



**Optimisation topologique des structures en 3D en tenant compte du  
flambage  
Cas d'une passerelle en aluminium**

**Par TOURE HAMADOUN**

**Mémoire présenté à l'Université du Québec à Chicoutimi en vue de  
l'obtention du grade de Maîtrise ès sciences appliquées (M. Sc. A.) en  
ingénierie**

Québec, Canada

## RÉSUMÉ

La recherche de conception optimale dans le domaine du génie civil est au centre des réflexions des ingénieurs, notamment l'utilisation de matériaux non conventionnels dans la conception des ponts ou des passerelles. Lors de la conception, il est essentiel de prendre en compte non seulement la résistance de la structure, mais également les normes de conception et de sécurité, telles que la norme CSA S6:19 pour les ponts et passerelles. Ces normes garantissent que les structures respectent des critères stricts de durabilité, de sécurité et de performance sous diverses conditions de chargement. L'optimisation structurelle consiste à déterminer la meilleure solution de conception optimale en utilisant des critères liés à la performance structurelle.

Dans ce rapport de mémoire, une méthode d'optimisation topologique permettant d'intégrer les contraintes de flambage pour l'optimisation topologique des structures 3D sera présentée. La méthode utilisée est basée sur la méthode de matériau isotrope solide avec pénalisation (SIMP). La fonction d'agrégation de Kreisselmeier-Steinhauser (KS), qui permet de combiner plusieurs objectifs ou contraintes en une seule fonction objective a été utilisée pour agréger les contraintes de volume, de rigidité et de flambage. L'objectif consiste à minimiser le poids d'une structure, tout en respectant la résistance et les critères de flambement. La résolution des problèmes aux valeurs propres avec le solveur MMA (Method of Moving Asymptote) a été utilisée pour mener l'analyse de flambage linéaire. Par ailleurs, l'étude analyse l'influence des paramètres d'optimisation sur la topologie, à travers des cas d'application sur l'optimisation d'une passerelle en aluminium.

## TABLE DES MATIÈRES

<b>RÉSUMÉ</b> .....	<b>II</b>
<b>LISTE DES TABLEAUX</b> .....	<b>V</b>
<b>LISTE DES FIGURES</b> .....	<b>VI</b>
<b>LISTE DES NOTATIONS</b> .....	<b>VIII</b>
<b>REMERCIEMENTS</b> .....	<b>X</b>
<b>CHAPITRE 1</b> .....	<b>1</b>
1.1. INTRODUCTION GÉNÉRALE : .....	1
1.2. PROBLÉMATIQUE : .....	3
1.3. OBJECTIFS .....	4
1.4. STRUCTURE DU RAPPORT : .....	4
<b>CHAPITRE 2</b> .....	<b>6</b>
2.1. RÉSISTANCES DES STRUCTURES PASSERELLES ET PONTS .....	6
2.1.1. <i>PASSERELLES ET ALLIAGE D'ALUMINIUM</i> .....	7
2.1.2. <i>LES ALLIAGES D'ALUMINIUM</i> .....	10
2.1.3. <i>UTILISATION DE L'ALUMINIUM DANS LA CONCEPTION DES PONTS ET PASSERELLES</i> .....	14
2.1.4. <i>DYNAMIQUE DES STRUCTURES ET DES PASSERELLES</i> .....	15
2.1.5. <i>CHARGE DU PIÉTON</i> .....	18
2.1.6. <i>RÉSISTANCE DES STRUCTURES DE LA PASSERELLE</i> .....	19
2.2. ÉTAT DE L'ART DES MÉTHODES D'OPTIMISATION TOPOLOGIQUE ET DE FORME .....	28
2.2.1. <i>OPTIMISATION PARAMÉTRIQUE DE FORME</i> .....	28
2.2.2. <i>OPTIMISATION TOPOLOGIE (OT)</i> .....	33
2.3. ANALYSE DE FLAMBEMENT PAR LA MÉTHODE ÉLÉMENT FINIE .....	50
2.3.1. <i>DISCRÉTISATION ÉLÉMENT FINI</i> : .....	51
2.3.2. <i>PROBLÈME D'ÉLASTICITÉ LINÉAIRE</i> : .....	53
2.3.3. <i>FLAMBAGE LINÉAIRE</i> : .....	56
2.3.4. <i>PROBLÈME AUX VALEURS PROPRES</i> .....	59
2.3.5. <i>LES MÉTHODES DE RÉOLUTION DES ÉQUATIONS</i> : .....	60
2.3.6. <i>RÉSOLUTION DU PROBLÈME LIÉ AU FLAMBAGE</i> : .....	62
2.3.7. <i>FLAMBAGE LINÉAIRE VERSUS FLAMBAGE NON LINÉAIRE</i> .....	65
2.3.8. <i>DISTINCTION ENTRE LA MÉTHODE CLASSIQUE ET LA MÉTHODE NUMÉRIQUE D'ANALYSE DE FLAMBAGE</i> .....	66
<b>CHAPITRE 3</b> .....	<b>71</b>
3.1. HYPOTHÈSES .....	72
3.2. FORMULATION DE L'OBJECTIF D'OPTIMISATION : .....	72
3.3. APPROCHE DE RÉOLUTION DU PROBLÈME D'OPTIMISATION .....	73

3.4. IMPLÉMENTATION MATLAB 3D : .....	77
3.5. DÉTERMINATION DES COORDONNÉES DES ÉLÉMENTS .....	80
3.6. PARAMÉTRAGE DES VALEURS PROPRES DE FLAMBAGE .....	83
3.7. CALCUL DE LA SENSIBILITÉ ET SCHÉMAS DE FILTRAGE .....	86
3.8. MAILLAGE ET VISUALISATION : .....	88
3.9. CRITÈRE D'OPTIMISATION.....	91
<b>CHAPITRE 4.....</b>	<b>94</b>
4.1. EXEMPLE D'OPTIMISATION : POUTRE EN PORTE-À-FAUX ET POUTRE EN COMPRESSION.....	94
4.2. APPLICATION CAS D'UNE PASSERELLE EN ALUMINIUM .....	100
4.3. VALIDATION AVEC LA NORME CSA S6 19 : .....	112
4.4. OPTIMISATION DE LA PLATEFORME DE LA PASSERELLE : .....	115
4.5. INFLUENCE DE LA FRACTION VOLUMIQUE ET DU MAILLAGE.....	117
4.6. INFLUENCE DU RAYON DE FILTRAGE : .....	118
4.7. INFLUENCE DE LA PÉNALISATION : .....	119
<b>CHAPITRE 5.....</b>	<b>122</b>
<b>CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES .....</b>	<b>122</b>
5.1. CONCLUSIONS.....	122
5.2. PERSPECTIVES .....	124
<b>ANNEXE1 : ALGORITHME D'OPTIMISATION.....</b>	<b>132</b>

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1: Types de charge et coefficient de pondération d'après Lévesque et Tremblay (2010).....	20
Tableau 2: Coefficient de tenue de la norme S157-05 d'après (Lévesque & Tremblay, 2010).....	20
Tableau 3: Classe des sections (; Lévesque & Tremblay, 2010).....	26
Tableau 4 : Résistance des sections à la flexion (Beaulieu, 2023) .....	27
Tableau 5 : Tableau non exhaustif des méthodes d'optimisation topologique (Ribeiro et al., 2021) .....	39
Tableau 6 : Synthèse Articles .....	70
Tableau 7 : Caractéristiques des modèles Matlab et SolidWorks.....	107
Tableau 8 : rapport masse/facteur de flambage du modèle initial et le modèle optimisé .....	112

## LISTE DES FIGURES

Figure 1 Passerelle piétonnière en aluminium .....	2
Figure 2: Méthodologie de résolution de la problématique .....	5
Figure 3: La clause 7.7.1 de la norme BS 5400-2, 2006, permet des réductions de la charge globale pour des portées supérieures à 36 m. (Parke & Hewson, 2008) .....	8
Figure 4 : Passerelle en treillis (Structurea,2026) .....	9
Figure 5 : passerelles en arches (Flickr,2026) .....	9
Figure 6 : passerelle à hauban (Pixno,2026) .....	10
Figure 7: Le pont sur la rivière Saguenay à Arvida au Canada (Ministère de la Culture et des Communications, 2005).....	15
Figure 8 : Flambage des structures en compression (Beaulieu, 2023) .....	21
Figure 9 : Déversement d'une structure en flexion (Beaulieu, 2023) .....	25
Figure 10: Chargement mécanique pour le problème de dimensionnement (modifiée de Peigney, 2018) .....	35
Figure 11: Microstructures pour un problème d'OT par homogénéisation (Eschenauer & Olhoff 2001).....	40
Figure 12: Évolution de la compliance et de la fraction volumique avec la méthode BESO (Huang & Xie, 2009) .....	41
Figure 13: Méthode de champ de phase : (a) problème initiale, (b) forme initiale, forme optimale pour (c) $\Phi = 0.1$ et (d) $\Phi = 0.9$ (Takezawa et al., 2010).....	42
Figure 14: Solution avec ou sans damier : a) problème de conception, b) effet damier, c) solution avec 600 éléments et d) solution avec 5400 éléments (Sigmund & Petersson, 1998) .....	44
Figure 15: La conception optimisée obtenue avec une variante du code en 99 lignes (Sigmund, 2001) .....	48
Figure 16: la conception optimisée obtenue avec une variante du code en 88 lignes (Andreassen et al., 2011).....	49
Figure 17: L'exemple de poutre en porte-à-faux illustré avec code Top3D125(Ferrari & Sigmund, 2020) .....	49
Figure 18 : Domaine de la structure $\Omega$ .....	51
Figure 19 : Analogie entre la méthode numérique et la méthode classique .....	67
Figure 20 : Méthodologie globale d'optimisation .....	75
Figure 21 : Structure du code d'optimisation.....	76
Figure 22 : Rayon de filtrage.....	78
Figure 23 : Algorithme 1 calcul de densité physique .....	79
Figure 24 : Algorithme calcule des déformations et de la compliance.....	80
Figure 25 : Algorithme de résolution du problème des valeurs propres .....	86
Figure 26 : Lissage de la structure optimisée : a) sans lissage et b) avec lissage (Nana et al., 2017) .....	88
Figure 27 : Extraction d'une isosurface (Koguchi & Kikuchi, 2006).....	89
Figure 28 : Les étapes proposées dans cette étude .....	90
Figure 29 : Algorithme d'optimisation .....	92
Figure 30 : Porte à faux avec $48 \times 24 \times 24$ éléments .....	94
Figure 31 : Les pièces optimisées avec Matlab et Abaqus .....	95

Figure 32 : Condition aux limites.....	96
Figure 33 : Optimisation sous Abaqus sans contrainte de flambage.....	96
Figure 34 : Optimisation avec le Modèle développé avec un filtre à densité simple. .....	97
Figure 35 : Optimisation avec le Modèle développé avec un filtre à densité Heaviside.....	98
Figure 36 : Création de zones passive.....	99
Figure 37 : Pièce optimisée avec zones passives.....	100
Figure 38 : Design de la passerelle à optimiser .....	101
Figure 39 : a : Condition aux limites imposées sur le longeron : Longeron optimisé sous Matlab, c : Longeron optimisé en fichier STL .....	102
Figure 40 : Évolution des fonctions objectives pendant l'optimisation.....	104
Figure 41 : Influence de quelques paramètres sur l'optimisation du longeron : a) fraction volumique 0.7, b) avec filtre Heaviside, c) avec 60 éléments sur l'axe z, d) rayon minimal de filtrage 1.2.....	105
Figure 42 : a : Modèle STL maillé, b : Modèle paramétrique CAO .....	106
Figure 43 : Maillage grossier 4cm (a : Analyse statique du longeron optimisé, b : analyse de flambage du longeron optimisé) .....	108
Figure 44 : Maillage moyen 2cm (a : Analyse statique du longeron optimisé, b : analyse de flambage du longeron optimisé) .....	109
Figure 45 Maillage fin (a : Analyse de flambage avec taille 1cm, b : Analyse de flambage avec taille 0.5cm) .....	110
Figure 46 : Étude du comportement en flambage de la structure initiale a : Analyse statique du longeron optimisé, b : analyse de flambage du longeron optimisé) .....	111
Figure 47 : Passerelle optimisée par la méthode topologique .....	115
Figure 48 : Optimisation de la plateforme .....	116
Figure 49 : Plateforme optimisée .....	116
Figure 50 : Vue en coupe de la plateforme optimisée.....	117
Figure 51 : a : $v_{frac}=0.5$ (60 × 30 × 10 éléments) b : $v_{frac}=0.7$ (60 × 30 × 10 éléments) c : $v_{frac}=0.7$ (120 × 60 × 10 éléments) .....	118
Figure 52 : Influence du rayon minimal .....	119
Figure 53 : Influence du maillage en fonction du rayon de filtrage .....	119
Figure 54 : Influence de $penal_k$ .....	120
Figure 55 : Influence de $penal_G$ .....	121
Figure 56 : essais expérimentaux pour la validation .....	125

## LISTE DES NOTATIONS

$g$  : accélération gravitationnelle  
 $\delta$  : flèche maximale sous le poids propre  
 $q$  : la pression de référence  
 $C_e$  : coefficient d'exposition  
 $C_g$  : coefficient de rafale  
 $C_h$  : coefficient de trainée horizontale  
 $C_v$  : coefficient de trainée verticale  
 $G_o$  : la force statique (poids du piéton pour la composante verticale)  
 $G_1$  : l'amplitude de la première harmonique  
 $G_i$  : l'amplitude du  $i$ -ème harmonique  
 $f_m$  : la fréquence de la marche  
 $\varphi_i$  : le déphasage du  $i$ -ème harmonique par rapport au premier  
 $m$  : coefficient de voilement  
 $b$  : largeur de l'élément  
 $t$  : épaisseur de l'élément  
 $\lambda_e$  : élancement produisant le flambage élastique  
 $\lambda_l$  : le multiplicateur de Lagrange  
 $\bar{\lambda}_a$  : élancement normalisé  
 $E$  : module d'élasticité  
 $\bar{\lambda}$  : élancement normalisé  
 $\phi_c$  : coefficient de tenue pour la compression  
 $A$  : aire transversale brute  
 $\bar{F}$  : contrainte de flambage normalisée  
 $F_0$  : contrainte limite  
 $c$  : désigne la compliance structurelle  
 $\bar{K}$  : représente la matrice de rigidité globale  
 $\bar{U}$  : est le vecteur déplacement structurel global  
 $\xi$  : est une variable paramétrique indépendante  
 $n_p$  : est le nombre de points de contrôle  
 $N_{i,p}$  : est le  $p$  fonction de base polynomiale du  $i$ ème degré associé au  $i$ ème point de contrôle.  
 $U$  : de déplacement nodal  
 $F$  : vecteurs de force  
 $v_f$  : fraction volumique  
 $E_k$  : est la rigidité  
 $E_G$  : la contrainte  
 $E_o$  : module de Young du matériau solide  
 $\Gamma$  : la frontière du domaine.  
 $\Sigma$  : une classe de valeurs admissibles sur laquelle s'effectue l'optimisation  
 $\Omega_i$  : le volume occupé par l'élément  $i$   
 $Q_i$  : la matrice d'interpolation  
 $u_i$  : le vecteur des degrés de liberté nodale de l'élément  
 $\delta$  : est l'opérateur de Dirac.

$F_y$  : limite d'élasticité

$F_u$  : résistance à la rupture

$Z$  : module de section plastique

$Z_n$  : module de section plastique en tension

$S$  : module de section élastique

$S_n$  : module de section élastique en tension

$S_m$  : module de section efficace

$W_\sigma^i$  : travail associé à un élément  $i$

$[ ]$  : est l'opérateur d'assemblage par blocs

$\eta$  : seuil

$\beta$  : facteur de netteté.

$\nu$  : représente le coefficient de Poisson

$\odot$  : représente la multiplication élément par élément

## REMERCIEMENTS

Aux termes de ce parcours, je rends gloire au tout puissant, source de toute connaissance. Je tiens à remercier chaleureusement et exprimer toute ma gratitude à mes directeurs de mémoire Mme Kadiata Ba, ing. Ph. D. (UQAC) et M. Sasan Sattarpanah Karganroudi, ing. Ph. D. (UQTR). Merci pour votre temps, votre énergie accordée tout au long de ce projet ainsi que les conseils et les guides pour mes projets. Que vous pussiez trouver ici, un signe de mon respect et ma grande considération pour vous.

Mes sincères gratitudes à MITAC'S et ALUQUÉBEC pour cette opportunité grandissime.

J'exprime mes plus vifs remerciements à tout le personnel du CURAL et de l'UQAC.

Ma considération et mes remerciements aux membres du jury pour leur présence et attention accordée à mon modeste travail.

De loin, j'adresse mes gracieux remerciements à ma famille, pour leur amour et leur encouragement. Ma profonde gratitude à ma mère, les mots ne suffissent pas. Un grand merci à tous mes collègues et amis pour tout le soutien durant ce mémoire.

## **CHAPITRE 1.**

### **INTRODUCTION ET PROBLÉMATIQUE**

#### **1.1.INTRODUCTION GÉNÉRALE :**

Depuis les années 1960, le calcul de structures par éléments finis ne cesse de se développer, malgré sa complexité liée aux équations mathématiques, mécaniques et d'analyse numérique qui le composent. Grâce à l'évolution de la conception assistée par ordinateur et des programmes de calcul par élément fini, il est possible d'utiliser des outils d'optimisation et en particulier l'optimisation topologique (Bruyneel et al., 2014).

La recherche de conception optimale dans le domaine du génie civil était au centre des réflexions des ingénieurs, notamment l'utilisation de matériaux non conventionnels dans la conception des ponts ou des passerelles. L'alliage d'aluminium présente beaucoup d'avantages, notamment sa résistance, son poids léger, et ses propriétés non corrosives ainsi que sa facilité de fabrication et d'extrusion, ce qui en fait un matériau à envisager pour les applications dans le domaine des ponts.

La figure 1 présente une passerelle piétonnière en aluminium conçu par la méthode traditionnelle par ALUQUEBEC composé de deux longerons et six traverses.

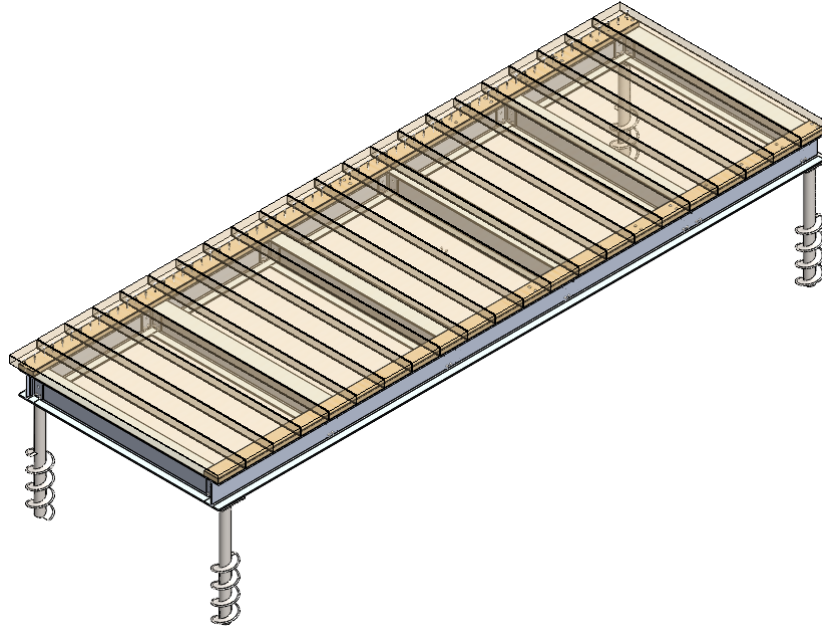


Figure 1 : Passerelle piétonnière en aluminium

Lors de la conception de structures civiles, il est essentiel de prendre en compte non seulement la résistance structurelle, mais aussi les normes de conception et de sécurité, telles que la norme CSA S6:19 pour les ponts et passerelles. Ces normes garantissent le respect de critères stricts en matière de durabilité, de sécurité et de performance sous diverses conditions de chargement (Denis Beaulieu.,2023). Cependant, leur application conduit souvent à des structures surdimensionnées ainsi les méthodes classiques utilisées pour la conception de la passerelle (figure 1) présentent des limites au niveau de la recherche d'une section optimale. De plus, il est important de prendre en compte les contraintes de rigidité lors de l'optimisation afin que la structure optimisée résiste aux charges initialement appliquées. Une autre contrainte importante à prendre en compte lors de l'optimisation des structures en alliage d'aluminium est

la contrainte de flambage. Ces structures sont sujettes à des instabilités pouvant facilement provoquer du voilement ou du déversement.

## **1.2. PROBLÉMATIQUE :**

Toutefois, l'optimisation topologique des structures mécaniques serait une solution face à ces limites présentées par la méthode classique. Elle consiste à avoir la meilleure solution de conception optimale en utilisant des critères liés à la performance structurale. Le flambage est une instabilité caractérisée par l'augmentation de déformations provoquée par des charges de compression. Pendant, l'optimisation topologique, prendre en compte les contraintes de flambage est très complexe. Les études sur l'optimisation topologique en prenant compte l'instabilité due au flambage sont restées limitées en raison de sa complexité numérique liée à la résolution des problèmes aux valeurs propres (COOK et al., 1988). Un autre défi est le choix de la méthode et des outils adaptés afin de résoudre de manière efficace le problème d'optimisation. Il a été constaté que ce sujet reste toujours d'actualité, car il y a un manque de logiciels capables d'optimiser la topologie des structures, tout en respectant les critères de flambage (F.Ferreira & L. Simoes.,2019). Dans ce contexte, ce travail propose un algorithme d'optimisation topologique qui permet d'optimiser la topologie d'une structure 3D avec la méthode SIMP tout en prenant en compte le critère de flambage. D'où la pertinence et l'originalité de ce travail.

### **1.3. OBJECTIFS**

L'objectif général de ce mémoire est de développer un processus d'optimisation topologique des structures en 3D en tenant compte du flambage.

Pour atteindre cet objectif, les sous-objectifs suivants sont définis :

1. Analyser les spécifications et les exigences de la conception des passerelles en aluminium.
2. Étudier différentes approches d'optimisation topologique intégrant le flambage.
3. Développer un algorithme d'optimisation topologique tenant compte des critères de flambage.
4. Réaliser des simulations numériques pour évaluer les performances des structures optimisées et comparer les résultats obtenus à ceux de la passerelle existante.

### **1.4. STRUCTURE DU RAPPORT :**

Pour répondre à la problématique précédente et atteindre les objectifs, une méthodologie scientifique a été élaborée en se basant sur les travaux de recherche traitant la résolution des problèmes d'optimisation topologique et géométrique (Figure 2).

Ce rapport est structuré comme suit : le chapitre 1 présente l'introduction, la problématique, les objectifs et la structure du rapport. Le deuxième chapitre présente la revue de littérature sur les passerelles en aluminium, les problèmes d'optimisation topologique en décrivant les fonctions objectives, la méthode SIMP, la méthode de calcul de la densité physique et l'analyse de sensibilité seront bien

détaillés et les méthodes d'analyse par élément fini pour résoudre le problème de flambage en optimisation topologique. Dans le chapitre 3, la méthodologie adoptée dans le cadre de ce travail de recherche est décrite. Les résultats et discussions sont présentés dans le chapitre 4. Enfin, les conclusions et les perspectives sont présentées dans le chapitre 5.

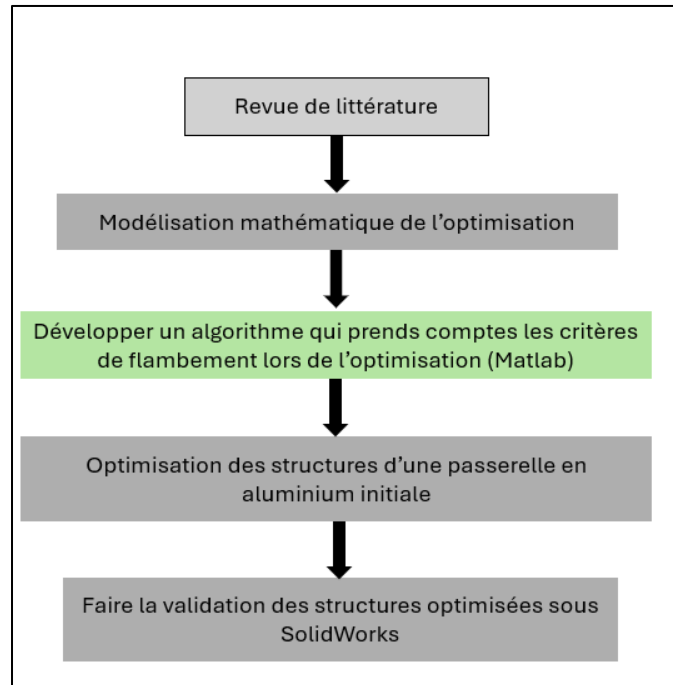


Figure 2: Méthodologie de résolution de la problématique

## **CHAPITRE 2.**

### **REVUE DE LA LITTÉRATURE**

Dans ce projet de recherche, l'étude se porte sur trois grands champs de recherche : Les structures civiles, l'optimisation topologique et l'intégration de la résolution des problèmes de flambage lors de l'optimisation. Ce chapitre représente un résumé de l'état d'art de ces trois champs de recherche conformément au sous-objectif 1. La section 2.1 présente une étude bibliographique sur la conception de la passerelle en respectant les différentes normes de conception. La section 2.2 présente les différentes méthodes d'optimisation et les études récentes sur les approches d'optimisation topologique. Enfin, la section 2.3 présente une revue sur l'analyse de flambage et les méthodes de résolution d'un problème d'optimisation topologique intégrant le flambage.

#### **2.1. RÉSISTANCES DES STRUCTURES PASSERELLES ET PONTS**

Dans cette partie, la résistance des structures plus particulièrement celle des passerelles et des ponts est étudiée. La conception de ces ouvrages doit répondre aux exigences techniques, esthétiques et environnementales. Ainsi qu'une bonne maîtrise des propriétés des matériaux et des contraintes spécifiques liées aux charges qu'ils doivent supporter. Dans cette section, nous étudierons les différents types de passerelles et les approches de conception qui permettent d'optimiser leur performance. Ensuite les principales propriétés des alliages d'aluminium et leurs avantages dans la conception des passerelles seront présentés.

## **2.1.1. PASSERELLES ET ALLIAGE D'ALUMINIUM**

### **2.1.1.1. GÉNÉRALITÉ SUR LES PASSERELLES**

Pour concevoir une passerelle, il faut tenir compte des aspects économiques et de résistance, mais aussi des normes de sécurité, des facteurs environnementaux et du confort des usagers. Ainsi, il doit avoir un équilibre entre le coût du matériau et le coût de la fabrication.

Les charges appliquées sur des passerelles mènent parfois à la réalisation de structures complexes. La conception d'une passerelle prend compte en le contexte du paysage, les matériaux et leurs modes d'assemblage. Le concepteur doit prendre en compte tous les facteurs pertinents tels que les vents dominants élevés, la hauteur de la structure et la densité et le profil d'utilisation prévue. Selon Parke et Hewson (2008), une largeur minimale normale pour un pont réservé à la circulation piétonnière est de 2 m. Cela permet un flux maximal de 20 personnes par minute pour une largeur de 300 mm dans le cas des ponts. Un débit maximal de 75 piétons par minute et par mètre de largeur peut être utilisé pour estimer la capacité.

Les charges utiles appliquées sur une passerelle dépendent de l'utilisation. Par conséquent, si les cyclistes doivent partager le pont avec les piétons, des critères de conception différents s'appliqueront. La figure 3 ci-dessous présente la charge d'exploitation piétonne en  $\text{kN/m}^2$  en fonction de la portée. Les forces dues à l'air en mouvement sont traditionnellement exprimées sous forme de pressions statiques et les normes donnent des charges réglementaires pour le dimensionnement en fonction de l'emplacement et de la forme de la passerelle.

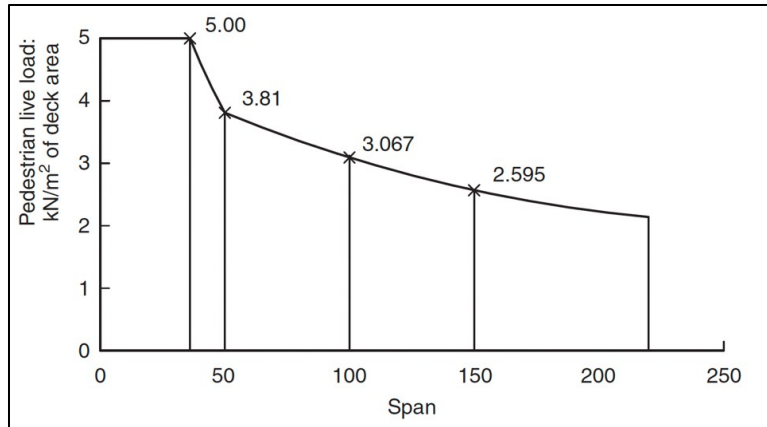


Figure 3: La clause 7.7.1 de la norme BS 5400-2, 2006, permet des réductions de la charge globale pour des portées supérieures à 36 m. (Parke & Hewson, 2008)<sup>1</sup>

### 2.1.1.2. LES DIFFÉRENTS TYPES DE PASSERELLES (PONTS)

Les passerelles piétonnières sont classées selon plusieurs critères (solllicitations et conditions environnementales). Les ponts en poutres et porte à faux doivent avoir une traverse droite qui résiste aux charges gravitationnelles et charges latérales dues aux vents pour résister au flambage latéral (Parke & Hewson, 2008). Les passerelles à structures en treillis (figure 4) sont légères, faciles à transporter et à assembler sur le site. Ces structures peuvent supporter des charges verticales et latérales avec très peu d'utilisation de matériaux. Les membrures interagissent pour se soutenir mutuellement afin d'éviter le flambage local et la géométrie globale peut être ajustée pour résister à l'instabilité globale.

<sup>1</sup> Copyright Clearance Center lisenze (License n° 1680831-1)



Figure 4 : Passerelle en treillis (Structurea,2026)

Les passerelles en arches (figure 5) agissent en dirigeant une ligne de compression à l'intérieur de leur section transversale pour utiliser efficacement leur matériau constitutif, Il y aura des ajouts de structure lourds pour éliminer ces forces et les torsions supplémentaires qui surviennent avec des charges vivantes inégales (Parke & Hewson, 2008).



Figure 5 : Passerelle en arche (Flickr,2026)

Les passerelles sous forme de ponts à haubans (figure 6) sont soutenues directement à partir de tirants fixés aux pylônes. Ce sont des systèmes structuraux simples et faciles à construire. Les passerelles piétonnes nécessitent parfois un garde-corps, par exemple lorsqu'elles relient des bâtiments en hauteur, dans des situations urbaines ou lorsque des passerelles nécessitent une enceinte pour des raisons de sécurité ou de vandalisme, ou sur des sites exposés aux intempéries.



Figure 6 : Passerelle à hauban (Pixno,2026)

### **2.1.2. LES ALLIAGES D'ALUMINIUM**

L'aluminium est le premier métal non ferreux le plus utilisé en termes de production. Les propriétés mécaniques et la faible densité de l'aluminium lui confèrent une place de choix dans des industries comme l'aéronautique et l'automobile (Technique d'ingénieur, 2024). L'aluminium est un métal très léger dont la densité spécifique est de  $2,7 \text{ g/cm}^3$ , soit environ un tiers de celle de l'acier ( $7-8 \text{ g/cm}^3$ ) ou du cuivre ( $8,96 \text{ g/cm}^3$ ). L'aluminium possède une couche d'oxyde qui le protège de la corrosion et il est un excellent conducteur de la chaleur et de

l'électricité. L'aluminium peut être facilement travaillé à basse température et déformé sans se rompre, ce qui permet de lui donner des formes très variées (Aluminium France, 2024).

Les principales propriétés de l'aluminium sont (ALMET, 2024) :

- ❖ Bon conducteur de la chaleur et de l'électricité
- ❖ Faible masse volumique : 2,7 kg/dm<sup>3</sup>
- ❖ Point de fusion : 658 °C
- ❖ Faible module d'Young : 70 000 N/mm<sup>2</sup> (ou 70 000 MPa).
- ❖ Faible limite élastique
- ❖ Fort allongement à la rupture (tôles minces, feuilles, papier)
- ❖ Bonne conductibilité (67 % de celle du cuivre).

#### **2.1.2.1. DÉSIGNATION DES ÉTATS MÉTALLURGIQUES**

Les pièces en alliages d'aluminium obtenues par déformation sont classées selon différents états métallurgiques, classifiés par lettres (ALMET, n.d) :

F : brute de transformation, elle s'applique à une pièce après sa transformation (laminage, forgeage, filage, etc...).

O : Recuit, apte à l'emboutissage.

H : écroui, cet état ne s'applique qu'aux alliages à durcissement par écrouissage.

T : trempé, il ne s'applique qu'aux alliages à durcissement par traitement thermique.

### **2.1.2.2. LES DIFFÉRENTES SÉRIES DES ALLIAGES D'ALUMINIUM**

Les alliages d'aluminium sont divisés en deux catégories, les alliages de fonderie et les alliages de corroyage (Lévesque & Tremblay, 2010; Mazzolani, 2004). Les alliages d'aluminium sont constitués majoritairement d'aluminium (~95%) et de quelques alliages secondaires à faible proportion. Les alliages d'aluminium série 1000 ont un pourcentage d'aluminium de 98.8 à 99% et sont utilisés dans les structures peu sollicitées sous forme de plaque. Les séries 2000 sont des alliages d'aluminium qui sont composés de cuivre. Après des traitements thermiques, leur limite d'élastique peut atteindre 300 MPa avec un allongement à la rupture d'environ 10%. Les alliages d'aluminium de la série 3000 sont composés du manganèse tandis que ceux de la série 4000 sont composés du silicium. Ils ont une résistance légèrement supérieure à celle de série 1000, mais ne peuvent pas être traités thermiquement. Les séries 5000 sont composées du magnésium. Ils ont une résistance supérieure à ceux des séries 1000 ; 3000 et 4000. La limite élastique peut atteindre 200 MPa avec un allongement à la rupture de 10% lorsqu'ils sont travaillés à froid. Ces alliages sont souvent utilisés dans les structures soudées, car leur résistance n'est pas réduite dans la zone affectée par la chaleur. Les alliages de la série 6000 sont composés du silicium et du magnésium et sont adaptés à l'extrusion et au soudage avec une bonne résistance à la corrosion. Avec un traitement thermique approprié, il est possible que leur limite élastique puisse atteindre 250 MPa avec une ductilité allant jusqu'à 12%. Les alliages de la série 7000 sont composés du zinc. Ils sont produits sous forme de profilés extrudés et laminés traités thermiquement. Enfin les séries 8000 sont

composées du fer et du silicium. Ils sont principalement utilisés comme matériau pour l'emballage.

Un grand nombre d'alliages d'aluminium peuvent être choisis pour la construction des passerelles et des tabliers de pont, les plus recommandés et actuellement utilisés en raison de leur résistance à la corrosion et de leur facilité de fabrication sont les séries 5000 et 6000. En général, les alliages de la série 5000 sont utilisés pour les composants en plaque, et les alliages de la série 6000 sont utilisés pour les formes extrudées. L'alliage 6063 est apprécié pour la conception des sections complexes et/ou creuses.

### **2.1.3. UTILISATION DE L'ALUMINIUM DANS LA CONCEPTION DES PONTS ET PASSERELLES**

Les structures en aluminium offrent un rapport résistance-poids élevé et sont résistantes à la corrosion. Par conséquent, leur utilisation dans la construction de ponts a récemment commencé à augmenter, notamment pour les ponts piétonniers. En raison de leur poids faible par rapport à d'autres structures, ils ont des fréquences en dehors de la plage des fréquences de la marche des piétons, ce qui permet d'éviter la résonance (Dey et al., 2016).

Les applications de l'aluminium dans les ponts remontent à 1933 (Saleem et al., 2012) lorsque le système de planchers en bois et en acier du pont de la rue Smithfield à Pittsburgh, en Pennsylvanie, a été remplacé par un tablier en aluminium pour augmenter la capacité de charge.

L'aluminium a également un rapport résistance-poids plus élevé que le béton, de sorte qu'un tablier en aluminium pèse seulement 20% du poids d'un tablier en béton (Siwowski, 2006).

La figure 7 représente le premier pont entièrement en aluminium qui a été construit en 1950 sur la rivière Saguenay à Arvida, au Canada. La portée principale du pont est une arche de 88,4 m de long et 14,5 m de hauteur. De chaque côté de la portée principale se trouvent plusieurs portées d'approche de 6,1 m de long. Le tablier en béton armé a été placé sur la structure en treillis en aluminium, qui comprend des longerons et des traverses. Tous les supports sont fabriqués en alliage d'aluminium. La longueur totale du pont est de 153 m et sa largeur est de 9,75 m. À l'heure actuelle, c'est le plus long pont en aluminium au monde. Le poids

de toute la structure, fabriquée en alliage d'aluminium 2014-T6, est de 150 tonnes (Association de l'aluminium du Canada, 2012).



Figure 7: Le pont sur la rivière Saguenay à Arvida au Canada (Ministère de la Culture et des Communications, 2005)

Dans les années 1958- 1968, les recherches pour la construction des ponts en alliage d'aluminium se sont multipliées aux USA. Bien que le coût de l'aluminium soit plus élevé que celui de l'acier, on estimait que cela pouvait être partiellement compensé par des coûts de fabrication, de transport, d'assemblage et de maintenance plus bas. Dans l'ensemble, l'aluminium est une solution durable pour les infrastructures de pont, notamment pour celles situées dans des environnements froids et corrosifs nécessitant un entretien fréquent. (Subodh & Gilbert Kaufman, 2007)

#### **2.1.4. DYNAMIQUE DES STRUCTURES ET DES PASSERELLES**

L'étude du comportement dynamique des passerelles piétonnières repose sur la théorie de la dynamique des structures. La dynamique des structures décrit le comportement d'une structure soumise à une charge externe  $p(t)$ , telle que la marche des piétons, qui est fonction du temps. Comme les conceptions de ponts

ont tendance à devenir de plus en plus légères, les effets du vent sur les composant (tablier, pile et pylône) sont devenus très important et difficiles à évaluer. De plus, en général, la réponse au buffeting (secousse) peut produire des déformations supplémentaires allant jusqu'à 50% des déplacements statiques prédits.

Les charges dynamiques sont fonction du temps et sont classées dans quatre classes (Sétra, 2006) :

- Les charges harmoniques ou purement sinusoïdales ;
- Les charges périodiques qui se répètent à l'identique à des intervalles réguliers de temps appelés périodes.
- Les charges aléatoires qui varient de façon arbitraire à la fois en durée, en intensité, en direction... ;
- Les charges d'impulsion qui caractérisent les charges de très brèves durées.

Cette charge dynamique, ainsi que les distributions de la masse, de la rigidité et de l'amortissement de la structure, doivent être connues afin de calculer la réponse dynamique de la structure à l'aide de l'équation du mouvement (LEMAY, 2012) :

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t) \quad (2.1)$$

où  $m$  est la masse (Kg),  $c$  la constante d'amortissement (N.s/m) et  $k$ (N/m) est la rigidité du système dynamique alors que  $u(t)$  est le déplacement,  $\dot{u}(t)$  est la vitesse et  $\ddot{u}(t)$  est l'accélération de la structure et  $p(t)$  est une charge externe.

La fréquence propre :

$$\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.2)$$

où  $\omega$  est la fréquence angulaire propre(rad/s) et  $f$  la fréquence propre (Hz).

Le taux d'amortissement :

$$\xi = \frac{c}{2m\omega} = \frac{c}{2\sqrt{km}} \quad (2.3)$$

La première fréquence ou fréquence naturelle de vibration pour les poutres simples ou en treillis peut se calculer avec la formule suivante :

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\delta}} = \frac{K_{f1}}{\sqrt{\delta}} \quad (2.4)$$

où  $g$  : accélération gravitationnelle (m/s<sup>2</sup>)

$\delta$  : flèche maximale sous le poids propre(m)

$K_{f1}$  : Coefficient simplifié pour une poutre simplement appuyée à ses extrémités (s<sup>-1</sup> · √m).

Selon la norme CSA-S6 :19, la conception de l'ossature doit tenir compte simultanément des forces de trainées verticales et horizontales dues au vent.

Charge horizontale :

$$F_h = qC_e C_g C_h \quad (2.5)$$

où  $q$  : la pression de référence

$C_e$  : coefficient d'exposition =1

$C_g$  : coefficient de rafale=2.5

$C_h$  : coefficient de trainée horizontale=2

Charge verticale :

$$F_v = qC_e C_g C_v \quad (2.6)$$

$C_v$  : coefficient de trainée verticale=1

Cependant, l'étude dynamique des passerelles n'est prise en compte dans cette étude. Ce travail de recherche se limite une analyse statique intégrant le comportement au flambage dans la résolution d'un problème d'optimisation topologique.

### **2.1.5. CHARGE DU PIÉTON**

L'analyse du mouvement des piétons, que ce soit en marchant ou en courant, a été étudiée par Sétra (2006). La charge des piétons est une force ponctuelle exercée sur la surface de support. Elle dépend du temps et de la position du piéton. En désignant par  $x$  la position du piéton par rapport à l'axe de déplacement sur la passerelle, l'action d'un piéton se déplaçant à une vitesse constante  $v$  peut être modélisée par le produit de deux composantes : une composante temporelle  $F(t)$  et une composante spatiale  $\delta(x - vt)$ , où  $\delta$  est l'opérateur de Dirac. Ainsi, l'expression de cette action est la suivante (Sétra, 2006) :

$$P(x, t) = F(t)\delta(x - vt) \quad (2.7)$$

Généralement, une personne marche avec une fréquence moyenne de 2Hz soit 2 pas par seconde. Par contre, des études plus récentes ont montré que la fréquence moyenne était plus basse, vers 1,8 Hz - 1,9 Hz.

Les passerelles sont dans la pratique soumises à l'action simultanée de plusieurs personnes, ce qui complique fortement leur analyse dynamique. En effet, chaque piéton possède ses propres caractéristiques (poids, fréquence, vitesse...) et, selon le nombre de personnes présentes sur l'ouvrage, les piétons vont engendrer

des actions plus ou moins synchrones entre elles d'une part et éventuellement avec la passerelle d'autre part.

Lorsque des piétons indépendants, c'est-à-dire sans synchronisation particulière, se présentant de manière aléatoire sur une passerelle avec un taux d'arrivée  $\lambda_a$  (en personne/seconde), la réponse dynamique moyenne en un point de la passerelle soumise à ce flot de piétons est obtenue en multipliant l'effet produit par un piéton par un facteur (Sétra, 2006) :

$$K = \sqrt{\lambda_a T} \quad (2.8)$$

T étant le temps mis par un piéton pour traverser la passerelle (qui peut aussi être exprimé par  $T = L/v$  où L est la longueur de la passerelle et v la vitesse du piéton).

#### **2.1.6. RÉSISTANCE DES STRUCTURES DE LA PASSERELLE**

La norme CSA S6 :19 nous permet de calculer la résistance mécanique des éléments en aluminium. Le dimensionnement des éléments structuraux de la passerelle doit leur permettre de résister aux charges générées par les piétons, la neige, le verglas et le vent. Les charges sont augmentées afin de tenir compte de leur variabilité. On obtient une charge pondérée en multipliant par un coefficient de pondération  $\alpha$  dont les valeurs sont définies dans la norme CSA-S6 :19.

Le tableau 1 présente les différents types de charges à considérer pour la conception des passerelles avec le coefficient de pondération.

Tableau 1: Types de charge et coefficient de pondération d'après Lévesque et Tremblay (2010)

Types de charge	Symboles	Coefficients $\alpha$
Permanente : résultant du poids des éléments de la charpente et des éléments non structuraux.	D	$\alpha_D$
Surcharge : Provenant de l'usage prévu, les piétons, la neige	L	$\alpha_L$
Dynamique : vent	W	$\alpha_W$
Verglas : Charge pour pont et passerelle	A	$\alpha_A$

Afin d'assurer la sécurité contre la rupture, on sous-estime la résistance des éléments structuraux en la pondérant au moyen d'un coefficient de tenue  $\varphi$ . Il tient compte de la variabilité de la résistance du matériau de charpente résumé dans le tableau 2 :

Tableau 2: Coefficient de tenue de la norme S157-05 d'après (Lévesque & Tremblay, 2010)

Traction, compression et cisaillement dans les poutres : à la limite élastique	$\varphi_y = 0.9$
Compression dans les poteaux : en effondrement dû au flambage	$\varphi_c = 0.9$
Traction et cisaillement dans les poutres : à l'état ultime.	$\varphi_u = 0.75$
Traction sur une section nette, contrainte de compression d'assemblage, arrachement : à l'état ultime.	$\varphi_u = 0.75$
Traction et compression sur les soudures bout à bout : à l'état ultime	$\varphi_u = 0.75$
Contrainte de cisaillement sur les soudures d'angles : à l'état ultime	$\varphi_f = 0.67$
Traction et contrainte de cisaillement sur les organes d'assemblage : à l'état ultime.	$\varphi_f = 0.67$

La condition de vérification des états limites ultimes est :

$$\varphi R \geq S_f \quad (2.9)$$

Avec  $R$  la résistance pondérée des éléments structuraux et  $S_f$  la sollicitation ou l'effort dont l'indice  $f$  signifie qu'elle a été calculée avec les charges pondérées.

### 2.1.6.1. LES ÉLÉMENTS EN COMPRESSION

Les éléments en compression sont dimensionnés de façon que la résistance pondérée à la compression  $C_r$  de la pièce soit égale ou supérieure à la force de compression pondérée  $C_f$  appliquée sur l'élément (Beaulieu, 2023) :

$$C_r \geq C_f \quad (2.10)$$

La résistance en compression d'un élément est directement proportionnelle à l'aire brute de la section mesurée perpendiculairement à l'axe de la force de compression et à la limite élastique de l'alliage d'aluminium.

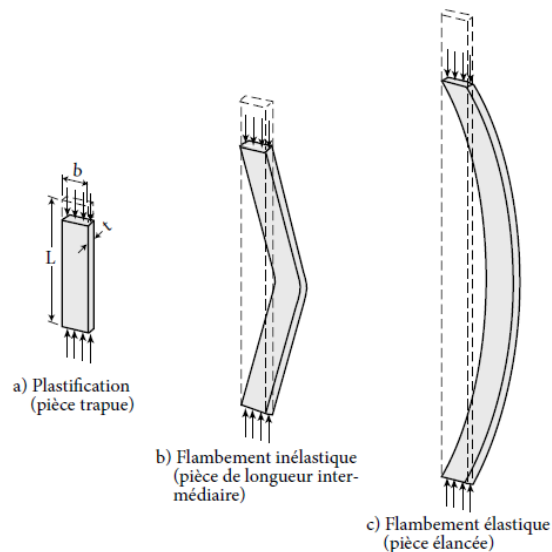


Figure 8 : Flambage des structures en compression (Beaulieu, 2023)

La résistance maximale de la pièce est atteinte lorsqu'il y a plastification du métal sur toute la surface. En pratique, ceci est rare, car sous l'effort de compression, l'élément subira un déplacement latéral appelé flambage. En plus de l'effort de compression, l'élément sera soumis à un effort de flexion (flambage en flexion) ou un effort de torsion (flambage en torsion) ou à un effort de torsion et de flexion (flambage en flexion et en torsion combiné). Le flambage en flexion est le plus courant pour les sections dites symétriques et pour les sections non symétriques c'est le flambage en torsion.

Flambage des éléments plats est calculé selon la procédure suivante (Beaulieu, 2023) :

$$\lambda_a = mb/t \quad (2.11)$$

Où m : coefficient de voilement

b : largeur de l'élément

t : épaisseur de l'élément

$\lambda_a$ : élancement

m=1.65 pour un élément en compression et 0,65 pour un élément en flexion.

La contrainte maximale de flambage élastique  $F_e$  est la contrainte maximale que peut supporter un élément en compression avant que le flambage ne se produise sans qu'il n'y ait plastification de la section.

$$F_e = \frac{\pi^2 E}{\lambda_e^2} \quad (2.12)$$

$\lambda_e$  : élancement produisant le flambage élastique

E : module d'élasticité de l'aluminium

La contrainte de flambage normalisée pour un élément plat s'écrit par :

$$\bar{F} = \beta - \sqrt{\beta^2 - \frac{1}{\bar{\lambda}_a^2}} \quad (2.13)$$

$$\beta = \frac{1 + \alpha(\bar{\lambda}_a^2 - \bar{\lambda}_o) + \bar{\lambda}_a^2}{2\bar{\lambda}_a^2} \quad (2.14)$$

$\alpha$  : 0.2 pour les poteaux, les poutres et les parois traitées thermiquement et 0.4 pour les poteaux et les poutres et les parois non traitées thermiquement.

$\bar{\lambda}_a$  : élancement normalisé

$\bar{\lambda}_o$  : 0.3 pour les poteaux et les poutres, 0.5 pour les plaques.

La contrainte flambage  $F_c$  est obtenue en multipliant la contrainte de flambage normalisée par la limite élastique.

$$F_c = \bar{F}F_y \quad (2.15)$$

Dans le cas d'un élément plat supporté sur deux rives longitudinales, après avoir atteint la contrainte de flambage, elle peut toujours résister à une charge supplémentaire (surplus de résistance), appelée résistance post voilement. Ainsi la contrainte de flambage est :

$$F_c = \sqrt{\bar{F}}F_y \quad (2.16)$$

Pour le flambage en flexion, l'élancement est :

$$\lambda_a = \frac{KL}{r} \quad (2.17)$$

Où K : coefficient de longueur effective

L : longueur libre de la pièce

r : rayon de giration de la section brute selon l'axe de flexion considéré.

Pour le flambage en torsion, l'élancement est :

$$\lambda_a = 5 \sqrt{\frac{I_p}{J}} \quad (2.18)$$

Où  $I_p$  : moment d'inertie polaire par rapport au centre de cisaillement

$J$  : constante de torsion de St-Venant

Pour le flambage en torsion et en flexion combinés, l'élanement est :

$$\lambda_a = \lambda_{a1} \sqrt{1 + \left(\frac{x_0}{r_0}\right) \left(\frac{\lambda_{a1}}{\lambda_{a2}}\right)^2} \quad (2.19)$$

$\lambda_{a1}$  et  $\lambda_{a2}$  : élanement relatif aux deux modes de flambage

$x_0$  : Distance entre le centre de gravité et le centre de cisaillement

$r_0$  : rayon de giration polaire par rapport au centre de cisaillement.

La résistance en compression pondérée d'un aluminium sera calculée de la façon suivante :

$$C_r = \phi_c A \bar{F} F_0 \quad (2.20)$$

Où  $\phi_c$  : coefficient de tenue pour la compression

$A$  : aire transversale brute

$\bar{F}$  : contrainte de flambage normalisée

$F_0$  : contrainte limite

### 2.1.6.2. ÉLÉMENT EN FLEXION

Contrairement aux éléments en traction et en compression qui supportent des charges axiales, les éléments en flexion doivent dans la plupart des cas supporter des charges dans le plan perpendiculaire à l'axe de l'élément (figure9).

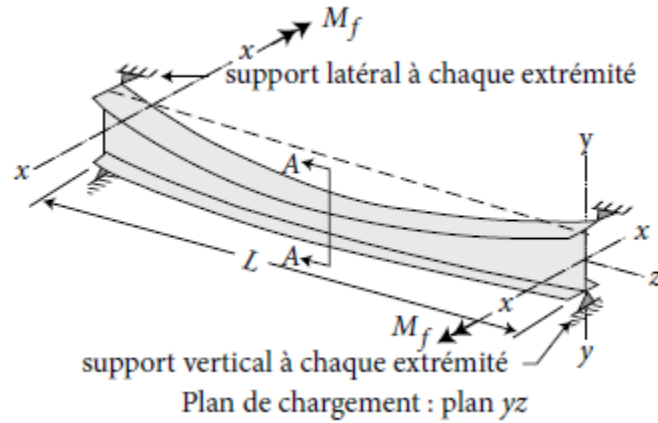


Figure 9 : Déversement d'une structure en flexion (Beaulieu, 2023)

Afin de simplifier les calculs des éléments en flexion, la norme CSA -S6 :19 a retenu l'approche de classifier les sections en fonction de leur degré de compacité (tableau 3) qui est évalué en fonction de l'élancement de la semelle défini comme le rapport de la longueur de l'élément  $b$  sur son épaisseur  $t$ .

Tableau 3: Classe des sections (; Lévesque & Tremblay, 2010)

Classe	Description	Critère de compacité
Section de classe 1	Peuvent supporter une contrainte plastique en compression sans subir de voilement. Elles doivent être symétriques par rapport au plan de flexion et être retenues de façon rigide contre le déversement.	$\frac{b}{t} < \frac{250}{m\sqrt{F_y}}$
Section de classe 2	Peuvent supporter le moment de fléchissant jusqu'à l'amorce d'un fluage en compression sans subir de voilement	$\frac{b}{t} < \frac{420}{m\sqrt{F_y}}$
Section de classe 3	Subissent un voilement de la semelle en compression à un niveau inférieur à la limite d'élasticité avec ou sans réserve en post-voilement.	$\frac{b}{t} \geq \frac{420}{m\sqrt{F_y}}$

Où  $b$  : largeur de l'élément susceptible de voiler  
 $t$  : épaisseur de l'élément susceptible de voiler  
 $m$  : coefficient de flambage local  
 $F_y$  : limite d'élasticité

Les équations de calcul permettant de déterminer la résistance en flexion  $M_r$  des éléments qui ne peuvent se déverser sont :

Tableau 4 : Résistance des sections à la flexion (Beaulieu, 2023)

Classe	Fibres en compression	Fibres en traction
Classe 1	$M_r = \phi_y Z F_y$	$M_r = \phi_u Z_n F_u$
Classe 2	$M_r = \phi_y S F_y$	$M_r = \phi_u S_n u$
Classe 3	$M_r = \phi_y S \bar{F} F_y$ ou $M_r = \phi_y S_m F_y$	

$F_y$  : limite d'élasticité

$F_u$  : résistance à la rupture

$Z$  : module de section plastique

$Z_n$  : module de section plastique en tension

$S$  : module de section élastique

$S_n$  : module de section élastique en tension

$\bar{F}$  : contrainte de flambage normalisée

$S_m$  : module de section efficace

Les éléments en flexion sont dimensionnés de façon que la résistance pondérée à la flexion  $M_r$  de la pièce soit égale ou supérieure au moment de flexion pondérée  $M_f$ .

$$M_r \geq M_f \quad (1.21)$$

## **2.2. ÉTAT DE L'ART DES MÉTHODES D'OPTIMISATION TOPOLOGIQUE ET DE FORME**

Les méthodes d'optimisation des structures se sont beaucoup développées ces dernières années, plus particulièrement l'optimisation topologique et géométrique. Cette section présente un état de l'art sur les approches d'optimisation topologique et géométrique. Dans la première partie, nous nous intéressons à l'étude de l'optimisation paramétrique de forme qui est une méthode permettant de rechercher la géométrie optimale tout en tenant compte des contraintes et sensibilités de forme. Ensuite nous étudierons l'optimisation topologique qui permet d'étudier la distribution optimale de la matière dans le domaine de conception en tenant compte des fonctions objectives et contraintes d'optimisation.

### **2.2.1. OPTIMISATION PARAMÉTRIQUE DE FORME**

L'optimisation de forme paramétrique est basée sur l'analyse des variables de conception afin de minimiser ou maximiser une fonction objective définie. C'est une extension naturelle de la conception assistée par ordinateur paramétrique (Chen et al., 2007). En optimisation de forme, les variables de conception sont associées à la définition des frontières intérieures ou extérieures de la structure (Bruyneel et al., 2014). Les méthodes d'optimisation de forme facilitent la recherche de la géométrie optimale d'une pièce tout en offrant au concepteur un large éventail de choix de formes (Nana et al., 2017).

Dans le cas de structures de type continu qui sont modélisées par éléments finis, il y a au moins deux possibilités pour définir les variables de conception dans

un problème d'optimisation de forme, et ainsi paramétrer les frontières du modèle. La première consiste à travailler directement sur le maillage alors que, dans la seconde, on associe les variables de conception à la géométrie qui sera ensuite maillée. Dans le cas où on travaille sur un maillage dont ni le nombre ni le type d'élément ne changent au cours du processus d'optimisation avec des variables de conception locales, cela génère généralement des solutions non lisses. On remarque des imprécisions au niveau de la frontière qui sont non interprétables. Pour trouver une solution plus réaliste, il faut ajouter des contraintes sur la pente relative des segments adjacents sur la frontière.

Une possibilité est d'utiliser le morphing de maillage encore appelé optimisation topographique. Dans ce cas, on sélectionne un ensemble de nœuds qui se déplaceront lors du changement de forme de la frontière.

Pour les méthodes basées sur les gradients, on utilise la dérivée des réponses structurelles qui doivent être calculées. La principale difficulté qui apparaît dans le cas de l'optimisation de forme est que la modification de la valeur d'un paramètre géométrique exerce une double influence. Elle affecte localement le maillage au niveau de la courbe paramétrée dont les points ou les pôles changent, et influence également le comportement de la structure.

#### **2.2.1.1. OPTIMISATION PARAMÉTRIQUE DE FORME SANS VARIATION DE LA STRUCTURE**

Considérons un problème d'optimisation paramétrique de forme où le domaine de référence est  $\Omega$ , dans lequel est évalué l'état de la structure qui ne varie pas. La variation de la forme est, dans cette situation, prise en compte à travers un paramètre d'épaisseur, de courbure, etc., qui intervient dans les

coefficients de l'équation. Si l'objectif est d'optimiser une membrane élastique déformée par une force extérieure  $f$  et fixée sur son contour, on suppose qu'il est possible de faire varier l'épaisseur de la membrane, notée  $h(x)$ , entre deux valeurs extrêmes  $h_{max} > h_{min} > 0$ . Le coefficient d'élasticité de la membrane est proportionnel à cette épaisseur  $h$ . Le comportement de la membrane est modélisé par :

$$\begin{cases} -div(h\nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{dans } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.22)$$

où  $u$  est le déplacement vertical de la membrane.

L'ensemble des épaisseurs admissibles est :

$$U_{ad} = \{h(x) \rightarrow \mathbb{R} \text{ telque } 0 < h_{min} \leq h(x) \leq h_{max} \text{ et } \int_{\Omega} h(x)d(x) = h_0|\Omega|\} \quad (2.23)$$

où  $h_0$  est une épaisseur moyenne imposée.

Le critère d'optimisation est lié à une propriété mécanique de la membrane, évaluée à l'aide du déplacement  $u$ , solution du problème aux limites (2.22) :

$$J(h) = \int_{\Omega} j(u)d(x) \quad (2.24)$$

$$j(u) = fu \quad (2.25)$$

La formulation du problème d'optimisation de forme proposée par (Chen et al., 2007) est donnée par l'équation 2.26:

$$\text{Minimize } J_0(u) = \iint_{\Omega} \frac{1}{2} E_{ijkl} \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{kl}(u) d\Omega \quad (2.26)$$

$$\text{S. t. } a(u, v, \Phi) = l(v, \Phi) \quad \forall v \in U \quad (2.27)$$

$$u|_{\Gamma_1} = u_0 \quad (2.28)$$

$$\iint_{\Omega} d\Omega = V_0 \quad (2.29)$$

où  $a(u,v) = l(v)$  est l'équation d'équilibre,

$$a(u, v) = \iint_{\Omega} E_{ijkl} \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{kl}(v) d\Omega \quad (2.30)$$

$$l(v) = \iint_{\Omega} f v d\Omega + \int_{\Gamma_1} p v d\Gamma \quad (2.31)$$

Avec :

$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$  représente la frontière du domaine.

Les conditions aux limites de Dirichlet sont  $u = u_0$  qui est spécifique à  $\Gamma_1$  et la traction du bord est spécifiée à  $\Gamma_2$ ,  $f$  est la force volumique,  $u$  le champ de déplacement.  $E$  est le module de Young et  $\varepsilon$  est la déformation élastique,  $v$  est le déplacement virtuel et  $U$  est l'espace de tous les déplacements admissibles. La contrainte volumique est la suivante :  $\iint_{\Omega} d\Omega = V_0$ . La forme  $\Omega$  est l'ensemble de niveaux d'une fonction de dimension supérieure  $(x,t)$  qui évolue dans le temps afin que :

$$\begin{cases} x \text{ inside } \Omega & \text{if } \Phi(x, t) > 0 \\ x \text{ on } \Gamma & \text{if } \Phi(x, t) = 0 \\ x \text{ outside } \Omega & \text{if } \Phi(x, t) < 0 \end{cases} \quad (2.32)$$

De nombreuses méthodes d'optimisation peuvent être utilisées pour résoudre le problème. Étant donné qu'une contrainte d'égalité de volume est généralement difficile à appliquer pendant le processus d'optimisation, nous utilisons la méthode du multiplicateur lagrangien augmenté, qui est largement utilisée :

$$\begin{aligned} \text{Minimize } J(u, \Phi) &= J_0(u, \Phi) + \lambda_l (\iint_D H(\Phi) d\Omega - V_0) + \frac{1}{2\gamma} (\iint_D H(\Phi) d\Omega - V_0)^2 \\ \text{S. t. } a(u, v, \Phi) &= l(v, \Phi) \quad \forall v \in U \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$u|_{\Gamma_1} = u_0 \quad (2.34)$$

Où  $\lambda_l$  est le multiplicateur de Lagrange et  $\gamma$  est le paramètre prédéfini. Le problème doit être fixé et résolu à chaque itération. La solution du problème se réduit à la recherche d'une forme optimale dans l'espace de conception engendrée par les paramètres  $\{c_i^k\}$  dans  $\Phi_f^k$  et  $\{b_j^k\}$  dans  $\Phi_b^k$ .

Toutefois, il est possible de faire une optimisation simultanée de la forme axiale et de la topologie de la section transversale d'une poutre non uniforme avec des sections géométriquement similaires (Liu et al., 2019). Les premiers travaux concentrés sur l'optimisation de la forme d'une poutre le long de son axe, tout en prenant les zones de section transversale comme variable de conception ont donné des résultats optimaux qui ont généralement une topologie de section transversale identique le long de l'axe de la poutre, mais avec des aires différentes. Liu et al. (2019) ont proposé une méthode d'optimisation de forme pour la conception des sections transversales de poutre basée sur la théorie de faisceau anisotrope considérant les déplacements de gauchissement et le couplage entre les déformations. La théorie des poutres de Giavotto peut être utilisée pour déterminer les propriétés des sections transversales (Liu et al., 2019).

Amir et Amir (2023) ont proposé une méthode d'optimisation de la forme des poutres tridimensionnelles basée sur une conception libre de formes de la section transversale de la poutre. Les variables de conception sont des coordonnées des points de contrôle des courbes B-spline qui définissent les limites des sections des poutres. Leur méthode vise à minimiser la compliance ou à maximiser la fréquence fondamentale. Cette méthode peut être considérée comme une approche numérique eulérienne où la forme de poutre est mise à jour

tandis que le maillage EF utilisé pour le calcul numérique des propriétés structurelles de la poutre reste un maillage structuré fixe.

### **2.2.2. OPTIMISATION TOPOLOGIE (OT)**

L'optimisation topologique est un processus autonome qui permet de rechercher de manière itérative la distribution optimale des propriétés matérielles dans un domaine de conception prescrit encore appelé espace de conception ou domaine de design, soumis à un chargement donné.

Ce type d'optimisation s'applique aux structures discrétisées par des éléments de barres, de poutres, de membranes, de plaques ou de coques, et de volumes. Les calculs effectués à chaque itération du processus d'optimisation topologique sont souvent basés sur la méthode des éléments finis. Cette disposition de la matière est optimisée par rapport à un ou plusieurs objectifs de performance (ex. minimisation de la compliance, meilleur rapport rigidité/masse, minimisation de la masse, etc.) tout en respectant certaines contraintes spécifiques (ex. fraction volumique, contrainte admissible, déplacements imposés, etc.).

Ces méthodes ont suscité un vif intérêt parmi les chercheurs et ont connu une évolution rapide au cours des trois dernières décennies. Elles ont été largement appliquées dans divers domaines de l'ingénierie tels que l'analyse des structures, le transfert thermique, l'acoustique, la mécanique des fluides, l'aéroélasticité, la conception de nouveaux matériaux et d'autres domaines multiphysiques.

Dans le cas de structures discrétisées par des éléments finis discrets tels que des barres et des poutres, l'objectif de l'optimisation est alors de déterminer quelles barres ou poutres conserveront les propriétés mécaniques du matériau les constituant dans la solution finale, tandis que les autres éléments structuraux seront affectés de propriétés mécaniques proches de zéro. Aucune barre ou poutre n'est retirée du modèle, seules leurs propriétés mécaniques sont modifiées. En revanche, lorsque la structure est discrétisée par des éléments finis continus, le maillage initial représente le domaine de conception, et l'objectif est de déterminer quels éléments seront affectés des propriétés mécaniques du matériau utilisé. Dans ce cas également, aucun élément fini n'est retiré du modèle, seules leurs propriétés mécaniques sont ajustées. Dans les deux cas, le maillage reste fixe et n'évolue pas au fil des itérations. Il est à noter que la topologie des éléments et le raffinement du maillage peuvent influencer la solution optimale (Bruyneel et al., 2014).

Considérons un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , soumis à un chargement représenté par des forces surfaciques  $\lambda T_0^d$  appliquées sur une partie  $\Gamma_T \subset \partial\Omega$  de la surface, des déplacements  $\lambda u_0^d$  imposées à  $\partial\Omega - \Gamma_u$  et des forces volumiques  $\lambda f_0^d$ . Les fonctions  $T_0^d, u_0^d, f_0^d$  sont données et  $\lambda \geq 0$  est un paramètre de chargement.

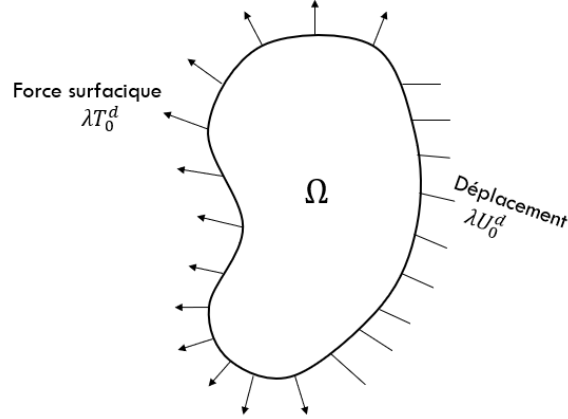


Figure 10: Chargement mécanique pour le problème de dimensionnement (modifiée de Peigney, 2018)

On suppose que le matériau est élastique linéaire (Peigney, 2018) et obéit localement à la loi de comportement suivante :

$$\sigma(x) = L(x):e(x) \quad (2.35)$$

Avec  $\sigma(x)$ , le tenseur des contraintes au point  $x$ , et  $e(x)$  est le tenseur des déformations et  $L(x)$  est le tenseur d'élasticité.

Sous l'hypothèse des petites perturbations, la déformations  $e(x)$  est reliée au champ de déplacement  $u(x)$  par l'équation suivante (Peigney, 2018) :

$$e(x) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla^T u) \quad (2.36)$$

Le champ de déplacement vérifie d'autre part la condition aux limites

$$u = \lambda_c u_0^d \text{ sur } \Gamma_u \quad (2.37)$$

A l'équilibre, le champ de contrainte  $\sigma$  vérifie :

$$\text{div} \sigma + \lambda_c f_0^d = 0 \text{ dans } \Omega, \sigma \cdot n = \lambda_c T_0^d \text{ sur } \Gamma_T \quad (2.38)$$

Pour une répartition de matériau  $L(x)$  donnée, le problème d'élasticité linéaire formé admet une solution unique en contraintes et en déformations. Cette

solution dépend linéairement du paramètre de chargement  $\lambda_c$ . On note  $\sigma_0$  la solution en contrainte du problème correspondant à  $\lambda_c = 1$ .

Dans un problème de dimensionnement, il est en général nécessaire de vérifier que le champ  $\sigma$  obtenu respecte localement un critère lié à la résistance du matériau (Peigney, 2018). Un tel critère est exprimé sous la forme  $g(\sigma) \leq 0$  où  $g$  est une fonction scalaire.

Pour une optimisation dimensionnelle, le concepteur joue sur le matériau et/ou la géométrie de façon à minimiser une fonction objective comme suit (Peigney, 2018) :

$$\inf J(\Omega, L) \quad (2.39)$$

$$(\Omega, L) \in \Sigma \quad (2.40)$$

$$G(\Omega, L) \leq 0 \quad (2.41)$$

où  $J$  est la solution objectif et  $\Sigma$  désigne une classe de valeurs admissibles sur laquelle s'effectue l'optimisation.

Le principe de l'optimisation topologique est de considérer l'ensemble de tous les domaines possibles (inclus dans un domaine de référence  $\Omega_0$ ), sans restriction de régularité spatiale ou de connexité. Pour un tenseur d'élasticité  $L$  fixe, l'ensemble  $\Sigma$  est ainsi prise sous la forme :

$$\Sigma = \{(L, \Omega) | \Omega \subset \Omega_0\} \quad (2.42)$$

Soit  $\chi$  la fonction caractéristique du domaine  $\Omega$ , définie par  $\chi(x) = 1$  si  $x \in \Omega$  et  $\chi(x) = 0$  sinon. L'ensemble  $\Sigma$  peut-être réécrit sous la forme :

$$\Sigma = \{(L(x) = \chi(x)L, \Omega_0) | \chi: \Omega_0 \mapsto \{0,1\}\} \quad (2.43)$$

Dans l'équation 2.42, le domaine  $\Omega$  est variable et  $L$  est fixe. À l'inverse de l'équation 2.41, le domaine  $\Omega_0$  est fixe et le champ de modules élastiques est variable et inhomogène. Le problème géométrique d'optimisation de forme est ainsi converti en un problème de répartition optimale de matière dans un domaine fixe. La perspective d'aborder le problème d'optimisation topologique comme un problème de distribution de matière est bien plus que simplement une réécriture formelle. Cette approche s'avère extrêmement bénéfique, car elle ouvre la voie à l'utilisation de la théorie de l'homogénéisation pour les matériaux et structures hétérogènes.

L'optimisation topologique par cette approche est bien maîtrisée dans le cas où :

$$J(\Omega, L) = \int_{\Omega_0} \frac{1}{2} \sigma(x) : L^{-1}(x) : \sigma(x) dx \quad (2.44)$$

Et la condition de résistance  $G(\Omega, L) \leq 0$  est remplacé par une contrainte de la forme :

$$\int_{\Omega_0} \chi(x) dx = c |\Omega_0| \quad (2.45)$$

Avec  $0 < c \leq 1$

La contrainte exprime le fait que le volume de la structure est fixé et égale à  $c |\Omega_0|$ . La fonction  $J$  est la complaisance de la structure et en mesure la flexibilité vis-à-vis du chargement considéré. Le problème se réécrit alors (Peigney, 2018) :

$$\min J(\Omega, L) \quad (2.46)$$

$$(\chi, L) \in \Sigma \quad (2.47)$$

$$\int_{\Omega_0} \chi = c |\Omega_0| \quad (2.48)$$

Où

$$\Sigma = \{(\chi, L(x)) \mid L(x) = \chi(x)L; \chi: \Omega_0 \mapsto \{0,1\}\} \quad (2.49)$$

Ce problème consiste à chercher la structure de volume  $c|\Omega_0|$  qui soit la plus rigide possible pour le chargement considéré.

### **2.2.2.1. LES DIFFÉRENTES MÉTHODES D'OPTIMISATION TOPOLOGIQUE**

Les approches de TO les plus populaires comprennent l'approche basée sur la densité composée de la méthode d'homogénéisation, les méthodes de niveaux de jeu, les méthodes d'optimisation structurale évolutive (ESO), la méthode des matériaux isotropes solides avec pénalisation (SIMP) (Nana et al., 2017), l'approche de Level-set composé par les méthodes d'optimisation par variation de frontières et de programmation non linéaire et l'approche heuristique (méthode de non-gradient). Le tableau 5 présente un résumé non exhaustif des différentes méthodes d'optimisation topologique.

Tableau 5 : Tableau non exhaustif des méthodes d'optimisation topologique (Ribeiro et al., 2021)<sup>2</sup>

APPROCHES	LISTE DES MÉTHODES	RÉFÉRENCES
<b>Approche basée sur la densité</b>	Homogénéisation	(Geoffroy-Donders, 2018)
	Approximation rationnelle des propriétés du Matériau (RAMP)	(AMROUNE, 2022; Roiné, 2022)
	Méthode des solides isotropes avec pénalisation (SIMP)	(Andreassen et al., 2011; Ferrari & Sigmund, 2020; Ferrari et al., 2021; Sigmund, 2001)
	Méthode SINH	(Stolpe & Svanberg, 2001)
<b>Méthode Level-set</b>	Les méthodes d'optimisation par variation de frontières	(AMROUNE, 2022)
	Méthode LS conventionnelle	(Ribeiro et al., 2021)
	Programmation non linéaire	
<b>Heuristiques (évolutionnaires)</b>	les méthodes d'optimisation structurale évolutive (ESO)	(Yi, 2022)
	Optimisation structurale évolutive bidirectionnelle	

<sup>2</sup> Tableau modifié d'après Ribeiro et al. (2021) : Publie sous licence CC BY 4.0

### 2.2.2.1.1. LA MÉTHODE D'HOMOGÉNÉISATION :

L'optimisation par homogénéisation est utilisée pour les matériaux composites c'est-à-dire les matériaux à microstructure poreuse obtenus par microperforation. Son principe consiste à trouver la meilleure configuration de ces matériaux qui minimise la fonction objectif (souvent la compliance) dans un domaine de conception donné. Dans ce cas, on optimise la microstructure du matériau et non la forme de la structure optimisée (AMROUNE, 2022; Marcelin, 2006).

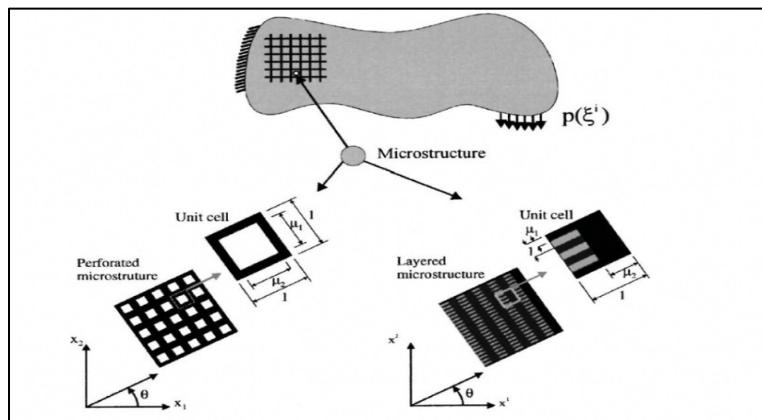


Figure 11: Microstructures pour un problème d'OT par homogénéisation (Eschenauer & Olhoff 2001)<sup>3</sup>

### 2.2.2.1.2. OPTIMISATION ÉVOLUTIONNAIRE

Les méthodes d'optimisation topologique évolutionnaire ou évolutive, telles que l'ESO (Optimisation structurale évolutive) et le BESO (Optimisation structurale évolutive bidirectionnelle), visent à atteindre une forme optimale en ajustant progressivement la distribution de matière dans les zones spécifiques de la structure en fonction des contraintes élémentaires. Tandis que l'ESO classique se concentre sur la suppression de la matière pour uniformiser les contraintes, le

<sup>3</sup> ASME International License (Licence n°1669134-1)

BESO permet à la fois de supprimer la matière dans les zones de faibles contraintes et d'ajouter dans les zones de contraintes élevées pour renforcer la structure. Ces méthodes itératives s'arrêtent lorsque les contraintes des éléments restants sont inférieures à un seuil défini par l'utilisateur (AMROUNE, 2022).

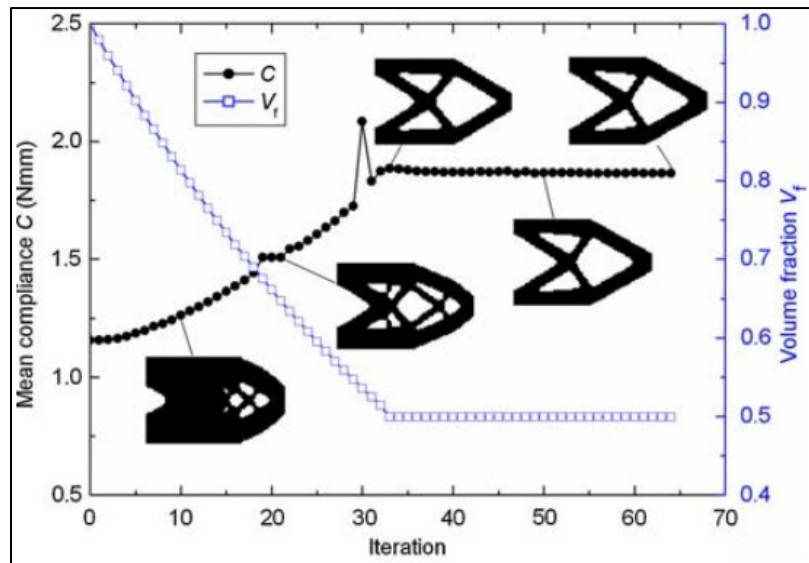


Figure 12: Évolution de la compliance et de la fraction volumique avec la méthode BESO (Huang & Xie, 2009)<sup>4</sup>

Les méthodes évolutionnaires offrent des résultats binaires et assurent systématiquement la vérification des contraintes mécaniques, tout en se distinguant par leur simplicité conceptuelle et leur facilité d'implémentation. Cependant, elles présentent des instabilités numériques telles que la sensibilité de la solution optimale à la taille du maillage et l'apparition de l'effet damier. De plus, une limitation importante est que la méthode ESO peut produire des résultats très éloignés de l'optimalité, sans que la méthode BESO puisse compenser cette lacune.

<sup>4</sup> Springer nature License (Licence n° 6151091372150)

### 2.2.2.1.3. OPTIMISATION PAR VARIATION DE FRONTIÈRES

Les méthodes d'optimisation par variation de frontières trouvent leurs origines dans les techniques d'optimisation de forme, se concentrant principalement sur la manipulation de l'interface matière-vide définie par des fonctions implicites dans le but de minimiser une fonction objective. Ces avancées ont permis d'atteindre une grande flexibilité dans la modification de la topologie, notamment par la création, la suppression et la fusion des trous. Parmi les approches bien établies dans la littérature, on retrouve la méthode des lignes de niveau (level set) et la méthode de champ de phase (AMROUNE, 2022).

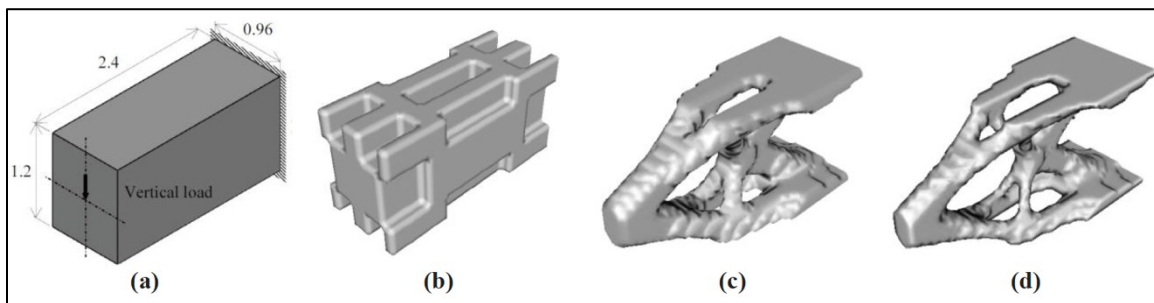


Figure 13: Méthode de champ de phase : (a) problème initial, (b) forme initiale, forme optimale pour (c)  $\Phi = 0.1$  et (d)  $\Phi = 0.9$  (Takezawa et al., 2010)<sup>5</sup>

Les méthodes présentées ci-dessus produisent généralement des résultats avec des frontières nettes et lisses qui nécessitent peu d'efforts de post-traitement pour les interpréter. Cependant, le résultat obtenu par ces dernières reste très sensible à la topologie initiale du modèle. En outre, leurs algorithmes d'optimisation sont susceptibles de converger vers des minima locaux de la fonction objectif. Notons que la grande majorité des méthodes d'optimisation topologique dépendent de la taille et du type de maillage utilisé.

<sup>5</sup> Elsevier License (n° 6151100538792)

#### **2.2.2.1.4. OPTIMISATION PAR DISTRIBUTION DE DENSITÉ RELATIVE**

Cette méthode consiste à identifier, à partir d'une discrétisation donnée du domaine initial, à travers la minimisation d'une fonction objectif (souvent la compliance) si chaque élément doit être vide ou solide, tout en respectant une contrainte sur la quantité du matériau pouvant être utilisée. Dans ce cas, les variables de design sont les densités relatives élémentaires qui varient entre 0 qui correspond à du vide et 1 qui correspond à du matériau plein. L'utilisation d'une méthode de pénalisation permet d'éliminer les densités relatives intermédiaires et d'obtenir ainsi une répartition plus binaire de la matière. Le champ de densité relative pénalisé est filtré subséquemment afin de neutraliser l'effet damier. L'élimination des éléments ayant une densité relative inférieure à un seuil donné permet de dégager la forme optimisée (Chen, 2022).

Un phénomène parasite apparaît lorsqu'on essaie de résoudre le problème d'optimisation topologique modélisé avec des éléments finis continus (membranes, volumes, coques). Comme illustré à la figure 14b, une alternance rapide de valeurs  $\varepsilon$  et 1 des pseudo-densités apparaît, créant ce qu'on appelle une structure en damier, qu'il est difficile d'interpréter. Pour le maillage fin (figure 14d) composées de 5400 éléments, on constate que l'effet damier devient moins important.

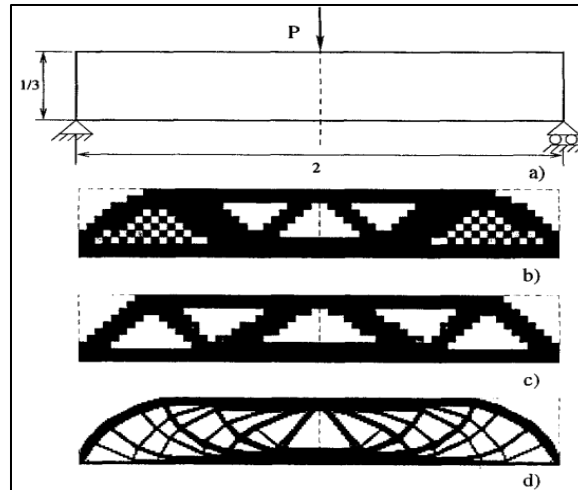


Figure 14: Solution avec ou sans damier : a) problème de conception, b) effet damier, c) solution avec 600 éléments et d) solution avec 5400 éléments (Sigmund & Petersson, 1998)<sup>6</sup>

Cette méthode est généralement utilisée étant donné sa simplicité d'implémentation. Néanmoins elle présente des inconvénients qui sont la non prise en compte des contraintes mécaniques pendant le processus d'optimisation, car celui-ci est basé sur la minimisation de la compliance. D'où le fait qu'une analyse de validation par éléments finis est nécessaire afin de vérifier si la contrainte maximale du modèle optimisé est inférieure à la contrainte admissible.

#### 2.2.2.1.5. MÉTHODE DES SOLIDES ISOTROPES AVEC PÉNALISATION (SIMP)

Une approche pour converger vers une solution discrète repose sur les techniques de pénalisation. La méthode la plus connue est solid Isotropic Material with Penalization (SIMP) développée par Bendsøe. Elle consiste à pénaliser les variables de densité par la fonction de pénalisation  $f_p$

$$f_p(x) : [0,1] \rightarrow [0,1] \quad (2.50)$$

$$x \rightarrow x^p$$

<sup>6</sup> Springer nature License (Licence n°6151130193956)

Où  $p$  est un paramètre de pénalisation de valeur entière. La construction de la matrice de rigidité se fait en faisant le produit du module de Young par  $E_0$  du matériau.

$$E_i := f_p(x_i)E_0 = x_i^p E_0 \quad (2.51)$$

Où  $x_i$  la densité de matière dans l'élément  $i$  et  $E_i$  le module de Young de l'élément  $i$ . Afin de faire évoluer les variables de design dans l'intervalle  $[0,1]$ , l'équation ci-dessus devient :

$$E_i := E_{min} + f_p(x_i)(E_0 - E_{min}) \quad (2.52)$$

Avec  $E_{min}$  le module de Young des vides ( $E_{min} = 10^{-8}E_0$ )

La méthode SIMP converge vers une solution discrète pour les valeurs de la pénalisation suffisamment grandes dans un problème de minimisation de la compliance sous contrainte de volume. Plusieurs approches ont été développées pour éviter les minima locaux telles que la méthode d'incrémentation dynamique du paramètre de pénalisation (Mitjana, 2018). Cependant, il existe des situations où la méthode SIMP peut ne pas converger vers une solution discrète, quelle que soit la valeur du paramètre de pénalisation.

De plus, la dérivée de la fonction  $f^p$  par rapport à  $x$  est nulle en zéro. Cette propriété peut provoquer certaines instabilités numériques pour les valeurs de densité faibles.

Pour faire face aux questions sur le meilleur compromis entre les économies du matériau et les performances structurelles, Briseghella et al. (2016) ont mis en place un indice d'optimisation (OI) qui fournit une procédure

mathématique qui met en évidence le meilleur choix parmi plusieurs solutions candidates obtenues par la procédure d'optimisation (Briseghella et al., 2016).

$$OI(i) = [VR(i) - RI(i)] \cdot \frac{1}{[VR(i)]^\beta} \quad (2.53)$$

Où  $i$  représente la  $i$ -ème solution considérée ; VR est la réduction de volume et  $\beta$  est un exposant de pénalité, généralement compris entre 0 et 3, qui peut favoriser les solutions de conception avec une réduction de volume plus faible ou plus élevée, selon le jugement du concepteur.

Edouard Duriez et al. (2022) ont adapté un indice d'Ashby aux structures écoconçues optimisées par l'optimisation topologique. En effet l'optimisation de la conception multidisciplinaire (MDO) est nécessaire lorsque la structure et le matériau utilisé sont couplés, ce qui signifie qu'ils doivent être optimisés simultanément.

Le module de Young effectif  $E$  d'un élément  $e$  dans l'espace de conception  $\Omega$  comme une fonction de la densité de l'élément  $\rho_e$  pénalisée par un exposant  $n$ , comme dans l'équation (Duriez et al., 2022; Wang et al., 2021) :

$$E(\rho_e) = E_{min} + \rho^n(E_0 - E_{min}) \quad (2.54)$$

$$0 < E_0 \ll E_{min} \quad (2.55)$$

Dans ce cadre, le problème de conception est formulé comme une optimisation des variables de conception  $\rho_e$  sous contraintes comme suit (Duriez et al., 2022) :

$$\arg \min_{\rho} C(\rho) = U^T K U \quad (2.56)$$

$$s. t \ F = K U \quad (2.57)$$

$$0 \leq \rho_e \leq 1, \quad \forall e \in \Omega$$

$$\sum_e \rho_e \leq v_f \quad (2.58)$$

La fonction objectif (C) est définie comme l'énergie totale de déformation, où K est la matrice de rigidité de la conception, U et F sont respectivement les vecteurs de déplacement nodal et de force, et  $v_f$  est une contrainte sur le volume occupé par le matériau, appelé fraction volumique.

Les caractéristiques dynamiques des structures sont optimisées en utilisant la méthode de densité variable par ((Wang et al., 2021) en utilisant une condition de Kuhn-Tucker qui est une méthode du critère d'optimisation qui consiste à construire une fonction de Lagrange en introduisant un multiplicateur de Lagrange. Il est judicieux d'adopter une méthode du critère d'optimisation qui présente les avantages évidents d'un nombre d'itérations réduit et d'une convergence rapide. Le modèle d'optimisation est établi dans le but de maximiser les valeurs propres du premier ordre avec une contrainte concernant le volume total. Ainsi la méthode proposée peut répondre aux exigences de conception des caractéristiques dynamiques et améliorer le taux d'utilisation des matériaux.

#### **2.2.2.1.6. Méthode et outils d'optimisation topologique basée sur la méthode SIMP**

L'optimisation topologique (OT) reste une approche innovante visant à générer de nouvelles configurations géométriques avec une répartition idéale de la matière dans le volume défini en fonction des charges appliquées. En utilisant l'OT dès la phase de conception initiale, elle permet de réduire significativement le temps nécessaire en minimisant les itérations entre les calculs par éléments finis (EF) et

la conception. Il existe une variété d'outils disponibles pour l'OT sous différentes formes telles que des scripts, des programmes, des applications, des modules, des boîtes à outils, des logiciels et des plateformes, entre autres. Quel que soit l'outil OT utilisé, des données d'entrée minimales sont nécessaires, telles que la définition du domaine de conception, les surfaces fonctionnelles et l'application d'au moins un cas de chargement. La plupart de ces outils reposent sur une variante de la méthode SIMP.

(Sigmund, 2001) a élaboré une implémentation compacte en Matlab d'un code d'optimisation de topologie pour la minimisation de la compliance des structures soumises à des charges statiques. Le code est implémenté en utilisant seulement 99 lignes d'entrée Matlab et comprend un optimiseur, un filtrage indépendant du maillage et un code d'éléments finis. La figure 15 représente un problème d'optimisation réalisé par le modèle de développer par Sigmund, (2021).

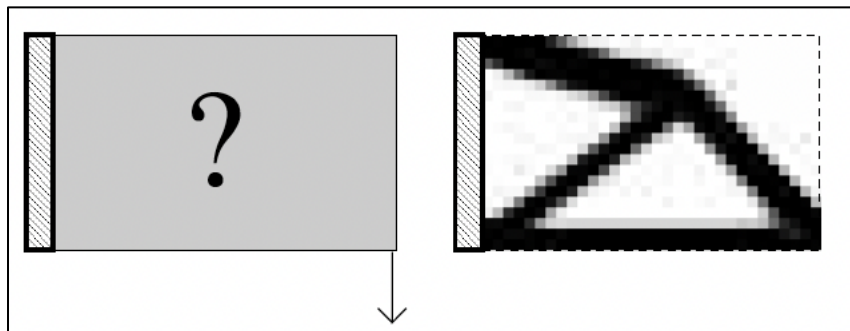


Figure 15: La conception optimisée obtenue avec une variante du code en 99 lignes (Sigmund, 2001)<sup>7</sup>

Ce code reste très lent et moins efficace, ainsi une amélioration considérable fut apportée sur l'efficacité du code. Une amélioration de la vitesse avec un facteur de 100 fut obtenue pour un exemple de référence avec 7 500

<sup>7</sup> Springer nature License (Licence n° 6142750851215)

éléments (Andreassen et al., 2011). De plus, la longueur du code a été réduite à seulement 88 lignes et donne plus de précision (figure 16).

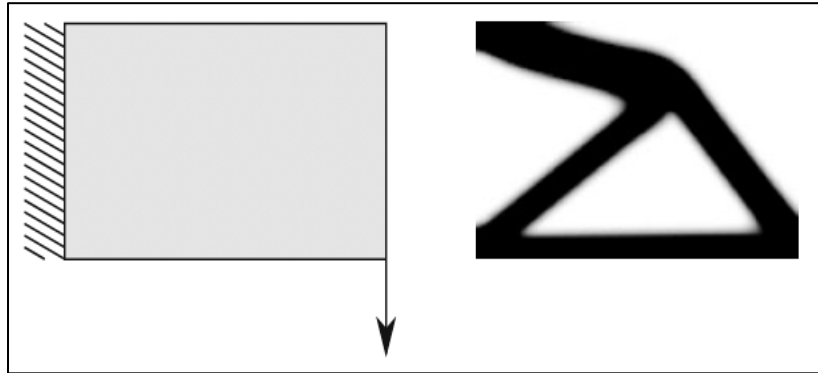


Figure 16: la conception optimisée obtenue avec une variante du code en 88 lignes (Andreassen et al., 2011)

Ferrari et Sigmund (2020) ont proposé un code top99neo traitant des problèmes 2D, qui est 5,5 fois plus rapide que le code top88 et un code qui traite efficacement des problèmes 3D (figure17). Cependant, ce code ne tient pas compte du flambage.

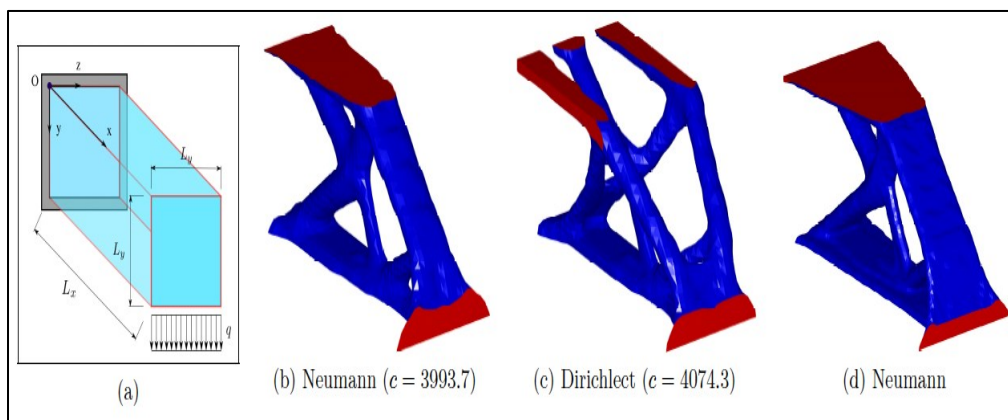


Figure 17: L'exemple de poutre en porte-à-faux illustré avec code Top3D125(Ferrari & Sigmund, 2020)<sup>8</sup>

<sup>8</sup> Springer nature License (Licence n° 6142760060620)

Les améliorations sont principalement dues aux points suivants :

- ❖ L'assemblage de la matrice est rendu beaucoup plus efficace en définissant les quantités liées au maillage comme des entiers (int32 Matlab) et en assemblant seulement la moitié de la matrice.
- ❖ Le nombre d'itérations de l'OC est drastiquement réduit en examinant l'expression explicite du multiplicateur de Lagrange pour le problème en question.
- ❖ L'implémentation du filtre et la projection de densité préservant le volume permettent d'accélérer l'étape de redéfinition.

Un code d'optimisation topologique basé sur des critères de flambement linéarisés des structures 2D a été proposé par (Ferrari et al., 2021). Le code est conçu pour traiter la rigidité, le volume et les facteurs de charge de flambement (BLFs).

### **2.3. ANALYSE DE FLAMBEMENT PAR LA MÉTHODE ÉLÉMENT FINIE**

Dans cette partie, les approches qui permettent d'analyser le flambement des structures par la méthode des éléments finis seront présentées. En effet, la méthode des éléments finis est un excellent outil pour la modélisation et l'analyse des structures. Elle permet de discrétiser une structure complexe en élément simple pour faciliter la résolution des problèmes complexes. Dans cette section, nous nous concentrons sur l'analyse de flambement des structures isotropes et homogènes en tenant compte des lois de l'élasticité linéaire. Ensuite nous aborderons la formulation du problème aux valeurs propres généralisées qui permet de déterminer la charge critique et les modes de flambement associés.

### 2.3.1. DISCRÉTISATION ÉLÉMENT FINI :

Considérons une structure élastique, isotrope et homogène avec un domaine  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}^3$  avec  $x$ ,  $y$  et  $z$ , les directions de l'espace. On note  $\partial\Omega$  la frontière du domaine et  $\eta$  la normale unitaire sortante définie sur  $\partial\Omega$ . La frontière  $\partial\Omega$  est constituée de deux zones  $\Gamma_d$  et  $\Gamma_f$  qui correspondent respectivement aux zones où les déplacements et les forces sont imposés (Mitjana, 2018).

Soit  $f^s$  et  $f^v$  les forces appliquées respectivement sur la frontière  $\Gamma_f$  et dans la structure  $\Omega$  et  $v \in \mathbb{R}^3$  est le champ des déplacements en un point de  $\Omega$ .

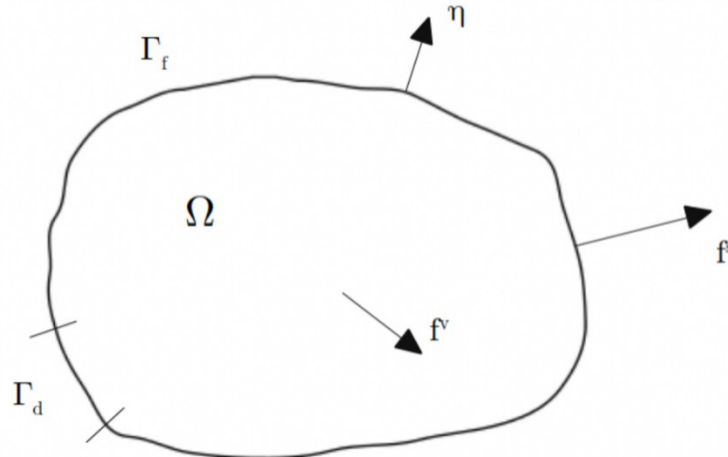


Figure 18 : Domaine de la structure  $\Omega$

Soit  $E$  le tenseur de Green-Lagrange en chaque point de  $\Omega$ , l'équation du tenseur

$E$  s'écrit comme suit :

$$E(v) = \frac{1}{2} (\nabla v + \nabla v^T + \nabla v^T \nabla v) \quad \text{avec } \nabla v = (v_{,x}, v_{,y}, v_{,z}) \quad (2.59)$$

Le tenseur  $E$  est symétrique et non linéaire par rapport à  $v$  et on note la partie non linéaire  $\epsilon$ .

$$E(v) = \epsilon(v) + o(|\nabla v|) \quad (2.60)$$

Avec  $\epsilon(v) = \frac{1}{2}(\nabla v + \nabla v^T)$  défini comme le tenseur des déformations linéarisées.

Pour les petites perturbations correspondant à de petites déformations ( $|\nabla v| \ll 1$ )

de la structure, le tenseur de déformation linéarisée sera :

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_y & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_z \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

Le tenseur  $\epsilon$  peut être écrit sous forme d'un vecteur  $\tilde{\epsilon}$  à 6 composantes :

$$\tilde{\epsilon} = [\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}] \quad (2.62)$$

Où  $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$  correspondent respectivement à  $2 \epsilon_{xy}$ ,  $2 \epsilon_{xz}$  et  $2 \epsilon_{yz}$

Le tenseur de contraintes s'écrit par :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

Le tenseur de contraintes sous forme de vecteur s'écrit comme suit :

$$\tilde{\sigma} = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}] \quad (2.64)$$

D'après la loi de Hooke, on peut exprimer  $\tilde{\sigma}$  en fonction de  $\tilde{\epsilon}$  sous forme d'écriture matricielle :

$$\tilde{\sigma}(v) = H \tilde{\epsilon}(v) \quad (2.65)$$

Avec H la matrice de Hooke. Pour un matériau isotrope et homogène, la matrice

H s'écrit comme suite :

$$H = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

L'équation 2.67 de la loi de Hooke peut être reformulée comme suite :

$$\sigma(v) = \lambda \text{tr}(\epsilon(v))I + 2\mu \epsilon(v) \quad (2.67)$$

Avec  $\lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}$  et  $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$  correspondent aux coefficients de Lamé,  $\text{tr}$  est

l'opérateur trace et  $I$  est la matrice identité.

### 2.3.2. PROBLÈME D'ÉLASTICITÉ LINÉAIRE :

L'équation d'équilibre des forces dans la structure  $\Omega$ , selon toutes les directions de l'espace (Mitjana, 2018) s'écrit par :

$$-\text{div}(\sigma(v)) = f^v \text{ sur } \Omega \quad (2.68)$$

Avec  $\text{div}$  l'opérateur de divergence. Il est nécessaire de considérer les conditions aux limites sur la frontière  $\partial\Omega = \Gamma_d \cup \Gamma_f$ .

On impose un champ de déplacement  $d$  sur le  $\Gamma_d$  et on applique un champ de forces surface sur  $\Gamma_f$

$$v = d \text{ sur } \Gamma_d \quad (2.69)$$

$$\sigma(v) \cdot \eta = f^s \text{ sur } \Gamma_f \quad (2.70)$$

Ainsi, pour les fixations de la structure telle que les encastremets, le champ de déplacement est souvent nul et  $\eta$  est la normale unitaire sortante définie sur  $\partial\Omega$ .

Cependant, un problème linéaire consiste à déterminer le champ de déplacements  $v \in \mathbb{R}^3$ , le champ de déformation  $\epsilon \in \mathbb{R}^3$  et enfin le champ de contraintes du matériau  $\sigma \in \mathbb{R}^3$  sur tout point de  $\Omega$ , vérifiant les équations suivantes :

L'équation d'équilibre est donnée par (Mitjana, 2018) :

$$-\text{div}(\sigma(v)) = f^v \text{ sur } \Omega \quad (2.71)$$

Les équations de relation entre les déplacements et les déformations sont données suit :

$$\epsilon(v) = \frac{1}{2}(\nabla_v + \nabla_v^T) \quad (2.72)$$

La loi de comportement :

$$\sigma(v) = \lambda \text{tr}(\epsilon(v))I + 2\mu\epsilon(v) \quad (2.73)$$

En considérant la loi de comportement d'un matériau élastique, isotrope et homogène, on obtient la formulation variationnelle faible suivante :

Trouver  $v \in V_{ad}$  tel que :

$$a(v, w) = l(w), \forall w \in U_{ad} \quad (2.74)$$

avec

$$a(v, w) = \int_{\Omega} (\lambda \text{tr}(\epsilon(v)))I + 2\mu\epsilon(v) : \epsilon(w) d\Omega \quad (2.75)$$

et

$$l(w) = \int_{\Gamma_f} f^s w d(\Gamma_f) + \int_{\Omega} f^v w d\Omega \quad (2.76)$$

Soit  $D_h$  une discrétisation de la structure  $\Omega$  en  $N$  éléments finis de type  $T$  comme un triangle ou quadrangle en deux dimensions et tétraèdre en trois dimensions.

$$D_h = \bigcup_{k=1}^N T_k \quad (2.77)$$

La solution de l'équation de variationnelle est reformulée comme :

Trouver un déplacement élément fini  $v_h = \sum_{i=p}^{3p} u_i \psi_i$  tel que

$$\sum_{i=p}^{3p} u_i a(\psi_i, \psi_j) = l(\psi_j), \forall j = 1, \dots, 3p \quad (2.78)$$

Où 3 représente les trois dimensions de l'espace et  $u = (u_1, \dots, 3p) \in \mathbb{R}^{3p}$  est appelé le vecteur des degrés de liberté nodaux. L'écriture matricielle de  $v_h$  est donné par :

$$v_h = Q \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{3p} \end{pmatrix} \quad (2.79)$$

La matrice  $Q = (\psi)_{1 \leq i \leq 3p} \in \mathbb{R}^{3 \times 3p}$  est appelée matrice d'interpolation. Elle est construite à partir de la matrice  $D \in \mathbb{R}^{6 \times 3}$ , qui est composée des opérateurs de dérivées partielles des fonctions de formes  $\psi_i$ .

Ainsi, le problème élément fini issu de la formulation variationnelle (équation 2.78), se réduit à la détermination du vecteur des degrés de liberté nodaux  $u \in \mathbb{R}^{3p}$  en résolvant le système linéaire suivant (Duriez et al., 2022; Wang et al., 2021) :

$$Ku = f \quad (2.80)$$

où  $K \in \mathbb{R}^{3p \times 3p}$  est une matrice symétrique définie positive, appelée matrice de rigidité et  $f \in \mathbb{R}^{3p}$  est vecteur des forces extérieures, donc les composantes sont :

$$K_{ij} = \int_{\Omega} (B^T H B)_{ij} dx \quad (2.81)$$

$$f_j = \int_{\Omega} (N^T f^v)_j d\Omega + \int_{\Gamma_f} (N^T f^s)_j d(\Gamma_f) \quad (2.82)$$

À partir du champ des degrés de liberté nodaux, les champs de déformations  $\epsilon$  et de contraintes  $\sigma$  peuvent être déterminés respectivement par les équations 2.72 et 2.73. Par ailleurs, la matrice de rigidité globale  $K$  de la structure peut être réalisée à partir des matrices de rigidité de chaque élément composant la structure. Considérons un type d'élément composé de  $\alpha$  nœuds menant à une discrétisation en  $N$  éléments de la structure. La construction de la matrice de

rigidité  $K$  s'effectue de la manière suivante (Ferrari & Sigmund, 2019; Mitjana, 2018) :

$$K = \sum_{i=1}^N [K_i] \quad (2.83)$$

Où  $K_i \in \mathbb{R}^{3\alpha \times 3\alpha}$  est la matrice de rigidité élémentaire de l'élément  $i$  et  $[\ ]$  représente le procédé d'assemblage par blocs des matrices  $K_i$  dans la matrice  $K$ .

### 2.3.3. FLAMBAGE LINÉAIRE :

Soit  $\alpha, \beta$  et  $\xi$  les déplacements suivant les directions  $x, y$  et  $z$  respectivement, les équations de déformation de Green-Lagrange (Mitjana, 2018) :

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \alpha_{,x} + \frac{1}{2}(\alpha_{,x}^2 + \beta_{,x}^2 + \xi_{,x}^2) \\ \epsilon_y &= \beta_{,y} + \frac{1}{2}(\alpha_{,y}^2 + \beta_{,y}^2 + \xi_{,y}^2) \\ \epsilon_z &= \xi_{,z} + \frac{1}{2}(\alpha_{,z}^2 + \beta_{,z}^2 + \xi_{,z}^2) \end{aligned} \quad (2.84)$$

$$\gamma_{xy} = \alpha_{,y} + \beta_{,x} + (\alpha_{,x}\alpha_{,y} + \beta_{,x}\beta_{,y} + \xi_{,x}\xi_{,y})$$

$$\gamma_{xz} = \alpha_{,z} + \xi_{,x} + (\alpha_{,x}\alpha_{,z} + \beta_{,x}\beta_{,z} + \xi_{,x}\xi_{,z})$$

$$\gamma_{yz} = \beta_{,z} + \xi_{,y} + (\alpha_{,y}\alpha_{,z} + \beta_{,y}\beta_{,z} + \xi_{,y}\xi_{,z})$$

Si on suppose que les contraintes  $\tilde{\sigma}_i = [\sigma_x^i, \sigma_y^i, \sigma_z^i, \sigma_{xy}^i, \sigma_{xz}^i, \sigma_{yz}^i]$  au niveau d'un élément  $i$  restent constantes lorsque les déformations  $\tilde{\epsilon}_i = [\epsilon_x^i, \epsilon_x^i, \epsilon_x^i, \gamma_{xy}^i, \gamma_{xz}^i, \gamma_{yz}^i]$  apparaissent. Le travail associé à cet élément est donné par :

$$W^i = \int_{\Omega_i} \tilde{\epsilon}_i^T \tilde{\sigma}_i d\Omega \quad (2.85)$$

Avec  $\Omega_i$  le volume occupé par l'élément  $i$ .

En utilisant les équations de Green-Lagrange (équation 2.84). On peut écrire  $\tilde{\epsilon}_i^T \tilde{\sigma}_i$  comme suit (Mitjana, 2018) :

$$\begin{aligned}
\tilde{\epsilon}_i^T \tilde{\sigma}_i &= \epsilon_x \sigma_x^i + \epsilon_y \sigma_y^i + \epsilon_z \sigma_z^i + \gamma_{xy} \sigma_{xy}^i + \gamma_{xz} \sigma_{xz}^i + \gamma_{yz} \sigma_{yz}^i \\
&= \alpha_{,x} \sigma_x^i + \beta_{,y} \sigma_y^i + \xi_{,z} \sigma_z^i + (\alpha_{,y} + \beta_{,x}) \sigma_{xy}^i + (\alpha_{,z} + \xi_{,x}) \sigma_{xz}^i \\
&\quad + (\beta_{,z} + \xi_{,y}) \sigma_{yz}^i + \frac{1}{2} (\alpha_{,x}^2 + \beta_{,x}^2 + \xi_{,x}^2) \sigma_x^i + \frac{1}{2} (\alpha_{,y}^2 + \beta_{,y}^2 + \xi_{,y}^2) \sigma_y^i \\
&\quad + \frac{1}{2} (\alpha_{,z}^2 + \beta_{,z}^2 + \xi_{,z}^2) \sigma_z^i + (\alpha_{,x} \alpha_{,y} + \beta_{,x} \beta_{,y} + \xi_{,x} \xi_{,y}) \sigma_{xy}^i \\
&\quad + (\alpha_{,x} \alpha_{,z} + \beta_{,x} \beta_{,z} + \xi_{,x} \xi_{,z}) \sigma_{xz}^i \\
&\quad + (\alpha_{,y} \alpha_{,z} + \beta_{,y} \beta_{,z} \\
&\quad + \xi_{,y} \xi_{,z}) \sigma_{yz}^i \tag{2.86} \\
&= \sigma: \epsilon + \frac{1}{2} (\alpha_{,x}^2 + \beta_{,x}^2 + \xi_{,x}^2) \sigma_x^i + \frac{1}{2} (\alpha_{,y}^2 + \beta_{,y}^2 + \xi_{,y}^2) \sigma_y^i \\
&\quad + \frac{1}{2} (\alpha_{,z}^2 + \beta_{,z}^2 + \xi_{,z}^2) \sigma_z^i + (\alpha_{,x} \alpha_{,y} + \beta_{,x} \beta_{,y} + \xi_{,x} \xi_{,y}) \sigma_{xy}^i \\
&\quad + (\alpha_{,x} \alpha_{,z} + \beta_{,x} \beta_{,z} + \xi_{,x} \xi_{,z}) \sigma_{xz}^i + (\alpha_{,y} \alpha_{,z} + \beta_{,y} \beta_{,z} + \xi_{,y} \xi_{,z}) \sigma_{yz}^i
\end{aligned}$$

Le terme  $\sigma: \epsilon$  intervient dans la construction de la matrice de rigidité  $K$ , et le travail

$W_\sigma^i$  correspond à :

$$W_\sigma^i = \int_{\Omega_i} \frac{1}{2} (\alpha_{,x}^2 + \beta_{,x}^2 + \xi_{,x}^2) \sigma_x^i + \dots + (\alpha_{,y} \alpha_{,z} + \beta_{,y} \beta_{,z} + \xi_{,y} \xi_{,z}) \sigma_{yz}^i \tag{2.87}$$

Soit le vecteur  $\delta_i$  tel que :

$$\begin{aligned}
\delta_i &= (\alpha_{,x}, \alpha_{,y}, \alpha_{,z}, \beta_{,x}, \beta_{,y}, \beta_{,z}, \xi_{,x}, \xi_{,y}, \xi_{,z})^T \\
W_\sigma^i &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_i} \delta_i^T \begin{pmatrix} s_i & 0 & 0 \\ 0 & s_i & 0 \\ 0 & 0 & s_i \end{pmatrix} \delta_i d\Omega \tag{2.88}
\end{aligned}$$

$$s_i = \begin{pmatrix} \sigma_x^i & \sigma_{xy}^i & \sigma_{xz}^i \\ \sigma_{xy}^i & \sigma_y^i & \sigma_{yz}^i \\ \sigma_{xz}^i & \sigma_{yz}^i & \sigma_z^i \end{pmatrix}$$

Le champ de déplacement  $v_i$  de l'élément est exprimé par la relation  $v_i = Q_i u_i$  où  $Q_i$  représente la matrice d'interpolation et  $u_i$  le vecteur des degrés de liberté nodale de l'élément. Ainsi, en définissant une matrice D contenant les dérivées partielles des fonctions de formes de  $Q_i$ , nous pouvons relier  $\delta_i$  et  $u_i$  par :

$$s_i = D_i u_i \quad (2.89)$$

où la taille de  $D_i$  dépend du type d'élément considéré pour discrétiser la structure.

Ainsi, le travail  $W_\sigma^i$  associé à un élément i peut s'écrire sous forme :

$$W_\sigma^i = \frac{1}{2} u_i^T K_\sigma^i u_i \quad (3.90)$$

Avec  $K_\sigma^i$  la matrice de rigidité géométrique de l'élément i, définie comme :

$$K_\sigma^i = \int_{\Omega} D_i^T \begin{pmatrix} s_i & 0 & 0 \\ 0 & s_i & 0 \\ 0 & 0 & s_i \end{pmatrix} D_i d\Omega_i \quad (2.91)$$

Par la suite la matrice de rigidité géométrique peut être construite en assemblant les matrices de rigidité géométrique  $G^i$  de chaque élément (Ferrari & Sigmund, 2019; Mitjana, 2018) :

$$G = \sum_{i=1}^N [G^i] \quad (2.92)$$

où N représente l'ensemble des éléments représentant la structure et  $[\ ]$  est l'opérateur d'assemblage par blocs.

Après l'assemblage de la matrice géométrique, l'étape suivante est la résolution du problème des valeurs propres avec l'équation suivante :

$$(K + \lambda G)v = 0 \quad (2.93)$$

### 2.3.4. PROBLÈME AUX VALEURS PROPRES

Soit deux matrices carrées [A] et [B] de dimension  $n \times n$ . Dans un problème aux valeurs propres on cherche les valeurs d'un scalaire  $\lambda$  tel que l'équation matricielle suivante:

$$([A] - \lambda[B])\{x\} = \{0\} \quad (2.94)$$

Aie des solutions autres que la solution triviale  $\{x\} = \{0\}$ .

Il existe au maximum  $n$  solutions  $\lambda_i$  pas nécessairement toutes distinctes.

Les  $\lambda_i$  sont appelés valeurs propres et chaque  $\lambda_i$  correspond un vecteur propre  $\{x\}_i$ .

Les problèmes aux valeurs propres apparaissent fréquemment en analyse :

- Vibratoire où  $\sqrt{\lambda_i} = \omega_i$  est la pulsation propre et  $\{x\}_i$  est la mode propre
- de flambage où  $\lambda_i$  indique la charge critique de flambage et  $\{x\}_i$  est la mode flambage
- Dans d'autres problèmes physiques, le problème aux valeurs propres doit être résolu pour obtenir l'information nécessaire aux méthodes d'analyse dans le temps (time-history analysis).

Cette méthode donne quelques avantages pour les propriétés matricielles :

Si [A] est réelle et symétrique alors les  $\lambda_i$  sont des réelles

Si [A] est réelle et symétrique et définie positive alors les  $\lambda_i$  sont positives

Si toutes les  $\lambda_i$  sont distinctes, alors tous les vecteurs propres sont distincts et linéairement indépendants.

Si les vecteurs propres sont normalisés de que  $\{x\}_i^T \{x\}_i = 1$  alors  $\{x\}_i^T [A] \{x\}_i = \lambda_i$

Ainsi pour la résolution de l'équation 2.93, chaque valeur propre de  $\lambda$  correspond à un coefficient multiplicateur des efforts appliqués, pour lesquels le champ de déplacements de la structure est donné par le vecteur propre associé  $v$ . Les valeurs de  $\lambda$  sont appelées des charges critiques et  $v$  les vecteurs propres sont les modes de flambages. On dit qu'une structure est résistante au flambage lorsque la plus petite valeur propre positive dite charge critique de flambage est supérieure à 1 ((Ferrari et al., 2021; Mitjana, 2018)).

### **2.3.5. LES MÉTHODES DE RÉOLUTION DES ÉQUATIONS :**

#### **2.3.5.1. RÉOLUTIONS DE L'ÉQUATION DE L'ÉQUILIBRE :**

Il existe plusieurs méthodes de résolution, l'équation d'équilibre correspondant au système linéaire de taille  $n$  :

$$Ku = f \quad (2.95)$$

où la matrice de rigidité  $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est symétrique définie positive et  $u$  et  $f \in \mathbb{R}^n$  sont respectivement les vecteurs de degrés de liberté nodaux et des forces exercées sur la structure. On distingue deux types de résolution : les méthodes directes et les méthodes itératives.

#### **2.3.5.2. MÉTHODE DIRECTE :**

Les méthodes directes sont généralement utilisées pour des systèmes de taille modérée, elles consistent à transformer l'équation 2.95 en un système triangulaire équivalent, qui peut ensuite être résolu. Étant donné que la matrice de rigidité  $K$  est symétrique et définie positive, la première étape de cette approche

repose sur sa factorisation par la décomposition de Cholesky ((Ferrari et al., 2021; Mitjana, 2018)

$$K = LL^T \quad (2.96)$$

Cette factorisation permet de ramener l'équation (2.96) aux deux systèmes triangulaires suivants :

$$L_y = f \text{ et } L^T u = y, \text{ où } y \in \mathbb{R}^n \quad (2.97)$$

Cependant, il est important de noter que, contrairement à  $K$ , la matrice de Cholesky  $L$  n'est pas creuse. Ainsi la factorisation explicite de la matrice  $K$  nécessite un espace de stockage important. Cette résolution étant extrêmement coûteuse en termes de mémoire, une alternative repose sur le concept des méthodes itératives pour des systèmes de grande dimension.

### **2.3.5.3. MÉTHODES ITÉRATIVES :**

La résolution itérative de l'équation 2.95 consiste à générer une suite d'approximations  $(u_k)_k$  de la Solution  $u$ , en partant d'une approximation initiale de la solution. L'objectif est de réduire progressivement le résidu  $r_k$  du système linéaire vers zéro, selon la relation suivante :

$$r_k = f - Ku_k \quad (2.98)$$

L'un des principaux avantages des méthodes itératives est qu'aucune factorisation de la matrice  $K$  n'est nécessaire. Ainsi, l'opération la plus coûteuse d'une méthode itérative correspond à la multiplication de la matrice de rigidité matrice  $K$  par un vecteur  $x$ . Généralement, pour réaliser cette opération, la matrice  $K$  est assemblée puis multipliée au vecteur  $x$ . Toutefois, lorsque le système

d'équations aux éléments finis devient très vaste, les exigences de stockage et le coût de calcul devient importante. La matrice peut être construite par la méthode proposée par Hughes et al. (1983) :

$$K_x = \sum_{i=1}^N [K_i x_i] \quad (2.99)$$

où :

N est le nombre d'éléments du maillage,  $K_i$  est la matrice de rigidité élémentaire de l'élément  $i$ ,  $x_i$  représente les degrés de liberté nodaux de l'élément  $i$  et  $[\ ]$  est le procédé d'assemblage par blocs des vecteurs  $K_i x_i$  dans le vecteur  $K_x$ .

Bien que cette technique présente l'avantage de ne jamais assembler la matrice de rigidité  $K$ , l'accès mémoire à la construction de chaque matrice de rigidité élémentaire peut s'avérer important.

### 2.3.6. RÉOLUTION DU PROBLÈME LIÉ AU FLAMBAGE :

La résolution du problème aux valeurs propres généralisées associé au flambage est une tâche complexe. Cette section met en lumière diverses méthodes développées pour déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres associés. Le problème de flambage se formule comme suit :

$$(K + \lambda G)v = 0 \quad (2.100)$$

où  $K, G \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sont respectivement les matrices de rigidité et de rigidité géométrique et  $n$  désigne la dimension du problème. Notons que le problème peut être reformulé comme :

$$Gv = \mu Kv, \text{ où } \mu = -\frac{1}{\lambda} \quad (2.101)$$

Pour des problèmes aux valeurs propres généralisées de petite taille, une méthode basée sur la décomposition de Cholesky de la matrice de rigidité (Mitjana, 2018). En notant  $L$  la matrice de factorisation de Cholesky de la matrice  $K$ , on peut réécrire (l'équation 2.101) comme :

$$(L^{-1}GL^{-T})(L^T v) = \mu(L^T v) \quad (2.102)$$

Ainsi les valeurs propres généralisées de l'équation 2.101 correspondent à celles du problème aux valeurs propres suivant :

$$C_y = \mu y, \text{ où } C = L^{-1}GL^{-T} \text{ et } y = L^T v \quad (2.103)$$

Cependant, comme pour les systèmes d'équations d'équilibre, la décomposition de Cholesky n'est pas souhaitable pour des problèmes de grande dimension en raison de ses exigences en mémoire et en calcul. Pour des problèmes de grande dimension, résoudre le problème de flambage avec la factorisation de Cholesky de la matrice  $(K + \alpha G)$  est nécessaire pour chaque valeur du paramètre  $\alpha$ , ce qui accroît considérablement le coût en mémoire lorsque plusieurs valeurs propres sont recherchées. Ce problème est particulièrement critique dans le cadre de l'optimisation topologique, où une perte d'information liée à ces valeurs propres peut ralentir, voire faire diverger, le processus d'optimisation.

Les langages de programmation comme Matlab permettent de résoudre ses systèmes complexes en raison de leur robustesse. Il a été utilisé dans plusieurs travaux scientifiques comme outil d'analyse d'éléments finis ou d'optimisation topologique. Sigmund (2001) a développé un code Matlab d'optimisation topologique, top99, pour la minimisation de la compliance des

structures chargées de manière statique. Cependant ce code était très lent. Alors Andreassen et al. (2011) ont un code top 88 à partir du code top 99 en ajoutant de nouvelles méthodes d'équations aux dérivées partielles et des filtres de projection noir et blanc. Cela a amélioré la vitesse d'exécution du code avec un facteur de 100 pour un exemple de référence de 7500 éléments. Les procédures de filtrage et d'assemblage des matrices complexes sur Matlab se sont développées avec une grande réduction de temps de calcul. On remarque cet avancement des processus d'optimisation topologique avec le code top99neo et top3D125 développé par Ferrari et Sigmund (2020). Ces implémentations ont augmenté la vitesse d'exécution du code top88 par 2.55 à 5.5.

On remarque une absence des logiciels d'optimisation topologique qui permet de prendre en compte le critère de flambage de la structure lors de l'optimisation (Ferreira & Simões, 2019). Le code de 250 lignes développé par Ferrari et al. (2021) pour l'optimisation topologique des structures 2D en tenant compte des critères de flambement linéarisés permet de réduire le volume et la compliance de la structure tout en respectant les facteurs de charge de flambement (Buckling load Factors, BLFs). Bian et Fang (2017) ont proposé une méthode pour résoudre les problèmes d'optimisation topologique tridimensionnelle à grande échelle sous des contraintes de flambement.

Elle est basée sur la méthode de déflation sans assemblage associé à la méthode de voxélisation (Bian & Fang, 2017) qui est une forme particulière de discrétisation spatiale où la géométrie est approximée par des éléments hexaédriques uniformes ou des voxels. Dans cette méthode, la matrice de rigidité

n'est jamais assemblée et l'analyse de flambage est effectuée par itération inverse.

L'Optimisation topologique nécessite une résolution par éléments finis, qui peut être longue pour les modèles complexes comme l'analyse de flambage. Cependant, les méthodes de réduction du temps de calcul permettent d'intégrer ces modèles complexes. Dans le cadre de la conception des structures, l'enjeu primordiale n'est pas le temps de résolution mais plutôt la fidélité du modèle à prédire des solutions plus proches de la réalité. Dans cette étude, un compromis entre la précision de la prédiction mécanique et la stabilité numérique est priorisé.

### **2.3.7. FLAMBAGE LINÉAIRE VERSUS FLAMBAGE NON LINÉAIRE**

Une analyse non linéaire permet de prendre en compte les grandes déformations et les grands déplacements afin de calculer le facteur de flambage réel (Dunning, 2023). Le phénomène de flambage n'apparaît pas seulement sous l'application d'une charge de compression ou de cisaillement (Kilardj et al., 2016) sur une structure, mais les charges de tractions peuvent aussi créer des instabilités de flambage ou des modes de flambage.

Cependant, l'analyse de la non-linéarité géométrique dans le calcul de stabilité reste encore un problème complexe (Li & Kennedy, 2024). Car il faut déterminer et contrôler les points limites et les points de bifurcation encore appelés les points singuliers (Memon & Su, 2004). Plusieurs méthodes pour la résolution du problème non linéaire ont été développées notamment par la méthode de Newton-raphson (Cresta, 2008; Memon & Su, 2004) qui permet de bien contrôler la charge, mais présente une limite pour le contrôle des points limites. La méthode

de l'arc- long permet de contrôler le facteur de chargement à chaque itération de sorte que la solution converge (Memon & Su, 2004).

En revanche, beaucoup de travaux sur la stabilité basée sur le flambage linéaire ont été réalisés. En général, une analyse linéaire du flambage est souvent critiquée, car elle représente une solution simple du phénomène de flambage tandis qu'une analyse non-linéaire de flambage est rarement utilisée dans l'optimisation topologique (Dunning, 2023) en raison des calculs plus coûteux. C'est pourquoi l'analyse de flambage linéaire reste toujours populaire à cause de sa simplicité d'implémentation et de son faible coût de calcul (Ferrari & Sigmund, 2020; Mitjana, 2018).

### **2.3.8. DISTINCTION ENTRE LA MÉTHODE CLASSIQUE ET LA MÉTHODE NUMÉRIQUE D'ANALYSE DE FLAMBAGE**

D'après la norme CSA S6 :19, la charge qui critique d'Euler est déterminée par (Beaulieu, 2023; Lévesque & Tremblay, 2010) :

$$C_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(KL)^2} \quad (2.104)$$

Avec K : coefficient de longueur effective

E : longueur libre de la pièce

La contrainte critique :

$$\sigma_e = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (2.105)$$

En supposant que la charge critique vaut une un certain facteur  $\lambda$  multiplier par la charge appliquée tel que :

$$C_{cr} = \lambda C_a \quad (2.106)$$

La figure 19 présente l'analogie entre la méthode numérique avec résolution par le problème aux valeurs propres et la CSA.

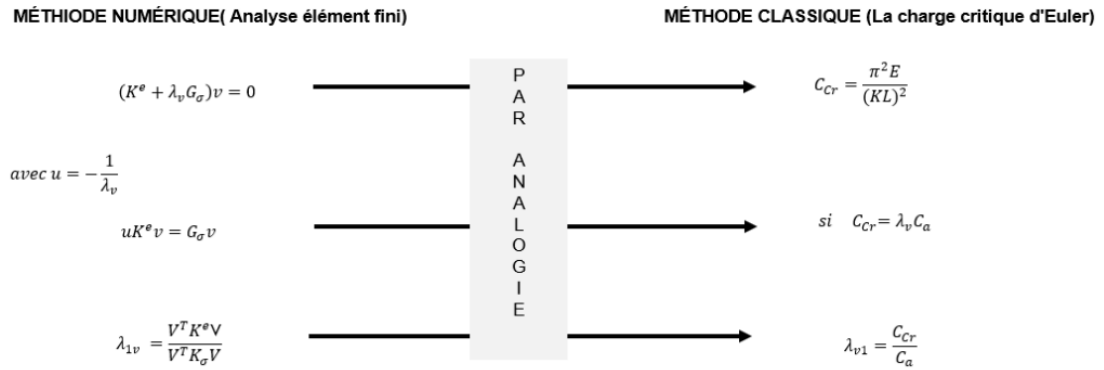


Figure 19 : Analogie entre la méthode numérique et la méthode classique

## CONCLUSION :

Ce chapitre a permis de faire une revue de littérature sur les différents champs de recherche du travail. Dans la première partie, un état des lieux sur les méthodes de conception des passerelles, et l'historique de l'utilisation des alliages d'aluminiums dans la construction des ponts et des passerelles a été effectué (sous-objectif 1).

En conclusion, il est important d'avoir un compromis entre la résistance et la masse lors de la conception d'une passerelle afin d'avoir une structure robuste et économique. L'utilisation de l'aluminium dans la conception des passerelles a augmenté récemment, car il offre un bon rapport résistance/masse avec une résistance à la corrosion. Les alliages de la série 5XXX et 6XXX sont très appréciés dans la conception des ponts grâce à leurs propriétés mécaniques élevées, leur résistance à la corrosion et leur facilité de fabrication. De plus, on doit tenir compte de plusieurs facteurs pertinents tels que les charges dynamiques, ainsi une étude du comportement dynamique est nécessaire. Une bonne maîtrise des charges externes comme la marche des piétons et sa densité ainsi que les forces du vent permet d'assurer la durabilité et la sécurité.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous avons étudié les méthodes d'optimisation des structures, en particulier l'optimisation topologique en respectant les critères de conception civile pour la conception des passerelles (sous-objectif 2). Les méthodes d'optimisation existantes sont classées suivant plusieurs critères. En tenant compte de la nature des variables, on peut distinguer les méthodes d'optimisation discrètes pour les problèmes à variables discrètes,

les méthodes d'optimisation continues pour les problèmes à variables continues ou des méthodes d'optimisation mixtes pour les problèmes à variable mixtes.

L'optimisation topologique s'applique aux structures discrétisées par des éléments de barres, de poutres, de membranes, de plaques ou de volume. Les approches d'optimisation topologiques les plus populaires sont la méthode d'homogénéisation, la méthode d'optimisation évolutionnaire, la méthode d'optimisation par variation de frontières et la méthode d'optimisation par distribution de densité relative (SIMP).

Bien que toutes ces méthodes aient démontré leur efficacité pour l'optimisation des structures en réduisant la masse et en maximisant la rigidité, la méthode d'optimisation par densité relative est largement utilisée pour sa simplicité. De plus la plupart des travaux présentés dans la revue de littérature se concentrent sur des problèmes bidimensionnels ou ne prennent pas en compte les contraintes de flambage.

Dans la troisième partie, les méthodes d'analyse du flambage des structures ont été étudiées. Les méthodologies d'intégration de l'analyse du flambage lors de l'optimisation ont été proposées par plusieurs chercheurs. Il a été constaté que plusieurs auteurs utilisent la méthode de résolution des problèmes aux valeurs propres pour résoudre les problématiques de flambage. Cependant, les approches d'optimisation topologique intégrant les contraintes de flambage sont restées limitées à cause de la complexité numérique, ce qui explique que de beaucoup d'études se limitent au cas 2D.

En outre le flambement linéaire est très populaire et très utilisé par les auteurs en raison de sa simplicité. En revanche, il ne permet pas de représenter le comportement réel des structures complexes. Le tableau 6 présente une synthèse comparative non exhaustive des principales études sur l'optimisation topologique des structures. Les critères retenus sont : la réduction du volume, le maintien de la rigidité, la prise en compte des critères de flambage linéaire, l'utilisation de la méthode SIMP et la modélisation dans un domaine 3D.

Tableau 6 : Synthèse Articles

Articles (année)	Objectif principal	Flambage intégré dans l'étude	Dimension	Méthode
(Ferrari et al., 2021)	Compliance	Oui	2D	SIMP
(Ferrari & Sigmund, 2020)	Compliance	Non	2D/3D	SIMP
(Mitjana, 2018; Mitjana et al., 2019)	Compliance	Oui	1D/3D	ESO/BESO
(Liu & Tovar, 2014)	Compliance	Non	3D	SIMP
(Andreassen et al., 2011)	Compliance	Non	3D	SIMP
Algorithme qui sera proposé	Compliance	Oui	3D	SIMP

## **CHAPITRE 3.**

### **MÉTHODOLOGIE ET STRUCTURE DU CODE D'OPTIMISATION**

Comme conclu dans le chapitre précédant, l'optimisation des structures est la recherche du compromis entre les impératifs économiques, mécaniques et technologiques du système. Les méthodes d'optimisation existantes sont classées suivant plusieurs critères. En tenant compte de la nature des variables, on utilise la méthode d'optimisation continue pour les problèmes à variables continues qui s'applique aux structures discrétisées. L'objectif principal de ce chapitre est de présenter une stratégie permettant de développer un algorithme Matlab d'optimisation topologique des structures 3D capable de prendre en compte les critères de flambage conformément au sous-objectif 3 de la section 1.3 du chapitre 1.

La méthodologie proposée dans ce travail consiste à utiliser la méthode SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization) qui est l'une des méthodes largement utilisées par les chercheurs, notamment à travers des travaux réalisés sous MATLAB (Y. Zhao & al.,2023). La méthode de résolution des problèmes de valeurs propres sera utilisée pour l'analyse de contraintes de flambage.

L'algorithme développé est une optimisation multi-objectif. La méthode de KS sera présentée pour agréger les contraintes d'optimisation en une seule contrainte. Ensuite, une validation numérique sera effectuée sous SolidWorks pour analyser le comportement des structures optimisées sous des charges de flambage.

### 3.1. HYPOTHÈSES

Comme hypothèse, nous considérons un matériau élastique linéaire et isotrope. Cette étude se limite au flambage linéaire. De plus, on ne s'intéresse qu'aux petites déformations et aux petits déplacements. Une validation numérique des résultats d'optimisation est effectuée afin d'évaluer l'efficacité de l'algorithme développé. La matrice de rigidité [k] est définie positivement ainsi, on ne prend en compte que les facteurs de flambage positifs.

### 3.2. FORMULATION DE L'OBJECTIF D'OPTIMISATION :

La méthode de Solid Isotropic Material with Penalization (SIMP) est la plus utilisée par les chercheurs dans la littérature. Cette méthode consiste à faire varier la densité de matière dans les éléments du maillage en fonction des contraintes appliquées pour trouver la forme la plus rigide. Dans cette étude, l'objectif est de résoudre un problème d'optimisation continue multi-objectif. La méthode SIMP a été utilisée pour le calcul de la densité physique de chaque élément dans le domaine de conception. Cela permet par la suite d'utiliser la méthode de gradient pour quantifier l'influence du critère d'optimalité sur les éléments.

L'équation du module de Young interpolé avec pénalisation de la méthode SIMP s'écrit comme suit :

$$E_k(\hat{x}_e) = E_{min} + (E_0 - E_{min})\hat{x}_e^{P_k} \quad (3.1)$$

$$E_G(\hat{x}_e) = (E_0)\hat{x}_e^{P_G} \quad (3.2)$$

Ainsi  $P_k$  et  $P_G$  représentent respectivement les facteurs de pénalisation pour la matrice de rigidité  $E_k$  et la matrice de contrainte  $E_G$ ,  $E_0$  est le module d'Young du matériau plein et  $E_{min}$  représente celle des vides.

Lors de l'optimisation topologique, les grandeurs physiques prises en compte sont les suivantes :

- La fraction volumique totale

$$f(\hat{X}) = \frac{1}{m} \sum_{e=1}^m \hat{x}_e \quad (3.3)$$

- La compliance est une mesure de la flexibilité sous l'effet des charges appliquées, dans ce travail, l'objectif est de minimiser la compliance linéaire (équation 3-4) afin d'augmenter la rigidité de la structure

$$c(\hat{X}) = F^T U(\hat{X}) \quad (3.4)$$

### 3.3. APPROCHE DE RÉOLUTION DU PROBLÈME D'OPTIMISATION

Afin de développer l'algorithme pour les structures 3D, un algorithme a été développé sous Matlab à partir du modèle 2D de Federico et al (2021) qui prend en compte les critères de flambage linéaire lors de l'optimisation topologique de la structure.

Un problème d'optimisation topologique présente des contraintes multiples qui peuvent être locales ou globales. Dans cette étude, trois (3) contraintes (volume, rigidité et contrainte de flambage) sont intégrées dans la fonction objective, ainsi l'utilisation d'une fonction d'agrégation pour agréger les trois contraintes en une seule contrainte différentiable est nécessaire (Jun & Yun-kang, 2009). Cela permet

de résoudre le problème d'optimisation multi-objective par une approche d'approximation séquentielle.

Dans ce travail, le flambage est modélisé à partir du problème aux valeurs propres par l'équation 3.5:

$$K(\hat{X})V_i = \lambda_i G(\hat{X}) \quad (3.5)$$

Le facteur de charge de flambage fondamental est calculé comme suit :

$$\lambda_1(\hat{X}, U) = \min_{V \in \mathbb{R}^n, V \neq 0} - \frac{V^T K[\hat{X}]V}{V^T G[\hat{X}, U]V} \quad (3.6)$$

L'équation de la compliance et du facteur de charge de flambage fondamental font toutes deux références au même vecteur de charge  $F \in \mathbb{R}^n G[\hat{X}, U]$  avec  $U(\hat{X}) = K[\hat{X}]^{-1} F K[\hat{X}]$ .

Avec K la matrice de rigidité, G la matrice géométrique et V le vecteur propre qui représente les modes de flambage.

Soit  $J_{KS}$  la fonction d'agrégation de Kreisselmeier- Steinhausen (KS) (Ferrari et al., 2021) :

$$J^{KS}[\mu_i](\hat{X}) = \mu_1(\hat{X}) + \frac{1}{\rho} \ln \left( \sum_{i=1}^q e^{\rho(\mu_i(\hat{X}) - \mu_1(\hat{X}))} \right) \quad (3.7)$$

où  $\mu_i = \frac{1}{\lambda_i}$  et  $\rho \in [1, \infty)$ .

Cela permet d'agréger plusieurs modes de flambage pendant l'optimisation avec une borne supérieure sur  $\mu_1$  donc une borne inférieure sur  $\lambda_1$ .

Les contraintes et les fonctions objectives sont remplacées par leur approximation monotone de type MMA (Méthode des Asymptotes Mobiles) à chaque étape de la reconception.

$$\begin{cases} \min_{x \in [0,1]^m} f(\hat{X}) \\ \text{s.t.} & J_1^{KS}[g_c, g_\lambda](\hat{X}) \leq 0 \end{cases}$$

$$g_c(\hat{X}) = c(\hat{X})/\bar{c} - 1 \quad (3.8)$$

$$g_\lambda(\hat{X}) = 1 - \underline{\lambda} J^{KS}[u_i](\hat{X})$$

$\bar{c}$  et  $\underline{\lambda}$  sont la compliance maximale autorisée et le facteur de flambage minimum prescrit et  $J^{KS}$  est la fonction d'agrégation de Kreisselneier et Steinhauser.

La figure 20 représente la méthodologie globale utilisée dans cette étude. La première étape consiste à développer un algorithme d'optimisation topologique des structures 3D prenant en compte les contraintes de flambage sous MATLAB. Ensuite, un algorithme d'extraction de la structure optimisée sous contrainte de flambage en fichier maillage STL est développé. Le fichier maillage est transformé en pièce solide dans SolidWorks afin d'effectuer une étude de comportement au flambage.

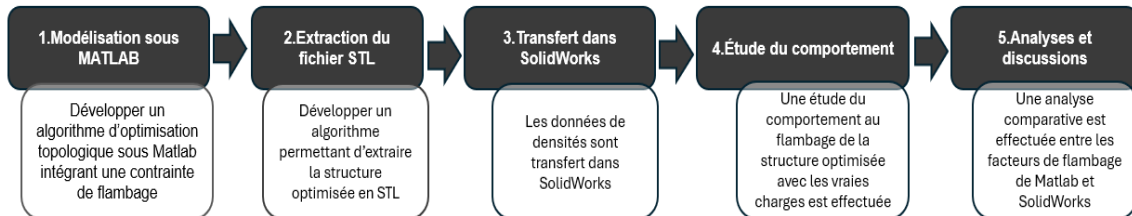


Figure 20 : Méthodologie globale d'optimisation

La figure 21 représente la structure de l'algorithme développé sous MATLAB.

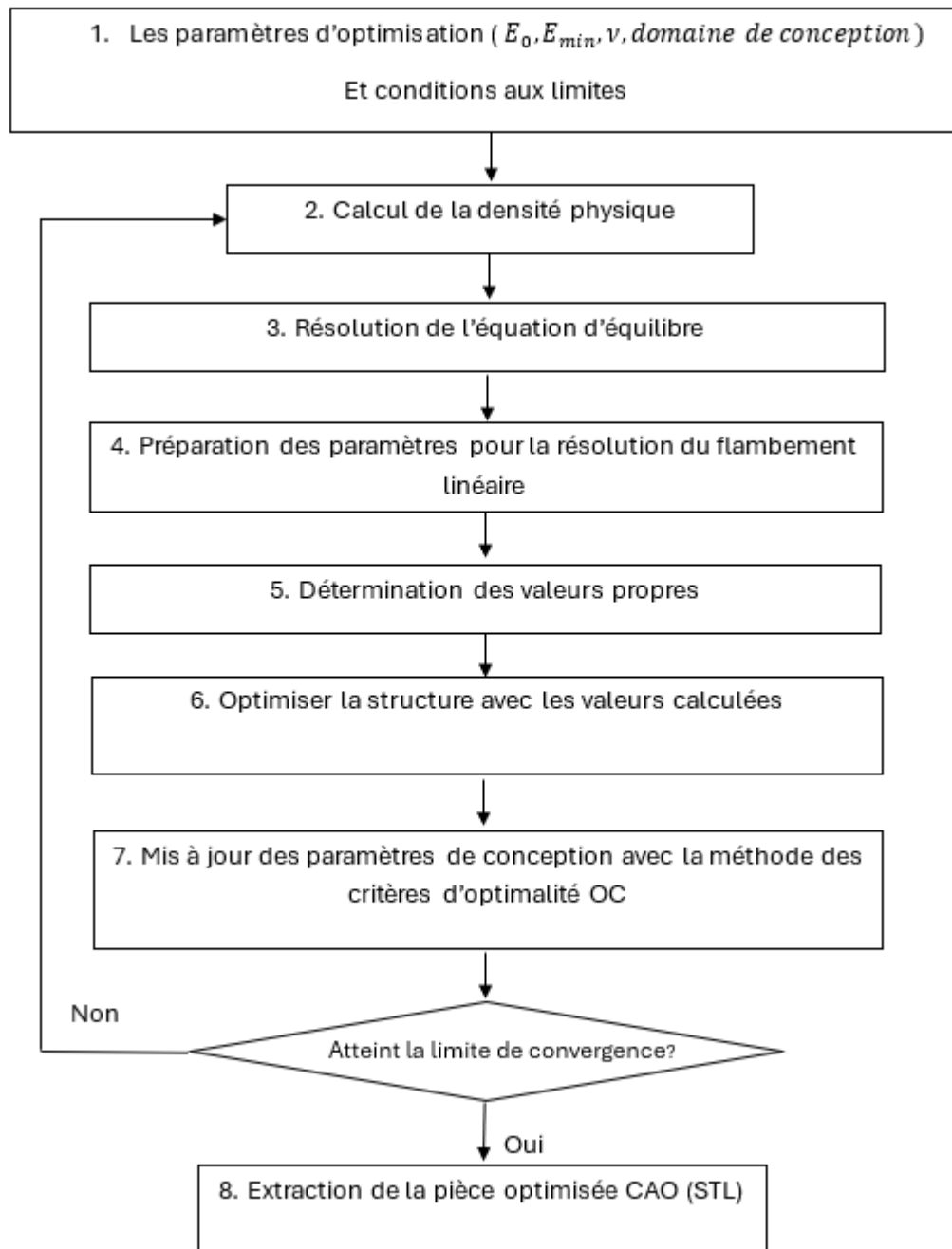


Figure 21 : Structure du code d'optimisation

### 3.4. IMPLÉMENTATION MATLAB 3D :

Nous considérons un domaine discrétisé structurée  $\Omega_h$  de m élément de taille  $\Omega_e$  pour un total de n degrés de liberté.  $\hat{X} = \{\hat{x}_e\}_{e=1:m \in [0,1]^m}$  est divisé entre  $X_A$ (les variables de conception actives) et  $X_p$ (les variables de conception passives). Les variables physiques sont définies par la projection Heaviside. Elle permet de binariser les densités filtrées en valeurs en 0 ou 1. Cela permet de l'éliminer les zones de densité intermédiaire. Les paramètres de contrôle  $\beta$  et  $\eta$  doivent être bien calibrer pour éviter une convergence prématurée lors de l'optimisation (Yanda, 2025)

Lorsque  $ft=2$ , le code utilise la projection de Heaviside ce qui permet de rendre la solution binaire à la fin d'optimisation.

$$\hat{X}_A = H(\tilde{X}) \quad (3.9)$$

$$H(\hat{x}_e, \eta, \beta) = \frac{\tanh(\beta\eta) + \tanh(\beta(\hat{x}_e - \eta))}{\tanh(\beta\eta) + \tanh(\beta(1 - \eta))} \quad (3.10)$$

Avec  $\eta$  le seuil et  $\beta$  le facteur de netteté.

Le filtre de densité classique permet de préserver le volume global de matière dans la structure au cours de l'optimisation. Elle permet de rendre lisses les variables de conception en effectuant une moyenne pondérée des densités des éléments voisins.

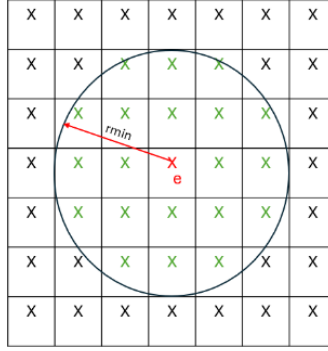


Figure 22 : Rayon de filtrage

L'objectif est d'éviter les motifs indésirables tels que les motifs en damier. Lorsque  $ft=1$ , le code utilise un filtre de densité classique (Sigmund, 2001) défini par :

$$\hat{X} = Hx \quad (3.11)$$

$$H(\hat{x}_e, r_{min}) = \frac{\sum_{i \in N_e} h_{e,i} x_i}{\sum_{i \in N_e} h_{e,i}} \quad (3.12)$$

où  $N_e = \{i | dist(\Omega_i, \Omega_e) < r_{min}\} h_{e,i} = \max(0, r_{min} - dist(\Omega_i, \Omega_e))$

Dans la première section du code, après la fonction principale, nous définissons les paramètres du matériau. Le domaine de conception est défini par les arguments  $nelx$ ,  $nely$  et  $nelz$ , qui définissent les dimensions physiques et la résolution du maillage. Par la suite la fraction volumique autorisée est définie et les facteurs de pénalisation,  $penalk$  pour la matrice de rigidité et  $penalG$  pour la matrice de contrainte. Les informations sur les filtres sont également définies par  $r_{min}$  est le rayon minimal du filtrage,  $\eta$  le seuil et  $\beta$  le facteur de netteté. Le paramètre de filtrage est défini par  $ft$  (pour la valeur  $ft=1$ , on applique un simple filtrage par densité tandis que pour  $ft=2$ , on utilise la projection Heaviside ce qui permet une solution plus précise et une stabilité numérique).

La première étape consiste à calculer la densité physique. La figure 23 présente l'algorithme qui calcule la densité physique. Les données d'entrées sont la taille du domaine de conception et le rayon minimal de filtre.

Algorithme 1 : calcul de la densité physique

**Données d'entrées** : nelx, nely, nelz, rmin,  $\beta$ ,  $\eta$ , dx, dy, dz

❖ Calcul du noyau de filtrage h

$$h = \max(0, r_{min} - \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2})$$

❖ Matrice de filtrage

$$H_s = \text{imfilter}(\text{ones}(nely, nelz, nelx), h)$$

❖ Calcule de la densité physique xphys

$$x = \text{imfilter}(\text{reshape}(x, nely, nelz, nelx), h) / H_s.$$

**Sortie**: Xphys

Figure 23 : Algorithme 1 calcul de densité physique

Le module de Young du matériau est défini par  $E_0$  et par  $E_{min}$  celle des zones vides.  $\nu$  représente le coefficient de Poisson. Par la suite les paramètres de continuité sont initialisés. La résolution numérique d'un problème d'optimisation topologique nécessite une discrétisation par élément fini. Nous avons utilisé la méthode des éléments finis décrite par (Ferrari & Sigmund, 2020) avec un élément hexaédrique à 8 nœuds. Ainsi nous allons déterminer les matrices élémentaires, les matrices de rigidité et globales qui sont toutes nécessaires pour les calculs aux éléments finis.

Tout d'abord, nous calculons le nombre d'éléments dans le domaine de conception avec la fonction nEL. Les numéros des nœuds sont stockés dans la

fonction nodeNrs et la matrice de connectivité, qui permet l'assemblage de la matrice de rigidité (figure 24). Dans cette partie, les degrés de liberté des éléments sont définis, c'est-à-dire les éléments qui sont fixes ou libres. Les données d'entrée seront la densité physique calculée l'algorithme 1 et la charge appliquée sur la structure.

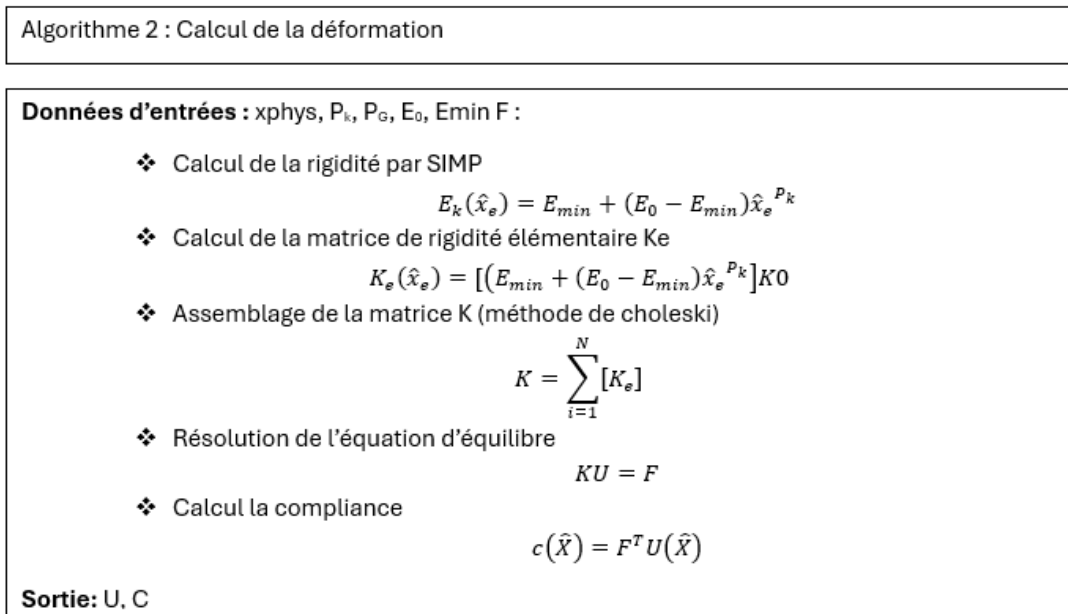


Figure 24 : Algorithme calcule des déformations et de la compliance

### 3.5. DÉTERMINATION DES COORDONNÉES DES ÉLÉMENTS

Soit  $X^e = [x_i^e; y_i^e; z_i^e]_{i=1}^k$  regroupant les coordonnées d'un élément à k nœuds, et  $N(\xi, \eta, \zeta) = [N_1(\xi, \eta, \zeta), N_2(\xi, \eta, \zeta), \dots, N_k(\xi, \eta, \zeta)]$ , représentant les fonctions de forme avec  $(\xi, \eta, \zeta)$  les coordonnées logiques.

Le gradient (x,y,z) des fonctions de forme est calculé par :

$$\nabla_{(x,y,z)} N = J^{-1} \nabla_{(\xi,\eta,\zeta)} N \tag{3.13}$$

$$\nabla_{(\xi,\eta,\zeta)} N = \begin{bmatrix} \partial_\xi N_1, & \dots, & \partial_\xi N_k \\ \partial_\eta N_1, & \dots, & \partial_\eta N_k \\ \partial_\zeta N_1, & \dots, & \partial_\zeta N_k \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$J_{(\xi,\eta,\zeta)} = \begin{bmatrix} \sum_k \partial_\xi N_k x_k & \sum_k \partial_\xi N_k y_k & \sum_k \partial_\xi N_k z_k \\ \sum_k \partial_\eta N_k x_k & \sum_k \partial_\eta N_k y_k & \sum_k \partial_\eta N_k z_k \\ \sum_k \partial_\zeta N_k x_k & \sum_k \partial_\zeta N_k y_k & \sum_k \partial_\zeta N_k z_k \end{bmatrix} = \nabla_{(\xi,\eta,\zeta)} N X^e \quad (3.15)$$

Le gradient de déformation discrétisé  $B_1$  et l'opérateur de déformation-déplacement  $B_0$  sont déterminés par :

$$B_1 = \begin{bmatrix} \nabla_{(x,y,z), N} \otimes [1,0,0]^T \\ \nabla_{(x,y,z), N} \otimes [0,1,0]^T \\ \nabla_{(x,y,z), N} \otimes [0,0,1]^T \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$B_0 = L(\nabla_{(x,y,z), N} \otimes I_3) \quad (3.17)$$

Avec  $L$  la matrice de déplacement (ici illustrée pour un élément  $Q_8$ ) et  $I_3$  est une matrice identité d'ordre 3.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Les coordonnées des nœuds pour un élément hexaédrique à 8 nœuds :

- Nœud 1

$$\frac{\delta N_1}{\delta \xi} = \frac{1}{8}(\eta - 1)(\zeta - 1)$$

$$\frac{\delta N_1}{\delta \eta} = \frac{1}{8}(\xi - 1)(\zeta - 1)$$

$$\frac{\delta N_1}{\delta \zeta} = \frac{1}{8}(\xi - 1)(\eta - 1)$$

- Nœud 2

$$\frac{\delta N_2}{\delta \xi} = \frac{1}{8}(1 - \eta)(1 - \zeta)$$

$$\frac{\delta N_2}{\delta \eta} = \frac{1}{8}(-\xi - 1)(-\zeta - 1)$$

$$\frac{\delta N_2}{\delta \zeta} = \frac{1}{8}(-\xi - 1)(\eta - 1)$$

- Nœud 3

$$\frac{\delta N_3}{\delta \xi} = \frac{1}{8}(1 + \eta)(1 - \zeta)$$

$$\frac{\delta N_3}{\delta \eta} = \frac{1}{8}(\xi + 1)(1 - \zeta)$$

$$\frac{\delta N_3}{\delta \zeta} = \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 + \eta)$$

- Nœud 4

$$\frac{\delta N_4}{\delta \xi} = \frac{1}{8}(-1 - \eta)(-1 - \zeta)$$

$$\frac{\delta N_4}{\delta \eta} = \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \zeta)$$

$$\frac{\delta N_4}{\delta \zeta} = \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 + \eta)$$

- Nœud 5

$$\frac{\delta N_5}{\delta \xi} = \frac{1}{8}(\eta - 1)(-1 - \zeta)$$

$$\frac{\delta N_5}{\delta \eta} = \frac{1}{8}(\xi - 1)(-\zeta - 1)$$

$$\frac{\delta N_5}{\delta \zeta} = \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)$$

- Nœud 6

$$\frac{\delta N_6}{\delta \xi} = \frac{1}{8}(1 - \eta)(1 + \zeta)$$

$$\frac{\delta N_6}{\delta \eta} = \frac{1}{8}(-\xi - 1)(-\zeta - 1)$$

$$\frac{\delta N_6}{\delta \zeta} = \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 - \eta)$$

- Nœud 7

$$\frac{\delta N_7}{\delta \xi} = \frac{1}{8}(1 + \eta)(1 + \zeta)$$

$$\frac{\delta N_7}{\delta \eta} = \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 + \zeta)$$

$$\frac{\delta N_7}{\delta \zeta} = \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 + \eta)$$

- Nœud 8

$$\frac{\delta N_8}{\delta \xi} = \frac{1}{8}(-1 - \eta)(-1 - \zeta)$$

$$\frac{\delta N_8}{\delta \eta} = \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 + \zeta)$$

$$\frac{\delta N_8}{\delta \zeta} = \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 + \eta)$$

La matrice d'élasticité pour un élément hexaédrique est définie par l'équation 3.19:

$$D = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 - \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1 - \nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 - 2\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 - 2\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 - 2\nu) \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

### 3.6. PARAMÉTRAGE DES VALEURS PROPRES DE FLAMBAGE

Pour l'analyse de flambement des valeurs propres, il est nécessaire d'assembler la matrice de contrainte  $G[\hat{X}, u]$  ainsi que  $G^e[\hat{x}_e, u_e]$  pour chaque élément. Les composantes de la contrainte sont déterminées par l'équation 3.20:

$$\sigma_0^e = DB_0 u^e \quad (3.20)$$

Avec D la matrice d'élasticité et  $B_0$  l'opérateur de contrainte-déplacement linéarisé.

La matrice de rigidité des contraintes est déterminée par :

$$G^e[u_e] = \int_{\Omega_0} B_1^T T[\sigma_0^e] B_1 d\Omega_0 \quad (3.21)$$

Où  $B_1$  est le gradient de déformation :

$$B_1 = \begin{bmatrix} \partial_x N_1 & 0 & 0 & \partial_x N_2 & 0 & 0 & \dots & \partial_x N_7 & 0 & 0 & \partial_x N_8 & 0 & 0 \\ \partial_y N_1 & 0 & 0 & \partial_y N_2 & 0 & 0 & \dots & \partial_y N_7 & 0 & 0 & \partial_y N_8 & 0 & 0 \\ \partial_z N_1 & 0 & 0 & \partial_z N_2 & 0 & 0 & \dots & \partial_z N_7 & 0 & 0 & \partial_z N_8 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_x N_1 & 0 & 0 & \partial_x N_2 & 0 & \dots & 0 & \partial_x N_7 & 0 & 0 & \partial_x N_8 & 0 \\ 0 & \partial_y N_1 & 0 & 0 & \partial_y N_2 & 0 & \dots & 0 & \partial_y N_7 & 0 & 0 & \partial_y N_8 & 0 \\ 0 & \partial_z N_1 & 0 & 0 & \partial_z N_2 & 0 & \dots & 0 & \partial_z N_7 & 0 & 0 & \partial_z N_8 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_x N_1 & 0 & 0 & \partial_x N_2 & \dots & 0 & 0 & \partial_x N_7 & 0 & 0 & \partial_x N_8 \\ 0 & 0 & \partial_y N_1 & 0 & 0 & \partial_y N_2 & \dots & 0 & 0 & \partial_y N_7 & 0 & 0 & \partial_y N_8 \\ 0 & 0 & \partial_z N_1 & 0 & 0 & \partial_z N_2 & \dots & 0 & 0 & \partial_z N_7 & 0 & 0 & \partial_z N_8 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Les composantes de contraintes sont disposées comme suit :

$$T[\sigma_0^e] = I_3 \otimes \sigma_0^e = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & \tau_{zy} & \sigma_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau_{xz} & \tau_{zy} & \sigma_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_{xz} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Avec  $I_3$  une matrice identité d'ordre 3.

L'extension du produit  $B_1^T T[\sigma_0^e] B_1$  est :

$$G_{\{Q_8\}}^e = \begin{bmatrix} Z_{11} & 0 & Z_{12} & 0 & Z_{13} & 0 & Z_{14} & 0 & Z_{15} & 0 & Z_{16} & 0 & Z_{17} & 0 & Z_{18} & 0 \\ 0 & Z_{11} & 0 & Z_{12} & 0 & Z_{13} & 0 & Z_{14} & 0 & Z_{15} & 0 & Z_{16} & 0 & Z_{17} & 0 & Z_{18} \\ Z_{21} & 0 & Z_{22} & 0 & Z_{23} & 0 & Z_{24} & 0 & Z_{25} & 0 & Z_{26} & 0 & Z_{27} & 0 & Z_{28} & 0 \\ 0 & Z_{21} & 0 & Z_{22} & 0 & Z_{23} & 0 & Z_{24} & 0 & Z_{25} & 0 & Z_{26} & 0 & Z_{27} & 0 & Z_{28} \\ Z_{31} & 0 & Z_{32} & 0 & Z_{33} & 0 & Z_{34} & 0 & Z_{35} & 0 & Z_{36} & 0 & Z_{37} & 0 & Z_{38} & 0 \\ 0 & Z_{31} & 0 & Z_{32} & 0 & Z_{33} & 0 & Z_{34} & 0 & Z_{35} & 0 & Z_{36} & 0 & Z_{37} & 0 & Z_{38} \\ Z_{41} & 0 & Z_{42} & 0 & Z_{43} & 0 & Z_{44} & 0 & Z_{45} & 0 & Z_{46} & 0 & Z_{47} & 0 & Z_{48} & 0 \\ 0 & Z_{41} & 0 & Z_{42} & 0 & Z_{43} & 0 & Z_{44} & 0 & Z_{45} & 0 & Z_{46} & 0 & Z_{47} & 0 & Z_{48} \\ Z_{51} & 0 & Z_{52} & 0 & Z_{53} & 0 & Z_{54} & 0 & Z_{55} & 0 & Z_{56} & 0 & Z_{57} & 0 & Z_{58} & 0 \\ 0 & Z_{51} & 0 & Z_{52} & 0 & Z_{53} & 0 & Z_{54} & 0 & Z_{55} & 0 & Z_{56} & 0 & Z_{57} & 0 & Z_{58} \\ Z_{61} & 0 & Z_{62} & 0 & Z_{63} & 0 & Z_{64} & 0 & Z_{65} & 0 & Z_{66} & 0 & Z_{67} & 0 & Z_{68} & 0 \\ 0 & Z_{61} & 0 & Z_{62} & 0 & Z_{63} & 0 & Z_{64} & 0 & Z_{65} & 0 & Z_{66} & 0 & Z_{67} & 0 & Z_{68} \\ Z_{71} & 0 & Z_{72} & 0 & Z_{73} & 0 & Z_{74} & 0 & Z_{75} & 0 & Z_{76} & 0 & Z_{77} & 0 & Z_{78} & 0 \\ 0 & Z_{71} & 0 & Z_{72} & 0 & Z_{73} & 0 & Z_{74} & 0 & Z_{75} & 0 & Z_{76} & 0 & Z_{77} & 0 & Z_{78} \\ Z_{81} & 0 & Z_{82} & 0 & Z_{83} & 0 & Z_{84} & 0 & Z_{85} & 0 & Z_{86} & 0 & Z_{87} & 0 & Z_{88} & 0 \\ 0 & Z_{81} & 0 & Z_{82} & 0 & Z_{83} & 0 & Z_{84} & 0 & Z_{85} & 0 & Z_{86} & 0 & Z_{87} & 0 & Z_{88} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

On identifie 36 coefficients indépendants qui sont indiqués en bleu dans la matrice (équation 3.24). D'autre part, le coefficient  $Z_{ik}$  ( $i, k = 1, \dots, 8$ ) peut être exprimé comme une combinaison linéaire des composantes de contrainte (référence).

$$Z_{ik} = \sigma_x a_k a_i + \sigma_y b_k b_i + \sigma_z c_k c_i + \tau_{xy} (b_k a_i + a_k b_i) + \tau_{yz} (c_k b_i + b_k c_i) + \tau_{zx} (a_k c_i + c_k a_i) \quad (3.25)$$

Avec  $a_i = \partial_x N_i$ ,  $b_i = \partial_y N_i$  et  $c_i = \partial_z N_i$ .

Soit  $Z \in \mathbb{R}^{m \times 36} \mathbb{R}^{m \times 6} \ni S = [\sigma_x^e, \sigma_y^e, \sigma_z^e, \tau_{xy}^e, \tau_{yz}^e, \tau_{zx}^e]_{e=1:m}$

$$B = \begin{bmatrix} a_{l(i,1)}a_{l(i,2)} \\ b_{l(i,1)}b_{l(i,2)} \\ c_{l(i,1)}c_{l(i,2)} \\ b_{l(i,2)}a_{l(i,1)} + a_{l(i,2)}b_{l(i,1)} \\ c_{l(i,2)}b_{l(i,1)} + b_{l(i,2)}c_{l(i,1)} \\ c_{l(i,2)}a_{l(i,1)} + a_{l(i,2)}c_{l(i,1)} \end{bmatrix}_{i=1:36} \quad (3.26)$$

Où  $l \in \mathbb{N}^{36 \times 2}$

$$l = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \dots & 6 & 7 & 8 & 7 & 8 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & 6 & 6 & 6 & 7 & 7 & 8 \end{bmatrix}^T \quad (3.27)$$

Les coefficients indépendants mis en évidence dans le modèle sont regroupés dans la matrice suivante :

$$G_{\{Q_8\}}^{e,unique} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & Z_{14} & Z_{15} & Z_{16} & Z_{17} & Z_{18} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} & Z_{24} & Z_{25} & Z_{26} & Z_{27} & Z_{28} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} & Z_{34} & Z_{35} & Z_{36} & Z_{37} & Z_{38} \\ Z_{41} & Z_{42} & Z_{43} & Z_{44} & Z_{45} & Z_{46} & Z_{47} & Z_{48} \\ Z_{51} & Z_{52} & Z_{53} & Z_{54} & Z_{55} & Z_{56} & Z_{57} & Z_{58} \\ Z_{61} & Z_{62} & Z_{63} & Z_{64} & Z_{65} & Z_{66} & Z_{67} & Z_{68} \\ Z_{71} & Z_{72} & Z_{73} & Z_{74} & Z_{75} & Z_{76} & Z_{77} & Z_{78} \\ Z_{81} & Z_{82} & Z_{83} & Z_{84} & Z_{85} & Z_{86} & Z_{87} & Z_{88} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

La matrice  $G_{\{Q_8\}}^{e,unique}$ , nous permet de déterminer la position des coefficients indépendants à travers leurs indices dans la matrice, ce qui facilite l'assemblage de la matrice de K et G. La matrice K est assemblée comme défini dans (Ferrari & Sigmund, 2020; Mitjana, 2018). La matrice de rigidité G est décomposée à l'aide de la factorisation de Cholesky, cela permet la résolution du problème des valeurs propres. La figure 25 présente l'algorithme permettant de résoudre le problème des valeurs propres après la détermination de la matrice de contrainte.

Algorithme 3 : Calcul des valeurs propres et des vecteurs propres

**Données d'entrées :**  $x_{phys}$ ,  $U$ ,

- ❖ Calcul de la matrice de contrainte par SIMP

$$E_G(\hat{x}_e) = (E_0)\hat{x}_e^{PG}$$

- ❖ Matrice calcul de la matrice de contrainte élémentaire  $G_e$

$$G_e(\hat{x}_e) = (E_0)\hat{x}_e^{PG}G_{e0}$$

- ❖ Assemblage de la matrice  $G$  (méthode de choleski)

$$G = \sum_{i=1}^N [G_e]$$

- ❖ Résolution du problème aux valeurs propres

$$(K + \lambda G)\phi = 0$$

**Sortie :**  $\lambda$ ,  $\phi$

Figure 25 : Algorithme de résolution du problème des valeurs propres

### 3.7. CALCUL DE LA SENSIBILITÉ ET SCHÉMAS DE FILTRAGE

Au cours de l'optimisation topologique, la variation de la densité de matière dans chaque élément peut affecter la fonction objective. La sensibilité permet d'évaluer cette variation afin de guider le processus d'enlèvement de matière ou d'ajout de matière. La méthode de gradient topologique est utilisée pour déterminer la variation de la densité physique lors de l'optimisation. Plusieurs méthodes existent telles que :

- ❖ La méthode des différences finies, c'est une méthode simple, mais non viable lorsqu'un grand nombre de variables est considéré comme le cas de la résolution d'un problème aux valeurs propres.
- ❖ La méthode directe qui consiste à déterminer analytiquement le  $\frac{\partial G^e}{\partial \hat{x}_e}$  et nécessite la résolution d'un grand nombre de systèmes linéaires.
- ❖ La méthode des adjointes consiste à introduire des variables dites adjointes dans le calcul des dérivées de  $G^e$  par rapport à la présence d'élément  $\hat{x}_e$ .

Nous allons dériver les matrices élémentaires par  $\hat{x}_e$  :

$$\frac{\partial K^e}{\partial \hat{x}_e} = \frac{\partial E_k(\hat{x}_e)}{\partial \hat{x}_e} K_0^e \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial G^e}{\partial \hat{x}_e} = \frac{\partial E_G(\hat{x}_e)}{\partial \hat{x}_e} G_0^e \quad (3.30)$$

Les gradients de la compliance et du volume structurel par rapport à  $\hat{X}$  :

$$\nabla_{\hat{X}} c(\hat{X}) = -U^T \nabla_{\hat{X}} K U \chi_A \quad (3.31)$$

$$\nabla_{\hat{X}} V(\hat{X}) = \frac{1}{m} 1_m \chi_A \quad (3.32)$$

Ainsi les sensibilités par rapport aux variables de conception sont déterminées par :

$$\nabla_X c(X) = \nabla_{\hat{X}} \mathcal{H} \odot (H^T \nabla_{\hat{X}} c(\hat{X})) \quad (3.33)$$

$$\nabla_X V(X) = \nabla_{\hat{X}} \mathcal{H} \odot (H^T \nabla_{\hat{X}} c(\hat{X})) \quad (3.34)$$

$$\nabla_{\hat{X}} \mathcal{H} = \beta \frac{1 - \tanh(\beta(\tilde{X} - \eta))^2}{\tanh(\beta\eta) + \tanh(\beta(1 - \eta))} \quad (3.35)$$

Avec  $\odot$  représente la multiplication élément par élément.

Ainsi la sensibilité des valeurs propres est :

$$\frac{\partial \mu_i}{\partial \hat{x}_e} = \left[ \varphi_i^T \frac{\partial G}{\partial \hat{x}_e} \varphi_i + \mu_i \varphi_i^T \frac{\partial K}{\partial \hat{x}_e} \varphi_i - w_i^T \frac{\partial K}{\partial \hat{x}_e} u \right] \quad (3.36)$$

Ou  $w_i$  est le vecteur adjoint :  $w_i = K^{-1}[\varphi_i^T (\nabla_u G) \varphi_i]$

### 3.8. MAILLAGE ET VISUALISATION :

Après l'optimisation de la structure, il est nécessaire de convertir le modèle optimisé en un modèle solide CAO pour qu'il soit utilisé dans les processus de conception et de validation. L'une des méthodes les plus utilisées est la méthode de lissage, elle permet de lisser la forme discrétisée de la structure optimisée tout en conservant les caractéristiques telles que les plis et les coins (Hsu & Hsu, 2005). En revanche, les méthodes basées sur la modification de la position des sommets, souffrent d'un important rétrécissement du maillage et de la perte de caractéristiques géométriques importantes comme les trous et la planéité de surface.

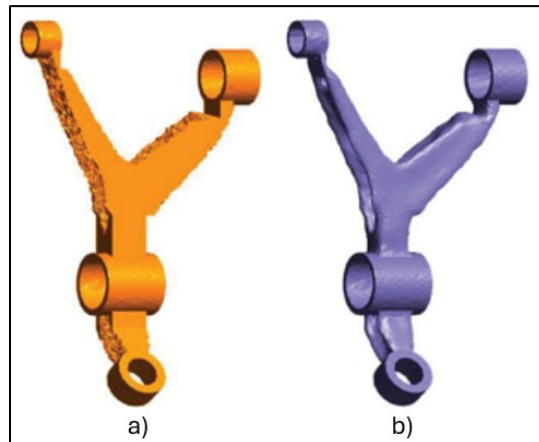


Figure 26 : Lissage de la structure optimisée : a) sans lissage et b) avec lissage (Nana et al., 2017)<sup>9</sup>

Pour les méthodes d'optimisation basées sur le solide isotrope matériel avec pénalisation SIMP, l'approche des contours de densité a eu un grand succès. Les densités des éléments du résultat de l'optimisation topologique sont redistribuées en densités nodales, et le contour de densité nodale est généré à

<sup>9</sup> Elsevier License (n°6142770916562)

une valeur de densité spécifiée. Ce contour est ensuite transféré dans une représentation CAO lisse (telle que des B-splines) de la structure. L'isosurface est l'analogue en 3D de l'isocontour. La méthode des cubes en marche est l'un des algorithmes les plus célèbres pour générer une isosurface. Plusieurs algorithmes d'extraction d'isosurface rapide dans les éléments non structurés tels que les éléments tétraédriques sont proposés.

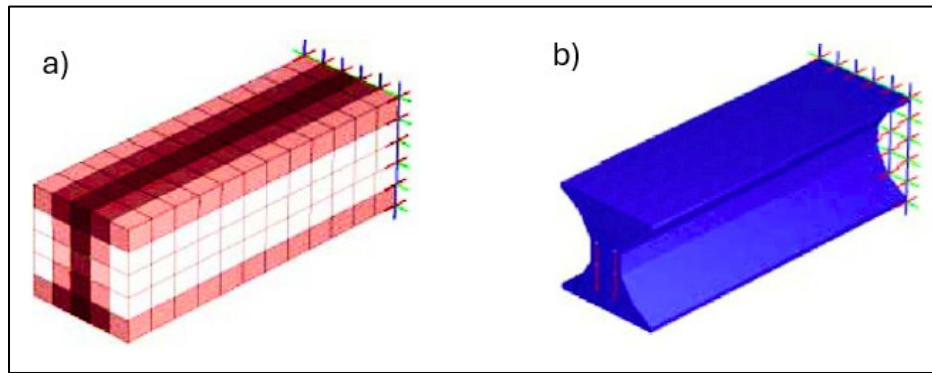


Figure 27 : Extraction d'une isosurface (Koguchi & Kikuchi, 2006)<sup>10</sup>

Dans cette étude, la discrétisation du modèle est définie par des éléments finis hexaédriques à 8 nœuds. La structure optimisée est obtenue par extraction d'une isosurface à partir de la densité physique déterminée après optimisation. La fonction isosurface de MATLAB produit directement des triangles surfaciques du domaine tridimensionnel. Les fonctions Isocaps et smooth permettent d'avoir une meilleure visualisation de la topologie optimisée. Par la suite la surface extraite est exportée sous forme d'un fichier maillage STL binaires composés de faces et sommets à l'aide l'algorithme proposé par (Ferreira & Simões, 2019) permettant ainsi de convertir le résultat d'optimisation en un modèle CAO maillé. Un fichier STL contient les coordonnées des sommets composant le maillage, les identifiants

<sup>10</sup> Springer nature License (Licence n° 6142771417128)

des sommets d'une facette triangulaire et les composantes du vecteur normal de chaque facette (Bacciaglia et al., 2021). Comme indiqué dans la figure 28, une fois les conditions aux limites définies et l'optimisation réalisée, on obtient un fichier iso-surface permettant de visualiser le profil optimisé dans Matlab. Ainsi la même matrice de densité physique est utilisée pour créer le modèle CAO STL maillé qui est par suite transformé en solide paramétrique.

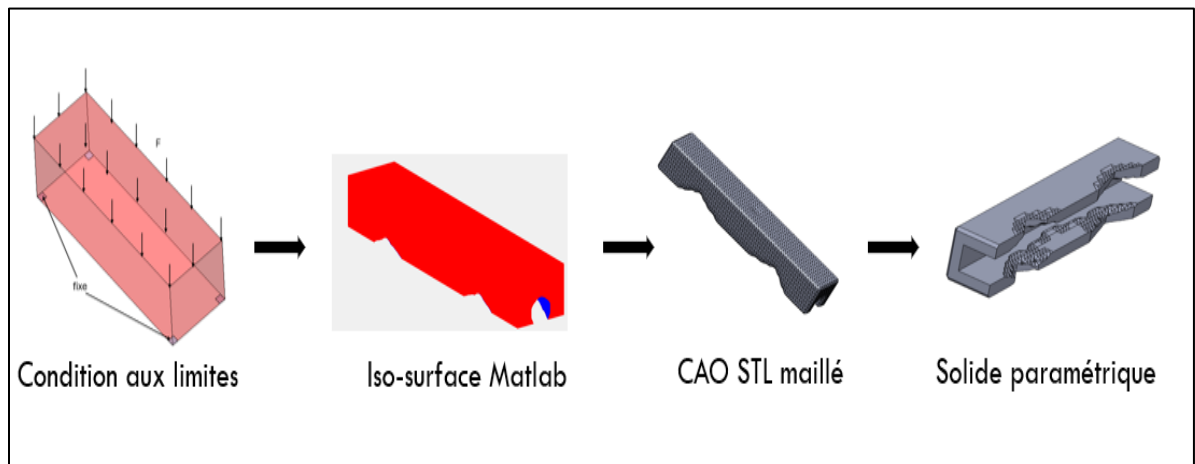


Figure 28 : Les étapes proposées dans cette étude

Cependant, les outils de conception comme SolidWorks proposent des fonctions qui permettent de convertir le STL en solide paramétrique. Cette étape peut produire des erreurs au niveau des maillages qui ne sont pas prises en compte par cette étude. Toutefois plusieurs études ont été effectuées pour automatiser la création du fichier maillage STL après optimisation et transformer en solide paramétrique (Liu et al., 2018) pour réduire, voire éviter ces erreurs. La méthode squelette proposée par (Takougoum, 2018) en utilisant des logiciels de remaillage comme MeshLab ou GMHS pour le post-traitement et pour générer directement un modèle solide CAO paramétrique pour la conception sont connues aussi très performante.

### 3.9. CRITÈRE D'OPTIMISATION

Dans cette étude, on cherche à minimiser le volume d'une structure tout en assurant le respect des conditions de rigidité et les contraintes de flambage afin de s'assurer sa fonction initiale en supportant les efforts appliqués. Pour trouver la solution optimale qui respecte ces conditions, l'utilisation des critères d'optimalité est nécessaire. On utilise une combinaison de deux méthodes :

- La méthode de critère d'optimalité OC qui est une méthode simple et rapide, mais moins stable pour l'analyse des problèmes de flambage. Dans cette méthode, le critère d'optimalité est satisfait, si la condition suivante est remplie :

$$B_e = -\frac{\partial c(\tilde{c})}{\partial x_e} \left( \lambda \frac{\partial v(\tilde{x})}{\partial x_e} \right)^{-1} = 1 \quad (3.37)$$

Avec  $\partial c/\partial x_e$  est la sensibilité de la fonction objective

$\partial v/\partial x_e$  : est la sensibilité du contrainte de volume

$\lambda$  : est le multiplicateur de Lagrange

- La méthode MMA (Method of Moving Asymptotes) a eu un grand succès dans le domaine de l'optimisation en raison de sa robustesse pour résoudre des problèmes complexes avec des contraintes multiples. Cette méthode sera appliquée sur la fonction agrégée afin de mettre à jour le vecteur solution à chaque itération jusqu'à la convergence.

$$J_i^{KS}(x) = \widehat{J}_i^{KS}(\xi) + \sum_{e=1}^m \left[ \frac{(U_e - \xi_e)^2 P_e^i(\xi)}{U_e - x_e} - \frac{(\xi_e - L_e)^2 q_e^i(\xi)}{x_e - L_e} \right] \quad (3.38)$$

Avec :

$U_e$  et  $L_e$  sont les asymptotes supérieures et inférieures

$P_e$  et  $q_e$  sont les sensibilités

$\xi_e$  est la densité courante

L'équation de la mise à jour avec la fonction lagrangienne est :

$$x_e^{new}(\kappa) = \max \left\{ \delta_-, \min \left\{ \delta_+, \frac{L_e(U_e - \xi_e)\sqrt{P_e^0(\xi) + \kappa P_e^1(\xi)} + U_e(\xi_e - L_e)\sqrt{-q_e^0(\xi) + \kappa q_e^1(\xi)}}{(U_e - \xi_e)\sqrt{P_e^0(\xi) + \kappa P_e^1(\xi)} + (\xi_e - L_e)\sqrt{-q_e^0(\xi) + \kappa q_e^1(\xi)}} \right\} \right\} \quad (3.39)$$

Avec :

$\kappa$  est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte globale agrégée KS

$P_e^0$  et  $q_e^0$  sont les dérivées de la fonction objective

$P_e^1$  et  $q_e^1$  sont les dérivées des contraintes.

La figure 32 présente l'algorithme de la boucle d'optimisation :

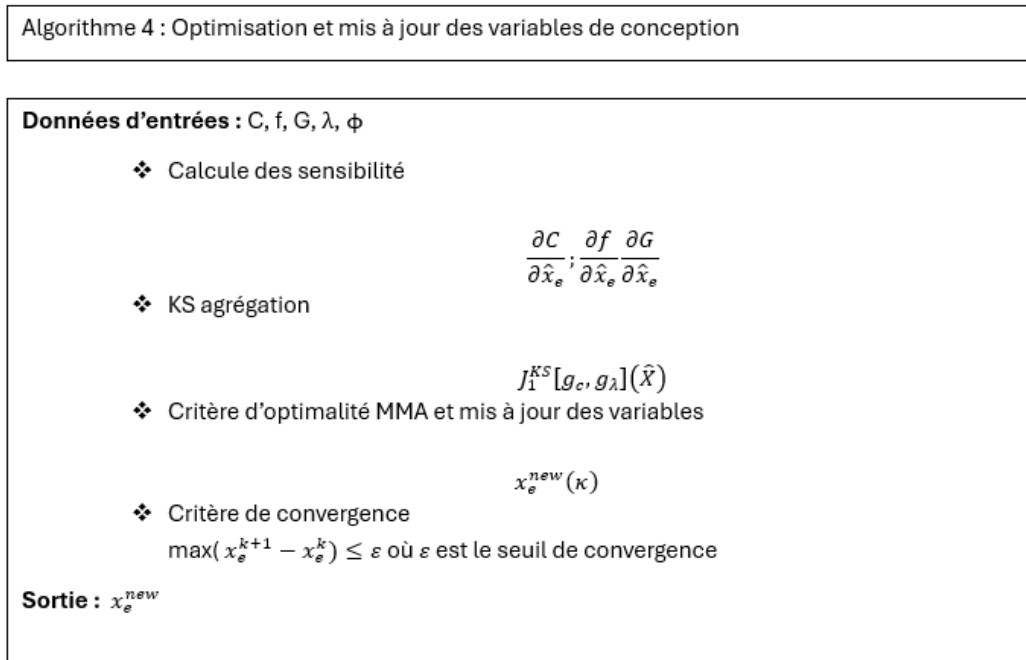


Figure 29 : Algorithme d'optimisation

## CONCLUSION :

Dans ce chapitre, une méthodologie d'optimisation topologique des structures 3D tenant compte des contraintes de flambage a été développée. L'approche d'optimisation topologique basée sur la densité a été utilisée, plus particulièrement la méthode des solides isotropes avec pénalisation (SIMP). Le problème de résolution des valeurs propres a été utilisé pour l'analyse des contraintes de flambement linéaire.

Le problème d'optimisation étant un problème d'optimisation multiple-objectif, la fonction d'agrégation KS est utilisé pour agréger les fonctions objectives, qui sont le volume, la compliance et les contraintes de flambage. Les matrices de rigidité et de contrainte ont été calculées et assemblées par la méthode de choleski. Dans le chapitre suivant, quelques résultats d'application de l'algorithme développé seront présentés

## CHAPITRE 4.

### RÉSULTATS ET DISCUSSIONS :

#### 4.1. EXEMPLE D'OPTIMISATION : POUTRE EN PORTE-À-FAUX ET POUTRE EN COMPRESSION

Pour tester le bon fonctionnement du code, les conditions aux limites ainsi que la méthode de sélection des éléments pour l'application des contraintes et des charges ont été étudiées dans l'exemple d'une pièce maintenue en porte-à-faux (figure 30) et d'une pièce en compression (figure 32a). La structure est rectangulaire et discrétisée dans un domaine de conception  $\Omega_h = 48 \times 24 \times 24$  éléments. La fraction volumique est  $f = 0,12$  et le rayon de filtre  $r_{min} = \sqrt{3}$  avec une projection Heaviside conservant le volume ( $ft=2$ ). Une charge de  $F=100\text{N/m}^2$  est répartie le long des nœuds sur la partie droite tandis que la partie droite est encastée.

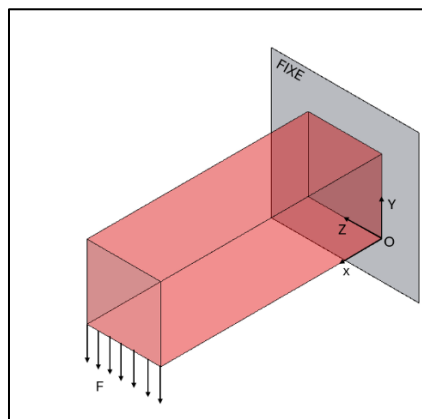


Figure 30 : Porte à faux avec  $48 \times 24 \times 24$  éléments

La figure 31 (2a) présente la pièce optimisée à l'aide du code sans critère de flambage (Ferrari & Sigmund, 2020) dont l'objectif est de minimiser le poids et

la compliance. La figure 31 (2b) présente la pièce optimisée avec l'algorithme développé dans ce travail permettant d'optimiser le volume en respectant les critères de flambage et enfin la figure 31 (2c) présente un modèle développé sous Abaqus (sans prise en compte de contrainte de flambage). En effet, les logiciels commerciaux comme Abaqus et SolidWorks ne permettent pas de faire une optimisation de la topologie en prenant en compte les contraintes de flambage. Les trois exemples ont exactement les mêmes conditions aux limites et une force est appliquée sur les mêmes éléments avec la même direction de chargement.

On observe une légère différence dans la topologie des deux pièces optimisées sous Matlab, avec une concentration de matière au centre de la pièce optimisée en flambement (figure 31-2b). La pièce optimisée sans critère de flambage sous Matlab (figure 31-2a) et celle optimisée sous Abaqus (figure 31-2c) ont à peu près les mêmes distributions de matière. Cette analyse permet de voir l'effet de la prise en compte du flambage dans la conception.

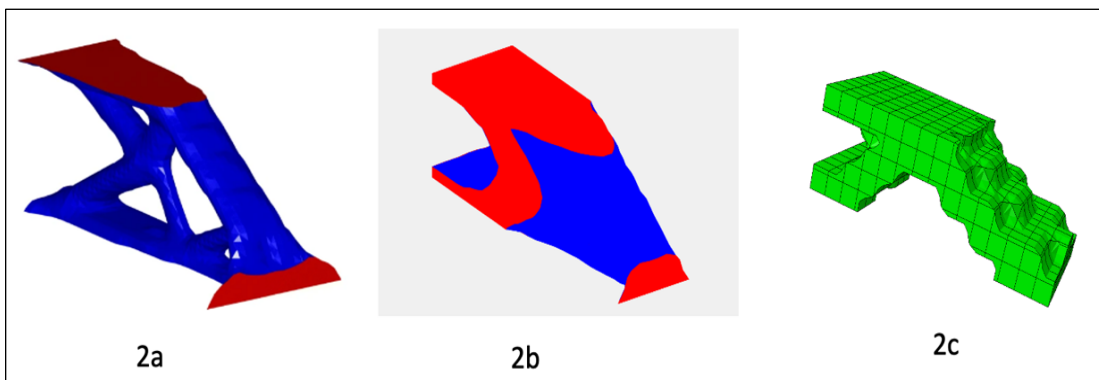


Figure 31 : Les pièces optimisées avec Matlab et Abaqus

Dans le deuxième exemple, une poutre est soumise à une charge de compression. Le domaine de conception de la pièce est défini par  $\Omega_h = 60 \times 10 \times 10$  éléments. L'extrémité gauche est fixée et une pression  $F=100\text{N/m}^2$

est appliquée sur la surface droite et maintenue tout au long de l'optimisation, comme indiqué dans la figure 32.

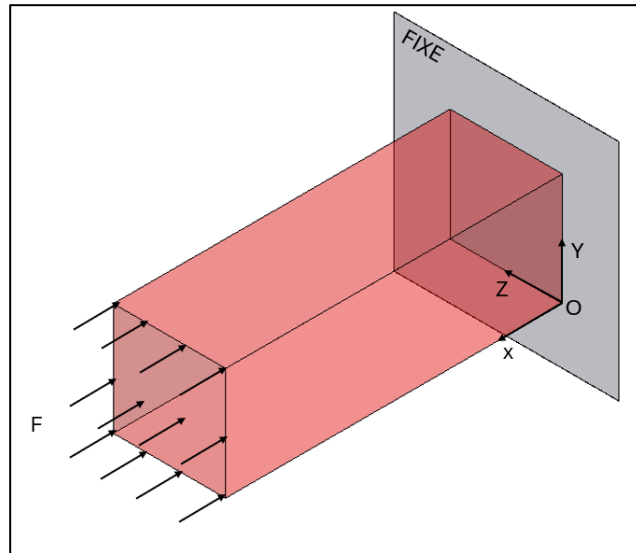


Figure 32 : Condition aux limites

Ce modèle initial sera optimisé avec l'algorithme développé contenant les contraintes de flambage sous Abaqus. Cette étape vise à vérifier la stratégie de sélection des éléments pour l'application des conditions aux limites par l'algorithme.

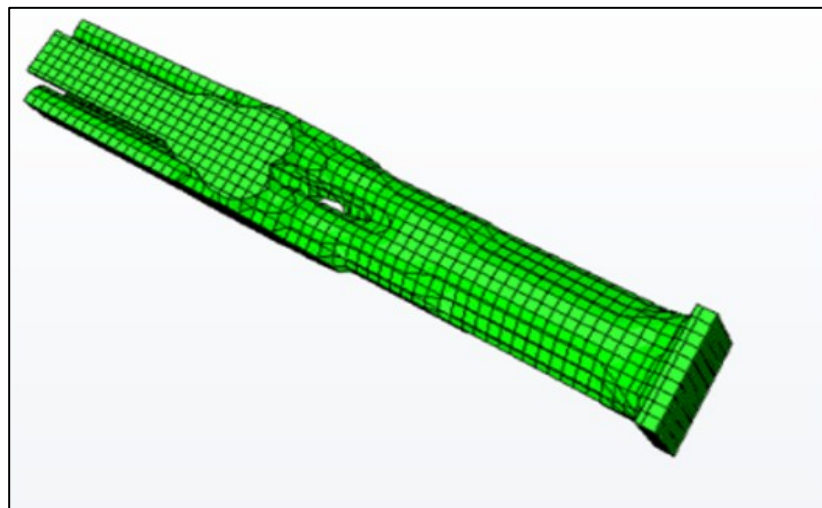


Figure 33 : Optimisation sous Abaqus sans contrainte de flambage

La figure 34 montre le résultat de l'optimisation avec un filtre à densité simple. Il a été constaté à la figure 34 comme dans le cas de la figure 33 (résultat Abaqus) que la partie encastrée reste inchangée contrairement à la surface où la charge a été appliquée. En effet, l'algorithme se base sur la sensibilité de l'énergie de déformation pour déterminer le chemin de force. En conséquence, tous les éléments, même ceux qui sont soumis à une force, qui ne participent pas aux chemins de force sont retirés par l'algorithme. En revanche, les éléments sur lesquels les déplacements sont imposés jouent un rôle important dans la rigidité globale de la structure et sont donc conservés par l'algorithme.

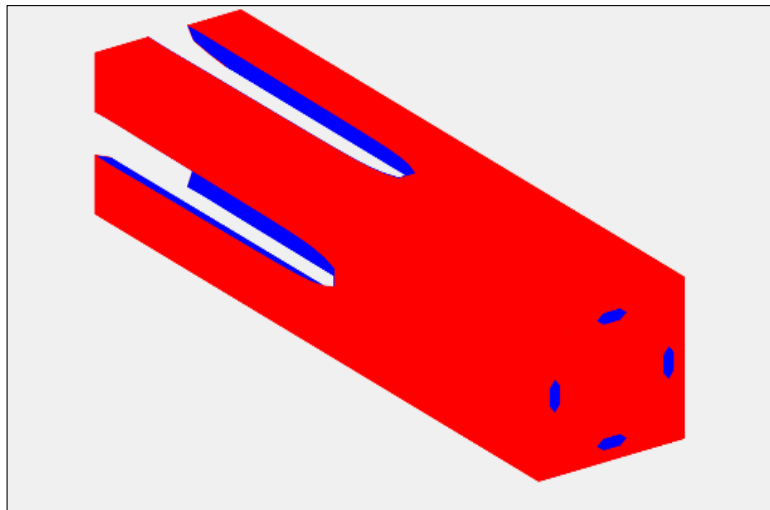


Figure 34 : Optimisation avec le Modèle développé avec un filtre à densité simple.

Contrairement aux figures 33 et 34, la figure 35 présente l'optimisation avec un filtre à densité Heaviside, on constate une forte concentration de matière au centre de la pièce. Toutefois, on observe les mêmes comportements dans les zones où les conditions aux limites sont appliquées.

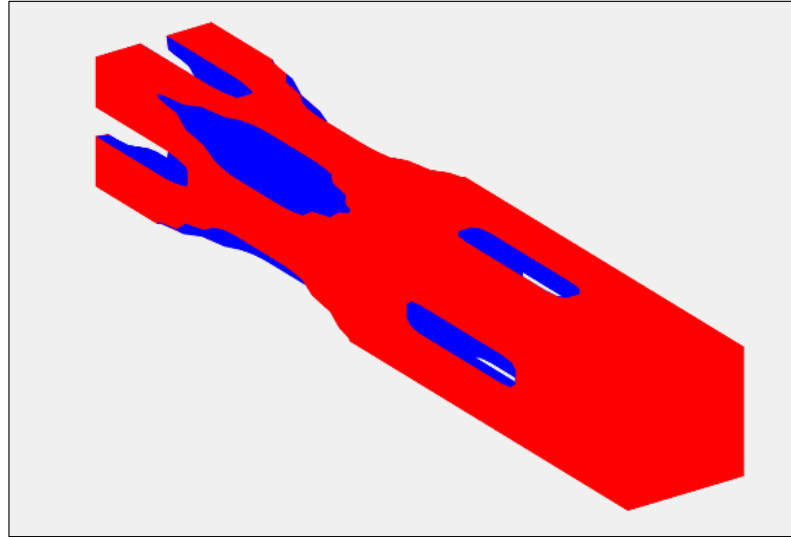


Figure 35 : Optimisation avec le Modèle développé avec un filtre à densité Heaviside.

Dans les exemples précédents, à part les conditions aux limites, aucune autre contrainte de conception ou de fabrication n'a été définie pendant l'optimisation, ce qui permet d'avoir un premier aperçu de la topologie proposée par l'algorithme en fonction de la distribution de l'énergie de déformation. Par la suite, une stratégie de créer des zones passives ou zones de non-design (des zones figées) a été développée. Les éléments resteront fixes lors de l'optimisation et ne seront pas supprimés par l'algorithme. Cette stratégie permet de guider l'algorithme à converger vers une solution respectant les contraintes de fabrication ou d'assemblage. Comme indiqué dans la figure 36, la partie grise est définie passive, ce qui signifie que seules les zones en rose seront modifiées lors de l'optimisation. Cela permet d'avoir de la matière au centre de la structure contrairement aux exemples précédents.

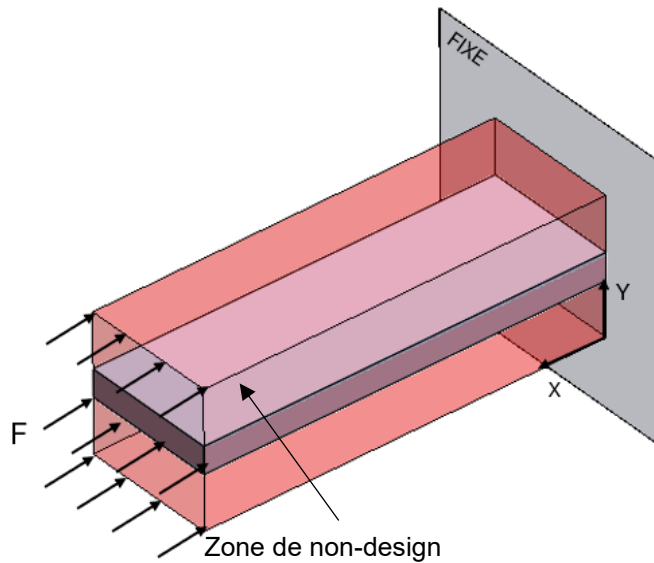


Figure 36 : Création de zones passive

Après l'optimisation, la figure 37 montre une topologie beaucoup plus proche d'une section de type I. Cependant, comme le montre la vue A, il y a une concentration de matière à l'une des extrémités de la pièce. Cette zone correspond à la zone où la force  $F$  est appliquée. Cette concentration s'explique du fait qu'aucun enlèvement de matière n'est autorisé dans les zones où les conditions aux limites sont appliquées. Toutefois, dans la vue B, on remarque clairement un profil en I. Ce profil pourrait être amélioré en raffinant le maillage tout en augmentant le nombre d'éléments dans la zone de conception.

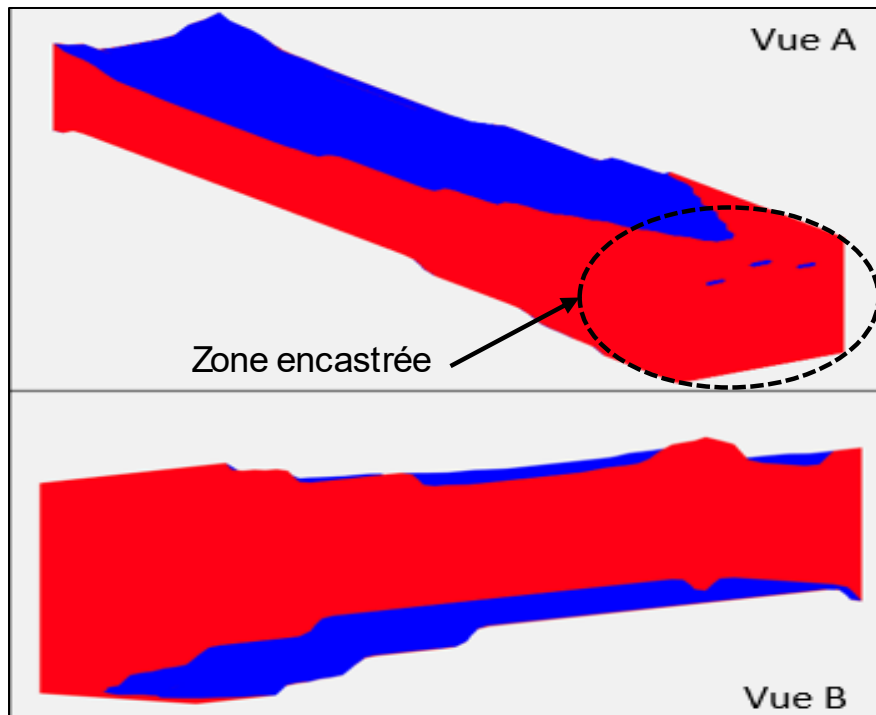


Figure 37 : Pièce optimisée avec zones passives

#### 4.2. APPLICATION CAS D'UNE PASSERELLE EN ALUMINIUM

Dans cette partie, l'optimisation des structures d'une passerelle initialement dimensionnée par une méthode traditionnelle de conception est proposée. Comme mentionné dans la revue, les structures civiles sont généralement conçues avec surdimensionnées afin de respecter les normes de sécurité en vigueur. La passerelle initiale est composée de deux éléments importants à optimiser : les longerons qui supportent toutes les charges appliquées sur la passerelle et les traverses qui permettent de soutenir les longerons contre le déversement. La méthodologie d'optimisation développée est basée sur une analyse d'éléments finis, ce qui nécessite le calcul des matrices élémentaires de chaque élément du domaine de conception comme expliquer dans la méthodologie et par la suite faire un assemblage de la matrice de rigidité

élémentaire et de la matrice géométrique. Cependant la matrice de rigidité globale doit être définie positivement, car elle est calculée par la méthode de Choleski (COOK et al., 1988; Ferrari et al., 2021). Un grand nombre d'éléments NEL dans le domaine de conception augmenterait non seulement les temps de calcul, mais aussi pourrait conduire à des matrices singulières, ce qui entraîne des erreurs lors de la factorisation de Choleski.

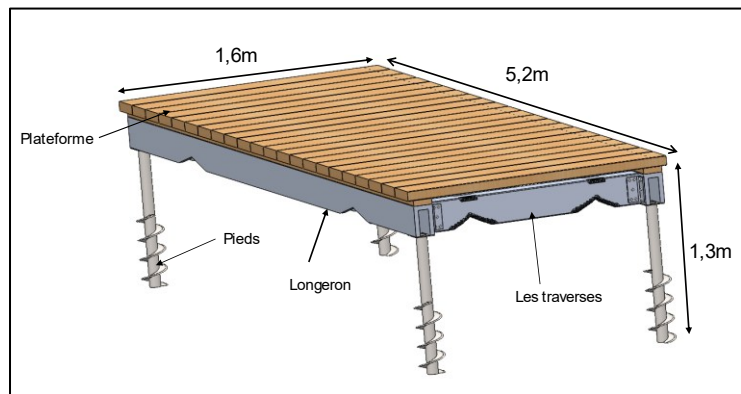


Figure 38 : Design de la passerelle à optimiser

La géométrie initiale du longeron est un rectangulaire discrétisée par un domaine de conception  $\Omega_h = 523 \times 13 \times 20$  éléments.

La fraction volumique maximale autorisée est  $f = 0,6$  et le rayon de filtre  $r_{min} = 1.5$  avec une projection Heaviside conservant le volume ( $ft=1$ ). La charge supportée par la passerelle est divisée par deux entre les longerons (figure 39a). Il est encasté des deux côtés avec une charge répartie sur toute la face supérieure. Cette charge  $5 \text{ kN/m}^2$  correspond à la charge des piétons (Parke & Hewson, 2008). Pour cette première analyse, seules les charges piétonnières sont prises en compte.

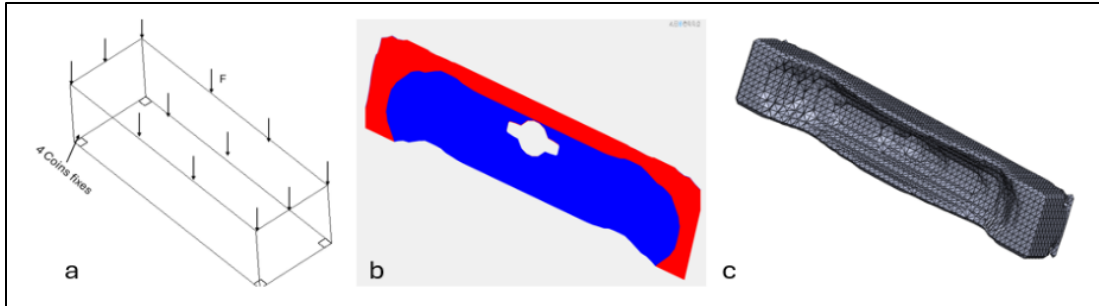


Figure 39 : a : Condition aux limites imposées sur le longeron : Longeron optimisé sous Matlab, c : Longeron optimisé en fichier STL

La figure 39b représente le premier profil optimisé du longeron sous MATLAB, et la figure 39c montre le fichier STL dans SolidWorks. Le profil obtenu est creux à l'intérieur tout en conservant de la matière sur les arêtes soumises aux conditions aux limites. Toutefois, on remarque que le modèle STL (figure 39c) créé conserve la même topologie que la figure 39b. En revanche, un petit ajout de matière est constaté sur la face supérieure du modèle STL. Cela est dû à la méthode de marching cubes utilisée qui extrait une surface triangulée à partir de la densité physique ( $x_{phys}$ ) optimisée. Alors une bonne maîtrise des paramètres de filtrage est nécessaire pour avoir un modèle STL fidèle au modèle MATLAB. Pour minimiser cette erreur, une analyse des deux densités a été effectuée afin de s'assurer que les deux modèles ont les mêmes densités physiques après extraction.

La figure 40 présente les données du modèle extraites sous Matlab. La figure 40a montre l'évolution du volume au cours de l'optimisation. Avec une fraction volumique de  $v_{frac}=0.7$ . Il a été constaté que la méthode SIMP enlève beaucoup de matière lors des premières itérations, puis devient de plus en plus stable à partir de la 20<sup>e</sup> itération. La compliance diminue rapidement de 0.85 à

0,34 (figure 40b), puis reste stable à cette valeur. Cela correspond bien à l'objectif de l'optimisation, car minimiser la compliance revient à maximiser la résistance. Cependant, dans ce travail, le problème d'optimisation est multi-objectif et la fonction d'agrégation de KS a été utilisée pour agréger les trois fonctions objectives en une seule fonction. Il est donc nécessaire de normaliser les contraintes afin d'éviter la domination de l'une sur les autres. Toutefois les propriétés du matériau n'ont pas été normalisées dans ce travail. Ainsi, le modèle nous donne directement la charge critique comme indiqué dans l'équation 2.94 (COOK et al., 1988). La figure 40b représente la charge critique en ordonnée et les modes critiques de flambage associé. Le premier mode critique se produit sous une charge de 0.31 MPa et on remarque que cette charge critique diminue progressivement jusqu'à atteindre 0.15 MPa pour le dernier mode de flambage. Pour trouver les facteurs de flambage associés à chaque mode, la charge critique a été divisé par la charge appliquée qui correspond 5 kN/m<sup>2</sup> (figure 40d). Le facteur de flambage du premier mode est de 58 et pour le dernier mode flambage vaut 33. Ces valeurs seront comparées aux facteurs de flambage qui seront obtenus lors de l'étude du comportement en flambage de la structure optimisée sous SolidWorks.

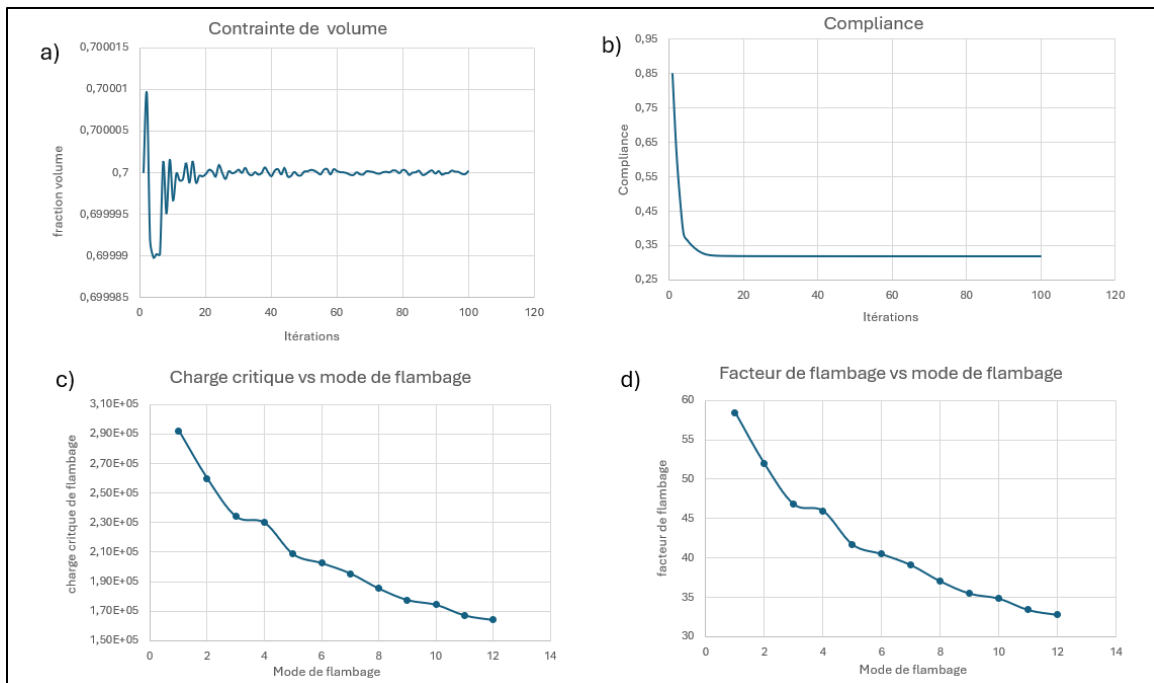


Figure 40 : Évolution des fonctions objectives pendant l'optimisation.

La figure 41a présente l'optimisation avec une fraction volumique de 0,7 et les autres paramètres sont les mêmes que l'exemple que la figure 39. Un profil optimisé semblable à celui de la figure 39c a été observé. En revanche, lorsque le type de filtre a été changé par un filtre avec projection Heaviside, le profil optimisé tend vers une poutre U, mais la topologie reste identique. La structure optimisée avec la projection Heaviside présente un côté beaucoup plus rigide, mais avec des instabilités au niveau des zones fixées par les conditions aux limites (figure 41b). En augmentant le nombre d'éléments dans le domaine de conception (figure 41c), un creux commence à apparaître au centre des coins fixés par les conditions formant un profil en U. Cependant, la surface inférieure conserve encore un peu de matière. Par ailleurs, en dessous d'une fraction volumique de 0,55, une instabilité numérique est remarquée, ce qui est également le cas pour le rayon

minimal de filtrage. À partir de 1,5 mm pour le rayon minimal de filtrage, des instabilités apparaissent également sur la structure optimisée (figure 41d).

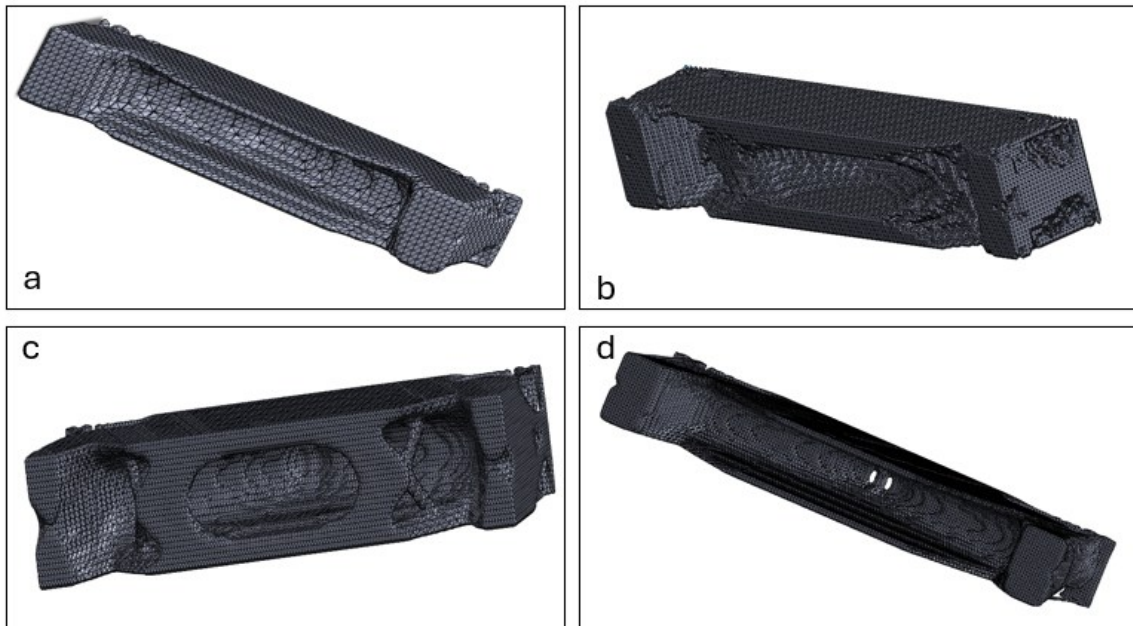


Figure 41 : Influence de quelques paramètres sur l'optimisation du longeron : a) fraction volumique 0.7, b) avec filtre Heaviside, c) avec 60 éléments sur l'axe z, d) rayon minimal de filtrage 1.2

Après l'analyse du profil optimisé du longeron, il a été constaté que le profile optimiser tend vers un profil en U. Cependant, les conditions aux limites, un peu conservatrices, empêchent l'enlèvement de la matière au niveau des coins. Pour remédier à cela, nous avons converti le fichier STL obtenu après optimisation sous MATLAB en solide paramétrique directement sous SolidWorks (Dassault systemes, 2025). Toutefois SolidWorks présente souvent des limites au niveau de la conversion lorsque le fichier STL est trop volumineux. Alors le site ANICONV (ANICONV, 2025) sera utilisé pour transformer le fichier STL en format CAD ou PART. Par la suite, le profil optimisé peut être rectifié pour obtenir un profil en U (figure 42b) avant de le remettre à l'échelle normale.

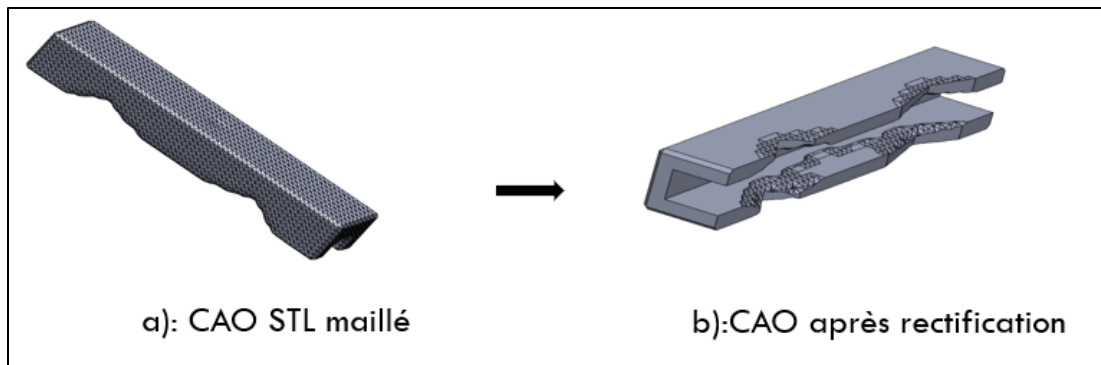


Figure 42 : a : Modèle STL maillé, b : Modèle paramétrique CAO

Il est important de rappeler que la méthode SIMP utilisée est basée sur un modèle d'interpolation linéaire simplifiée. C'est une méthode basée sur le calcul de la densité physique de chaque élément sous forme d'énergie de déformation afin de proposer une topologie innovante. En revanche il ne garantit pas une structure performante (AMROUNE, 2022). Ainsi, une analyse de validation avec les vraies charges est nécessaire. L'étude du flambement sous SolidWorks se fait en deux étapes : (1) faire une analyse statique avec une charge réelle et (2) faire une analyse de flambage linéaire pour identifier la région flambée et déterminer le facteur multiplicateur de charge selon la théorie du flambage linéaire (Lê & Champlaud, 2013).

Une analyse de flambage a été réalisée sous SolidWorks afin d'étudier le comportement de la structure optimisée au flambage. Dans l'environnement SolidWorks, il n'est possible d'utiliser que deux types de maillage. Un maillage tétraédrique linéaire à 4 nœuds et un maillage tétraédrique parabolique à 10 nœuds qui donne beaucoup plus de précision (SOLIDWORKS, 2025). Un maillage de type tétraédrique à 10 nœuds a été choisi sous Matlab avec une taille de 0,8cm. Par la suite une étude de convergence de maillage est effectuée afin d'étudier l'effet

du maillage. Cette étape est importante, car le transfert du STL en modèle solide peut générer des erreurs mineures dans la géométrie qui ne sont pas prises en compte dans cette étude. Le solveur utilisé correspond à une analyse linéaire (petites déformations). Le tableau 7 présente un résumé comparatif entre le modèle SolidWorks et Matlab.

Tableau 7 : Caractéristiques des modèles Matlab et SolidWorks

	<b>MATLAB</b>	<b>SOLIDWORKS</b>
<b>MATERIAU</b>	Al 6061-T6	Al 6061-T6
<b>Charge(piétonnière)</b>	$5Kn/m^2$	$5Kn/m^2$
<b>Type maillage</b>	Hexaédrique à 8 nœuds	Tétraédrique à 10 nœuds
<b>Taille de maillage</b>	1cm	4 à 0.4cm
<b>Type de solveur</b>	Flambage linéaire	Flambage linéaire

Dans un premier temps, une analyse statique a été effectuée en utilisant les mêmes conditions aux limites que celles présentées à la figure 43a. La première modélisation est effectuée avec un maillage grossier (taille de maillage : 4cm). Les résultats montrent que la structure optimisée présente une limite élastique de 270 MPa, tandis que la contrainte maximale enregistrée sur la structure est de 4.2 MPa (figure 43a). L'analyse de flambage (figure 43b) a montré que la partie critique de la structure se situe au centre de la pièce. Cependant, le facteur de flambage est largement supérieur à 1, avec une valeur de 54.

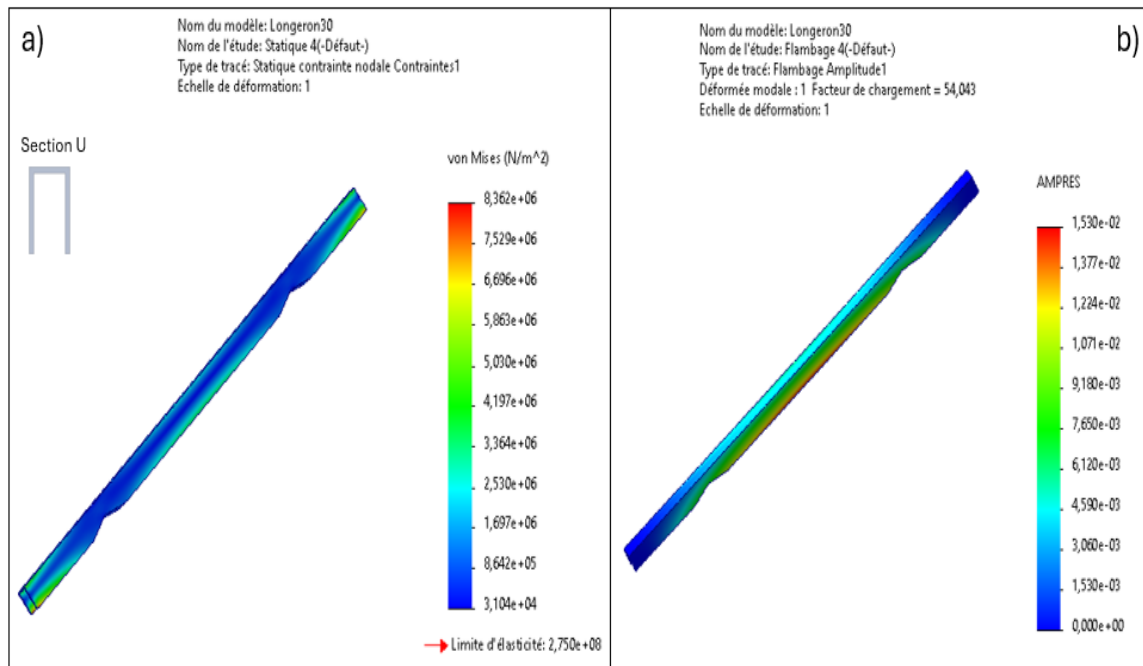


Figure 43 : Maillage grossier 4cm (a : Analyse statique du longeron optimisé, b : analyse de flambage du longeron optimisé)

Par la suite, la taille du maillage a été divisée par deux en gardant les mêmes conditions aux limites et la même quantité de chargement que celle de la figure 43. On constate que la contrainte maximale enregistrée sur la structure est de 4.5 MPa (figure 44a) avec un facteur de flambage de proche du résultat du résultat précédent, soit 53.0

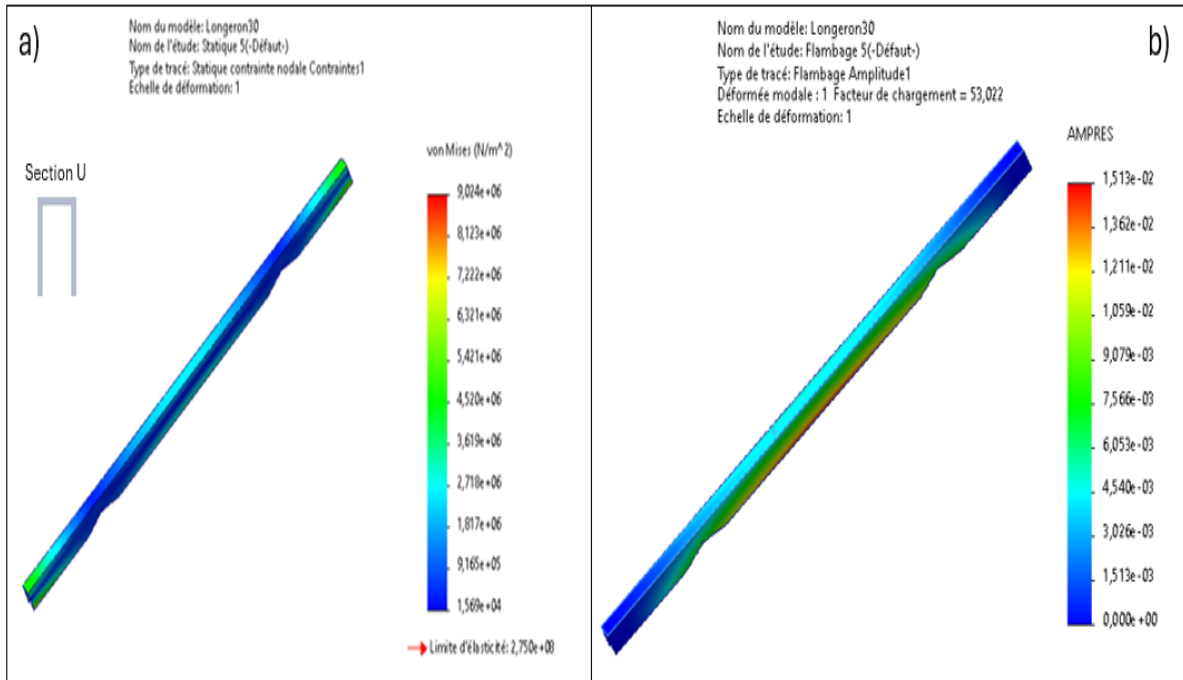


Figure 44 : Maillage moyen 2cm (a : Analyse statique du longeron optimisé, b : analyse de flambage du longeron optimisé)

La figure 45a représente l'étude de flambage du profil optimisé, elle est réalisée avec la même taille de maillage que celle utilisée sous MATLAB. Un facteur de flambage de 52.69 a été obtenu. Ce qui représente une légère diminution du facteur de flambage par rapport au cas précède. En revanche, pour une taille de maillage de 0.5cm (figure 45b), la valeur du facteur de flambage ne varie presque pas, avec une valeur de 52.63. Cela permet de conclure au-delà de 1cm comme taille des éléments, le maillage n'influence plus la valeur du facteur de flambage. D'autre part ces résultats restent dans le même ordre de grandeur que celle obtenue par le modèle Matlab qui est environ 33 à 58.

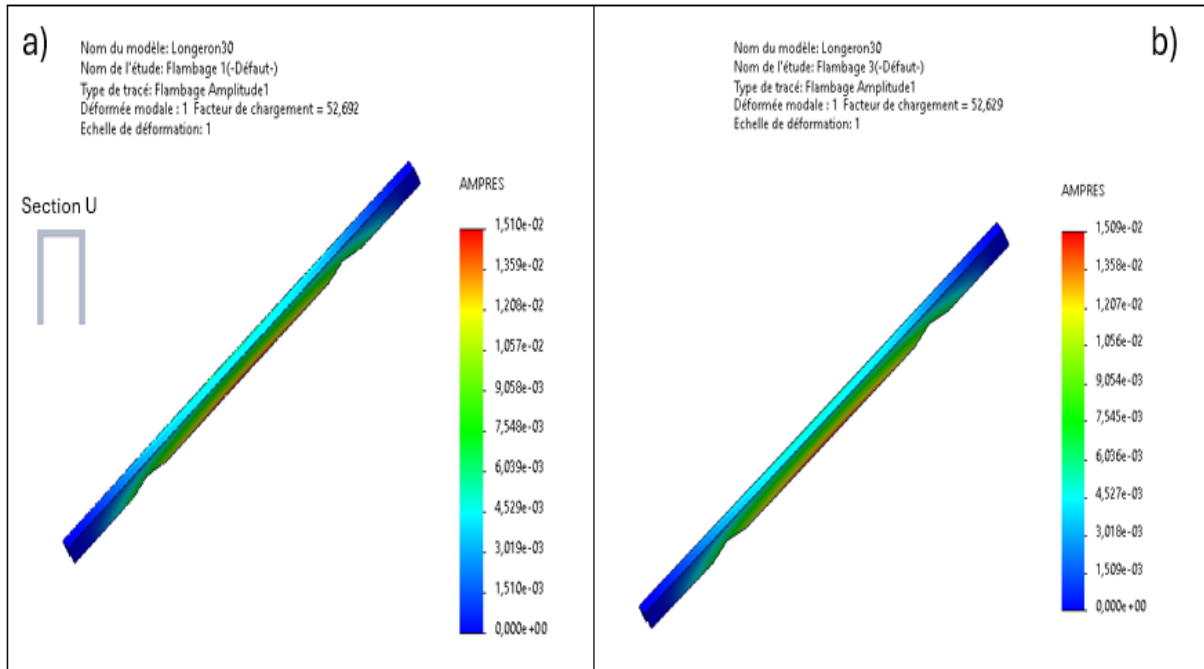


Figure 45 Maillage fin (a : Analyse de flambage avec taille 1cm, b : Analyse de flambage avec taille 0.5cm)

La figure 46 présente l'étude du comportement en flambage de la structure initiale, avec les propriétés du matériau, les mêmes conditions aux limites et de chargement. L'étude statique donne une limite élastique de 270 MPa, tandis que la contrainte maximale enregistrée sur la structure vaut 5.0 MPa (figure 46a) et l'analyse de flambage (figure 46b) a donné un facteur de flambage de 40. Cette valeur reste inférieure à celle de la structure optimisée.

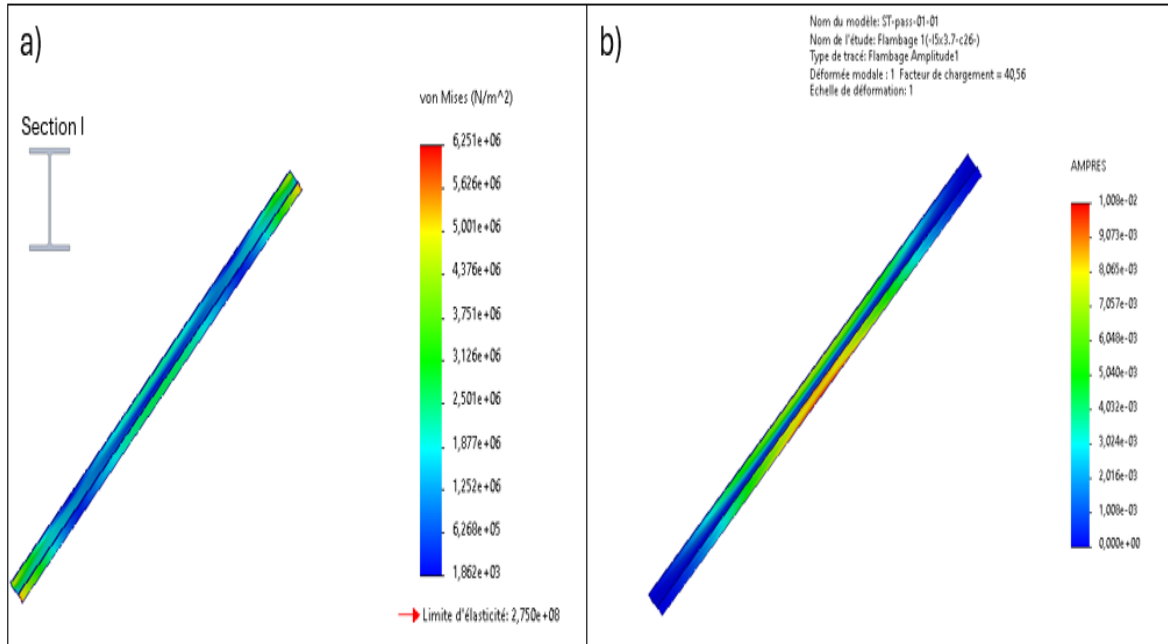


Figure 46 : Étude du comportement en flambage de la structure initiale a : Analyse statique du longeron optimisé, b : analyse de flambage du longeron optimisé)

Le tableau 8 compare le rapport entre la masse et le facteur de flambage des deux structures. On constate que la structure optimisée a une masse supérieure à celle de la structure initiale d'environ 30%, avec un facteur de flambage plus élevé. Malgré l'augmentation de la masse, il a été remarqué que le rapport de masse par rapport au facteur de flambage reste presque identique. D'où une amélioration de la stabilité au flambage sans un rapport masse/rigidité efficace. Ce résultat permettra de réduire le nombre de traverses dans la passerelle tout en gardant une grande stabilité.

Tableau 8 : rapport masse/facteur de flambage du modèle initial et le modèle optimisé

Structure	Masse (gramme)	Facteur de flambage ( $\lambda$ )	Rapport ( $m/\lambda$ )
Initiale l optimisée avec la méthode classique (norme CSA)	54492	40	1362
Optimisée topologiquement	70765	51	1387

#### 4.3. VALIDATION AVEC LA NORME CSA S6 19 :

Dans cette section, le facteur de flambage de la structure optimisée sous MATLAB sera déterminé avec la méthode analytique de la norme CSA S6 19.

##### ❖ Calcul de l'élancement de la structure (équation 2.17) :

$$\lambda = \frac{KL}{r}$$

K=0.5 pour une structure encasté-encasté et L=5 m

Le rayon de giration :

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{3.11 \times 10^7}{6480}} = 69,27 \text{ mm}$$

Pour une structure de section en C, avec une hauteur de 130mm, épaisseur de 15mm et de largeur 202mm.

L'air de la section transversale :

$$A = t(2h + b - 2t)$$

$$A = 15(2 \times 202 + 130 - 2 \times 15) = 7560 \text{ mm}^2$$

$$\lambda = \frac{0.5 \times 5}{0.0756} = 47$$

##### ❖ Contrainte de flambage élastique (équation 2.12) :

$$F_e = \frac{\pi^2 \times 68900}{47^2} = 308 \text{ MPa}$$

❖ **Élancement normalisé :**

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{F_0}{E}} = \frac{47}{\pi} \sqrt{\frac{276}{68900}} = 0,95$$

❖ **La charge de flambage normalisé (équation 2.13 et 2.14) :**

$$\alpha = 0.2 \text{ et } \bar{\lambda}_0 = 0.3$$

$$\beta = \frac{1 + \alpha(\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_0) + \bar{\lambda}^2}{2\bar{\lambda}^2} = 1.1$$

$$\bar{F} = \beta - \sqrt{\beta^2 - \frac{1}{\bar{\lambda}^2}} = 0.68$$

❖ **Calcul de la charge critique de flambage (équation 2.20) :**

$$C_r = \phi_y A \bar{F} F_0 = 0.9 \times 7560 \times 0.68 \times 276 = 1276 \text{ kN}$$

❖ **Le facteur de flambage  $\lambda_{cr}$  en tenant de la charge piétonnière seule:**

$C_a$  Correspond à la charge due aux piétons : 33.3Kn

$$\lambda_{cr} = \frac{C_r}{C_a} = \frac{1276}{33.3} = 38$$

$$\lambda_{cr} = 38$$

❖ **Le facteur de flambage  $\lambda_{cr}$  en tenant des autres charges (Technorm,2026) :**

- **Charge due à la neige humide :**  $C_n = 52 \text{ kN}$
- **Charge due à la force du vent :**  $C_v = 16,9 \text{ kN}$
- **Charge due à glace :**  $C_g = 73 \text{ kN}$
- **Charge due à l'eau :**  $C_p = 82 \text{ kN}$
- **Charge due au véhicule de maintenance :**  $C_{vm} = 25 \text{ kN}$

$$C_a = C_p + C_n + C_v + C_g + C_p = 249 \text{ kN}$$

$$\lambda_{cr} = \frac{C_r}{C_a} = \frac{1276}{249} = 5,12$$

Les résultats obtenus avec la méthode CSA montrent que la structure optimisée topologiquement résiste au flambage. En considérant uniquement la charge piétonnière, on obtient un facteur de flambage du même ordre de grandeur que celui du modèle numérique, soit  $\lambda_{cr} = 38$  (les valeurs obtenues avec le modèle numérique pour le premier et le dernier mode de flambage sont respectivement 33 et 58). Cependant, en ajoutant les autres surcharges telles que l'accumulation de la neige, le verglas et l'eau de la pluie, on obtient un facteur de flambage de 5, qui reste toujours supérieur à 1. On peut donc conclure que la structure optimisée topologiquement résiste au flambage tout en respectant la norme CSA S6-19.

Sachant que les traverses ne supportent pas de charge, mais servent principalement à soutenir les longerons afin d'éviter leur déversement, il est possible d'utiliser les mêmes profils optimisés pour la conception des passerelles et le nombre de traverses a été réduit de 6 à 3 traverses. Nous avons procédé à l'assemblage de la passerelle avec les nouveaux profils optimisés (figure 47) dans l'environnement SolidWorks afin de valider les structures optimisées. Cependant, nous avons rencontré une limitation liée à la taille du modèle (235 pièces) ainsi qu'à la complexité de maillage des différents composants (filetage au niveau des boulons de taille 7.35mm).

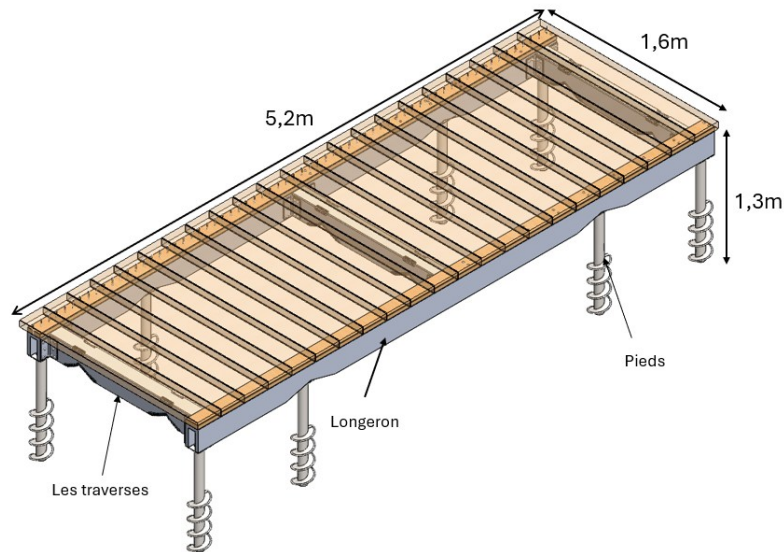


Figure 47 : Passerelle optimisée par la méthode topologique

#### 4.4. OPTIMISATION DE LA PLATEFORME DE LA PASSERELLE :

Dans cette partie, la plateforme de la passerelle a été modélisée en gardant le profil des longerons intact comme montré dans la figure 42. Les dimensions de la plateforme sont 1m sur l'axe x, 0,5 m sur l'axe y et 0.1 m sur l'axe z. L'objectif est de trouver la distribution optimale de la matière afin de déterminer la position des traverses dans la plateforme. La figure 48 présente la plateforme de la passerelle dont les parties jaunes représentent le longeron optimisé et sont définies passives (c'est-à-dire ne changent pas durant l'optimisation) et les parties bleues sont définies actives.

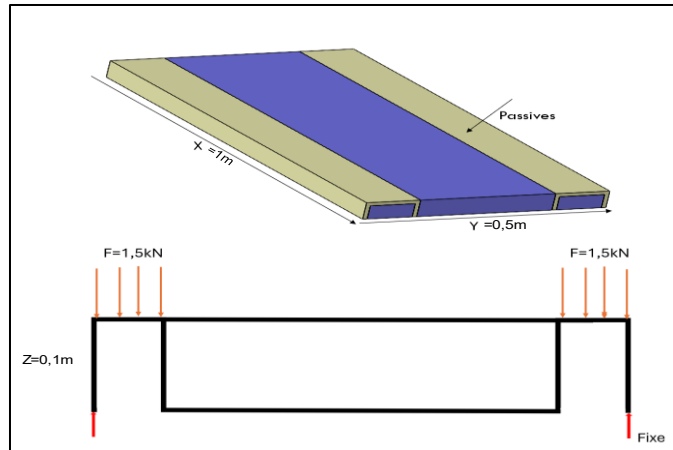


Figure 48 : Optimisation de la plateforme

La figure 49a présente la structure de la plateforme optimisée et la figure 49b est le modèle CAO maillé associé. D'après la figure 49a, la partie centrale de la plateforme est creuse avec une grande réduction de la densité physique, donc on peut conclure que cette partie n'est pas soumise à des charges importantes.

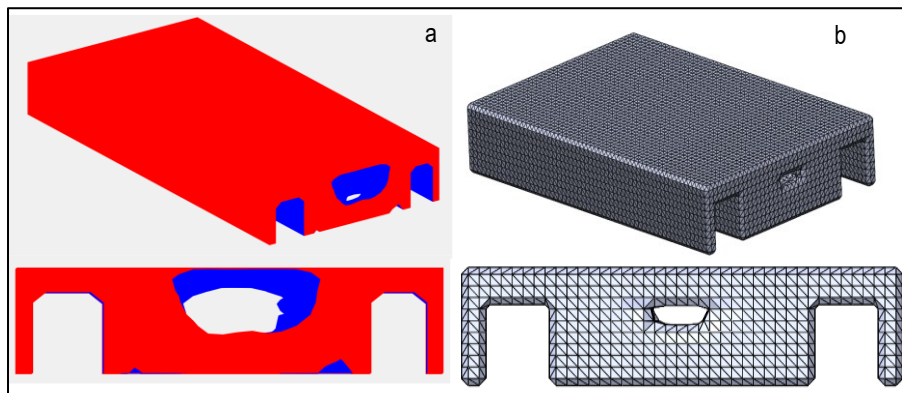


Figure 49 : Plateforme optimisée

Lorsqu'on analyse l'intérieur de la plateforme, on constate une grande symétrie sur la distribution de la densité (figure 50) avec une silhouette bien tracée des longerons avec du vide au centre. Nous pouvons ainsi poser l'hypothèse qu'il ne serait pas nécessaire de mettre des traverses perpendiculaires aux longerons comme le propose la conception actuelle. Toutefois, ce travail n'investigue pas les méthodes de fabrication et d'assemblages de la structure, cette hypothèse reste

donc à être investiguée davantage afin d'évaluer sa faisabilité et les potentiels gains économiques.

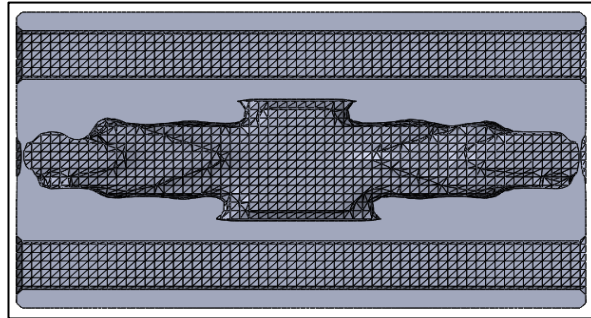


Figure 50 : Vue en coupe de la plateforme optimisée.

#### **4.5. INFLUENCE DE LA FRACTION VOLUMIQUE ET DU MAILLAGE**

La fraction volumique est la proportion de matière autorisée lors de l'optimisation et doit être bien choisie pour avoir une structure légère avec une grande rigidité. La figure 51a représentée la structure optimisée avec une fraction volumique de 0.5 c'est-à-dire 50% de la matière sera enlevée pendant l'optimisation dans un domaine de conception contenant  $60 \times 30 \times 10$  éléments comparés à la figure 51b avec une fraction volumique de 0.7 c'est-à-dire 30% de matière est enlevée après l'optimisation. On ne constate pas une grande différence sur la topologie. En revanche, lorsque le maillage sera doublé (figure 51c) on constate clairement des profils plus clairs et bien tracés à l'intérieur de la structure.

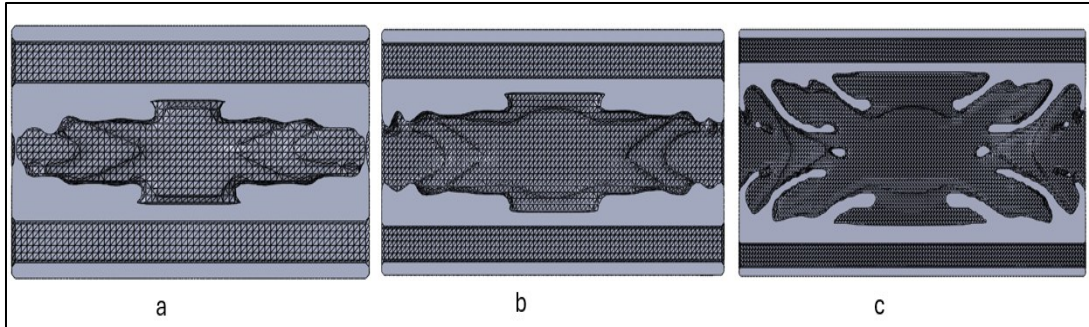


Figure 51 : a :  $v_{frac}=0.5$  ( $60 \times 30 \times 10$  éléments) b :  $v_{frac} =0.7$  ( $60 \times 30 \times 10$  éléments) c :  $v_{frac}=0.76$  ( $120 \times 60 \times 10$  éléments)

#### 4.6. INFLUENCE DU RAYON DE FILTRAGE :

Le rayon de filtrage permet de filtrer la densité physique de chaque élément en définissant sa portée de filtrage spatiale. Une valeur de 1.5 à 3 est généralement conseillée pour avoir une optimisation progressive sans effet damier dans le résultat.

Soit  $\kappa = \frac{r_{min}}{h}$  avec  $h$  la taille des éléments et  $r_{min}$  le rayon minimal de filtrage.

D'après la figure 52, lorsque  $\kappa$  devient faible, on perd de la précision sur le profil optimisé par effet damier inversement lorsque  $\kappa$  devient grand, la précision du profil optimisé augmente significativement. Ce qui corrobore bien avec la revue de littérature pour rayon minimal ( $r_{min}$ ) très grand, la densité filtrée de chaque élément sera influencée par un plus grand nombre de voisins et cela permettra une représentation plus réaliste. Cependant lorsque  $r_{min}$  est plus petit (proche de 1), on a un raffinement des densités filtrées et l'influence sera limitée aux éléments proches.

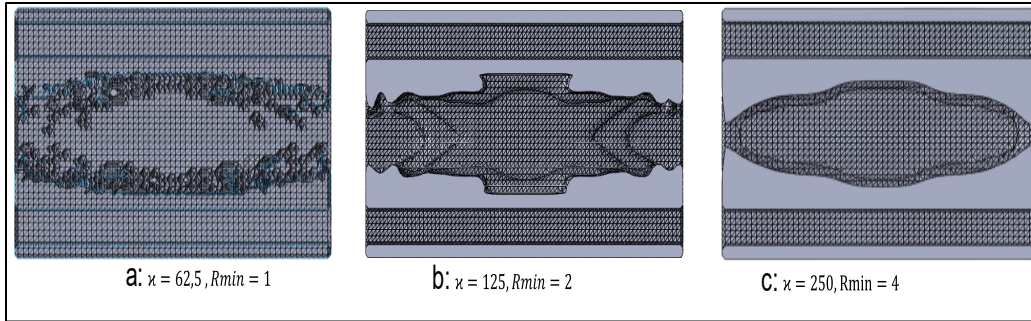


Figure 52 : Influence du rayon minimal

En gardant le rayon minimal fixe tout en augmentant le nombre d'éléments dans le domaine de conception (figure 53) avec 120 éléments sur l'axe  $x$ , 60 éléments sur  $y$  et 10 éléments sur  $z$ . On remarque une grande précision de la topologie. Ainsi la taille des éléments à une influence sur la topologie optimisée.

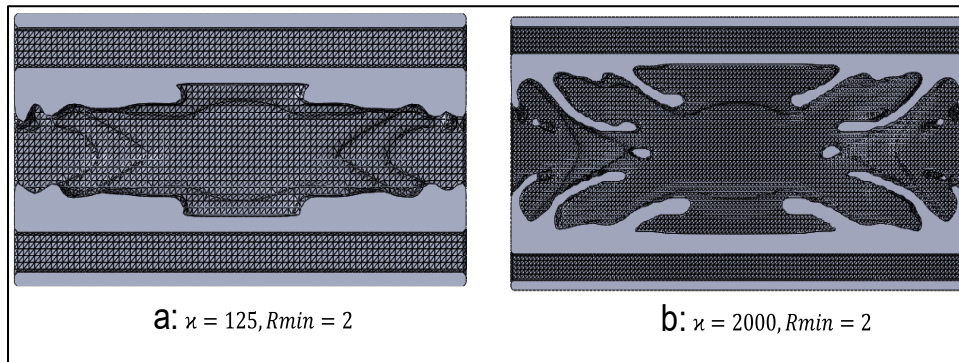


Figure 53 : Influence du maillage en fonction du rayon de filtrage

#### 4.7. INFLUENCE DE LA PÉNALISATION :

La pénalisation est un paramètre important, car elle permet d'éviter la formation de microstructures dans le domaine de conception. La relaxation du problème d'optimisation, qui permet une distribution continue de la densité de matière entre 0 et 1, ne permet pas d'obtenir des résultats discrets, d'où l'importance du facteur de pénalisation  $p$ . Dans cette étude, l'objectif étant de déterminer les facteurs de flambement, la pénalisation sera utilisée pour les calculs de la matrice de rigidité avant de résoudre l'équation d'équilibre ( $penaIK$ ) et une deuxième pénalisation

pour les calculs des contraintes de flambement dont l'objectif est de pénaliser tout élément qui n'affecte pas les contraintes flambages appeler penalG.

Pour un problème 3D, la pénalisation est caractérisée par l'équation suivante :

$$p \geq \max \left\{ 15 \times \frac{1 - \nu}{7 - 5\nu}; \frac{3}{2} \frac{1 - \nu}{1 - 2\nu} \right\} \quad (4.1)$$

Pour l'alliage d'aluminium  $\nu = 0.33$  donc  $p \geq \max\{1.85; 2.95\}$

La figure 54 montre les résultats d'optimisation avec 3 valeurs de penalK avec penalG fixé à 3, Il a été remarqué que lorsque penalK=1, les profils de la structure sont bien tracés, mais il existe encore des éléments intermédiaires dans la surface de la structure. Cependant pour penalK = 3, la silhouette optimisée est plus précise. On peut donc considérer qu'à partir de 3 tous les détails structurels sont présents dans la forme optimisée. Pour penalK=4, une légère différence entre les silhouettes est visualisée. Cependant, il y a une possibilité d'obtention d'un minimum local. Ces résultats concordent bien avec celle de l'analyse de (Nana, A. et al., 2018).

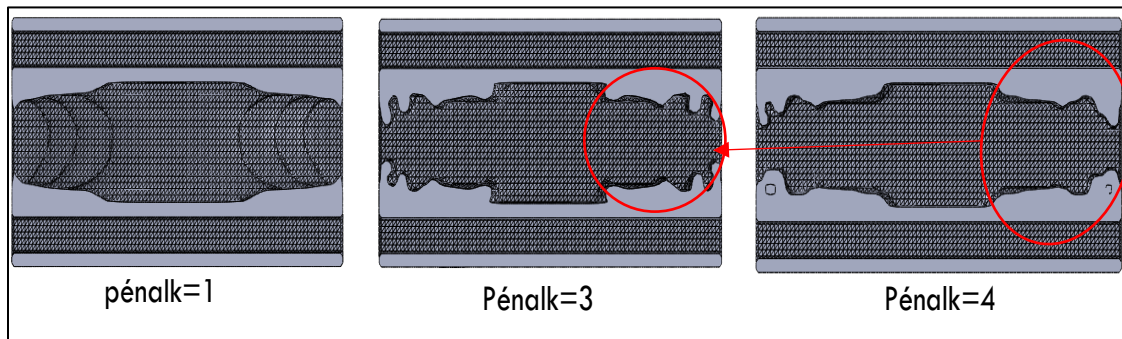


Figure 54 : Influence de penalK

De même, la figure 55 représente l'influence de la penalG sur l'optimisation tout en gardant penalK fixe. On constate que penalG n'a pas assez d'influence sur la densité physique. Ce qui est tout à fait logique, car son objectif est d'ajuster la

relation entre la densité et les propriétés mécaniques pertinentes pour les contraintes de flambement.

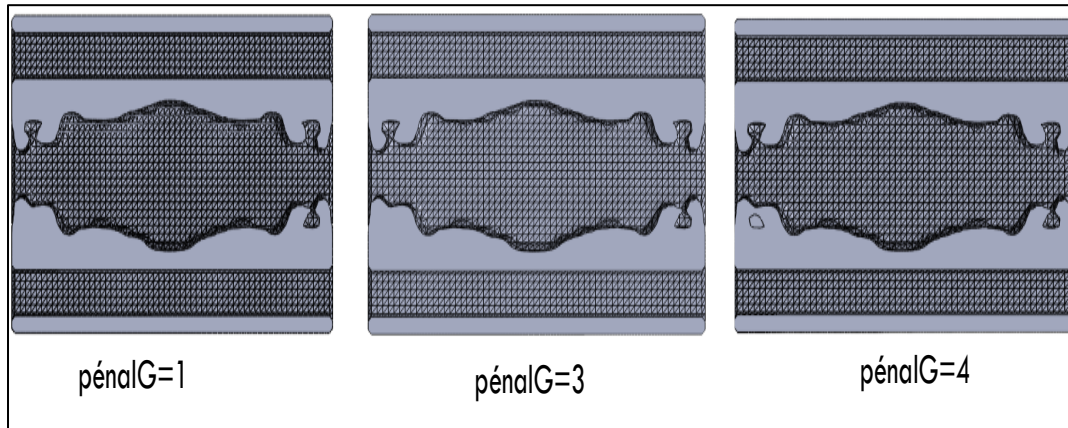


Figure 55 : Influence de penalG

À partir de ces résultats, on peut conclure qu'une fraction volumique comprise entre 0.6 et 0.7 conduit des structures plus stables avec moins d'instabilités comparées aux valeurs faibles de fraction volumique. De plus, un rayon minimal entre 1.5 et 2mm donne des profils optimisés avec silhouette nette, tandis que les résultats de pénalisation  $penal_k$  et  $penal_G$  égale 3 sont les plus optimisés comme indiqué dans la littérature.

## **CHAPITRE 5.**

### **CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES**

#### **5.1. CONCLUSIONS**

Dans la première partie de ce mémoire, une revue de littérature a été réalisée sur l'optimisation des structures 3D, la conception des passerelles en aluminium et l'intégration des contraintes de flambage lors de l'optimisation des structures. La revue de la littérature a mis en évidence un manque de logiciels permettant d'optimiser la topologie des structures en respectant les critères de flambage. Une méthodologie bien détaillée a été présentée dans le chapitre 3. Elle permet de résoudre un problème d'optimisation de structures 3D tout en respectant les critères de flambage linéaire.

L'algorithme développé (annexe1) prend en compte trois objectifs principaux lors de l'optimisation :

- Minimiser le poids de la structure
- Minimiser la compliance
- Respecter les conditions de flambage.

Pour résoudre le problème de flambage, l'approche de résolution des problèmes aux valeurs propres a été utilisée. Cette approche nécessite le calcul des matrices de rigidité et géométrique comme présenter dans les figures 3.5 et 3-6. Nous avons utilisé la factorisation par la décomposition de Cholesky pour l'assemblage de ces matrices.

Les grandes conclusions après l'optimisation sont les suivantes :

- ❖ La méthodologie propose optimise la topologie d'une structure 3D en tenant compte des contraintes de flambage en utilisant la méthode SIMP.
- ❖ L'optimisation des structures de la passerelle, avec les conditions et les charges appropriées, a conduit à un profil en C. Nous observons quelques instabilités après l'optimisation de la structure.
- ❖ La création de zone passive (zone de non-design) a permis de guider l'optimisation vers des structures optimisées tout en respectant les contraintes de fabrication et d'assemblage.
- ❖ La structure optimisée donne une charge critique de flambage de  $3.1 \times 10^5$  Pa pour le premier mode de flambage et une charge critique flambage de  $1.5 \times 10^5$  Pa pour le dernier mode de flambage.
- ❖ Une meilleure précision géométrique est obtenue lorsque le maillage est raffiné. Cependant le temps de calcul obtenue et il serait important d'ajouter une méthode de raffinage partielle juste pour les zones critique.
- ❖ L'étude de convergence du maillage pour l'analyse du comportement au flambage de la structure optimisée a donné un facteur de flambage de 40, ce qui concorde bien avec le modèle MATLAB, qui est entre 33 et 58.
- ❖ L'optimisation de la plateforme de la passerelle avec les conditions et les charges appropriées a montré qu'on a besoin de matériau au centre de la passerelle ainsi, il manque une étape de validation de ce résultat.
- ❖ Il est nécessaire de bien maitrise les paramètres d'extraction (marching cube et filtrage) afin d'éviter des erreurs au niveau des maillages lors de transfert du modèle maillé Matlab vers un modèle paramétrique solide.

- ❖ L'analyse de la performance des structures optimisées a permis de réduire le nombre de traverse de six à trois tout en conservant la stabilité de la structure.

Nous avons étudié les influences des paramètres d'optimisation sur la topologie finale. Nous constatons que :

- ❖ Les paramètres tels que le rayon de filtrage, le choix du filtrage, de la densité physique et la taille des éléments influencent la précision de la pièce optimisée.
- ❖ Plus le rayon minimal ( $r_{min}$ ) est grand, plus la densité filtrée de chaque élément sera influencée par un plus grand nombre de voisins, ce qui réduit la précision de la géométrie (perte de détails fins). Lorsque le  $r_{min}$  est plus petit (proche de 1), on observe un raffinement des densités filtrées, et l'influence sera limitée aux éléments proches. Toute fois un rayon minimal très petit conduit à la création de l'effet damier.
- ❖ La pénalisation sur le module d'élasticité (rigidité)  $penalk$  a plus d'influence que la pénalisation sur les contraintes ( $penalG$ ).
- ❖ Les paramètres optimaux identifiés sont : fraction volumique comprise entre 0.6 et 0.7; rayon minimal de filtrage de 1.5 à 2; et le facteur de pénalisation est environ 3.

## **5.2. PERSPECTIVES**

Ce mémoire présente une méthodologie simple et efficace pour l'optimisation de structures 3D en prenant compte du critère de flambage. Cependant, elle présente des limites telles que :

- ✚ Elle ne prend pas en compte l'impact de la dynamique sur les modes de flambage ni sur la performance globale des structures optimisées.
- ✚ Elle ne prend en compte que le flambage linéaire,
- ✚ Elle ne prend pas en compte les erreurs liées au transfert du fichier maillé après optimisation topologique en modèle 3D pour le post-traitement.
- ✚ Elle ne peut optimiser qu'une seule structure à la fois.

Il serait important d'investiguer sur :

- ✚ Le développement d'une extension pour l'analyse de grandes déformations et grands déplacements.
- ✚ Rendre la méthode complètement automatisée pour l'analyse post-traitement des structures optimisées.
- ✚ Réaliser des essais expérimentaux, comme indiqué dans la figure 56 avec une coloration d'image pour déterminer le phénomène de flambage dans les conditions réelles et valider le modèle numérique.

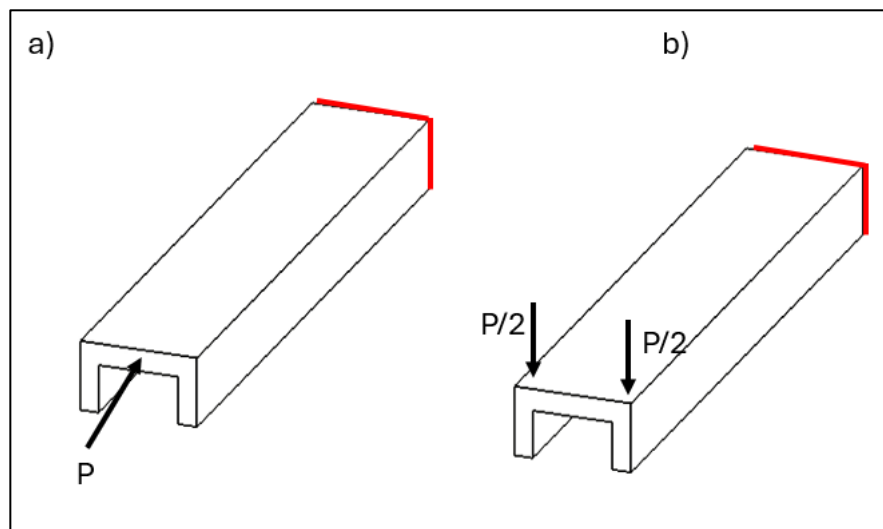


Figure 56 : essais expérimentaux pour la validation

- ✚ Une étude future intégrant une analyse dynamique permettant d'améliorer les résultats obtenus.
- ✚ Enfin, faire une étude approfondie économique entre la méthode d'optimisation classique et la méthode d'optimisation développée avec SIMP.

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- ALMET. (2024, 03 février). *Donnée technique sur l'aluminium et ses alliages*. <https://almet-metal.com/informations-techniques/donnees-aluminium#>
- ALMET. (2024, 03 février). *désignation des états métallurgiques, information technique aluminium*. <https://almet-metal.com/wp-content/uploads/2020/02/alu-etats-metallurgiques.pdf>
- Aluminium France (2024, 02 mars). *Propriété et alliage sur l'aluminium France*. <https://www.aluminium.fr/proprietes/>
- Amir, E., & Amir, O. (2023). Free form shape optimization of three dimensional beams using cross section analysis. *International Journal of Solids and Structures*, 277-278, 112331. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2023.112331>
- AMROUNE, A. (2022). *Automatisation de la construction de modèles géométriques à partir de résultats d'optimisation topologique* Université du Québec à Trois-Rivières]. Automatisation de la construction de modèles géométriques à partir de résultats d'optimisation topologique - Cognitio (uqtr.ca)
- Andreassen, E., Clausen, A., Schevenels, M., Lazarov, B. S., & Sigmund, O. (2011). Efficient topology optimization in MATLAB using 88 lines of code. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 43(1), 1–16. <https://doi.org/10.1007/s00158-010-0594-7>
- ANICONV. (2025, 10 août). *Convertisseur STL en ligne*. <https://anyconv.com/fr/stl-convertisseur/>
- Association de l'aluminium du Canada. (2012). *Possibilités d'utilisation de l'aluminium dans la construction de ponts routiers et de viaducs*.
- Bacciaglia, A., Ceruti, A., & Liverani, A. (2021). Surface smoothing for topological optimized 3D models. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 64(6), 3453–3472. <https://doi.org/10.1007/s00158-021-03027-6>
- Beaulieu, D. (2023). *calcul des charpentes d'aluminium, aluquébec*.
- Bian, X., & Fang, Z. (2017). Large-scale buckling-constrained topology optimization based on assembly-free finite element analysis. *Advances in Mechanical Engineering*, 9(9), 1687814017715422. <https://doi.org/10.1177/1687814017715422>
- Briseghella, B., Fenu, L., Feng, Y., Lan, C., Mazzarolo, E., & Zordan, T. (2016). Optimization Indexes to Identify the Optimal Design Solution of Shell-Supported Bridges. *Journal of Bridge Engineering*, 21(3), 04015067. [https://doi.org/doi:10.1061/\(ASCE\)BE.1943-5592.0000838](https://doi.org/doi:10.1061/(ASCE)BE.1943-5592.0000838)
- Bruyneel, M., Craveur, J.-C., & Gourmelen, P. (2014). *Optimisation des structures mécaniques, Méthode numériques et éléments finis*. . Dunod, Paris.
- Chen, A. (2022). *Topology Optimisation of Concrete Structures Considering Stress Constraints* The University of Sydney].

Chen, J., Shapiro, V., Suresh, K., & Tsukanov, I. (2007). Shape optimization with topological changes and parametric control. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 71(3), 313–346. <https://doi.org/https://doi.org/10.1002/nme.1943>

COOK, R. D., MALKUS, D. S., & PLESHA, M. F. (1988). *CONCEPT AND APPLICATIONS OF FINITE ELEMENT ANALYSIS*. WILEY.

Cresta, P. (2008). *Domain decomposition and nonlinear relocalization strategies for the simulation of large stiffened structures with local buckling*

École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan]. <https://theses.hal.science/tel-00363656>

Dassault systemes. (2025, 20 août). *Mesh files (\*.stl,.obj)*. [https://help.solidworks.com/2025/english/SolidWorks/sldworks/c\\_stl\\_files.htm?verRedirec t=1](https://help.solidworks.com/2025/english/SolidWorks/sldworks/c_stl_files.htm?verRedirec t=1)

Dey, P., Sychterz, A., Narasimhan, S., & Walbridge, S. (2016). Performance of Pedestrian-Load Models through Experimental Studies on Lightweight Aluminum Bridges. *Journal of Bridge Engineering*, 21(8), C4015005. [https://doi.org/doi:10.1061/\(ASCE\)BE.1943-5592.0000824](https://doi.org/doi:10.1061/(ASCE)BE.1943-5592.0000824)

Dunning, P. D. (2023). Stability constraints for geometrically nonlinear topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 66(12), 253. <https://doi.org/10.1007/s00158-023-03712-8>

Duriez, E., Morlier, J., Azzaro-Pantel, C., & Charlotte, M. (2022). Ecodesign with topology optimization. *Procedia CIRP*, 109, 454–459. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.procir.2022.05.278>

Eschenauer, H. A., & Olhoff, N. (2001). Topology optimization of continuum structures: A review\*. *Applied Mechanics Reviews*, 54(4), 331–390. <https://doi.org/10.1115/1.1388075>

Ferrari, F., & Sigmund, O. (2019). Revisiting topology optimization with buckling constraints. *Struct. Multidiscip. Optim.*, 59(5), 1401–1415. <https://doi.org/10.1007/s00158-019-02253-3>

Ferrari, F., & Sigmund, O. (2020). A new generation 99 line Matlab code for compliance topology optimization and its extension to 3D. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 62(4), 2211–2228. <https://doi.org/10.1007/s00158-020-02629-w>

Ferrari, F., Sigmund, O., & Guest, J. K. (2021). Topology optimization with linearized buckling criteria in 250 lines of Matlab. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 63(6), 3045–3066. <https://doi.org/10.1007/s00158-021-02854-x>

Ferreira, F., & Simões, L. (2019). Optimum design of a cable-stayed steel footbridge with three dimensional modelling and control devices. *Engineering Structures*, 180, 510–523. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2018.11.038>

Flickr(2026,7 janvier), passerelle en arche. <https://www.flickr.com/photos/50879678@N03/42755400081>

Geoffroy-Donders, P. (2018). *Homogenization method for topology optimization of structures built with lattice materials* Ecole Polytechnique].

Hsu, M.-H., & Hsu, Y.-L. (2005). Interpreting three-dimensional structural topology optimization results. *Computers & Structures*, 83(4), 327–337. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2004.09.005>

Huang, X., & Xie, Y. M. (2009). Bi-directional evolutionary topology optimization of continuum structures with one or multiple materials. *Computational Mechanics*, 43(3), 393–401. <https://doi.org/10.1007/s00466-008-0312-0>

Hughes, T. J. R., Levit, I., & Winget, J. (1983). An element-by-element solution algorithm for problems of structural and solid mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 36(2), 241–254. [https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0045-7825\(83\)90115-9](https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0045-7825(83)90115-9)

Jun, T., & Yun-kang, S. (2009). The Parabolic KS Function for the Structural Topology Optimization. 2009 Second International Workshop on Computer Science and Engineering,

Kilardj, M., Ikhenazen, G., Messenger, T., & Kanit, T. (2016). Linear and nonlinear buckling analysis of a locally stretched plate. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 30(8), 3607–3613. <https://doi.org/10.1007/s12206-016-0721-5>

Koguchi, A., & Kikuchi, N. (2006). A surface reconstruction algorithm for topology optimization. *Engineering with Computers*, 22(1), 1–10. <https://doi.org/10.1007/s00366-006-0023-0>

Lê, V., & Champlaud, H. (2013). *Facteur de sécurité des structures de poutres colonnes basé sur l'analyse du flambage linéaire par éléments finis* CFM 2013 - 21ème Congrès Français de Mécanique, hal-03439882f

LEMAY, F. (2012). *Étude du chargement piétonnier sur passerelles piétonnières* . [Mémoire, Université de Sherbrooke].

Lévesque, F., & Tremblay, D. (2010). *Conception d'une passerelle d'aluminium, Étude de cas*. Les presses de l'aluminium.

Li, B., & Kennedy, G. J. (2024). Buckling mode constraints for topology optimization using eigenvector aggregates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 429, 117145. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.cma.2024.117145>

Liu, J., Li, Q., Liu, S., & Tong, L. (2019). Concurrent optimization design of axial shape and cross-sectional topology for beam structures. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 59(6), 2287–2302. <https://doi.org/10.1007/s00158-019-02195-w>

Liu, K., & Tovar, A. (2014). An efficient 3D topology optimization code written in Matlab. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 50(6), 1175–1196. <https://doi.org/10.1007/s00158-014-1107-x>

Liu, S., Li, Q., Liu, J., Chen, W., & Zhang, Y. (2018). A Realization Method for Transforming a Topology Optimization Design into Additive Manufacturing Structures. *Engineering*, 4(2), 277–285. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.eng.2017.09.002>

Marcelin, L. J. (2006). *Optimisation des structures et d'élément mécaniques*. Cépadués.

- Mazzolani, F. M. (2004). Competing issues for aluminium alloys in structural engineering. *Progress in Structural Engineering and Materials*, 6(4), 185–196. <https://doi.org/https://doi.org/10.1002/pse.178>
- Memon, B.-A., & Su, X.-z. (2004). Arc-length technique for nonlinear finite element analysis. *Journal of Zhejiang University-SCIENCE A*, 5(5), 618–628. <https://doi.org/10.1631/jzus.2004.0618>
- Ministère de la Culture et des Communications(2024,30 janvier). Répertoire du patrimoine culturel du Québec. <https://www.patrimoine-culturel.gouv.qc.ca/detail.do?methode=consulter&id=93514&type=bien#>
- Mitjana, F. (2018). *optimisation topologique de structures sous contraintes de flambage* [Thèse, Université Paul Sabatier Toulouse III].
- Mitjana, F., Cafieri, S., Bugarin, F., Gogu, C., & Castanie, F. (2019). Optimization of structures under buckling constraints using frame elements. *Engineering Optimization*, 51(1), 140–159. <https://doi.org/10.1080/0305215X.2018.1444162>
- Nana, A., Cuillière, J.-C., & Francois, V. (2017). Automatic reconstruction of beam structures from 3D topology optimization results. *Computers & Structures*, 189, 62–82. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2017.04.018>
- Parke, G., & Hewson, N. (2008). *Ice manual of bridge engeneering*. Institution of civil Engineer.
- Peigney, M. (2018). *Optimisation de forme en science de l'ingénieur, Méthodes et applications*. IFSTTAR
- Ribeiro, T. P., Bernardo, L. F. A., & Andrade, J. M. A. (2021). Topology Optimisation in Structural Steel Design for Additive Manufacturing. *Applied Sciences*, 11(5).
- Roiné, T. (2022). *Intégration des critères de tenue mécanique et de dimensionnement de structures lattices multi-matériau dans la méthode d'optimisation topologique basée sur les entités NURBS* HESAM Université].
- Saleem, M. A., Mirmiran, A., Xia, J., & Mackie, K. (2012). Experimental Evaluation of Aluminum Bridge Deck System. *Journal of Bridge Engineering*, 17(1), 97–106. [https://doi.org/doi:10.1061/\(ASCE\)BE.1943-5592.0000204](https://doi.org/doi:10.1061/(ASCE)BE.1943-5592.0000204)
- Sétra. (2006). *Passerelles piétonnes : Évaluation du comportement vibratoire sous l'action des piétons*. .
- Sigmund, O. (2001). A 99 line topology optimization code written in Matlab. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 21(2), 120–127. <https://doi.org/10.1007/s001580050176>
- Sigmund, O., & Petersson, J. (1998). Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. *Structural optimization*, 16(1), 68–75. <https://doi.org/10.1007/BF01214002>
- Siwowski, T. (2006). Aluminium Bridges – Past, Present and Future. *Structural Engineering International*, 16(4), 286–293. <https://doi.org/10.2749/101686606778995137>

SOLIDWORKS. (2025,20octobre). *Maillage volumique*. [https://help.solidworks.com/2025/french/SolidWorks/cworks/c\\_Solid\\_Mesh.htm?id=26.16.0](https://help.solidworks.com/2025/french/SolidWorks/cworks/c_Solid_Mesh.htm?id=26.16.0)

Stolpe, M., & Svanberg, K. (2001). An alternative interpolation scheme for minimum compliance topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 22(2), 116–124. <https://doi.org/10.1007/s001580100129>

Subodh, K. D., & Gilbert Kaufman, J. (2007). ALUMINUM ALLOYS FOR BRIDGES AND BRIDGE DECKS *The minerals metals and materials society*, pp 61–72.

Structurae (02 mars,2024). Base de données et galerie internationale d'ouvrages d'art et du génie civil, <https://structurae.net/fr/medias/430627-sundbrua>

Takezawa, A., Nishiwaki, S., & Kitamura, M. (2010). Shape and topology optimization based on the phase field method and sensitivity analysis. *Journal of Computational Physics*, 229(7), 2697–2718. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jcp.2009.12.017>

Takougoum, P. A. N. (2018). *adaptation et transformation automatiques des résultats d'optimisation topologique en modèles CAO de structures de poutres* [Thèse, Université Du Québec à Trois-Rivières].

Technique d'ingénieur. ( 2024,02mars). *Aluminium : définition et propriétés*. <https://www.techniques-ingenieur.fr/glossaire/aluminium>

Technorm(2026,14 janvier). Les charges de neige au Québec : de lourdes conséquences. <https://technorm.ca/articles/charges-de-neige/>

Wang, Y., Qin, D., Wang, R., & Zhao, H. (2021). Dynamic Topology Optimization of Long-Span Continuum Structures. *Shock and Vibration*, 2021(1), 4421298. <https://doi.org/https://doi.org/10.1155/2021/4421298>

Yanda, C. (2025). *Topology Optimization of Additive Manufactured Parts including fatigue behavior*. [Thèse, Université de HESAM].

Yi, W. (2022). *Optimisation topologique en dynamique des structures: vibrations, résistance à la rupture et incertitudes* Hunan University].

## ANNEXE1 : ALGORITHME D'OPTIMISATION

### function

```

:top3ALUQC(nelx,nely,nelz,volfrac,penalK,rmin,ft,ftBC,eta,beta,ocPar,maxit,penalG,nEig,pAgg)
% ----- PRE. 1) MATERIAL AND CONTINUATION PARAMETERS
[E0,Emin,nu] = deal(1,1e-6,0.33);
penalCntK = { 1, 1, 25, 0.25 };
penalCntG = { 1, 1, 25, 0.25 };
betaCnt = { 1, 1, 25, 2 };
pAggCnt = { 1,1,25,2};
Lx=1;
if ftBC == 'N', bcF = 'symmetric'; else, bcF = 0; end
% ----- PRE. 2) DISCRETIZATION FEATURES
nEl = nelx * nely * nelz;
nodeNrs = int32( reshape( 1 : ( 1 + nelx ) * ( 1 + nely ) * ( 1 + nelz ), ...
    1 + nely, 1 + nelz, 1 + nelx ) );
%disp(nodeNrs);
cVec = reshape( 3 * nodeNrs( 1 : nely, 1 : nelz, 1 : nelx ) + 1, nEl, 1 );
cMat = cVec+int32( [0,1,2,3*(nely+1)*(nelz+1)+[0,1,2,-3,-2,-1],-3,-2,-1,3*(nely+...
    1)+[0,1,2],3*(nely+1)*(nelz+2)+[0,1,2,-3,-2,-1],3*(nely+1)+[-3,-2,-1]]);
nDof = ( 1 + nely ) * ( 1 + nelz ) * ( 1 + nelx ) * 3;
[ sl, sll ] = deal( [ ] );
for j = 1 : 24
    sl = cat( 2, sl, j : 24 );
    sll = cat( 2, sll, repmat( j, 1, 24 - j + 1 ) );
end
[iK , jK ] = deal( cMat( :, sl )', cMat( :, sll )' );
lar = sort( [ iK( : ), jK( : ) ], 2, 'descend' );
Ke = 1/(1+nu)/(2*nu-1)/144 * ( [ -32;-6;-6;8;6;6;10;6;3;-4;-6;-3;-4;-3;-6;10;...
    3;6;8;3;3;4;-3;-3; -32;-6;-6;-4;-3;6;10;3;6;8;6;-3;-4;-6;-3;4;-3;3;8;3;...
    3;10;6;-32;-6;-3;-4;-3;-3;4;-3;-6;-4;6;6;8;6;3;10;3;3;8;3;6;10;-32;6;6;...
    -4;6;3;10;-6;-3;10;-3;-6;-4;3;6;4;3;3;8;-3;-3;-32;-6;-6;8;6;-6;10;3;3;4;...
    -3;3;-4;-6;-3;10;6;-3;8;3;-32;3;-6;-4;3;-3;4;-6;3;10;-6;6;8;-3;6;10;-3;...
    3;8;-32;-6;6;8;6;-6;8;3;-3;4;-3;3;-4;-3;6;10;3;-6;-32;6;-6;-4;3;3;8;-3;...
    3;10;-6;-3;-4;6;-3;4;3;-32;6;3;-4;-3;-3;8;-3;-6;10;-6;-6;8;-6;-3;10;-32;...
    6;-6;4;3;-3;8;-3;3;10;-3;6;-4;3;-6;-32;6;-3;10;-6;-3;8;-3;3;4;3;3;-4;6;...
    -32;3;-6;10;3;-3;8;6;-3;10;6;-6;8;-32;-6;6;8;6;-6;10;6;-3;-4;-6;3;-32;6;...
    -6;-4;3;6;10;-3;6;8;-6;-32;6;3;-4;3;3;4;3;6;-4;-32;6;-6;-4;6;-3;10;-6;3;...
    -32;6;-6;8;-6;-6;10;-3;-32;-3;6;-4;-3;3;4;-32;-6;-6;8;6;6;-32;-6;-6;-4;...
    -3;-32;-6;-3;-4;-32;6;6;-32;-6;-32]+nu*[ 48;0;0;0;-24;-24;-12;0;-12;0;...
    24;0;0;0;24;-12;-12;0;-12;0;0;-12;12;12;48;0;24;0;0;0;-12;-12;-24;0;-24;...
    0;0;24;12;-12;12;0;-12;0;-12;-12;0;48;24;0;0;12;12;-12;0;24;0;-24;-24;0;...
    0;-12;-12;0;0;-12;-12;0;-12;48;0;0;0;-24;0;-12;0;12;-12;12;0;0;0;-24;...
    -12;-12;-12;-12;0;48;0;24;0;-24;0;-12;-12;-12;-12;12;0;0;24;12;-12;0;...
    0;-12;0;48;0;24;0;-12;12;-12;0;-12;-12;24;-24;0;12;0;-12;0;0;-12;48;0;...
    0;-24;24;-12;0;0;-12;12;-12;0;0;-24;-12;-12;0;48;0;24;0;0;0;-12;0;-12;...
    -12;0;0;0;-24;12;-12;-12;48;-24;0;0;0;0;-12;12;0;-12;24;24;0;0;12;-12;...
    48;0;0;-12;-12;12;-12;0;0;-12;12;0;0;0;24;48;0;12;-12;0;0;-12;0;-12;-12;...
    -12;0;0;-24;48;-12;0;-12;0;0;-12;0;12;-12;-24;24;0;48;0;0;0;-24;24;-12;...
    0;12;0;24;0;48;0;24;0;0;0;-12;12;-24;0;24;48;-24;0;0;-12;-12;-12;0;-24;...
    0;48;0;0;0;-24;0;-12;0;-12;48;0;24;0;24;0;-12;12;48;0;-24;0;12;-12;-12;...
    48;0;0;0;-24;-24;48;0;24;0;0;48;24;0;0;48;0;0;48;0;48 ] );

```

```

Ke0( tril( ones( 24 ) ) == 1 ) = Ke';
Ke0 = reshape( Ke0, 24, 24 );
Ke0 = Ke0 + Ke0' - diag( diag( Ke0 ) );

Cmat0 = E0/(1+nu)/(1-2*nu) * [1-nu, nu, nu, 0, 0, 0; nu, 1-nu, nu, 0, 0, 0; nu, nu, 1-nu, 0, 0, 0; 0,
0, 0, (1-2*nu)/2, 0, 0; 0, 0, 0, 0, (1-2*nu)/2, 0; 0, 0, 0, 0, 0, (1-2*nu)/2]; % non-dimensional elasticity
matrix
xiG = sqrt(1/3)*[-1,1]; etaG = xiG; zetaG = xiG; wxi = [1,1]; weta = wxi; wzeta = wxi;
wG = [1,1];
xe = [-1,-1,-1; 1,-1,-1; 1,1,-1; -1,1,-1; -1,-1,1; 1,-1,1; 1,1,1; -1,1,1]*Lx/nelx/2;
IMat = zeros(6, 9);
IMat(1, 1) = 1; IMat(2, 4) = 1; IMat(3, 7) = 1;
IMat(4, 2) = 1; IMat(4, 9) = 1; IMat(5, 2) = 1; IMat(5, 4) = 1; IMat(6, 6) = 1; IMat(6, 8) = 1;
% shape funct. logical derivatives
dN = @(xi,ei,zi) 0.125 * [ -(1-ei).*(1-zi), (1-ei).*(1-zi), (1+ei).*(1-zi), -(ei+1).*(1-zi), -(1-ei).*(1+zi),
(1-ei).*(1+zi), (1+ei).*(1+zi), -(1+ei).*(1+zi);
-(1-xi).*(1-zi), -(1+xi).*(1-zi), (1+xi).*(1-zi), (1-xi).*(1-zi), -(1-xi).*(1+zi), -
(1+xi).*(1+zi), (1+xi).*(1+zi), (1-xi).*(1+zi);
-(1-xi).*(1-ei), -(1+xi).*(1-ei), (1+xi).*(1+ei), (1-xi).*(1+ei), (1-xi).*(1-ei),
(1+xi).*(1-ei), (1+xi).*(1+ei), (1-xi).*(1+ei)];
B0 = @(gradN) IMat * kron(gradN,eye(3));
[indM, t2ind] = deal([1,3,5,7,9,11,13,15,32,34,36,38,40,42,44,59,61,63,65,67,69,82,84,86,88,90,101,103,105,10
7,116,118,120,127,129,134],
[2,3,4,5,6,7,8,10,11,12,13,14,15,17,18,19,20,21,23,24,25,26,28,29,30,32,33,35]); % auxiliary set
of indices (1)
[iG, jG] = deal(iK(indM,:), jK(indM,:));
lkG = sort([iG(:), jG(:)], 2, 'descend');
[a1, a2] = deal(reshape(lkG(:, 2), 36, nEI)', reshape(lkG(:, 1), 36, nEI)');
dZdu = zeros(36, 24);

% Loop on the displacement components
for ii = 1 : 24
tt = 0; Uvec = zeros(24, 1); Uvec(ii, 1) = 1;
se = Cmat0 * B0((dN(0, 0, 0) * xe) \ dN(0, 0, 0)) * Uvec;
for j = 1 : length(xiG)
for k = 1 : length(etaG)
for m = 1 : length(zetaG)
xi = xiG(j); ei = etaG(k); zi = zetaG(m);
w = wG(j) * wG(k) * wG(m) * det(dN(xi, ei, zi) * xe);
gradN = (dN(xi, ei, zi) * xe) \ dN(xi, ei, zi);
B1 = [kron(gradN, [1, 0, 0]); kron(gradN, [0, 1, 0]); kron(gradN, [0, 0, 1])];
tt = tt + (B1' * kron(eye(3), [se(1), se(4), se(5); se(4), se(2), se(6); se(5), se(6), se(3)])
* B1) * w; %
end
end
end
dZdu(:,ii) = tt([1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 69, 71, 73, 75, 77, 79, 103, 105, 107, 109, 111, 137, 139, 141, 143, 171,
173, 175, 205, 207, 249]);
end
dZdu(t2ind, :) = 2 * dZdu(t2ind, :);
fKS = @(p, v) max(v) + log(sum(exp(p * (v - max(v)))))) / p;
dKS = @(p, v, dv) sum(exp(p .* (v - max(v)))' .* dv, 2) ./ sum(exp(p .* (v - max(v))));

% ----- LOADS, SUPPORTS AND PASSIVE DOMAINS

```

```

fixed1 = 1 : 3 *(nely+1)* ( nelz + 1 );
fixed2 = 3 * nelx * (nely + 1) * (nelz + 1) + (1 : 3 * (nely+1)*(nelz + 1));
fixed = [fixed1, fixed2];
F=sparse(nDof,1);
for iil = 1:nelx+1
    for kkl = 1:nelz+1
        F(3*((iil-1)*(nely+1)*(nelz+1) + nely*(nelz+1) + kkl) - 1) = -5000 / (nelx * nelz);
    end
end
pasS = [];
pasV=[];
free = setdiff( 1 : nDof, fixed );
act = setdiff( ( 1 : nEl ), union( pasS, pasV ) );
% ----- PRE. 4) DEFINE IMPLICIT FUNCTIONS
prj = @(v,eta,beta) (tanh(beta*eta)+tanh(beta*(v(:)-eta)))/...
    (tanh(beta*eta)+tanh(beta*(1-eta)));
deta = @(v,eta,beta) - beta * csch( beta ) .* sech( beta * ( v ( : ) - eta ) ).^2 .* ...
    sinh( v ( : ) * beta ) .* sinh( ( 1 - v ( : ) ) * beta );
dprj = @(v,eta,beta) beta*(1-tanh(beta*(v-eta)).^2)./(tanh(beta*eta)+tanh(beta*(1-eta)));
cnt = @(v,vCnt,l) v+(l>=vCnt{1}).*(v<vCnt{2}).*(mod(l,vCnt{3})==0).*vCnt{4};
% ----- PRE. 5) PREPARE FILTER
[dy,dz,dx]=meshgrid(-ceil(rmin)+1:ceil(rmin)-1,...
    -ceil(rmin)+1:ceil(rmin)-1,-ceil(rmin)+1:ceil(rmin)-1 );
h = max( 0, rmin - sqrt( dx.^2 + dy.^2 + dz.^2 ) );
Hs = imfilter( ones( nely, nelz, nelx ), h, bcF );
% ----- ALLOCATE AND INITIALIZE OTHER PARAMETERS

[ x, dsK,dsG, dV ] = deal( zeros( nEl, 1 ) );

[phiDKphi,phiDGphi,adj] = deal(zeros(nEl,nEig));
phi = zeros(nDof,nEig); adjL = phi; adjV = phi;
dV( act, 1 ) = 1/nEl/volfrac;
if nargin > 15
    x = xInitial; %load(x0);
else
x( act ) = ( volfrac*( nEl - length(pasV) ) - length(pasS) )/length( act );
x( pasS ) = 1;
end
[ xPhys, xOld, ch, loop, U ] = deal( x, 1, 1, 0, zeros( nDof, 1 ) );

[restartAs,plotL,plotR,muVec] = deal(0,[],[],[]); clear iK jK iG jG dx dy dz;
% ===== START OPTIMIZATION
LOOP
while ch > 1e-6 && loop < maxit
    loop = loop + 1;
    xTilde = imfilter( reshape( x, nely, nelz, nelx ), h, bcF ) ./ Hs;
    xPhys( act ) = xTilde( act );
    if ft > 1
        f = ( mean( prj( xPhys, eta, beta ) ) - volfrac ) * (ft == 3);
        while abs( f ) > 1e-6
            eta = eta - f / mean( deta( xPhys, eta, beta ) );
            f = mean( prj( xPhys, eta, beta ) ) - volfrac; end
        dHs = Hs ./ reshape( dprj( xPhys, eta, beta ), nely, nelz, nelx );
        xPhys = prj( xPhys, eta, beta );
    end
end

```

```

ch = max(abs(xPhys-xOld));
xOld = xPhys;
% ----- RL. 2) SETUP AND SOLVE EQUILIBRIUM EQUATIONS
sK = ( Emin + xPhys.^penalK * ( E0 - Emin ) );
dsK( act ) = -penalK * ( E0 - Emin ) * xPhys( act ) .^ ( penalK - 1 );
sK = reshape( Ke( : ) * sK', length( Ke ) * nEl, 1 );
K = fsparse( lar( :, 1 ), lar( :, 2 ), sK, [ nDof, nDof ] );

L = chol( K( free, free ),'lower');
U( free ) = L' \ ( L \ F( free ) );
% -----COMPUTE SENSITIVITIES
dc = dsK .* sum( ( U( cMat ) * Ke0 ) .* U( cMat ), 2 );
dc = imfilter( reshape( dc, nely, nelz, nelx ) ./ dHs, h, bcF );
dV0 = imfilter( reshape( dV, nely, nelz, nelx ) ./ dHs, h, bcF );

% ----- RL. 3) BUILD STRESS STIFFNESS MATRIX
sGP = (Cmat0*B0((dN(0,0,0)*xe)\dN(0,0,0))*U(cMat)');
Z = zeros(nEl,36);
for i=1:length(xiG)
for j = 1:length(etaG)
for k = 1:length(zetaG)

xi = xiG(i); ei = etaG(j);zi=zetaG(k); w = wxi(i)*weta(j)*wzeta(k)*det(dN(xi,ei,zi)*xe);

gradN = (dN(xi,ei,zi)*xe)\dN(xi,ei,zi);
a = gradN(1,:); b = gradN(2,:); c=gradN(3,:);B = zeros(6,36);
|
[1,1;2,1;3,1;4,1;5,1;6,1;7,1;8,1;2,2;3,2;4,2;5,2;6,2;7,2;8,2;3,3;4,3;5,3;6,3;7,3;8,3;4,4;5,4;6,4;7,4;8,
4;5,5;6,5;7,5;8,5;6,6;7,6;8,6;7,7;8,7;8,8];
for jj = 1:36
B(:,jj) = [a(l(jj,1))*a(l(jj,2)); ...
b(l(jj,1))*b(l(jj,2)); ...
c(l(jj,1))*c(l(jj,2)); ...
b(l(jj,2))*a(l(jj,1))+b(l(jj,1))*a(l(jj,2));...
a(l(jj,2))*c(l(jj,1))+c(l(jj,1))*a(l(jj,2));...
b(l(jj,2))*c(l(jj,1))+c(l(jj,1))*b(l(jj,2))];
end
% ----- current contribution to (unique ~= 0) elements of keG
Z = Z+sGP*B*w;
end
end
end
sG0 = E0*xPhys.^penalG;
dsG(act) = penalG*E0*xPhys(act).^penalG-1);
sG = reshape((sG0.*Z)',36*nEl,1);
G = fsparse(lkG(:,1)-1,lkG(:,2)-1,sG,[nDof,nDof])+...
fsparse(lkG(:,1), lkG(:,2), sG,[nDof,nDof]);
G = G+G'-diag(diag(G));
% ----- SOLVE BUCKLING EIGENVALUE PROBLEM
matFun = @(x) L\ (G(free,free)*x);
[eivecs,D] = eigs(matFun,length(free),nEig+4,'sa');
[mu,ii] = sort(diag(-D),'descend');
eivSort = eivecs(:,ii(1:nEig));
phi(free,:) = eivSort./sqrt(diag(eivSort'*K(free,free)*eivSort)');

% ----- SENSITIVITY ANALYSIS OF BLFs

```



