexion et une rotation nulle à la base de la membrure, mais pas la condition d'un moment de flexion nul à l'extrémité libre de la membrure. L'énergie de la déformation emmagasinée dans la membrure due à la flexion est égale à :

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^l (y'')^2 dx = \frac{EI}{2} \int_0^l 4c^2 dx = 2EIc^2l \quad (10.91)$$

Lorsque la membrure fléchit, l'énergie potentielle dû à la charge appliquée consiste en un produit négatif de la charge et de la distance à laquelle la charge se déplace. On obtient donc :

$$V = -\frac{P}{2} \int_0^l (y')^2 dx = -\frac{P}{2} \int_0^l 4c^2 dx = -\frac{2}{3}Pc^2l^3 \quad (10.92)$$

Il est important de faire la différence entre le concept du travail tel qu'utilisé dans le principe de la conservation de l'énergie et le concept de l'énergie potentielle utilisée ici. Le premier fait référence au travail total exécuté durant la déformation et est égal au produit d'une force par une distance. Cependant, la moitié de cette quantité dépend si la charge demeure constante ou varie linéairement du zéro à sa valeur finale durant le processus de la déformation. En comparaison, l'énergie potentielle est l'énergie correspondant à la totalité de la charge. Elle est égale au produit de la force totale par la distance et ce, sans égard à comment cette force varie durant l'intervalle dans lequel la déformation prendra place. Le facteur (1/2) habituellement présent dans le terme du travail ne figurera plus dans les termes de l'énergie potentielle. La combinaison des équations (10.91) et (10.92), donne :

$$U + V = 2EIc^2l - \frac{2P}{3}c^2l^3 \quad (10.93)$$

La forme fléchie du système sera sa configuration d'équilibre si la quantité $U + V$ a une valeur stationnaire. Pour trouver la déflexion $y(x)$ qui correspond à la valeur stationnaire de $U + V$, il est nécessaire d'utiliser le calcul des variations. Conséquent du fait que la forme de la déflexion du poteau est connue pour ce problème, l'énergie potentielle totale, telle que définie par (10.93), est maintenant fonction d'un seul paramètre (c) et le calcul différentiel suffit pour le déterminer, ce qui donne une limite extrême à $U + V$ et donc : $\delta(U + V) = 0$. Cette dernière condition peut s'écrire :

$$\frac{d(U + V)}{dc} \delta c = 0 \quad (10.94)$$

Étant donné que δc est un déplacement fictif arbitraire, la variation de (10.94) donne :

$$4EIcl - \frac{4}{3}Pcl^3 = 0 \rightarrow c \left(P - \frac{3EI}{l^2} \right) = 0 \quad (10.95)$$

L'équation (10.95) donne la solution de l'équilibre pour toute valeur de la charge, pourvu que le poteau reste droit. Dans ce contexte, la charge critique peut s'exprimer par :

$$P_{cr} = \frac{3EI}{l^2} \quad (10.96)$$

La comparaison de cette solution avec la charge critique exacte ($4EI/l^2$) indique que c'est une réponse approximative avec un pourcentage d'erreur d'environ 21,6%. La charge critique exacte du flambement peut être obtenue si on utilise une série pour définir la forme de la déflexion. Donc, une meilleure solution que celle obtenue de (10.96) peut être obtenue si le nombre des paramètres dans la fonction augmente d'un à deux paramètres. Dans ce cas, supposons que $y = Cx^2 + Dx^3$, ce qui donne $y' = 2Cx + 3Dx^2$ et $y'' = 2C + 6Dx$. L'énergie de la déformation due à la flexion est exprimée par :

$$\begin{aligned} U &= \frac{EI}{2} \int_0^l (y'')^2 dx = \frac{EI}{2} \int_0^l (4C^2 + 24CDx + 36D^2x^2) dx \\ U &= 2EI(C^2l + 3CDl + 3D^2l^2) \end{aligned} \quad (10.97)$$

et l'énergie potentielle de la charge appliquée est :

$$V = -\frac{P}{2} \int_0^l (y')^2 dx = -\frac{P}{2} \int_0^l (4C^2 x^2 + 12CDx^3 + 9D^2 x^4) dx$$

$$V = -\frac{Pl^3}{30} (20C^2 + 45CDl + 27D^2 l^2)$$
(10.98)

La combinaison de (10.97) et (10.98) donne :

$$U + V = 2EI(C^2 + 3CDl + 3D^2 l^2) - \frac{Pl^3}{30} (20C^2 + 45CDl + 27D^2 l^2)$$
(10.99)

L'énergie potentielle totale donnée par (10.99) est maintenant fonction de deux variables C et D. La variation de $U + V$ peut prendre la forme :

$$\delta(U + V) = \frac{\delta(U + V)}{\delta C} \delta C + \frac{\delta(U + V)}{\delta D} \delta D$$
(10.100)

Étant donné que δC et δD sont arbitraires, (10.100) sera égale à zéro, si :

$$\frac{\delta(U + V)}{\delta C} \delta C = 0, \quad \frac{\delta(U + V)}{\delta D} \delta D = 0$$
(10.101)

L'exécution de ces opérations, donne :

$$\frac{\delta(U + V)}{\delta C} = 2EI(2C + 3Dl) - \frac{Pl^3}{30} (40C + 45Dl) = 0$$
(10.102)

et :

$$\frac{\delta(U+V)}{\delta D} = 2EI(3Cl + 6Dl^2) - \frac{Pl^3}{30}(45Cl + 54Dl^2) = 0 \quad (10.103)$$

En posant $\alpha = Pl^2/EI$, (10.102) et (10.103) peuvent être réécrit respectivement sous la forme :

$$(24 - 8\alpha)C + l(36 - 9\alpha)D = 0 \quad (10.104)$$

$$(20 - 5\alpha)C + l(40 - 6\alpha)D = 0$$

Étant donné que le côté droit du système d'équations (10.104) est égal à zéro, on peut parler d'équations homogènes. La solution pour C et D peut être donnée comme étant les quotients des deux déterminants tels que :

$$C = \frac{\begin{vmatrix} 0 & l(36 - 9\alpha) \\ 0 & l(40 - 6\alpha) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 24 - 8\alpha & l(36 - 9\alpha) \\ 20 - 5\alpha & l(40 - 6\alpha) \end{vmatrix}} \quad (10.105)$$

$$D = \frac{\begin{vmatrix} 24 - 8\alpha & 0 \\ 20 - 5\alpha & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 24 - 8\alpha & l(36 - 9\alpha) \\ 20 - 5\alpha & l(40 - 6\alpha) \end{vmatrix}}$$

Étant donné que chaque numérateur des déterminants est égal à zéro, une solution de (10.104) paraît évidente, $C = 0$ et $D = 0$. Ceci est la solution d'équilibre pour toute charge pourvu que le poteau reste droit. Une valeur de C et D non nulle est possible uniquement si le dénominateur des déterminants est aussi égal à zéro. Un problème de valeurs propres pour un système avec un

nombre fini de degrés de liberté comme celui du problème du flambement considéré ici mènera toujours à un ensemble d'équations homogènes. Les solutions d'un tel problème peuvent être toujours obtenues en posant le déterminant des équations égal à zéro. Pour le cas étudié ici, ceci voudra dire :

$$\begin{vmatrix} 24 - 8\alpha & l(36 - 9\alpha) \\ 20 - 5\alpha & l(40 - 6\alpha) \end{vmatrix} = 0 \quad (10.106)$$

L'expansion du déterminant de (10.106), donne :

$$3\alpha^2 - 104\alpha + 240 = 0 \quad (10.107)$$

Cette équation est connue comme étant l'équation caractéristique. Les racines de cette équation sont les valeurs propres auxquelles les charges, avec des déflexions différentes de zéro, sont possibles. La plus petite valeur propre est la charge critique et le vecteur propre correspondant est le mode du flambement. La plus petite racine de (10.107) est $\alpha = 2,49$ et donc : $P_{cr} = 2,49 \frac{EI}{l^2}$. Cette solution diffère de la solution exacte d'environ 1%. C'est une hausse appréciable dans l'exactitude qui a été obtenue en augmentant le nombre des termes dans la fonction qui définit la forme de la déflexion. En général, plus la forme de la déflexion est complexe, plus la quantité de termes nécessaires sera élevée pour obtenir un résultat exact.

10.7.2 Cadre général de la méthode de Rayleigh-Ritz

Considérons une membrure quelconque soumise à un effort de flexion et de compression (voir Figure 10-26). À l'état d'équilibre neutre, un déplacement Δ se produit. Le calcul de l'énergie de déformation U , conséquent d'une déflexion $v = f(x)$, s'écrit :

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx = \int_0^L \frac{(EIv'')^2}{2EI} dx = \frac{EI}{2} \int_0^L (v'')^2 dx \quad (10.108)$$

$$v'' = d^2v / dx^2$$

Quant à l'énergie associée à la compression, elle est donnée par : $P^2L/2EA$. Lorsque l'extrémité 1 de la membrure se déplace à travers une distance Δ , la courbe 1'-2 doit avoir la même longueur que celle de la position droite 1-2. La contrainte de compression P/A , est donc constante. Pour un élément ds donné par :

$$ds = \sqrt{dx^2 + dv^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + (v')^2} dx$$

$$L = \int_0^L ds = \int_0^L dx \left[1 + (v')^2\right]^{1/2} \quad (10.109)$$

$$L = \int_0^L dx \left[1 + (v')^2\right]^{1/2} - \int_0^{\Delta} dx \left[1 + (v')^2\right]^{1/2}$$

$$L \cong \int_0^L dx \left[1 + (v')^2 / 2\right] - \int_0^{\Delta} dx \left[1 + (v')^2 / 2\right]$$

et négligeant les termes d'ordre supérieur sur v' , la longueur finale s'écrit :

$$L = L + \frac{1}{2} \int_0^L (v')^2 dx - \Delta - \frac{1}{2} \int_0^{\Delta} (v')^2 dx \quad (10.110)$$

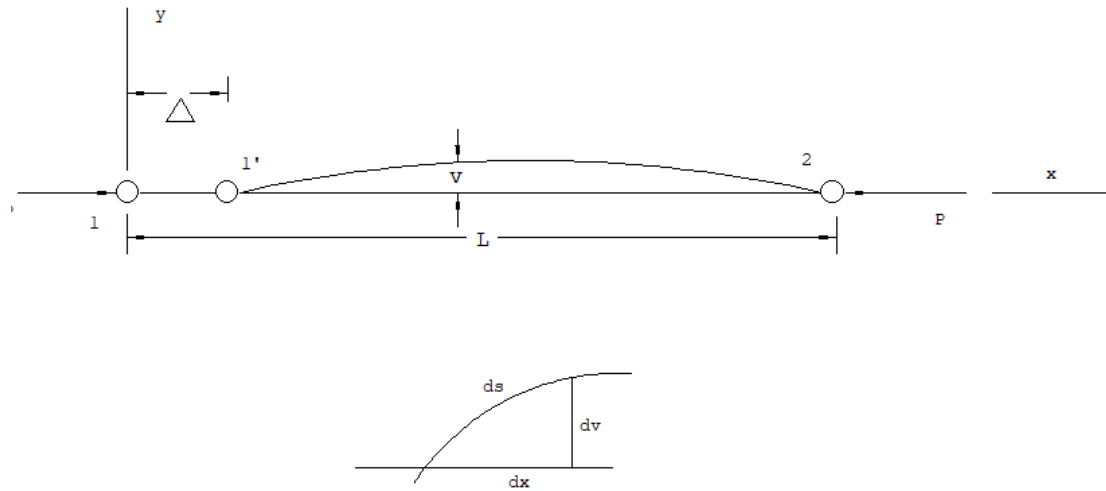


Figure 10-26 : Membrane quelconque soumise à un effort de flexion

Quant au travail réalisé par les forces extérieures, il s'écrit :

$$V = P\Delta = \frac{P}{2} \int_0^L (v')^2 dx$$

$$V = U$$

$$\frac{P}{2} \int_0^L (v')^2 dx = \frac{EI}{2} \int_0^L (v'')^2 dx$$

(10.111)

$$P_{cr} = \frac{\int_0^L EI(v'')^2 dx}{\int_0^L (v')^2 dx}$$

C'est la méthode de Rayleigh-Ritz. Toutefois, il faut pouvoir définir la courbe de la déformée.

10.8 APPLICATIONS SOUS MATHCAD™

Mathcad™ est un largement outil utilisé à travers le monde. Mathcad™ offre une solution capable de résoudre et documenter à la fois des calculs techniques tout en réduisant le risque d'erreurs coûteuses. Avec Mathcad™, les ingénieurs conçoivent et exécutent des calculs et documentent leur travail dans un format clair et facile à comprendre. Ils peuvent ensuite partager et réutiliser ces données et faciliter ainsi la vérification, la validation, la publication et la collaboration tout au long du processus de développement de la conception. Les délais de développement s'en trouvent écourtés, la qualité du produit améliorée et la conformité aux spécifications techniques facilitée. En outre, l'intégration de Mathcad™ aux applications techniques existantes est totalement transparente.

Dans pratiquement tous les domaines de l'ingénierie, la quantité de calculs générée (spécifications, formules, diagrammes et résultats) est considérable. L'exactitude de ces informations et leur disponibilité en temps opportun est essentielle pour qui souhaite accélérer et améliorer la productivité, éliminer les défauts de conception et minimiser les risques d'erreurs. La famille de produits Mathcad™ propose une solution beaucoup plus efficace que les méthodes traditionnelles pour résoudre et documenter les calculs techniques. Mathcad™ dispose en effet d'une solution unique qui intègre à la fois le texte, les calculs mathématiques interactifs, les graphiques ainsi que le traitement symbolique des systèmes d'équations et ce, dans un seul et même environnement.

L'annexe A traite des équations d'interaction flexion-compression des membrures faisant partie d'un cadre rigide, dont certains poteaux sont articulés aux deux extrémités et qui comptent sur les autres poteaux du cadre pour assurer leur stabilité. Les poteaux articulés aux deux extrémités sont communément appelés "Poteaux faibles" dans la littérature qui traite les différents aspects qui gouvernent la stabilité des cadres rigides. Les équations d'interactions sont vérifiées à l'aide de trois approches : a) concept de la longueur effective; b) concept du flambement global d'un étage; c) concept de la charge latérale fictive qui reflètent la prise en considération des imperfections

géométriques. De façon générale, la force latérale fictive, dont la magnitude est calibrée pour prendre en considération l'influence des imperfections géométriques, reste un sujet qui mérite plus d'attention et de recherches pour aboutir à la définition d'une valeur universelle à utiliser par les spécifications techniques à travers le monde.

L'annexe B, qui est basé sur les travaux de (Yura, 1971), illustre le comportement inélastique des poteaux faisant partie des cadres rigides libres de se déplacer latéralement. Le calcul numérique met en évidence les limitations du concept de la longueur effective et l'utilisation des nomogrammes d'alignement, qui considère un comportement élastique et un flambement simultané de tous les poteaux du cadre rigide. À cause de la présence des contraintes résiduelles dans les sections d'acier, les défauts de rectitude et tout autre défaut géométrique, l'action inélastique est supposée commencer à un niveau de contrainte de compression d'environ 50% de la limite élastique de l'acier ($0,5 F_y$). La valeur du paramètre G utilisé dans les nomogrammes d'alignement et qui est le ratio des rigidités flexionnelles EI d'un poteau et des éléments qui se connectent à ses deux extrémités (poutres), est réduit par le facteur E_T/E , ce qui conduira à réduire la valeur de la longueur effective.

De nos jours, la conception, la fabrication et le montage des structures d'acier peuvent avoir lieu à différents endroits en raison de la mondialisation. Les propriétaires peuvent exiger l'utilisation de différentes spécifications techniques en vigueur. Les ingénieurs doivent donc maîtriser plusieurs spécifications de conception et être en mesure d'avoir un sens critique comparé aux normes avec lesquelles ils sont plus familiers. L'annexe C permet de mettre en lumière les similitudes et les différences présentées dans ces normes / codes par le biais de la résistance au flambement des poteaux en acier. La classification des sections transversales, les longueurs effectives ainsi que les coefficients de pondérations des efforts sont pris en compte dans cet exemple. Les résultats montrent que des différences de capacité entre les codes varient avec l'élancement des poteaux.

CHAPITRE 11

CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS

11.1 RÉTROSPECTIVE

Ce mémoire couvre plusieurs procédures utilisées pour évaluer la stabilité des poteaux et poteaux-poutres faisant partie des cadres en charpente d'acier et libres de se déplacer latéralement. Le chapitre 1 aura couvert la présentation du projet de mémoire, la problématique des différents aspects qui influencent la stabilité des cadres rigides d'acier ainsi que les objectifs de ce mémoire. L'approche basée sur les charges horizontales fictives (imperfections géométriques), qui est à la base des spécifications canadiennes CSA S16, aura été couverte dans le chapitre 2. Ce chapitre discute et présente la prise en considération des imperfections géométriques, l'influence des retenues latérales aux extrémités des membrures et la propagation de la plasticité à travers la membrure.

Le développement et les procédures de calculs, pour les deux méthodes basées sur le concept de la longueur effective des membrures, ont été discutés en détail dans le chapitre 3 de ce mémoire. Les chapitres 4 et 5 ont abordés les facteurs qui affectent la stabilité des cadres rigides, le développement des équations d'interaction ainsi que le dimensionnement des membrures. Le chapitre 6 s'est attardé à une comparaison détaillée des approches utilisées par différentes spécifications techniques qui régissent la conception et le dimensionnement des membrures travaillant comme poteaux et poteaux-poutres faisant partie des cadres rigides d'acier libres de se déplacer latéralement. Le chapitre 7 s'est attardé au flambement des membrures faisant parti des

structures d'acier, en mode de compression pure et compression-flexion. Ce chapitre aura souligné les effets des imperfections géométriques sur la réponse structurale de ces membrures. Le chapitre 8 aura traité des principaux types de membrures comprimées, de la stabilité des poteaux élancés, du fondement des courbes de résistance des poteaux développées par CRC (Column Research Council) et SSRC (Structural Stability Research Council) ainsi que de la dérivation des équations de la résistance des membrures comprimées.

Le chapitre 9 aura couvert les aspects non linéaire et inélastique dans le traitement du comportement des poteaux et des poteaux-poutres, le concept de Shanley ainsi que la théorie du module tangent. Ce chapitre s'est également attaqué à l'influence des contraintes résiduelles sur la résistance des membrures comprimées.

Le chapitre 10 aura finalement présenté les différentes méthodes de calcul (différences finies, valeurs propres, méthodes matricielles et méthode de Rayleigh -Ritz qui exprime l'énergie élastique en termes de déplacements, entre autre) des charges critiques de flambement des membrures en compression et compression flexion, qu'elles soient individuelles ou faisant partie des cadres rigides d'acier.

11.2 REMARQUES À L'ÉGARD DES DIFFÉRENTES APPROCHES

En ce qui concerne les deux approches basées sur la longueur effective, désignées par K_{K_n} et K_{K_l} , elles fournissent un moyen jugé efficace pour évaluer la stabilité des éléments structuraux en acier, sollicités par des forces de compression. Ces deux procédures sont compatibles avec les exigences des spécifications **AISC LRFD** qui stipulent que la longueur effective doit être utilisée pour calculer la résistance des poteaux à la compression. Les spécifications canadiennes **S16.1-89** ont décidé d'abandonner l'utilisation des procédures basées sur le concept de la longueur effective, pour évaluer la stabilité des structures libres de se déplacer latéralement. Les procédures basées

sur le concept de la longueur effective présentent certains avantages, mais aussi certaines limites qui peuvent être résumées comme suit :

1. Les deux techniques pour le calcul de la longueur effective sont basées sur l'évaluation de la capacité au flambement de chaque étage dans la structure. Dans cette évaluation, il est supposé que lorsque la charge qui sollicite l'étage augmente, les poteaux qui offrent plus de rigidité flexionnelle (EI) dans un étage peuvent offrir une retenue au flambement pour les poteaux moins rigides et présents à l'étage et ce, jusqu'à l'atteinte du flambement de l'ensemble de l'étage. Comparé à l'usage direct des nomogrammes d'alignement des spécifications **AISC LRFD**, l'approche de la résistance de l'étage assure en général une meilleure évaluation des caractéristiques élastiques et inélastiques des poteaux faisant partie des cadres libres de se déplacer latéralement. Les approches basées sur la résistance de l'étage sont particulièrement bénéfiques lorsqu'on doit évaluer la stabilité des structures qui résistent à une grande partie des charges de gravité à l'aide de poteaux articulés aux deux extrémités, ou dans des cadres pour lesquels le paramètre de la rigidité, $L\sqrt{P/EI}$, varie de façon significative parmi les poteaux-poutres.
2. Pour les deux approches basées sur la longueur effective, il n'est pas nécessaire, ni vraiment souhaitable, de calculer les facteurs de la longueur effective eux-mêmes pour les incorporer dans l'expression de $\lambda_c = (KL/r\pi)\sqrt{F_y/E}$, où le facteur K , peut être soit élastique ou inélastique. Il est plutôt efficace de calculer les charges critiques élastiques ou inélastiques, directement pour les incorporer dans l'expression, $\lambda_c = \sqrt{\hat{\tau}P_y/P_{e\hat{\tau}}}$ en utilisant pour le dénominateur, soit $P_{e\hat{\tau}(K_n)}$ ou $P_{e\hat{\tau}(R_L)}$.
3. L'inélasticité des poteaux en début du flambement peut être incorporé dans les procédures basées sur la longueur effective à travers l'usage d'un facteur de réduction de la rigidité inélastique, τ . Ce calcul est itératif, ou comme alternative, peut être approximé par un calcul non itératif résultant d'une valeur désignée par $\hat{\tau}$ dans ce

document. Une valeur approximative de \hat{c} est obtenue si P_u/ϕ_c est utilisé à la place de P_n ou à la place de P_{er} . Malgré cet avantage, le calcul d'un facteur de réduction de la rigidité inélastique pour chaque poteau dans le cadre est en quelque sorte encombrant et il arrive souvent que les ingénieurs négligent ces calculs dans la pratique de tous les jours. La réduction de la rigidité due à l'inélasticité peut être prise à 1 si les charges critiques élastiques sont à utiliser.

4. Pour assurer l'intégrité des deux approches basées sur le concept de la longueur effective, les limites des équations utilisées pour déterminer $P_{e\hat{c}(K_n)}$ ou K_{K_n} et $P_{e\hat{c}(R_L)}$ ou K_{R_L} doivent être appliquées. Dans la plupart des cas pratiques, il est rare de voir des poteaux bien proportionnés qui dépassent ces limites.

Un avantage principal de l'utilisation de K_{R_L} comparé à K_{K_n} est sa simplicité. Le paramètre du flambement de l'étage λ_{R_L} est calculé une seule fois par étage et ce, pour chaque direction globale potentielle du flambement de l'étage. Les calculs requis par poteau consistent simplement dans le calcul du ratio P_u/P_y et le premier terme de l'interaction est calculé seulement pour le poteau qui représente la plus grande valeur de P_u/P_y . D'un autre côté, les calculs du paramètre du flambement élastique de l'étage, λ_{R_L} , exigent :

1. La sommation des forces axiales dans l'ensemble de l'étage pour obtenir $\sum_{\text{tous les poteaux}} P_u$.
2. Le ratio de la force axiale dans les poteaux articulés aux deux extrémités et la force axiale totale présente dans l'étage (R_L).
3. La quantité $\sum_{\text{poteaux non articulés}} HL/\Delta_{oh}$.

Tous ces calculs sont considérés comme étant des calculs simples, basés sur une analyse structurale de premier ordre. Les calculs de K_{K_n} demandent la détermination des valeurs appropriées des facteurs des rigidités G incluant toutes les corrections nécessaires. Les calculs des facteurs des rigidités sont en quelque sorte, considérés encombrants vu que ces facteurs sont à déterminer pour chaque poteau. *Hajjar et White* (1994) ont montré que K_{R_L} est plus précis que K_{K_n} si des valeurs non correctes des facteurs G sont utilisées dans les calculs de K_{K_n} . Les effets $P-\delta$ sont approximés dans le calcul de K_{K_n} à partir des hypothèses qui sont à la base des nomogrammes des spécifications **AISC LRFD** tandis que K_{R_L} tient compte des effets $P-\delta$. L'utilisation des résultats obtenus d'une analyse du premier ordre pour déterminer ce qui est utilisé dans le calcul de K_{R_L} n'est pas une façon exacte d'évaluer le comportement du cadre en ce qui a trait aux effets $P-\delta$, mais plutôt une façon de capter les nuances de comportement du cadre au flambement. En plus, la flexibilité en cisaillement des poteaux et des poutres peut être incorporée dans les analyses utilisées dans les approches basées sur la rigidité de l'étage K_{R_L} et sur les charges latérales fictives, tandis que le calcul de K_{K_n} suppose l'utilisation de la théorie des poutres d'*Euler-Bernoulli*. En résumé, l'approche de K_{R_L} fournit un très bon niveau de précision dans l'évaluation de la stabilité des membrures et de l'étage, ce qui nécessite beaucoup moins de calculs que ceux nécessaires pour l'utilisation des nomogrammes des spécifications **AISC LRFD**.

Pour évaluer la stabilité de la structure, l'approche basée sur les charges latérales fictives fournit une alternative à la méthode basée sur la longueur effective. L'utilisation de cette méthode assure des résultats exacts ou sécuritaires lorsqu'il s'agit d'évaluer le flambement dans le plan du chargement et hors du plan du chargement ainsi que le comportement des poteaux-poutres sollicités par une flexion bi-axiale et ce, pour les structures à un ou plusieurs étages, le tout dans le contexte des spécifications **AISC LRFD**.

Bien que cette approche n'ait pas atteint encore le même stade de maturité que les approches basées sur le concept de la longueur effective, l'approche basée sur les charges latérales fictives est considérée comme plus compréhensive que les autres approches, surtout en ce qui a trait à son application sur un large éventail des structures d'acier et spécialement celles composées de sections en I, bi-symétriques. L'approche basée sur les charges latérales fictives ou ses dérivés est utilisée dans les spécifications techniques à travers le monde. Concernant cette approche, nous pouvons noter ce qui suit :

1. Dans cette approche, les charges fictives appliquées génèrent des moments de flexion additionnels dans les poteaux, qui font en sorte d'approximer les effets des imperfections géométriques initiales et la présence des contraintes résiduelles sur la stabilité des poteaux. L'adaptation d'une valeur pour ces charges latérales fictives est requise pour assurer une estimation acceptable des effets de ces imperfections. Dans le cas des charges de gravité agissant seules sur la structure, les moments de flexion additionnels sont requis essentiellement pour simuler les moments causés par les imperfections géométriques provenant des défauts de la verticalité. Dans ce cas, les charges de gravité doivent être considérées agir sur une structure déplacée (effets $P-\Delta$). Cependant, les approches basées sur la longueur effective prennent racines dans les analyses de la bifurcation et les moments de flexion additionnels ne font pas partie intégrale de ces approches. Certains avis vont dans le sens que l'évaluation de la stabilité doit être étroitement liée à la bifurcation des membrures du cadre; spécialement les membrures sollicitées par de faibles charges axiales. Par contre, d'autres avis avancent que tous les poteaux qui ne participent pas à la rigidité latérale du cadre (poteaux articulés aux deux extrémités) sont sollicités par une certaine combinaison de force axiale et de flexion due à la présence inévitable des défauts de la verticalité. Dans ce contexte, l'approche des charges latérales fictives fournit une représentation plus appropriée du comportement de la structure. Dans cet esprit, il faudra noter que les charges latérales fictives amplifient non seulement les moments de

flexion dans les poteaux, mais également, l'ensemble des éléments structuraux faisant partie du système de résistance aux forces latérales, ce qui peut être perçu comme une représentation raisonnable du comportement réel du cadre. Les avis favorables à l'approche des charges latérales fictives sont à l'effet que l'amplification des forces internes, malgré sa faible valeur, est compensée par le prix à payer résultant de la simplicité d'usage de cette approche.

2. En réalité, l'avantage principal de cette approche réside dans sa simplicité et la quantité relativement faible de calculs à exécuter. L'adoption d'une méthode de calcul simple à utiliser constitue un net avantage comparé aux techniques des nomogrammes basés sur les approches de la longueur effective. Il n'est plus question de calculer les coefficients de rigidité G . En effet, seule la résistance nominale du poteau P_n , basée sur la longueur réelle est requise. En plus, la réduction de la rigidité due à l'inélasticité est prise en considération de façon implicite dans l'adaptation d'une valeur de la charge latérale fictive.
3. Lorsqu'on utilise la méthode de la charge fictive, il n'est plus nécessaire de procéder à d'autres vérifications pour s'assurer de l'applicabilité de la méthode, puisqu'il n'est plus nécessaire de faire la différence entre les structures qui sont libres de se déplacer latéralement et celles qui sont empêchées de se déplacer latéralement. En d'autres termes, il n'existe pas de valeurs limites comme celles imposées dans les deux approches basées sur le concept de la longueur effective.
4. La méthode des charges latérales fictives tient compte, implicitement, du comportement des poteaux articulés aux deux extrémités et qui sont stabilisés par d'autres poteaux dans le même étage, ce qui représente un des grands avantages de cette méthode. Les résultats de ces différentes approches sont illustrés en Annexe A. L'exemple traite d'un cadre rigide à deux travées et à un seul étage dans lequel les poteaux de rive sont articulés aux deux extrémités. Le calcul équivalent de $P_{e\hat{t}(K_n)}$ ou K_{K_n} est basé sur l'utilisation des nomogrammes des spécifications **AISC LRFD** avec les facteurs de rigidité

associés pour déterminer la rigidité relative des poteaux dans un étage donné. Par conséquent, parmi les trois techniques discutées dans ce mémoire, l'approche basée sur les charges latérales fictives est la plus familière dans la pratique, auprès des ingénieurs en structure. D'un autre côté, l'utilisation des facteurs de rigidité G peut s'avérer avantageuse pour calculer des relations plus complexes entre la rigidité des poutres et celle des poteaux, surtout dans les cas des cadres à connexions semi-rigides, ce qui est considéré comme un sujet non traité dans le cadre de ce mémoire.

L'utilisation directe des nomogrammes d'alignement a servi la profession des ingénieurs en structure pour plus de 50 ans et reste d'usage très fréquent pour traiter les problèmes inhérents à la stabilité des structures en charpente d'acier à travers l'ensemble des États-Unis. Présentement, de nouvelles approches numériques pour l'évaluation de la stabilité, basées sur des analyses élastiques du premier ordre, sont répandues et commencent à être adoptées par les comités chargés de la rédaction des spécifications techniques à travers le monde. Les approches discutées dans le cadre de ce mémoire sont à notre avis beaucoup plus compréhensives que l'usage direct des nomogrammes d'alignement. Elle sont applicables à une très grande variété de structures rencontrées dans la pratique. Cependant, il reste une large gamme de sujets relatifs à la stabilité des poteaux et des cadres, qui ne sont pas couverts assez largement dans la littérature technique, tels que l'influence des diaphragmes de planchers et les poteaux sollicités par des excitations sismiques.

Les spécifications canadiennes **CAN/CSA S16.1-89** avaient pris la position de chef de file dans l'adoption d'une approche basée sur les charges latérales fictives et l'abandon des approches basées sur le concept de la longueur effective. Toutefois, les spécifications canadiennes n'ont pas fourni, à notre avis, suffisamment d'explications et d'arguments lors de ce virage important, ce qui a rendu perplexe la plupart des ingénieurs dans la pratique. Il a fallu documenter davantage ce changement ou cette orientation pour aider les ingénieurs concernés à mieux comprendre le fondement de ce changement et les aider à bien assimiler les différents aspects qui entourent le sujet. Comme on en

a discuté ci-dessus, l'approche basée sur les charges latérales fictives est une approche qui se distingue par sa simplicité, sa puissance et sa capacité d'interpréter le comportement réel de la structure et de tenir compte des effets des défauts géométriques réellement rencontrés en pratique.

Aussi, les spécifications canadiennes **CAN/CSA S16.1-94** ont adopté une seule expression basée sur la longueur réelle de la membrure pour déterminer la résistance des membrures sollicitées en compression. Malgré que cette seule expression s'adapte aux divers aspects qui influencent la résistance des membrures en compression (contraintes résiduelles, défauts de rectitude, excentricité des charges) et qu'elle est considérée simple d'utilisation. Toutefois, il n'en demeure pas moins qu'elle ne permet pas d'assurer la bonne compréhension du vaste sujet qui entoure le comportement des éléments en compression, surtout pour les nouvelles générations des ingénieurs qui n'ont pas eu l'opportunité de connaître ou d'utiliser d'autres approches. Il reste essentiel, à notre avis, que tout ingénieur en structure, même dans le domaine pratique, doit se munir de certains concepts théoriques pour l'aider à mieux comprendre le comportement élastique et inélastique ainsi que tous les autres facteurs qui influencent la résistance et la stabilité des poteaux et des poteaux-poutres.

Nous espérons vivement, à travers ce mémoire, avoir amener une contribution aussi modeste qu'elle soit, pour aider les ingénieurs en structure dans le cadre de leur pratique à avoir une vue d'ensemble et essentielle des sujets qui influencent la stabilité et la résistance des poteaux et des cadres rigides. Nous espérons que le contenu de ce mémoire puisse aider spécialement les ingénieurs francophones à trouver une documentation technique dans leur langue, parallèlement à celles disponibles dans d'autres langues. Il nous importe de souligner, une fois de plus, la multitude de phénomènes qui ont un impact sur le comportement des poteaux et des cadres rigides et semi-rigides et qu'il reste à explorer et à approfondir dans le souci de développer des recommandations de calcul fiables, simples et compréhensives.

11.3 RECOMMANDATIONS ET TRAVAUX FUTURS

Le concept d'un dimensionnement basé sur un comportement plastique mérite d'être plus longuement investigué davantage. L'exigence fondamentale, pour toutes les membrures d'un cadre d'acier conçu de manière plastique, est qu'elles possèdent une capacité de rotation suffisante pour permettre la formation des rotules plastiques utilisées comme base pour la détermination de la capacité portante de la structure. Dans le cas où l'apparition prématurée d'instabilités locales des membrures et/ou globales de la structure empêche de satisfaire cette exigence, il importe alors de considérer chaque phénomène de flambement.

Pour les membrures de type poutre ou poteau-poutre, le problème fondamental en lien avec leur stabilité est de prévenir le déversement. Cette instabilité peut être évitée en prévoyant des moyens de retenues efficaces au niveau des rotules plastiques (par exemple, systèmes de dissipation d'énergie) et en vérifiant la longueur stable des segments entre ces points de retenues. En dehors de ces régions (c'est-à-dire dans des segments ne contenant pas de rotules plastiques), la stabilité peut être vérifiée par des méthodes d'analyses élastiques.

Références bibliographiques

Ackroyd, M. H., & Bjorhovde, R. (1981). Effect of Semi-rigid Connections on Steel Column Strength. *J. Constr. Steel Res.*, 1(3), 48–51.

AISC. (1928). *Specification for the design, fabrication and erection of structural steel for building*. New-York, NY, USA: American Institute of Steel Construction.

AISC. (1936). *Specification for the design, fabrication and erection of structural steel for building*. New-York, NY, USA: American Institute of Steel Construction.

AISC. (1955). *Specification for the design, fabrication and erection of structural steel for building*. New-York, NY, USA: American Institute of Steel Construction.

AISC. (1963). *Specification for the design, fabrication and erection of structural steel for building*. New-York, NY, USA: American Institute of Steel Construction.

AISC. (1978). *Specification for the design, fabrication and erection of structural steel for building*. New-York, NY, USA: American Institute of Steel Construction.

AISC. (1993). *Specification for the design, fabrication and erection of structural steel for building*. New-York, NY, USA: American Institute of Steel Construction.

AISC. (1994). *Specification for the design, fabrication and erection of structural steel for building*. New-York, NY, USA: American Institute of Steel Construction.

- AISC. (2005). *Specification for the design, fabrication and erection of structural steel for building*. New-York, NY, USA: American Institute of Steel Construction.
- AISC. (2010). *Specification for the design, fabrication and erection of structural steel for building*. New-York, NY, USA: American Institute of Steel Construction.
- Aristizabal-Ochoa, J. D. (1994). K-factor for column in any type of construction: Nonparadoxical approach. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 162(3), 441-455.
- Austin, W. J. (1961). Strength and design of metal beam-columns. *Journal of Structural Division, ASCE*, 87(4), 1-34.
- Beaulieu, D., & Picard, A. (2003). *Calcul des charpentes d'acier (Tome 1)*. Canada: Institut canadien de la construction en acier.
- Beaulieu, D., Picard, A., Tremblay, R., Grondin, G., & Massicotte, B. (2010). *Calcul des charpentes d'acier (Tome 2)*. Canada: Institut canadien de la construction en acier.
- Beedle, L. S. (1964). *Structural steel design*. New-York, NY, USA: Ronald Press.
- Beer, H., & Schultz, G. (1970). Theoretical Basis for the European Column Curves. *Constr. Met.*, (3).
- Bickley, W. (1939). Formulae for Numerical Integration. *The Mathematical Gazette*, 23(256), 352-359. doi: 10.2307/3606163

- Bild, S., & Trahair, N. S. (1989). In-plane strengths of steel columns and beam-columns. *Journal of Constructional Steel Research*, 13(1), 1-22.
- Birkmoe, P. C. (1977a). *Column Behavior of Heat-Treated Cold-Formed Hollow Structural Shapes*. Communication présentée au 2nd Int. Colloque on Stability of Structures Under Static and Dynamic Loads, Washington, D.C., USA.
- Birkmoe, P. C. (1977b). *Development of Column Curves for H.S.S.* Communication présentée au Int. Symp. Hollow Struct. Sec., Toronto, Ontario, Canada.
- Bjorhovde, R. (1972). *Deterministic and Probabilistic Approaches to the Strength of Steel Columns*. Lehigh University, Bethlehem, PE, USA.
- Bjorhovde, R. (1978). The Safety of Steel Columns. *ASCE J. Struct. Div.*, 104(3), 463–477.
- Bjorhovde, R. (1988). Columns: From Theory to Practice. *AISC Eng. J.*, 25(1), 21–34.
- Bjorhovde, R. (1991). The Strength of Heavy Columns. *J. Constr. Steel Res.*, 19(4), 313–320.
- Bjorhovde, R., & Tall, L. (1971). *Maximum Column Strength and the Multiple Column Curve Concept*. Fritz Eng. Lab. Rep. No. 338.29. Bethlehem, PA, USA: Lehigh University.
- Bleich, F. (1952). *Buckling Strength of Metal Structures*. New-York, NY, USA: McGraw-Hill.

- Bradford, M. A., & Hancock, G. J. (1984). Elastic Interaction of Local and Lateral Buckling in Beams. *Thin-walled Structures*, 2, 1-25.
- Brezinski, C., & Redivo Zaglia, M. (1991). *Extrapolation Methods. Theory and Practice*. Amsterdam: North Holland.
- Bridge, R. Q., & Fraser, D. J. (1987). Improved G-factor for evaluating lengths of columns. *Journal of Structural Engineering*, 113(6), 1341-1356.
- Burt, H. J. (1914). *Steel construction*. Chicago, IL, USA: American Technical Society.
- CEN. (2005). *Eurocode 3 : Calcul des structures en acier - Partie 1-1: Règles générales et règles pour les bâtiments*. Bruxelles: Comité européen de normalisation.
- Chapuis, J., & Galambos, T. V. (1982). Restrained Crooked Aluminum Columns. *ASCE J. Struct. Div.*, 108(3), 511–524.
- Chen, W. F. (1980). End Restraint and Column Stability. *ASCE J. Struct. Div.*, 105(11), 2279–2295.
- Chen, W. F., & Lui, E. M. (1985). Stability Design Criteria for Steel Members and Frames in the United States. *J. Constr. Steel Res.*, 5(1), 51–94.
- Chen, W. F., & Lui, E. M. (1987). *Structural Stability, Theory and Implementation*. New York, NY, USA: Elsevier.

- Clarke, M. J., & Bridge, R. Q. (1992). *The inclusion of Imperfections in the Design of Beam-Column*. Communication présentée au Annual Technical Session SSRC, Lehigh, PA, USA.
- Clarke, M. J., & Bridge, R. Q. (1995). *The notional load approach for the design of frames*. Research Report No. R718. School of Civil and Mining Engineering: University of Sydney, Sydney, Australia.
- Clarke, M. J., Bridge, R. Q., Hancock, G. J., & Trahair, N. S. (1992). Advanced analysis of steel building frames. *J. Construct. Steel Res.*, 23, 1-29.
- CSA/CAN. (2009). *S16-09 Design of Steel Structures*. Canada: Standard Council of Canada.
- De Stefano, M., & De Luca, A. (1994). Modeling of Cyclic Moment-Rotation Response of Double-Angle Connections. *Journal of Structural Engineering*, 120(1).
- Dhatt, G., & Touzot, G. (1981). *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Paris, France: Maloine S.A.
- Fukumoto, Y., Nethercot, D. A., & Galambos, T. V. (1983). "Experimental Data for the Buckling of Steel Structures—NDSS Stability of Metal Structures. Communication présentée au 3rd Int. Colloq. SSRC, Toronto, Ontario, Canada.
- Fuller, A., & Kerekes, F. (1931). *Analysis and Design of Steel Structures*. New-York, NY, USA: Van Nostran.
- Galambos, T. V. (1964). Lateral Support for Tier Building Frames. *AISC Eng. J.*, 1(1), 16-19.

- Galambos, T. V. (1968). *Structural members and frames*. NJ, USA: Prentice-Hall.
- Galambos, T. V., & Ketter, R. L. (1959). Column Under Combined Bending and Thrust. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 85(2), 1-30.
- Hajjar, J. F., White, D. W., Clarke, M. J., Bridge, R. Q., Lui, E. M., Sheikh, T. M., & Leon, R. T. (1994). *Effective Length and Equivalent Imperfection Approaches for Assessing Frame Stability: Implications for Load and Resistance Factor Design*. : American Society of Civil Engineers Technical Committee on Load and Resistance Factor Design.
- Higgins, T. R. (1965). Column Stability under Elastic Support. *AISC Engineering Journal*, 2, 46-49.
- Hutchinson, J. W. (1974). Plastic buckling. *Advances in Applied Mechanics*, 14, 67–144.
- ITBTP, & CTICM. (1966). *Règles de calcul des constructions en acier*. Paris, France: Eyrolles.
- Jacquet, J. (1970). "Column Tests and Analysis of Their Results. *Constr. Met.*, (3), 13–36.
- Ježek, K. (1937). *Die Festigkeit von Druckstäben aus Stahl*. Wien, Austria: Springer-Verlag.
- Johnson, B. G. (1964). "Inelastic Buckling Gradient. *ASCE J. Eng. Mech. Div.*, , 90(5), 31–48.
- Johnson, B. G., Bryan, C. W., & Turneure, F. E. (1897). *Theory and practice of modern framed structures*. New-York, NY, USA: John Wiley & Sons.

- Kato. (1977). *Column Curves for Cold-Formed and Welded Tubular Members*. Communication présentée au 2nd Int. Colloq. Stab. Steel Struct., Liege, Belgium.
- Kavanagh, T. C. (1962). Effective length of framed column. *Trans. ASCE*, 127(11), 81-101.
- Kennedy, D. J. L., Kitipornchai, S., Hancock, G. J., & Bradford, M. A. (1995). *Limit states design of beam-columns in CSA S16.1-94*. Communication présentée au International conference, Structural stability and design, Sydney; Australia.
- Ketchum, M. S. (1921). *Design of steelmill buildings*. New-York, NY, USA: McGraw-Hill.
- Ketter, R. L. (1961). Further studies on the Strength of Beam-Columns. *Transaction, ASCE*, 87(6), 135-152.
- Le Messurier, W. J. (1977). A Practical Method of Second Order Analysis. *Journal of Structural Engineering*, 14(2), 49-67.
- Le Messurier, W. J. (1993). *Presentation made to the American Society of Civil Engineers Technical Committee on Load and Resistance Factor Design*. Communication présentée au ASCE Structures Congress 93, Irvine, CA, USA.
- Le Messurier, W. J. (1997). Discussion of "Slenderness K Factor for Leaning Columns". *Journal of Structural Engineering*, 123(2), 247-250.
- Length, T. C. o. E. (1997a). *Effective length and Notional Load Approaches for Assessing Frame Stability: Implication for American Steel Design* New-York: American Society of Civil Engineers.

- Length, T. C. o. E. (1997b). *Effective Length and Notional Load Approaches for Assessing Frame Stability: Implications for American Steel Design*. New York, NY: American Society of Civil Engineers.
- Liew, J. Y. R., & Chen, W. F. (1997). Closure to Analysis and Design of Steel Frames Considering Panel Joint Deformations. *Journal of Structural Engineering*, 123(3).
- Liew, J. Y. R., White, D. W., & Chen, W. F. (1991). Beam-Column Design in Steel Frameworks - Insights on Current Methods and Trends. *Journal of Constructional Steel Research*, 18(4), 269-308.
- Liew, J. Y. R., White, D. W., & Chen, W. F. (1994). Notional-Load Plastic-Hinge Method for Frame Design. *Journal of Constructional Steel Research*, 120(5), 1434-1454.
- Massonnet, C. (1959). Stability considerations in the design of steel columns. *Journal of Structural Division, ASCE*, 85(7), 75-112.
- McGuire, W. (1967). *Steel structures*. Englewood Cliffs, NJ, USA: Prentice-Hall.
- Merriam, M., & Jacoby, H. S. (1911). *A textbook for roofs and bridges, part I*. New-York, NY, USA: John Wiley & Sons.
- Mesnager, M. (1919). *Methods de determination des tensions existant dans un cylindre circulaire*. Communication présentée au Comptes Rendus, 169

- Needleman, A., & Tvergaard, V. (1976). An analysis of the imperfection-sensitivity of square elastic-plastic plates under axial compression. *Int. J. Solids Struct.*, 12, 185-201.
- Newmark, N. M. (1949). A Simple Approximate Formula for Effective End-Fixity of Columns. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 16(2), 116.
- Nocedal, J., & Wright, S. J. (2006). *Numerical Optimization*. New York, NY: Springer.
- Pi, Y. L., & Trahair, N. S. (1994). Nonlinear Inelastic Analysis of Steel Beam-Columns. II: Applications. *Journal of Structural Engineering*, 120(7).
- Picard, A., Beaulieu, D., & Kennedy, D. J. L. (1992). Longueur de flambement des éléments en compression. *Revue Construction Métallique*, 2, 3-15.
- Prawel, S. P., & Lee, G. C. (1964). Biaxial Flexure of Column by Analog Computers, ASCE. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 90, 83-111.
- Rondal, J. (1998). *Coupled Instabilities in Metal Structures*. Autriche: Springer-Verlag Wien.
- Sachs, G. (1919). *The Determination of Residual Stresses in Rods and Tubes*. Communication présentée au Metallkinde, 19
- Salmon, C. G., & Johnson, J. E. (1990). *Steel structures : design and behavior : emphasizing load and resistance factor design*. New-York, NY, USA: Harper & Row.
- Sfintesco, D. (1970). Experimental Basis for the European Column Curves. *Constr. Met.*, (3).

Shedd, T. C. (1934). *Structural design in steel*. New-York, NY, USA: John Wiley & Sons.

Spofford, C. M. (1915). *Theory of structures*. New-York, NY, USA: McGraw-Hill.

SSRC. (1991). *Structural Stability Research Council*. Communication présentée au Annual Technical Session: Inelastic Behavior and Design of Frames, Chicago, IL, USA.

Suroveck, S. E., & Zienmian, R. D. (2005). *The Direct Analysis Method: Bridging the Gap from Linear Elastic Analysis to Advanced Analysis in Steel Frame Design*. Communication présentée au Structures Congress, New-York, NY, USA.

Sweig, A. (1965). Discussion of "Column Stability under Elastic Support". *AISC Engineering Journal*, 2(3).

Szalai, J., & Papp, F. (2005). A new residual stress distribution for hot-rolled I-shaped sections. *Journal of Constructional Steel Research*, 61(6), 845-861.

Timoshenko, S. P., & Gere, J. M. (1961). *Theory of Elastic Stability*. Toronto, Canada: McGraw-Hill Book Company.

Trahair, N. S., & Bradford, M. A. (1991). *The Behaviour and Design of Steel Structures*. London: Chapman & Hall.

van der Heijden, A. M. A. (1979). A study of the Hutchinson's buckling model. *J. Mech. Phys. Solids*, 27, 441-464.

von Kármán, T., Sechler, E. E., & Donnell, L. H. (1932). Strength of Thin Plates in Compression. *Trans. A.S.M.E.*, 54(5), 53.

Winter, G., Hsu, P. T., Koo, B., & Loh, M. H. (1948). *Buckling of Trusses and Rigid Frames*. Station Bulletin No. 36. New-York, NY, USA: Cornell University.

Wu, H. B. (1985, April 16-17). *Determination of Effective Length of Unbraced Framed Columns*. Communication présentée au Structural Stability Research Council Annual Technical Session, Cleveland, OH, USA.

Young, B. W. (1972). *Residual stresses in hot rolled members*. Communication présentée au International colloquium on column strength, Zurich, Suisse.

Yura, J. A. (1971). The Effective Length of Columns in Unbraced Frames. *AISC Engineering Journal*, 8, 37-42.

Ziemian, R. D. (1990). *Advanced methods of inelastic analysis in the limit state design of steel structures*. Cornell University, Ithaca, NY, USA.

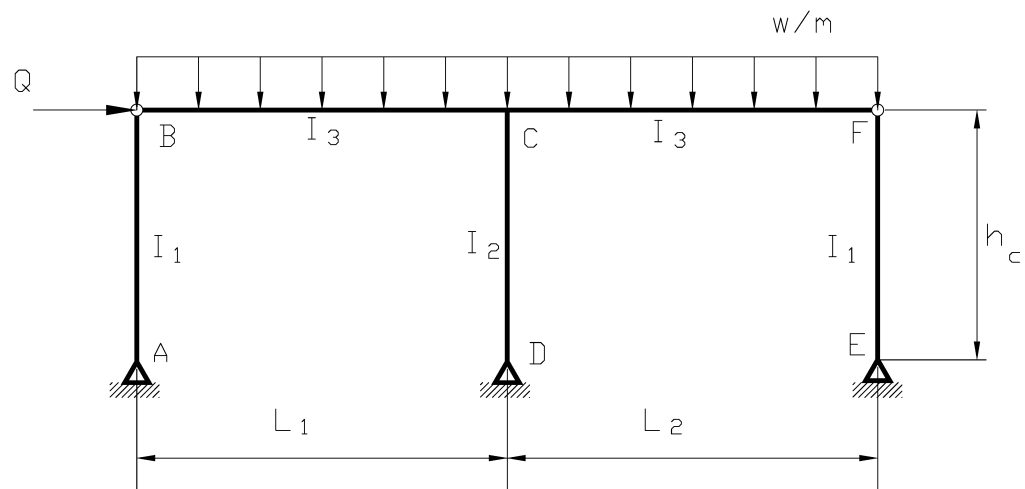
ANNEXE A

**Dimensionnement d'un cadre à deux travées
symétriques et un seul étage avec poteaux de rive
articulés aux extrémités : concept de la longueur
effective versus charge latérale fictive**

Dimensionnement d'un cadre à deux travées symétriques et un seul étage

Poteaux de rive articulés aux extrémités

**Comparaison entre l'approche basée sur le concept de la longueur effective et
 l'approche basée sur la charge latérale fictive.**



Hypotheses:

- Toutes les membrures sont de sections compactes pour prévenir le flambement local;
- La flexion se produit suivant l'axe fort des membrures;
- Les poteaux sont retenus latéralement, en tête, aux pieds et hors plan du chargement à mi-hauteur;
- Le facteur de la longueur effective pour le flambement hors plan $K_y = 1$;
- Les assemblage poteau central-poutres, sont parfaitement rigides, et fournissent la rigidité latérale du cadre dans le plan du chargement;
- Les deux poteaux de rive sont articulés aux deux extrémités, donc $K_x := 1$

Le cadre est sollicité par des charges verticales uniformément réparties sur les deux travées
et une charge horizontale en tête du poteau due à l'effet du vent.

- Les combinaisons suivantes seront retenues, comme étant les combinaisons de charge qui gouvernent le dimensionnement du cadre:

Spécifications AISC-LRFD $1,2D + 0,5L + 1,3W$

Spécifications S16-14 $(1,25D + 1,5L + 0,4 \cdot W)$ selon CNBC 2015-Article 4.1.3.2 et tableau 4.1.3.2-A

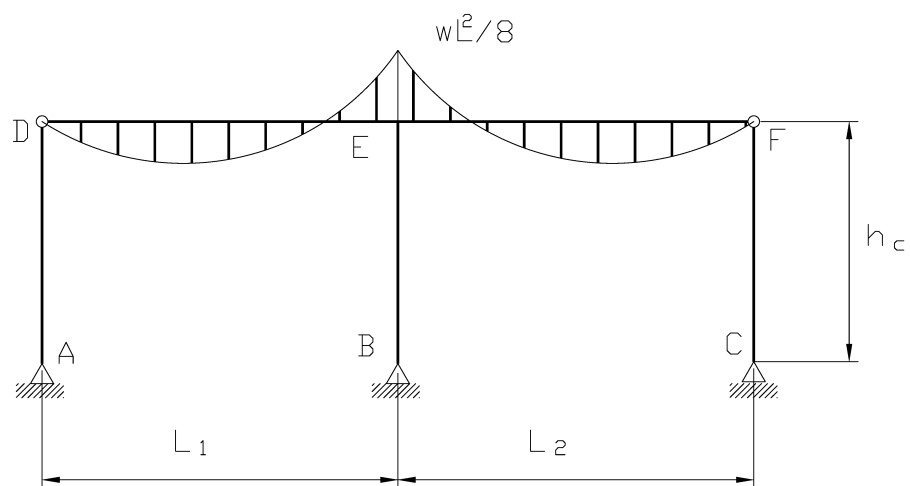
1- Calcul de la résistance du poteau central

La résistance du poteau dans cet exemple est déterminée suivant les approches suivantes:

- Facteur de la longueur effective $K_{(K_n)}$ basé sur les nomogrammes d'alignement;
- Facteur de la longueur effective $K_{(R_L)}$ basé sur le concept de la résistance de l'étage;
- Le concept de la charge latérale fictive.

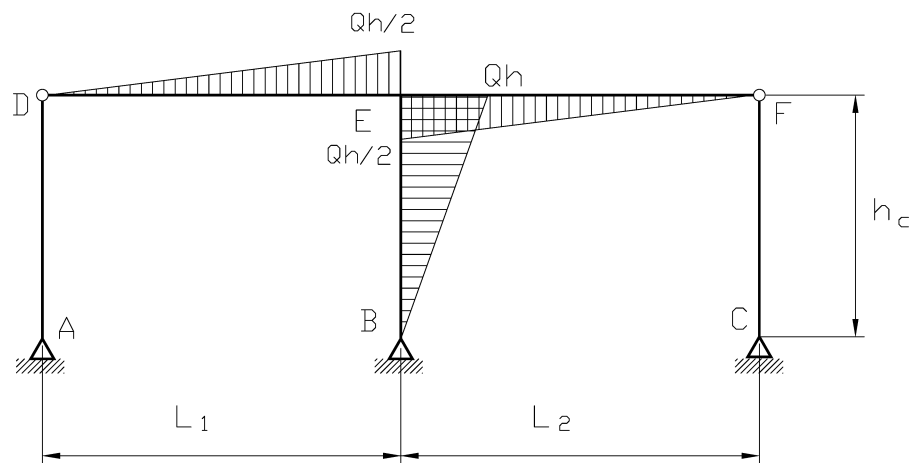
Le calculs des forces internes et les déformations, sont basés sur une analyse élastique du premier ordre. Les effets élastiques de second ordre sont considérés avec l'application des facteurs d'amplification.

**Effets du premier ordre-Forces internes
 (Moments de flexion)**



$$L_1 = L_2$$

Moments de flexion-Charges de gravité



$$L_1 = L_2$$

Moments de flexion-Charge latérale

Caractéristiques géométriques du cadre:

$$L_1 := 18.0 \cdot \text{m} \quad L_2 := 18.0 \cdot \text{m} \quad h_c := 6.0 \cdot \text{m}$$

Poteau central: W360x64

$$\begin{aligned} I_c &:= 178 \cdot 10^6 \cdot \text{mm}^4 & r_{x_c} &:= 148 \cdot \text{mm} & r_{y_c} &:= 48.1 \cdot \text{mm} & S_{x_c} &:= 1030 \cdot 10^3 \cdot \text{mm}^3 & Z_{x_c} &:= 1140 \cdot 10^3 \cdot \text{mm}^3 \\ d_c &:= 347 \cdot \text{mm} & b_c &:= 203 \cdot \text{mm} & t_c &:= 13.5 \cdot \text{mm} & w_c &:= 7.7 \cdot \text{mm} & A_c &:= 8140 \cdot \text{mm}^2 \end{aligned}$$

Traverse: W840x176

$$I_g := 2456 \cdot 10^6 \cdot \text{mm}^4$$

Caractéristiques de l'acier structural

$$F_y := 350 \cdot \text{MPa} \quad E_s := 200000 \cdot \text{MPa} \quad \phi := 0.9 \quad \phi_c := 0.85 \quad G_s := 77000 \cdot \text{MPa}$$

Charges et

$$w_D := 12.0 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad \text{charge permanente uniformément répartie}$$

$$w_L := 12.0 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad \text{surcharge uniformément répartie}$$

$$Q := 16.0 \cdot \text{kN} \quad \text{charge horizontale en tête des poteaux}$$

Coefficients de pondération des charges

$$\alpha_{D_S16} := 1.25 \quad \alpha_{L_S16} := 1.5 \quad \alpha_{W_S16} := 0.40 \quad \text{Code national du bâtiment- Canada 2015}$$

$$\alpha_{D_AISC} := 1.2 \quad \alpha_{L_AISC} := 1.0 \quad \alpha_{W_AISC} := 1.0 \quad \text{ASCE/SEI 7-10 (Minimum Design Loads for Buildings and Other Structures, section 2.3)}$$

Les combinaisons des charges à retenir sont les suivantes:

-S16-14: $1.25D + (1.5L + 0.4W)$

-AISC-LRFD: $1.2D + (1.6L + 0.80W)$

$$w_{f_S16} := \alpha_{D_S16} \cdot w_D + \alpha_{L_S16} \cdot w_L$$

$$w_{f_AISC} := \alpha_{D_AISC} \cdot w_D + 1 \cdot (\alpha_{L_AISC} \cdot w_L)$$

$$w_{f_S16} = 33 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$w_{f_AISC} = 26.4 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$Q_{f_S16} := (\alpha_{W_S16} \cdot Q)$$

$$Q_{f_AISC} := 1 \cdot (\alpha_{W_AISC} \cdot Q)$$

$$Q_{f_S16} = 6.4 \cdot \text{kN}$$

$$Q_{f_AISC} = 16 \cdot \text{kN}$$

$$C_f := w_{f_S16} \cdot \frac{L_1 + L_2}{2} + w_{f_S16} \cdot \frac{L_1}{4}$$

$$P_u := w_{f_AISC} \cdot \frac{L_1 + L_2}{2} + w_{f_AISC} \cdot \frac{L_1}{4}$$

$$C_f = 742.5 \cdot \text{kN}$$

$$P_u = 594 \cdot \text{kN}$$

Calcul du déplacement latéral pondéré

$$I_o := \min(I_c, I_g)$$

$$I_o = 1.78 \times 10^8 \cdot \text{mm}^4$$

$$\Delta_{AISC} := \frac{Q_{f_AISC} \cdot I_o}{E_s \cdot I_c} \cdot \frac{h_c^2}{3} \cdot \left(\frac{h_c}{I_c} + \frac{2}{3} \cdot \frac{L_1}{I_g} \right) = 37.05 \cdot \text{mm}$$

$$\Delta_{S16} := \Delta_{AISC} \cdot \frac{Q_{f_S16}}{Q_{f_AISC}} = 14.82 \cdot \text{mm}$$

Calcul des facteurs d'amplification

$\Sigma P_u := (L_1 + L_2) \cdot w_{f_AISC}$	$\Sigma P_u = 950.4 \cdot \text{kN}$	la somme des charges axiales dans tous les poteaux du cadre
$\Sigma C_f := (L_1 + L_2) \cdot w_{f_S16}$	$\Sigma C_f = 1188 \cdot \text{kN}$	la somme des charges axiales dans tous les poteaux du cadre
$B_2 := \frac{1}{1 - \frac{\Sigma P_u \cdot \Delta_{AISC}}{Q_{f_AISC} \cdot h_c}}$	$B_2 = 1.579$	
$U_2 := \frac{1}{1 - \frac{\Sigma C_f \cdot \Delta_{S16}}{Q_{f_S16} \cdot h_c}}$	$U_2 = 1.847$	les sections choisies pour les membrures reflètent un cadre qui ne possède pas une grande rigidité latérale

Moment de flexion maximal en tête du poteau central

$M_{ux} := Q_{f_AISC} \cdot h_c \cdot B_2$	$M_{ux} = 151.61 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}$
$M_{fx} := Q_{f_S16} \cdot h_c \cdot U_2$	$M_{fx} = 70.913 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}$

Pour le cas des spécifications AISC LRFD, les effets $(P - \delta)$, ne sont pris en considération dans les équations d'interaction, ils doivent être considérés dans la détermination des forces internes (éq. C1-1) par l'intermédiaire du coefficient B_1

Classe de la section selon S16-14

$$\begin{aligned}
 b_o &:= \frac{b_c}{2} & h_{ame} &:= d_c - 2 \cdot t_c & d_s &:= d_c - t_c \\
 semelle &:= \frac{b_o}{t_c} & ame &:= \frac{h_{ame}}{w_c} & C_y &:= A_c \cdot F_y \\
 semelle &= 7.519 & ame &= 41.558 & & \\
 classe1 &:= \left[\frac{145}{\sqrt{\frac{F_y}{MPa}}}, \frac{1100}{\sqrt{\frac{F_y}{MPa}}} \cdot \left(1 - 0.39 \cdot \frac{C_f}{C_y} \right) \right] & classe1 &= (7.751 \quad 52.821) \\
 classe2 &:= \left[\frac{170}{\sqrt{\frac{F_y}{MPa}}}, \frac{1700}{\sqrt{\frac{F_y}{MPa}}} \cdot \left(1 - 0.61 \cdot \frac{C_f}{C_y} \right) \right] & classe2 &= (9.087 \quad 76.423) \\
 classe3 &:= \left[\frac{200}{\sqrt{\frac{F_y}{MPa}}}, \frac{1900}{\sqrt{\frac{F_y}{MPa}}} \cdot \left(1 - 0.65 \cdot \frac{C_f}{C_y} \right) \right] & classe3 &= (10.69 \quad 84.355) \\
 classe &:= \text{stack}(classe1, classe2) \\
 classe_s &:= \text{stack}(classe, classe3) \\
 classe_s^T &= \begin{pmatrix} 7.751 & 9.087 & 10.69 \\ 52.821 & 76.423 & 84.355 \end{pmatrix} \\
 cond_s &:= \text{if}(semelle \leq classe_{s1,1}, 1, \text{if}(semelle \leq classe_{s2,1}, 2, 3)) = 1 \\
 cond_a &:= \text{if}(ame \leq classe_{s1,2}, 1, \text{if}(ame \leq classe_{s2,2}, 2, 3)) = 1 \\
 cond_sec &:= (cond_s \quad cond_a) \\
 choix_s &:= \max(cond_sec) = 1 & & \text{classe de la section selon les spécifications S16-14} \\
 choix_s &= 1 \\
 M_p &:= (\phi \cdot Z_{x_c}) \cdot F_y & & \text{Moment résistant plastique} \\
 M_y &:= \phi \cdot S_{x_c} \cdot F_y & & \text{Moment résistant élastique} \\
 M_y &:= \text{if}(choix_s = 3, M_y, M_p) = 359.1 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}
 \end{aligned}$$

Classe de la section selon AISC LRFD

Les sections dans les spécifications AISC LRFD, sont désignées comme suit:

-Sections compactes;

-Section non compactes;

-Sections élancées.

$$\text{semelle}_{\text{aisc}} := \frac{b_o}{t_c} \quad \text{ame}_{\text{aisc}} := \frac{h_{\text{ame}}}{w_c} \quad \lambda_p := \frac{b_c}{2 \cdot t_c} \quad \lambda_p = 7.519 \quad \text{paramètre de l'élancement des sections compactes}$$

$$\text{semelle}_{\text{aisc}} = 7.519 \quad \text{ame}_{\text{aisc}} = 41.558$$

$$P_{y_AISC} := A_c \cdot F_y \quad \phi_b := 0.9$$

$$F_r := 10 \cdot \text{ksi} \quad \text{contrainte résiduelle de compression aux bouts des semelles}$$

$$\lambda_{r_flange} := \frac{141}{\sqrt{\frac{F_y - F_r}{\text{MPa}}}} = 8.411$$

$$\lambda_{r_web} := \frac{970}{\sqrt{\frac{F_y}{\text{MPa}}}} = 51.849$$

$$\text{cond_ame} := \text{if} \left[\frac{P_u}{\phi_b \cdot P_{y_AISC}} \leq 0.125, \frac{640}{\sqrt{\frac{F_y}{\text{MPa}}}} \cdot \left(1 - 2.75 \cdot \frac{P_u}{\phi_b \cdot P_{y_AISC}} \right), \frac{191}{\sqrt{\frac{F_y}{\text{MPa}}}} \cdot \left(2.33 - \frac{P_u}{\phi_b \cdot P_{y_AISC}} \right) \right] = 21.423$$

$$\text{class}_{\text{web}} := \text{if}(\text{ame}_{\text{aisc}} \leq \text{cond_ame}, \text{"compact"}, \text{if}(\text{ame}_{\text{aisc}} > \lambda_{r_web}, \text{"slender"}, \text{"non compact"}))$$

$$\text{class}_{\text{web}} = \text{"non compact"}$$

$$\text{class}_{\text{flange}} := \text{if} \left(\text{semelle}_{\text{aisc}} \leq \frac{65}{\sqrt{\frac{F_y}{\text{MPa}}}}, \text{"compact"}, \text{if}(\text{semelle}_{\text{aisc}} > \lambda_{r_flange}, \text{"slender"}, \text{"non compact"}) \right)$$

$$\text{class}_{\text{flange}} = \text{"non compact"}$$

$$\begin{aligned} \text{class} &:= \text{stack}(\text{class}_{\text{web}}, \text{class}_{\text{flange}}) \\ \text{class}^T &= (\text{"non compact"} \quad \text{"non compact"}) \quad k2 := 1 \dots \text{rows}(\text{class}) \\ \text{test}_{\text{class}_{k2}} &:= \text{if}(\text{class}_{k2} = \text{"compact"}, 0, 1) \\ \text{test}_{\text{class}}^T &= (1 \quad 1) \\ M_{p_AISC} &:= (Z_{x_c}) \cdot F_y \quad M_{p_AISC} = 399 \cdot \text{kN} \cdot \text{m} \quad \text{Moment résistant plastique} \\ M_{y_AISC} &:= S_{x_c} \cdot F_y \quad M_{y_AISC} = 360.5 \cdot \text{kN} \cdot \text{m} \quad \text{Moment résistant élastique} \\ M_{nx_AISC} &:= \text{if} \left(\sum \text{test}_{\text{class}} > 0, M_{y_AISC}, M_{p_AISC} \right) = 360.5 \cdot \text{kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

On constate ici une différence entre les deux spécifications en ce qui a trait à la classe de la section

$$P_n := \frac{P_u}{\phi_c} = 698.824 \cdot \text{kN}$$

La résistance en compression du poteau est approximativement égale à 0,877 de la charge critique d'Euler, si

la longueur du poteau est suffisamment grande de façon à ce qu'une membrure idéale bi-articulée puisse

atteindre la ruine par flambement élastique. Cette équation est valable pour les poteaux qui répondent à la

condition suivante:

$$P_e \leq \frac{4}{9} \cdot P_y, \text{ c'est-à-dire lorsque } \lambda_c \geq 1.5$$

où

$$\lambda_c = \sqrt{\frac{P_y}{P_e}} = \frac{K \cdot L}{r} \cdot \sqrt{\frac{F_y}{E}}$$

$$\tau := \text{if} \left[P_n \leq 0.877 \cdot \left(\frac{4}{9} \cdot P_{y_AISC} \right), 1, \frac{\frac{P_n}{P_{y_AISC}}}{0.877} \cdot \left(\frac{\ln \left(\frac{P_n}{P_{y_AISC}} \right)}{\ln(0.658)} \right) \right] \quad \tau \text{ est le ratio du module tangent et du module d'élasticité } E_T/E$$

$$\tau = 1 \quad \text{Donc, il n'y a pas de réduction de la rigidité}$$

La longueur du flambement suivant l'axe faible, L_y , est égale à:

$$L_y := \frac{h_c}{3} \quad L_y = 2 \text{ m} \quad K_y := 1$$

$$\lambda_{cy} := \frac{K_y \cdot L_y}{r_{y_c} \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{F_y}{E_s}} \quad \lambda_{cy} = 0.554$$

Facteur de la longueur effective du poteau central, basé sur les nomogrammes d'alignement, K_{Kn}

Dans cette approche, on estime que l'étage a une capacité égale à la somme de la charge critique d'Euler de chaque poteau, calculée sur la base d'un facteur de la longueur effective pour des cadres libres de se déplacer latéralement. Basé sur ce concept, et notons que tous les poteaux du cadre qu'ils sont articulés aux deux extrémités ou non, ont la même longueur, donc la charge du flambement P_{eKn} du poteau central, non articulé aux deux extrémités, est calculée comme suit:

$$\Sigma P_u = 950.4 \cdot \text{kN}$$

la somme des charges axiales
dans tous les poteaux du cadre

Dans cet exemple, les extrémités des poutres à l'opposé de celles avec le poteau central, sont articulées, donc, la rigidité des poutres doit être modifiée, en ajustant la longueur des poutres, comme suit:

$$L'_g := 2 \cdot L_1 = 36 \text{ m}$$

$$G_A := \frac{\frac{I_c}{h_c}}{2 \frac{I_g}{L'_g}} \quad G_A = 0.217$$

$$G_B := 1000 \quad G_B \text{ est normalement égale à } \infty$$

Pied du poteau articulé

Facteurs de la longueur effective pour des cadres non contreventés en fonction de G_A et G_B :

valeur supposée de K: $K := 2$ G_A et G_B varie de 0 à ∞

Given

K varie de 1 à ∞

$K \geq 1$

$$\frac{G_A \cdot G_B \cdot \left(\frac{\pi}{K}\right)^2 - 36}{6 \cdot (G_A + G_B)} = \frac{\frac{\pi}{K}}{\tan\left(\frac{\pi}{K}\right)}$$

$f_s(G_A, G_B) := \text{Find}(K)$

$K_n := f_s(G_A, G_B)$

$$K_n = 2.067$$

$$\Sigma_{\text{non_articulé}} := \frac{\tau \cdot I_c}{K_n^2} = 4.165 \times 10^{-5} \text{ m}^4$$

$$\text{limite}_1 := \sqrt{\frac{5}{8}} \cdot K_n$$

$$\text{limite}_1 = 1.634$$

$$\text{limite}_2 := 1.6 \cdot \frac{\pi^2 \cdot E_s \cdot I_c}{(K_n \cdot h_c)^2}$$

$$\text{limite}_2 = 3.654 \times 10^3 \cdot \text{kN}$$

$$K_{Kn} := \sqrt{\frac{\tau \cdot I_c}{P_u} \cdot \frac{\Sigma P_u}{\Sigma_{\text{non_articulé}}}}$$

$$K_{Kn} = 2.615$$

$K_{Kn} := \text{if}(K_{Kn} \leq \text{limite}_1, \text{limite}_1, K_{Kn})$

$$K_{Kn} = 2.615$$

$$\lambda_{cx} := \frac{K_{Kn} \cdot h_c}{r_{x_c} \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{F_y}{E_s}}$$

$$\lambda_{cx} = 1.412$$

$$\lambda_{cy} = 0.554$$

$\lambda_{c_max} := \max(\lambda_{cx}, \lambda_{cy})$

$$\lambda_{c_max} = 1.412$$

$$P_n := 0.658 \cdot \lambda_{c_max}^2 \cdot P_{y_AISC}$$

$$P_n = 1.237 \times 10^3 \cdot \text{kN}$$

Vérification de l'équation d'interaction

$$\frac{P_u}{\phi_c \cdot P_n} + \frac{8}{9} \cdot \frac{M_{ux}}{\phi_b \cdot M_{nx_AISC}} = 0.98$$

Cette approche met en évidence l'effet de déstabilisation provenant de la présence des poteaux articulés.

Le résultat de l'équation d'interaction, montre que le choix de la section du poteau central est juste convenable.

L'utilisation directe du facteur de la longueur effective, K, du nomogramme d'alignement conduit à une interaction inférieure à celle obtenue en considérant l'effet déstabilisateur des poteaux articulés aux deux extrémités et qui ne contribuent pas à la rigidité latérale du cadre.

Facteur de la longueur effective du poteau central, basé sur les nomogrammes d'alignement, K_{RL}
Basé sur le concept de l'étage

Dans cette approche on suppose que l'étage a une charge qui conduit à flambement, égale à sa résistance du premier ordre, multipliée par un facteur de réduction qui tient compte des effets de second ordre. La charge du flambement de chaque poteau est calculée comme suit:

$$R_L := \frac{\Sigma P_u - P_u}{\Sigma P_u} \quad R_L = 0.375$$

$$\Delta_{oh} := \Delta_{AISC} \cdot \frac{\Sigma P_u}{Q_{f_AISC}} \quad \Delta_{oh} = 2200.776 \cdot \text{mm}$$

$$\text{Ratio} := \frac{\Sigma P_u \cdot h_c}{\Delta_{oh}} \quad \text{Ratio} = 2.591 \times 10^3 \cdot \text{kN}$$

$$K_{RL} := \sqrt{\frac{\tau \cdot I_c \cdot \pi^2 \cdot E_s}{P_u \cdot h_c^2} \cdot \frac{\Sigma P_u}{\text{Ratio} \cdot (0.85 + 0.15 \cdot R_L)}} \quad K_{RL} = 2.579$$

$$\text{limit}_{K_RL} := \sqrt{\frac{\tau \cdot I_c \cdot E_s}{h_c^2} \cdot \frac{1}{\text{Ratio}} \cdot \frac{\pi^2}{1.7}} \quad \text{limit}_{K_RL} = 1.489$$

$$K_{RL} := \text{if}(K_{RL} \leq \text{limit}_{K_RL}, \text{limit}_{K_RL}, K_{RL}) \quad K_{RL} = 2.579$$

$$\lambda_{Icx} := \frac{K_{RL} \cdot h_c}{r_{xc} \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{F_y}{E_s}}$$

$$\lambda_{Icx} = 1.392$$

$$\lambda_{Ic_max} := \max(\lambda_{Icx}, \lambda_{Icy})$$

$$\lambda_{Ic_max} = 1.392$$

$$P_{In} := 0.658^{\lambda_{Ic_max}^2} \cdot P_{y_AISC}$$

$$P_{In} = 1.266 \times 10^3 \cdot \text{kN}$$

Vérification de l'équation d'interaction

$$\frac{P_u}{\phi_c \cdot P_{In}} + \frac{8}{9} \cdot \frac{M_{ux}}{\phi_b \cdot M_{nx_AISC}} = 0.967$$

Cette approche de K_{RL} donne un résultat sensiblement proche de celui obtenu sur la base de K_{Kn}

Charge latérale fictive

$$\zeta := 0.002$$

$$H_{not} := \zeta \cdot \Sigma P_u \quad H_{not} = 1.901 \cdot \text{kN}$$

Moment maximal en tête du poteau central du à la charge latérale fictive

$$\Delta_{AISC_not} := \Delta_{AISC} + \Delta_{AISC} \cdot \frac{H_{not}}{Q_{f_AISC}} \quad \Delta_{AISC_not} = 41.452 \cdot \text{mm}$$

$$B_{2_not} := \frac{1}{1 - \frac{\Sigma P_u \cdot \Delta_{AISC_not}}{(Q_{f_AISC} + H_{not}) \cdot h_c}} \quad B_{2_not} = 1.579$$

$$M_{Iux} := (Q_{f_AISC} + H_{not}) \cdot h_c \cdot B_{2_not}$$

$$M_{Iux} = 169.621 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}$$

$$\frac{M_{Iux}}{M_{ux}} = 111.88 \cdot \%$$

la charge latérale fictive a augmenté le moment pondéré en tête du poteau central de l'ordre de 12%, tandis que la charge axiale reste inchangée. Dans cette approche un facteur de la longueur effective égal à l'unité, est utilisé, donc:

$$\lambda_{cx_not} := \frac{l \cdot h_c}{r_{x_c} \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{F_y}{E_s}}$$

$$\lambda_{cx_not} = 0.54$$

$$\lambda_{not_max} := \max(\lambda_{cx_not}, \lambda_{cy})$$

$$\lambda_{not_max} = 0.554$$

$$P_{nx} := 0.658 \cdot \lambda_{cx_not}^2 \cdot P_{y_AISC}$$

$$P_{nx} = 2.522 \times 10^3 \cdot \text{kN}$$

$$P_{ny} := 0.658 \cdot \lambda_{cy}^2 \cdot P_{y_AISC}$$

$$P_{ny} = 2.506 \times 10^3 \cdot \text{kN}$$

Étant donné que $P_{nx} > P_{ny}$, on doit vérifier le comportement du cadre dans le plan du chargement et hors plan du chargement. Pour la vérification dans le plan du chargement:

$$\frac{P_u}{\phi_c \cdot P_{nx}} + \frac{8}{9} \cdot \frac{M_{1ux}}{\phi_b \cdot M_{nx_AISC}} = 0.742$$

Pour la vérification hors plan du chargement, on ne doit pas inclure l'effet produit par la charge latérale fictive:

$$\frac{P_u}{\phi_c \cdot P_{ny}} + \frac{8}{9} \cdot \frac{M_{ux}}{\phi_b \cdot M_{nx_AISC}} = 0.694$$

Comme les deux approches précédentes, c'est la flexion par rapport à l'axe fort qui gouverne. Toutefois, on peut considérer que le choix du poteau est acceptable. Ceci à cause que l'approche de la charge fictive est calibrée pour capter les effets du flambement inélastique. Les approches basées sur les facteurs de la longueur effective, et qui nécessitent un processus itératif pour déterminer τ , peuvent mener à des valeurs moindres d'interaction.

L'utilisation des valeurs non itératives de τ , donne un dimensionnement plus conservateur.

En ce qui concerne les spécifications S16-14, le coefficient d'amplification U_2 est supérieur à 1,4, ce qui signifie qu'il faudra augmenter la rigidité du cadre, ou procéder à une analyse élasto-plastique de second ordre sauf s'il est démontré que les contraintes aux sections critiques, en tenant compte des contraintes résiduelles, ne sont pas supérieures à F_y (Article 8.6.1)

Deuxième choix de section pour le poteau central pour augmenter la rigidité du cadre

Poteau central: **W360x72**

$$\begin{aligned} I'_c &:= 201 \cdot 10^6 \cdot \text{mm}^4 & r'_{x_c} &:= 149 \cdot \text{mm} & r'_{y_c} &:= 48.5 \cdot \text{mm} & S'_{x_c} &:= 1150 \cdot 10^3 \cdot \text{mm}^2 & Z'_{x_c} &:= 1280 \cdot 10^3 \cdot \text{mm}^3 \\ d'_c &:= 350 \cdot \text{mm} & b'_c &:= 204 \cdot \text{mm} & t'_c &:= 15.1 \cdot \text{mm} & w'_c &:= 8.6 \cdot \text{mm} & A'_c &:= 9110 \cdot \text{mm}^2 \\ J' &:= 603 \cdot 10^3 \cdot \text{mm}^4 & C'_w &:= 600 \cdot 10^9 \cdot \text{mm}^6 & I'_y &:= 21.4 \cdot 10^6 \cdot \text{mm}^4 \end{aligned}$$

Classe de la section selon S16-14

$$\begin{aligned} b_{o_1} &:= \frac{b'_c}{2} & h_{ame_1} &:= d'_c - 2 \cdot t'_c & d_{s_1} &:= d'_c - t'_c \\ \text{semelle_1} &:= \frac{b_{o_1}}{t'_c} & \text{ame_1} &:= \frac{h_{ame_1}}{w'_c} & C_{y_1} &:= A'_c \cdot F_y = 3.188 \times 10^3 \cdot \text{kN} \\ \text{semelle} &:= 7.519 & \text{ame} &:= 41.558 \\ \text{classe1'} &:= \left[\frac{145}{\sqrt{\frac{F_y}{\text{MPa}}}} \quad \frac{1100}{\sqrt{\frac{F_y}{\text{MPa}}}} \cdot \left(1 - 0.39 \cdot \frac{C_f}{C_{y_1}} \right) \right] & \text{classe1'} &:= (7.751 \quad 53.458) \\ \text{classe2'} &:= \left[\frac{170}{\sqrt{\frac{F_y}{\text{MPa}}}} \quad \frac{1700}{\sqrt{\frac{F_y}{\text{MPa}}}} \cdot \left(1 - 0.61 \cdot \frac{C_f}{C_{y_1}} \right) \right] & \text{classe2'} &:= (9.087 \quad 77.961) \\ \text{classe3'} &:= \left[\frac{200}{\sqrt{\frac{F_y}{\text{MPa}}}} \quad \frac{1900}{\sqrt{\frac{F_y}{\text{MPa}}}} \cdot \left(1 - 0.65 \cdot \frac{C_f}{C_{y_1}} \right) \right] & \text{classe3'} &:= (10.69 \quad 86.187) \\ \text{classe'} &:= \text{stack}(\text{classe1'}, \text{classe2'}) \\ \text{classe_s'} &:= \text{stack}(\text{classe'}, \text{classe3'}) \\ \text{classe_s'} &:= \begin{pmatrix} 7.751 & 53.458 \\ 9.087 & 77.961 \\ 10.69 & 86.187 \end{pmatrix} \\ \text{cond_s'} &:= \text{if}(\text{semelle} \leq \text{classe_s1_1}, 1, \text{if}(\text{semelle} \leq \text{classe_s2_1}, 2, 3)) = 1 \\ \text{cond_a'} &:= \text{if}(\text{ame} \leq \text{classe_s1_2}, 1, \text{if}(\text{ame} \leq \text{classe_s2_2}, 2, 3)) = 1 \end{aligned}$$

$$\text{cond_sec}' := (\text{cond_s}' \text{ cond_a}') = 1$$

$$\text{choix_s}' := \max(\text{cond_sec}') = 1 \quad \text{classe de la section selon les spécifications S16-14}$$

$$M'_p := (\phi \cdot Z'_{x_c}) \cdot F_y = 403.2 \cdot \text{kN} \cdot \text{m} \quad \text{Moment résistant plastique}$$

$$M'_y := \phi \cdot S'_{x_c} \cdot F_y = 362.25 \cdot \text{kN} \cdot \text{m} \quad \text{Moment résistant élastique}$$

$$M_{y'} := \text{if}(\text{choix_s} = 3, M'_y, M'_p) = 403.2 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}$$

$$I'_o := \min(I'_c, I'_g) = 2.01 \times 10^8 \cdot \text{mm}^4$$

$$\Delta'_{\text{AISC}} := \frac{Q_{f_AISC} \cdot I'_o}{E_s \cdot I'_c} \cdot \frac{h_c^2}{3} \cdot \left(\frac{h_c}{I'_c} + \frac{2}{3} \cdot \frac{L_1}{I'_g} \right) = 33.347 \cdot \text{mm}$$

$$\Delta'_{\text{S16}} := \Delta'_{\text{AISC}} \cdot \frac{Q_{f_S16}}{Q_{f_AISC}} = 13.339 \cdot \text{mm}$$

$$U'_2 := \frac{1}{1 - \frac{\sum C_{f'} \Delta'_{\text{S16}}}{Q_{f_S16} \cdot h_c}} = 1.703$$

$$M'_{fX} := Q_{f_S16} \cdot h_c \cdot U'_2 = 65.381 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}$$

Vérification de la résistance globale de l'élément:

Le coefficient de la longueur effective $K=1$, C_r est fondé sur l'élancement maximal eu égard à la flexion biaxiale. Pour ce qui est de la flexion uniaxiale selon l'axe fort, $C_r = C_{rx}$.

$$C_{ex} := \frac{\pi^2 \cdot E_s \cdot I'_c}{(1 \cdot h_c)^2} = 1.102 \times 10^4 \cdot \text{kN}$$

$$\omega_{1X} := 1.0 \quad \text{élément soumis à une charge répartie en travée (13.8.4)}$$

$$M_{rx} := M_{y'}$$

$$U_{1X} := \frac{\omega_{1X}}{1 - \frac{C_f}{C_{ex}}} = 1.072$$

Équation d'interaction

$$\begin{aligned} \text{coeff} &:= \text{if}(\text{choix_s} = 1, 0.85, 1) & \text{coeff} &= 0.85 & n &:= 1.34 \\ \lambda_x &:= \frac{h_c}{r'_{x_c}} \cdot \sqrt{\frac{F_y}{E_s \cdot \pi^2}} & \lambda_x &= 0.536 & \lambda_y &:= \frac{\frac{h_c}{2}}{r'_{y_c}} \cdot \sqrt{\frac{F_y}{E_s \cdot \pi^2}} & \lambda_y &= 0.824 \\ C_{rx_S16} &:= 0.9 \cdot A'_c \cdot F_y \cdot \left(1 + \lambda_x^{2 \cdot n}\right)^{-\frac{1}{n}} = 2.523 \times 10^3 \cdot \text{kN} \\ C_{ry_S16} &:= 0.9 \cdot A'_c \cdot F_y \cdot \left(1 + \lambda_y^{2 \cdot n}\right)^{-\frac{1}{n}} = 1.81 \times 10^3 \cdot \text{kN} \\ \text{Inter}_{S16} &:= \frac{C_f}{C_{rx_S16}} + \frac{\text{coeff} \cdot U_{1x} \cdot M_{fx}}{M_{rx}} & \text{Inter}_{S16} &= 0.474 \\ C_{ex_S16} &:= \frac{\pi^2 \cdot E_s \cdot I'_c}{h_c^2} = 1.102 \times 10^4 \cdot \text{kN} \\ C_{ey_S16} &:= \frac{\pi^2 \cdot E_s \cdot A'_c}{\left(\frac{h_c}{r'_{y_c}}\right)^2} = 1.175 \times 10^3 \cdot \text{kN} \end{aligned}$$

Résistance globale de l'élément avec l'effet de torsion (condition de déversement)

Dans ce cas:

- Le coefficient de la longueur effective K est égal à 1 (K=1)
- C_f est fondé sur le flambement selon l'axe dont l'élancement est le plus important
- M_f est considéré pour élément non-soutenu latéralement (avec déversement)

$$\begin{aligned} C_{ry} &:= C_{ry_S16} & \text{Résistance à la compression pure selon l'élancement maximal} \\ C_{ex_S16} &= 1.102 \times 10^4 \cdot \text{kN} \\ C_{ey_S16} &= 1.175 \times 10^3 \cdot \text{kN} & L_x &:= h_c & L_y &= 2 \text{ m} \\ C_e &:= \text{if}\left(\frac{L_x}{r'_{x_c}} > \frac{L_y}{r'_{y_c}}, C_{ex_S16}, C_{ey_S16}\right) = 1.175 \times 10^3 \cdot \text{kN} \end{aligned}$$

ANNEXE A – DIMENSIONNEMENT D'UN CADRE À DEUX TRAVÉES
 SYMÉTRIQUES ET UN SEUL ÉTAGE AVEC POTEAUX DE RIVE ARTICULÉS
 AUX EXTRÉMITÉS : CONCEPT DE LA LONGUEUR EFFECTIVE VERSUS
 CHARGE LATÉRALE FICTIVE

468

	Interaction avec	Interaction avec	Charge fictive	
Poteau central	K_{Kn}	K_{RL}	$\zeta=0,002$	
W360x64	0.98	0.967	0.742	

Coefficient d'uniformisation des moments:

$$\omega_1 := 0.6$$

Coefficient d'augmentation du moment de déversement élastique:

$$\omega_2 := 1.0$$

$$U'_{1x} := \frac{\omega_1}{1 - \frac{C_f}{C_e}} = 1.63 \quad \text{Facteur d'amplification (effets P-δ)}$$

$$U'_{1x} := \text{if}(U'_{1x} \leq 1.0, 1.0, U'_{1x})$$

$$U'_{1x} = 1.630 \quad L_{dev} := 1 \cdot m$$

Moment de déversement élastique:

$$M_{ue} := \frac{\omega_2 \cdot \pi}{L_{dev}} \cdot \sqrt{E_s \cdot I_y \cdot G_s \cdot J' + \left(\frac{\pi}{L_{dev}} \right)^2 \cdot E_s \cdot I_y \cdot C_w \cdot E_s} = 7.21 \times 10^3 \cdot kN \cdot m$$

Moment résistant à la flexion sans déversement:

$$M_y = 359 \cdot kN \cdot m$$

$$M'_r := \text{if} \left[M_{ue} < 0.67 \cdot M_y, \phi \cdot M_{ue}, 1.15 \cdot \phi \cdot M_y \cdot \left(1 - \frac{0.28 \cdot M_y}{M_{ue}} \right) \right]$$

$$M'_r := \text{if}(M'_r \geq M_y, M_y, M'_r) = 403.2 \cdot kN \cdot m \quad \text{Résistance pondérée en flexion:}$$

$$\text{stability}_{S16} := \frac{C_f}{C_{ry_S16}} + \frac{\text{coeff} \cdot U'_{1x} \cdot M_{fx}}{M'_r} = 0.654$$

ANNEXE B

Dimensionnement aux contraintes admissibles – solution inélastique

DIMENSIONNEMENT AUX CONTRAINTES ADMISSIBLES
SOLUTION INÉLASTIQUE

Dimensionnement des poteaux aux contraintes admissibles

Hypothèses:

Due aux contraintes résiduelles et à la non-verticalité initiale des poteaux, on suppose que l'action inélastique aura lieu à un niveau des contraintes égal à $0,5 F_y$

$E := 200000 \cdot \text{MPa}$ module de Young de l'acier

$F_y := 250 \cdot \text{MPa}$ limite élastique de l'acier

$C_c := \sqrt{\frac{2 \cdot \pi^2 \cdot E}{F_y}}$ $C_c = 125.664$ limite de l'élancement qui marque la frontière entre le comportement élastique et le comportement inélastique

Tracé de la courbe
d'Euler

$r_x := 43 \cdot \text{mm}$

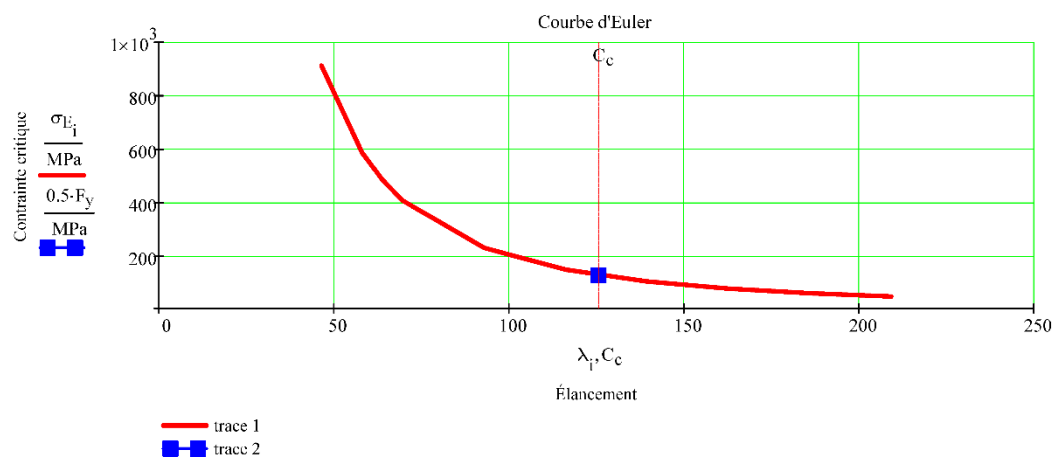
$L_p := (2 \ 2.5 \ 2.75 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9)^T \cdot n_i := 1 \dots \text{rows}(L_p)$

$\lambda_i := \frac{L_{p_i}}{r_x}$

$\lambda^T = (46.5 \ 58.1 \ 64 \ 69.8 \ 93 \ 116.3 \ 139.5 \ 162.8 \ 186 \ 209.3)$

$\sigma_{E_i} := \frac{\pi^2 \cdot E}{(\lambda_i)^2}$ contraintes théoriques critiques
d'Euler

$\sigma_E^T = (912.4 \ 584 \ 482.6 \ 405.5 \ 228.1 \ 146 \ 101.4 \ 74.5 \ 57 \ 45.1) \cdot \text{MPa}$

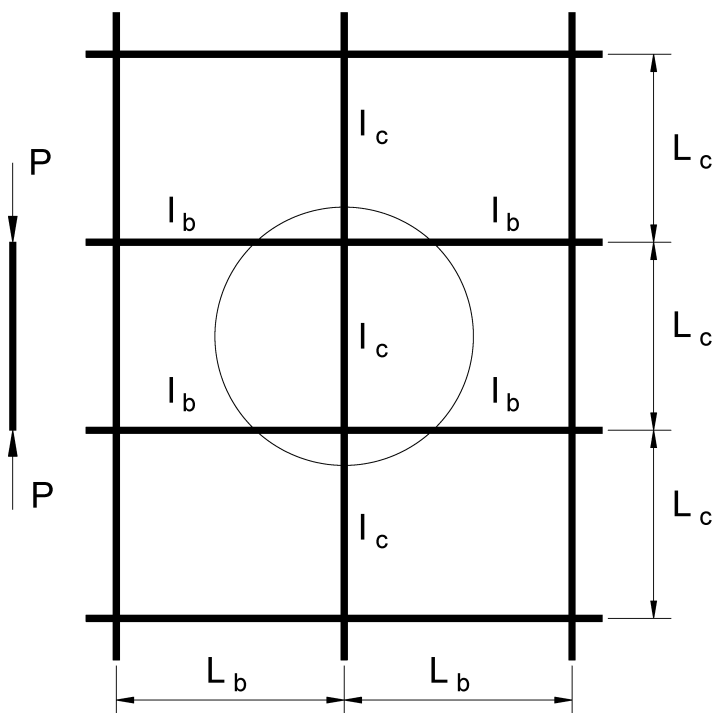


On peut constater sur la courbe d'Euler la frontière entre Le domaine inélastique et le domaine élastique

Dans le cas où $KL/r < C_c$, le module tangent E_T doit être utilisé pour calculer la rigidité à la flexion de la membrure comprimée.

DIMENSIONNEMENT AUX CONTRAINTES ADMISSIBLES
SOLUTION INÉLASTIQUE

Poteau soumis principalement à la compression, faisant partie d'une structure à noeuds déplaçables



Un poteau intérieur dans une structure à étages, est sollicité par une force axiale de compression provenant des charges non pondérées. Le flambement du poteau par rapport à son axe faible est empêché, ainsi que le déversement de la pièce. Seul le flambement par rapport à l'axe fort de la section est considéré.

DIMENSIONNEMENT AUX CONTRAINTES ADMISSIBLES
SOLUTION INÉLASTIQUE

$P := 3335 \cdot \text{kN}$ force de compression
 $L_{\text{col}} := 3.65 \cdot \text{m}$ hauteur du poteau
 $L_{\text{beam}} := 7.3 \cdot \text{m}$ portée de la poutre
 $I_{\text{col}} := 788 \cdot 10^6 \cdot \text{mm}^4$ inertie du poteau **W 360x237**
 $r_{x_col} := 162 \cdot \text{mm}$
 $A_{\text{col}} := 30100 \cdot \text{mm}^2$
 $I_{\text{beam}} := 216 \cdot 10^6 \cdot \text{mm}^4$ Poutres **W 410x60**

a- Comportement élastique

$$G_U := \left(\frac{2}{2} \cdot \frac{I_{\text{col}}}{L_{\text{col}}} \cdot \frac{L_{\text{beam}}}{I_{\text{beam}}} \right) \quad G_U = 7.296 \quad G_L := G_U$$

$$G_U = 7.296$$

$$K_{\text{elastic}} := 1.8 \quad \text{Valeur d'essai}$$

Given

$$\frac{G_U \cdot G_L \cdot \left(\frac{\pi}{K_{\text{elastic}}} \right)^2 - 36}{6 \cdot (G_U + G_L)} = \frac{\frac{\pi}{K_{\text{elastic}}}}{\tan \left(\frac{\pi}{K_{\text{elastic}}} \right)}$$

$$a := \text{Find}(K_{\text{elastic}}) \quad a = 2.616$$

Facteur de la longueur effective
Méthode des nomogrammes d'alignement

$$K_{\text{elastic}} := a$$

$$K_{\text{elastic}} = 2.616$$

$$L_{f_elastic} := K_{\text{elastic}} \cdot L_{\text{col}} = 9.549 \text{ m} \quad \text{longueur de flambement}$$

DIMENSIONNEMENT AUX CONTRAINTES ADMISSIBLES
SOLUTION INÉLASTIQUE

$$\text{slenderness} := \frac{K_{\text{elastic}} \cdot L_{\text{col}}}{r_{x_col}} = 58.943 \quad \text{élancement de la pièce}$$

Calcul de la contrainte admissible de compression en fonction de l'élancement

$$C_0 := \text{if} \left(30 - \frac{F_y}{\text{ksi}} \geq 20, 20, 30 - \frac{F_y}{\text{ksi}} \right)$$

$$C_0 = 20$$

$$C_p := \text{if} \left(\sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\text{ksi}}} \leq 78, 78, \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\text{ksi}}} \right)$$

$$C_p = 110.945$$

$$m' := \frac{0.6 \cdot \frac{F_y}{\text{ksi}} - \frac{149000}{C_p^2}}{C_p - C_0} \quad m' = 0.106$$

$$KL_r := \text{slenderness}$$

$$F_{ad} := \text{if} \left[KL_r \leq C_0, 0.6 \cdot F_y, \text{if} \left[KL_r > C_0 \wedge KL_r \leq C_p, 0.6 \cdot F_y - m' \cdot (KL_r - C_0) \cdot \text{ksi}, \frac{149000}{(KL_r)^2} \cdot \text{ksi} \right] \right]$$

$$F_{ad} = 121.509 \cdot \text{MPa}$$

$$F_a := \text{if} \left[\text{slenderness} \leq C_c, \frac{\left(1 - \frac{\text{slenderness}^2}{2 \cdot C_c^2} \right) \cdot F_y}{\frac{5}{3} + \frac{3 \cdot \text{slenderness}}{8 \cdot C_c} - \frac{\text{slenderness}^3}{8 \cdot C_c^3}}, \frac{12 \cdot \pi^2 \cdot E}{23 \cdot \text{slenderness}^2} \right] \quad F_a = 121.607 \cdot \text{MPa}$$

$$P_{\text{allow}} := A_{\text{col}} \cdot F_a \quad P_{\text{allow}} = 3660.359 \cdot \text{kN}$$

DIMENSIONNEMENT AUX CONTRAINTES ADMISSIBLES
SOLUTION INÉLASTIQUE

$$\text{ratio}_{\text{usage}} := \frac{P_{\text{allow}}}{P}$$

$$\text{ratio}_{\text{usage}} = 1.098 \quad \text{ratio de la capacité portante admissible en compression de la membrure et la charge appliquée}$$

b- Comportement inélastique

Pour cette solution on choisit pour le poteau une section plus petite que celle utilisée précédemment

$$I_{\text{col}} := 636 \cdot 10^6 \cdot \text{mm}^4 \quad \text{inertie du poteau } W 360 \times 196$$

$$r_{x_col} := 159 \cdot \text{mm}$$

$$A_{\text{col}} := 25000 \cdot \text{mm}^2$$

$$G_{U_elastic} := \frac{2}{2} \cdot \frac{I_{\text{col}} \cdot L_{\text{beam}}}{L_{\text{col}} \cdot I_{\text{beam}}}$$

$$G_{U_elastic} = 5.889 \quad G_{L_elastic} := G_{U_elastic}$$

Recherche du coefficient de la longueur effective

$$K_{\text{elastic}} := 1.8 \quad \text{Valeur d'essai}$$

Given

$$\frac{G_{U_elastic} \cdot G_{L_elastic} \cdot \left(\frac{\pi}{K_{\text{elastic}}} \right)^2 - 36}{6 \cdot (G_{U_elastic} + G_{L_elastic})} = \frac{\frac{\pi}{K_{\text{elastic}}}}{\tan \left(\frac{\pi}{K_{\text{elastic}}} \right)}$$

$$a := \text{Find}(K_{\text{elastic}}) \quad a = 2.386 \quad \begin{array}{l} \text{Facteur de la longueur effective} \\ \text{Méthode des nomogrammes} \end{array}$$

$$K_{\text{elastic}} := a \quad K_{\text{elastic}} = 2.386$$

$$L_f := K_{\text{elastic}} \cdot L_{\text{col}} \quad \text{longueur de flambement}$$

$$L_f = 8.707 \cdot \text{m} \quad \text{slenderness} := \frac{K_{\text{elastic}} \cdot L_{\text{col}}}{r_{x_col}} \quad \text{slenderness} = 54.762$$

DIMENSIONNEMENT AUX CONTRAINTES ADMISSIBLES
SOLUTION INÉLASTIQUE

$$F_a := \text{if} \left[\text{slenderness} \leq C_c, \frac{\left(1 - \frac{\text{slenderness}^2}{2 \cdot C_c^2} \right) \cdot F_y}{\frac{5}{3} + \frac{3 \cdot \text{slenderness}}{8 \cdot C_c} - \frac{\text{slenderness}^3}{8 \cdot C_c^3}}, \frac{12 \cdot \pi^2 \cdot E}{23 \cdot \text{slenderness}^2} \right]$$

$$F_a = 124.337 \cdot \text{MPa}$$

$$F'_e := \frac{149000}{\text{slenderness}^2} \cdot \text{ksi}$$

la contrainte critique d'Euler divisée par
un facteur de sécurité

$$F'_e = 342.57 \cdot \text{MPa}$$

**Correction du facteur de la longueur effective
en utilisant le module tangent d'élasticité E_T**

1- Premier cycle de correction

$$G_{U_inelastic} := G_{U_elastic} \cdot \frac{F_a}{F'_e}$$

$$G_{U_inelastic} = 2.137$$

$$G_{L_inelastic} := G_{U_inelastic}$$

$$K_1 := 1.8$$

Valeur
d'essai

Given

Coefficient de la longueur
effective

Méthode des nomogrammes

$$\frac{G_{U_inelastic} \cdot G_{L_inelastic} \cdot \left(\frac{\pi}{K_1} \right)^2 - 36}{6 \cdot (G_{U_inelastic} + G_{L_inelastic})} = \frac{\frac{\pi}{K_1}}{\tan \left(\frac{\pi}{K_1} \right)}$$

$$a := \text{Find}(K_1) \quad a = 1.624$$

$$K_1 := a$$

$$K_1 = 1.624$$

Column_allowable.xmcd

DIMENSIONNEMENT AUX CONTRAINTES ADMISSIBLES
SOLUTION INÉLASTIQUE

Avec la nouvelle valeur du coefficient de la longueur effective, on procède à d'autres cycles des calculs des rigidités flexionnelles G_U et G_L

$$L_{f_1} := K_1 \cdot L_{col} \quad \text{longueur de flambement}$$

$$L_{f_1} = 5.927 \cdot \text{m} \quad \text{slenderness}_1 := \frac{K_1 \cdot L_{col}}{r_{x_col}}$$

$$\text{slenderness}_1 = 37.276 \quad \text{nouvel élanement du poteau}$$

$$F_{a_1} := \text{if} \left[\text{slenderness}_1 \leq C_c, \frac{\left(1 - \frac{\text{slenderness}_1^2}{2 \cdot C_c^2} \right) \cdot F_y}{\frac{5}{3} + \frac{3 \cdot \text{slenderness}_1}{8 \cdot C_c} - \frac{\text{slenderness}_1^3}{8 \cdot C_c^3}}, \frac{12 \cdot \pi^2 \cdot E}{23 \cdot \text{slenderness}_1^2} \right]$$

$$F_{a_1} = 134.676 \cdot \text{MPa}$$

$$F'_{e_1} := \frac{149000}{\text{slenderness}_1^2} \cdot \text{ksi} \quad F'_{e_1} = 739.337 \cdot \text{MPa}$$

2-Deuxième cycle de correction

$$G_{U_inelastic} := G_{U_elastic} \cdot \frac{F_{a_1}}{F'_{e_1}}$$

$$G_{U_inelastic} = 1.073$$

$$G_{L_inelastic} := G_{U_inelastic}$$

$$K_2 := 1.2 \quad \text{Valeur d'essai}$$

DIMENSIONNEMENT AUX CONTRAINTES ADMISSIBLES
SOLUTION INÉLASTIQUE

Given

$$\frac{G_{U_inelastic} \cdot G_{L_inelastic} \cdot \left(\frac{\pi}{K_2}\right)^2 - 36}{6 \cdot (G_{U_inelastic} + G_{L_inelastic})} = \frac{\frac{\pi}{K_2}}{\tan\left(\frac{\pi}{K_2}\right)}$$

$$a := \text{Find}(K_2)$$

$$a = 1.339 \quad K_2 := a$$

$$K_2 = 1.339$$

$$L_{f_2} := K_2 \cdot L_{col} \quad \text{longueur de flambement}$$

$$L_{f_2} = 4.886 \cdot m \quad \text{slenderness}_2 := \frac{K_2 \cdot L_{col}}{r_{x_col}}$$

$$\text{slenderness}_2 = 30.728 \quad \text{nouvel élanement du poteau}$$

$$F_{a_2} := \text{if} \left[\text{slenderness}_2 \leq C_c, \frac{\left(1 - \frac{\text{slenderness}_2^2}{2 \cdot C_c^2}\right) \cdot F_y}{\frac{5}{3} + \frac{3 \cdot \text{slenderness}_2}{8 \cdot C_c} - \frac{\text{slenderness}_2^3}{8 \cdot C_c^3}}, \frac{12 \cdot \pi^2 \cdot E}{23 \cdot \text{slenderness}_2^2} \right]$$

$$F_{a_2} = 138.071 \cdot \text{MPa}$$

$$F'_{e_2} := \frac{149000}{\text{slenderness}_2^2} \cdot \text{ksi} \quad F'_{e_2} = 1.088 \times 10^3 \cdot \text{MPa}$$

DIMENSIONNEMENT AUX CONTRAINTES ADMISSIBLES
SOLUTION INÉLASTIQUE

3- Troisième cycle de correction

Correction du facteur de la longueur effective

$$G_{U_inelastic} := G_{U_elastic} \cdot \frac{F_{a_2}}{F'_{e_2}} \quad G_{U_elastic} = 5.889$$

$$G_{U_inelastic} = 0.747$$

$$G_{L_inelastic} := G_{U_inelastic}$$

$$K_3 := 1.1 \quad \text{Valeur d'essai}$$

Given

$$\frac{G_{U_inelastic} \cdot G_{L_inelastic} \cdot \left(\frac{\pi}{K_3}\right)^2 - 36}{6 \cdot (G_{U_inelastic} + G_{L_inelastic})} = \frac{\frac{\pi}{K_3}}{\tan\left(\frac{\pi}{K_3}\right)}$$

$$a := \text{Find}(K_3)$$

$$a = 1.241 \quad K_3 := a$$

$$K_3 = 1.241 \quad \frac{K_3}{K_2} = 0.927$$

$$L_{f_3} := K_3 \cdot L_{col} \quad \text{longueur de flambement}$$

$$L_{f_3} = 4.531 \cdot \text{m} \quad \text{slenderness}_3 := \frac{K_3 \cdot L_{col}}{r_{x_col}}$$

$$\text{slenderness}_3 = 28.495 \quad \text{nouvel élanement du poteau}$$

$$F_{a_3} := \text{if } \text{slenderness}_3 \leq C_c, \frac{\left(1 - \frac{\text{slenderness}_3^2}{2 \cdot C_c^2}\right) \cdot F_y}{\frac{5}{3} + \frac{3 \cdot \text{slenderness}_3}{8 \cdot C_c} - \frac{\text{slenderness}_3^3}{8 \cdot C_c^3}}, \frac{12 \cdot \pi^2 \cdot E}{23 \cdot \text{slenderness}_3^2}$$

DIMENSIONNEMENT AUX CONTRAINTES ADMISSIBLES
SOLUTION INÉLASTIQUE

$$F_{a_3} = 139.165 \cdot \text{MPa}$$

$$F'_{e_3} := \frac{149000}{\text{slenderness}_3^2} \cdot \text{ksi}$$

$$F'_{e_3} = 1.265 \times 10^3 \cdot \text{MPa}$$

4- Quatrième cycle de correction

$$G_{U_inelastic} := G_{U_elastic} \cdot \frac{F_{a_3}}{F'_{e_3}}$$

Correction du facteur de la longueur effective

$$G_{U_inelastic} = 0.648$$

$$G_{L_inelastic} := G_{U_inelastic}$$

$$G_{U_elastic} = 5.889$$

$$K_4 := 1.1 \quad \text{Valeur d'essai}$$

Given

$$\frac{G_{U_inelastic} \cdot G_{L_inelastic} \cdot \left(\frac{\pi}{K_4}\right)^2 - 36}{6 \cdot (G_{U_inelastic} + G_{L_inelastic})} = \frac{\frac{\pi}{K_4}}{\tan\left(\frac{\pi}{K_4}\right)}$$

$$a := \text{Find}(K_4)$$

$$a = 1.211$$

$$K_4 := a$$

$$K_4 = 1.211$$

$$\frac{K_4}{K_3} = 0.975$$

$$L_{f_4} := K_4 \cdot L_{col}$$

$$L_{f_4} = 4.418 \cdot \text{m} \quad \text{slenderness}_4 := \frac{K_4 \cdot L_{col}}{r_{x_col}}$$

$$\text{slenderness}_4 = 27.789$$

nouvel élanement du
poteau

DIMENSIONNEMENT AUX CONTRAINTES ADMISSIBLES
SOLUTION INÉLASTIQUE

$$F_{a_4} := \text{if } \text{slenderness}_4 \leq C_c, \frac{\left(1 - \frac{\text{slenderness}_4^2}{2 \cdot C_c^2}\right) \cdot F_y}{\frac{5}{3} + \frac{3 \cdot \text{slenderness}_4}{8 \cdot C_c} - \frac{\text{slenderness}_4^3}{8 \cdot C_c^3}}, \frac{12 \cdot \pi^2 \cdot E}{23 \cdot \text{slenderness}_4^2}$$

$$F_{a_4} = 139.504 \cdot \text{MPa}$$

$$F'_{e_4} := \frac{149000}{\text{slenderness}_4^2} \cdot \text{ksi}$$

$$F'_{e_4} = 1.33 \times 10^3 \cdot \text{MPa}$$

5- Cinquième cycle de correction

$$G_{U_inelastic} := G_{U_elastic} \cdot \frac{F_{a_4}}{F'_{e_4}}$$

$$G_{U_inelastic} = 0.618$$

$$G_{I_inelastic} := G_{U_inelastic}$$

$$G_{U_elastic} = 5.889$$

$$K_5 := 1.1 \quad \text{Valeur d'essai}$$

Given

$$\frac{G_{U_inelastic} \cdot G_{I_inelastic} \cdot \left(\frac{\pi}{K_5}\right)^2 - 36}{6 \cdot (G_{U_inelastic} + G_{I_inelastic})} = \frac{\frac{\pi}{K_5}}{\tan\left(\frac{\pi}{K_5}\right)}$$

$$a := \text{Find}(K_5)$$

$$a = 1.201 \quad K_5 := a$$

$$K_5 = 1.201 \quad \frac{K_5}{K_4} = 0.992$$

Après cinq cycles de correction on arrive à convergence

Column_allowable.xmcd

DIMENSIONNEMENT AUX CONTRAINTES ADMISSIBLES
SOLUTION INÉLASTIQUE

Résistance du poteau en compression

$$L_f := K_5 \cdot L_{col}$$

$$L_f = 4.384 \cdot m \quad \text{slenderness} := \frac{L_f}{r_{N_col}}$$

$$\text{slenderness} = 27.572 \quad \text{élancement du poteau}$$

$$F_a := \text{if} \left[\text{slenderness} \leq C_c, \frac{\left(1 - \frac{\text{slenderness}^2}{2 \cdot C_c^2} \right) \cdot F_y}{\frac{5}{3} + \frac{3 \cdot \text{slenderness}}{8 \cdot C_c} - \frac{\text{slenderness}^3}{8 \cdot C_c^3}}, \frac{12 \cdot \pi^2 \cdot E}{23 \cdot \text{slenderness}^2} \right]$$

$$F_a = 139.608 \cdot \text{MPa}$$

$$P_{\text{allow_inelastic}} := A_{col} \cdot F_a \quad P_{\text{allow_inelastic}} = 3.49 \times 10^3 \cdot \text{kN}$$

$$\frac{P_{\text{allow_inelastic}}}{P} = 1.047$$

$$\frac{L_f}{L_{f_elastic}} = 0.459$$

Cet exemple de calcul montre que l'approche inélastique peut produire une réduction significative de la valeur du facteur de

la longueur effective d'un élément soumis à la compression et faisant partie d'une structure libre de se déplacer latéralement.

Lorsque l'élancement de la membrure est relativement bas, la nouvelle valeur du coefficient de la longueur effective, K ,

s'approche de 1,0

Donc, les poteaux faisant partie des structures à étages, peuvent être dimensionnés sur la base de $K = 1,0$

DIMENSIONNEMENT AUX CONTRAINTES ADMISSIBLES
SOLUTION INÉLASTIQUE

Références

- 1-Handbook of steel construction-cisc Canadian institute of steel construction
- 2-Structural steel designers handbook, Fredrerick S. Merritt
- 3-The effective length of columns in unbraced frames, Joseph Yura, AISC engineering journal

ANNEXE C

**Comparaison entre les formules de la résistance à
la compression des poteaux suivant AISC LRFD,
S16-14 et EUROCODE 3**

**COMPARAISON ENTRE LES FORMULES DE LA RÉSISTANCE À LA COMPRESSION
DES POTEUX SUIVANT AISC LRFD, S16-14 ET EUROCODE 3**

$A_g := (7590 \ 8500 \ 9480 \ 10000 \ 11000)^T \cdot \text{mm}^2$	aire de la section transversale (section W310)
$w_c := (60 \ 67 \ 74 \ 79 \ 85)^T \cdot \text{kg}$	
$I_x := (129 \ 145 \ 165 \ 177 \ 198)^T \cdot 10^6 \cdot \text{mm}^4$	moment d'inertie de la section transversale selon l'axe perpendiculaire au flambement
$r_x := (130 \ 131 \ 132 \ 133 \ 134)^T \cdot \text{mm}$	rayon de giration selon l'axe où le flambement se produit
$d := (303 \ 306 \ 310 \ 306 \ 310)^T \cdot \text{mm}$	profondeur de la section transversale
$b := (203 \ 204 \ 205 \ 254 \ 254)^T \cdot \text{mm}$	largeur de la section transversale
$t := (13.1 \ 14.6 \ 16.3 \ 14.6 \ 16.3)^T \cdot \text{mm}$	épaisseur des semelles
$E := 200000 \cdot \text{MPa}$	module d'élasticité de l'acier
$F_y := 350 \cdot \text{MPa}$	limite élastique de l'acier G40.21-M-350W
$\phi_c := 0.85$	facteur de résistance en compression AISC LRFD
$\gamma_{M1} := 1.1$	facteur de sécurité partielle EUROCODE3
$\phi := 0.9$	coefficient de tenu S16-14 (13.1)
$L_{col} := (6 \ 8 \ 9 \ 11)^T \cdot \text{m}$	longueur de flambement du poteau
$K_{L_eff} := 1$	coefficient de la longueur effective
$i := 1 \dots \text{rows}(A_g) \quad j := 1 \dots \text{rows}(L_{col})$	

$\alpha_{D_S16} := 1.25$	$\alpha_{L_S16} := 1.5$	coefficients de pondération des charges permanentes et surcharges d'exploitation S16-14 selon Article 4.1.3.2 du CNBC.
$\alpha_{D_aisc} := 1.4$	$\alpha_{L_aisc} := 1.7$	coefficients de pondération des charges permanentes et surcharges d'exploitation AISC LRFD
$\alpha_{D_euro} := 1.35$	$\alpha_{L_euro} := 1.5$	coefficients de pondération des charges permanentes et surcharges d'exploitation EUROCODE3
$w_D := 3 \cdot \text{kPa}$		charge permanente uniformément répartie
$w_L := 10 \cdot \text{kPa}$		surcharge d'exploitation uniformément répartie
$S_{trib} := 120 \cdot \text{m}^2$		surface tributaire du poteau

Charge axiale pondérée de compression

$$C_{f_S16} := (\alpha_{D_S16} \cdot w_D + \alpha_{L_S16} \cdot w_L) \cdot S_{trib} \quad C_{f_S16} = 2250 \cdot \text{kN}$$

$$C_{f_aisc} := (\alpha_{D_aisc} \cdot w_D + \alpha_{L_aisc} \cdot w_L) \cdot S_{trib} \quad C_{f_aisc} = 2544 \cdot \text{kN}$$

$$C_{f_euro} := (\alpha_{D_euro} \cdot w_D + \alpha_{L_euro} \cdot w_L) \cdot S_{trib} \quad C_{f_euro} = 2286 \cdot \text{kN}$$

$$P_{e_{i,j}} := \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{x_i}}{(K_{L_eff} \cdot L_{col,j})^2} \quad \text{charge critique d'Euler}$$

$$P_e^T = \begin{pmatrix} \begin{matrix} W310x6 & W310x6 & W310x7 & W310x7 & W310x8 \\ 7073.216 & 7950.515 & 9047.137 & 9705.111 & 10856.565 \\ 3978.684 & 4472.164 & 5089.015 & 5459.125 & 6106.818 \\ 3143.652 & 3533.562 & 4020.95 & 4313.383 & 4825.14 \\ 2104.428 & 2365.442 & 2691.71 & 2887.471 & 3230.052 \end{matrix} \end{pmatrix} \cdot \text{kN} \quad \begin{matrix} L_{col} = 6 \text{ m} \\ L_{col} = 8 \text{ m} \\ L_{col} = 9 \text{ m} \\ L_{col} = 11 \text{ m} \end{matrix}$$

$$P_{y_i} := A_{g_i} \cdot F_y$$

$$P_y^T = (2656.5 \quad 2975 \quad 3318 \quad 3500 \quad 3850) \cdot \text{kN}$$

$$P_{n_{i,j}} := 0.658 \left(\frac{P_{y_i}}{P_{e_{i,j}}} \right) \cdot P_{y_i}$$

$$P_n^T = \begin{pmatrix} 2270.077 & 2543.718 & 2845.847 & 3009.636 & 3318.939 \\ 2008.826 & 2251.988 & 2525.579 & 2676.255 & 2957.076 \\ 1865.108 & 2091.445 & 2348.986 & 2492.134 & 2756.909 \\ 1566.208 & 1757.401 & 1980.652 & 2107.335 & 2337.752 \end{pmatrix} \cdot \text{kN} \quad \text{poteau qui atteint la ruine par flambement inélastique}$$

La résistance en compression du poteau est approximativement égale à 0,877 de la charge critique d'Euler, si la longueur du poteau est suffisamment grande de façon à ce qu'une membrure idéale bi-articulée puisse atteindre la ruine par flambement élastique. Cette équation est valable pour les poteaux qui répondent à la condition suivante:
 $P_e \leq \frac{4}{9} \cdot P_y$, c'est-à-dire lorsque $\lambda_c \geq 1.5$

$$\text{où } \lambda_c = \sqrt{\frac{P_y}{P_e}} = \frac{K_{L_eff} \cdot L_{col}}{r} \cdot \sqrt{\frac{F_y}{E}}$$

$$\tau_{i,j} := \text{if} \left[P_{n_{i,j}} \leq 0.877 \cdot \left(\frac{4}{9} \cdot P_{y_i} \right), 1, \frac{\frac{P_{n_{i,j}}}{P_{y_i}}}{0.877 \cdot \left(\frac{\ln \left(\frac{P_{n_{i,j}}}{P_{y_i}} \right)}{\ln(0.658)} \right)} \right]$$

τ est le ratio du module tangent et du module d'élasticité E_T/E

$$\tau^T = \begin{pmatrix} 0.366 & 0.365 & 0.359 & 0.354 & 0.349 \\ 0.576 & 0.574 & 0.566 & 0.559 & 0.552 \\ 0.677 & 0.675 & 0.666 & 0.659 & 0.651 \\ 0.849 & 0.847 & 0.839 & 0.832 & 0.825 \end{pmatrix}$$

$$P_{n_inélastique_{i,j}} := 0.877 \cdot \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{x_i} \cdot \tau_{i,j}}{(K_{L_eff} \cdot L_{col_j})^2}$$

$$P_{n_inélastique}^T = \begin{pmatrix} 2270.077 & 2543.718 & 2845.847 & 3009.636 & 3318.939 \\ 2008.826 & 2251.988 & 2525.579 & 2676.255 & 2957.076 \\ 1865.108 & 2091.445 & 2348.986 & 2492.134 & 2756.909 \\ 1566.208 & 1757.401 & 1980.652 & 2107.335 & 2337.752 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$\lambda_{i,j} := \frac{K_{L_eff} \cdot L_{col,j}}{r_{x_i}} \cdot \sqrt{\frac{F_y}{\pi^2 \cdot E}} \quad n := 1.34 \quad n = 1.34 \text{ pour sections structurales laminées à chaud et sections tubulaires fabriquées selon CSA G40.20, Class C, ASTM A500, ou ASTM A1085}$$

$$\lambda^T = \begin{pmatrix} 0.615 & 0.61 & 0.605 & 0.601 & 0.596 \\ 0.819 & 0.813 & 0.807 & 0.801 & 0.795 \\ 0.922 & 0.915 & 0.908 & 0.901 & 0.894 \\ 1.127 & 1.118 & 1.11 & 1.101 & 1.093 \end{pmatrix}$$

$$C_{r_CSA_{i,j}} := \phi \cdot A_{g_i} \cdot F_y \cdot \left[1 + (\lambda_{i,j})^{2 \cdot n} \right]^{\frac{-1}{n}}$$

$$C_{r_CSA}^T = \begin{pmatrix} 1998.782 & 2245.698 & 2512.56 & 2658.591 & 2933.299 \\ 1694.271 & 1908.115 & 2139.875 & 2269.478 & 2509.672 \\ 1539.263 & 1735.56 & 1948.601 & 2068.969 & 2290.513 \\ 1253.025 & 1415.714 & 1592.728 & 1694.528 & 1879.737 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$\left(\phi_c \cdot P_{n_inélastique} \right)^T = \begin{pmatrix} 1929.566 & 2162.16 & 2418.97 & 2558.191 & 2821.098 \\ 1707.502 & 1914.19 & 2146.742 & 2274.817 & 2513.515 \\ 1585.342 & 1777.729 & 1996.638 & 2118.314 & 2343.372 \\ 1331.277 & 1493.791 & 1683.554 & 1791.235 & 1987.09 \end{pmatrix} \cdot \text{kN} \quad C_{r_aisc_{i,j}} := \phi_c \cdot P_{n_inélastique_{i,j}}$$

$$\text{ratio}_{S16_LRFD_{i,j}} := \left| \frac{C_{r_CSA_{i,j}} - \phi_c \cdot P_{n_inélastique_{i,j}}}{\left(\phi_c \cdot P_{n_inélastique_{i,j}} \right)} \right|$$

$$\text{ratio}_{\text{S16_LRFD}}^T = \begin{pmatrix} 3.587 & 3.864 & 3.869 & 3.925 & 3.977 \\ 0.775 & 0.317 & 0.32 & 0.235 & 0.153 \\ 2.907 & 2.372 & 2.406 & 2.329 & 2.256 \\ 5.878 & 5.227 & 5.395 & 5.399 & 5.403 \end{pmatrix} \cdot \%$$

$$\text{ratio}_{\text{max}} := \max(\text{ratio}_{\text{S16_LRFD}}) = 5.878 \%$$

CALCUL SUIVANT L'EUROCODE3

$$\begin{aligned} \gamma_{M1} &:= 1.1 && \text{Facteur partiel de sécurité, pris égal à 1,10} \\ &&& \text{pour tous les calculs d'instabilité-EUROCODE3} \\ \beta_A &:= 1.0 && \text{Pour les sections transversales de classe 1,2 et 3} \\ &&& \text{EUROCODE3} \end{aligned}$$

$$\lambda_1 := \sqrt{\frac{E}{F_y}} \cdot \pi \quad \lambda_1 = 75.098$$

$$\text{cond_sec}_i := \frac{d_i}{b_i} \quad \text{cond_sec}^T = (1.493 \quad 1.5 \quad 1.512 \quad 1.205 \quad 1.22)$$

$$\alpha_i := \text{if}(\text{cond_sec}_i \leq 1.2 \wedge t_i \leq 100 \cdot \text{mm}, 0.49, \text{if}(\text{cond_sec}_i > 1.2 \wedge t_i \leq 40 \cdot \text{mm}, 0.34, 0.49))$$

$$\alpha^T = (0.34 \quad 0.34 \quad 0.34 \quad 0.34 \quad 0.34)$$

$$\lambda_{x_{i,j}} := \frac{L_{col_j}}{r_{x_i}}$$

$$\lambda_x^T = \begin{pmatrix} 46.154 & 45.802 & 45.455 & 45.113 & 44.776 \\ 61.538 & 61.069 & 60.606 & 60.15 & 59.701 \\ 69.231 & 68.702 & 68.182 & 67.669 & 67.164 \\ 84.615 & 83.969 & 83.333 & 82.707 & 82.09 \end{pmatrix}$$

$$\lambda'_{i,j} := \left(\frac{\lambda_{x_{i,j}}}{\lambda_1} \right) \cdot \beta_A^{0.5}$$

$$\lambda^T = \begin{pmatrix} 0.615 & 0.61 & 0.605 & 0.601 & 0.596 \\ 0.819 & 0.813 & 0.807 & 0.801 & 0.795 \\ 0.922 & 0.915 & 0.908 & 0.901 & 0.894 \\ 1.127 & 1.118 & 1.11 & 1.101 & 1.093 \end{pmatrix}$$

$$\phi_{i,j} := 0.5 \cdot \left[1 + \alpha_i \cdot (\lambda'_{i,j} - 0.2) + (\lambda'_{i,j})^2 \right]$$

$$\phi^T = \begin{pmatrix} 0.759 & 0.756 & 0.752 & 0.749 & 0.745 \\ 0.941 & 0.935 & 0.929 & 0.923 & 0.917 \\ 1.048 & 1.04 & 1.032 & 1.025 & 1.018 \\ 1.292 & 1.281 & 1.27 & 1.26 & 1.249 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{i,j} := \frac{1}{\phi_{i,j} + \left[(\phi_{i,j})^2 - (\lambda'_{i,j})^2 \right]^{0.5}} \quad \chi_{i,j} := \text{if}(\chi_{i,j} \geq 1, 1, \chi_{i,j})$$

$$\chi^T = \begin{pmatrix} 0.83 & 0.832 & 0.834 & 0.837 & 0.839 \\ 0.712 & 0.716 & 0.72 & 0.724 & 0.728 \\ 0.647 & 0.652 & 0.656 & 0.66 & 0.665 \\ 0.519 & 0.524 & 0.529 & 0.534 & 0.539 \end{pmatrix}$$

$$C_{r_euro,i,j} := \chi_{i,j} \cdot \beta_A \cdot A_{g_i} \cdot \frac{F_y}{\gamma_{M1}}$$

$$C_{r_euro}^T = \begin{pmatrix} 2003.669 & 2250.364 & 2516.877 & 2662.227 & 2936.308 \\ 1720.409 & 1937.224 & 2172.117 & 2303.209 & 2546.422 \\ 1562.767 & 1762.39 & 1979.04 & 2101.566 & 2326.849 \\ 1254.434 & 1418.469 & 1597.099 & 1700.491 & 1887.762 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

Résumé

$$C_{r_CSA}^T = \begin{pmatrix} 1998.782 & 2245.698 & 2512.56 & 2658.591 & 2933.299 \\ 1694.271 & 1908.115 & 2139.875 & 2269.478 & 2509.672 \\ 1539.263 & 1735.56 & 1948.601 & 2068.969 & 2290.513 \\ 1253.025 & 1415.714 & 1592.728 & 1694.528 & 1879.737 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$C_{r_aisc}^T = \begin{pmatrix} 1929.566 & 2162.16 & 2418.97 & 2558.191 & 2821.098 \\ 1707.502 & 1914.19 & 2146.742 & 2274.817 & 2513.515 \\ 1585.342 & 1777.729 & 1996.638 & 2118.314 & 2343.372 \\ 1331.277 & 1493.791 & 1683.554 & 1791.235 & 1987.09 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$C_{r_euro}^T = \begin{pmatrix} 2003.669 & 2250.364 & 2516.877 & 2662.227 & 2936.308 \\ 1720.409 & 1937.224 & 2172.117 & 2303.209 & 2546.422 \\ 1562.767 & 1762.39 & 1979.04 & 2101.566 & 2326.849 \\ 1254.434 & 1418.469 & 1597.099 & 1700.491 & 1887.762 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$C_{f_S16} = 2250 \cdot \text{kN} \quad C_{f_euro} = 2286 \cdot \text{kN} \quad C_{f_aisc} = 2544 \cdot \text{kN}$$

$$U_{aisc_{i,j}} := \text{if}(C_{f_aisc} \leq C_{r_aisc_{i,j}}, i, 0) \quad U_{euro_{i,j}} := \text{if}(C_{f_euro} \leq C_{r_euro_{i,j}}, i, 0) \quad U_{S16_{i,j}} := \text{if}(C_{f_S16} \leq C_{r_CSA_{i,j}}, i, 0)$$

$$U_{aisc}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U_{S16}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U'_{aisc_{i,j}} := \text{if}\left[\sum \left(U_{aisc}^T\right)^{\langle i \rangle} > 0, 0, 1\right]$$

$$U'_{S16_{i,j}} := \text{if}\left[\sum \left(U_{S16}^T\right)^{\langle i \rangle} > 0, 0, 1\right]$$

$$U'_{aisc}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U'_{S16}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{indice}_{\text{aisc}_j} := \sum U'_{\text{aisc}} \langle j \rangle + 1$$

$$\text{indice}_{\text{aisc}}^T = (4 \ 4 \ 4 \ 4)$$

$$\text{PP}_{\text{col_aisc}_j} := w_c(\text{indice}_{\text{aisc}_j})$$

$$\text{PP}_{\text{col_aisc}}^T = (79 \ 79 \ 79 \ 79) \text{ kg}$$

$$U_{\text{euro}}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U'_{\text{euro}_{i,j}} := \text{if} \left[\sum \left(U_{\text{euro}}^T \right)^{\langle i \rangle} > 0, 0, 1 \right]$$

$$U'_{\text{euro}}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{indice}_{\text{euro}_j} := \sum U'_{\text{euro}} \langle j \rangle + 1$$

$$\text{indice}_{\text{euro}}^T = (3 \ 3 \ 3 \ 3)$$

$$\text{PP}_{\text{col_euro}_j} := w_c(\text{indice}_{\text{euro}_j})$$

$$\text{PP}_{\text{col_euro}}^T = (74 \ 74 \ 74 \ 74) \text{ kg}$$

$$\text{indice}_{\text{S16}_j} := \sum U'_{\text{S16}} \langle j \rangle + 1$$

$$\text{indice}_{\text{S16}}^T = (3 \ 3 \ 3 \ 3)$$

$$\text{PP}_{\text{col_S16}_j} := w_c(\text{indice}_{\text{S16}_j})$$

$$\text{PP}_{\text{col_S16}}^T = (74 \ 74 \ 74 \ 74) \text{ kg}$$

Conclusion:

Pour des poteaux parfaitement droits, articulés aux deux extrémités, la résistance à la compression concentrique varie légèrement en appliquant les trois spécifications, S16, AISC LRFD, Eurocode 3.

Les spécifications AISC LRFD restent plus explicites, en mettant en évidence le phénomène du comportement inélastique.