

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE
PRÉSENTÉ À
L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À CHICOUTIMI
COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN RESSOURCES ET SYSTÈMES

PAR
ANDRÉ LAROUCHE
B. Ing.

COUPLAGE DE LA MÉTHODE DES PLANS IMAGINAIRES EN TROIS DIMENSIONS
ET DU LOGICIEL PHOENICS POUR LA MODÉLISATION DE
LA CHAMBRE DE COMBUSTION DE FOURS INDUSTRIELS

OCTOBRE 1988



Mise en garde/Advice

Afin de rendre accessible au plus grand nombre le résultat des travaux de recherche menés par ses étudiants gradués et dans l'esprit des règles qui régissent le dépôt et la diffusion des mémoires et thèses produits dans cette Institution, **l'Université du Québec à Chicoutimi (UQAC)** est fière de rendre accessible une version complète et gratuite de cette œuvre.

Motivated by a desire to make the results of its graduate students' research accessible to all, and in accordance with the rules governing the acceptance and diffusion of dissertations and theses in this Institution, the **Université du Québec à Chicoutimi (UQAC)** is proud to make a complete version of this work available at no cost to the reader.

L'auteur conserve néanmoins la propriété du droit d'auteur qui protège ce mémoire ou cette thèse. Ni le mémoire ou la thèse ni des extraits substantiels de ceux-ci ne peuvent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

The author retains ownership of the copyright of this dissertation or thesis. Neither the dissertation or thesis, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

RÉSUMÉ

Une nouvelle méthode de transfert de chaleur radiatif est développée. Cette méthode, appelée plans imaginaires, est en fait une simplification de la méthode de zones.

La méthode est développée en trois dimensions et pour toute fournaise de géométrie cartésienne. La méthode de Monte-Carlo est utilisée pour le calcul des aires d'échange direct. La nouvelle technique (plans imaginaires) est utilisée de trois façons différentes pour simuler un four de refonte. La première consiste à équilibrer des équations de bilan d'énergie pour calculer les températures internes du four. Ce modèle nécessite de la part de l'utilisateur l'imposition d'un champ de vitesse et de combustion. La seconde consiste à coupler la méthode avec le logiciel PHOENICS, qui résout les équations de conservation en régime permanent. La troisième est similaire à la seconde, mais cette fois les équations de conservation sont résolues en régime transitoire. Pour ces deux couplages, le logiciel PHOENICS résout les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement, de l'énergie, de la turbulence et des espèces chimiques tandis que la méthode des plans imaginaires calcule les flux de chaleur radiatifs et les températures de réfractaires.

La vérification des résultats du présent modèle est effectuée à l'aide de la méthode de zones. Cette vérification démontre la précision et la rapidité de la méthode des plans imaginaires.

André Chartrand

Directeur de la recherche

André Larouche

Étudiant

REMERCIEMENTS

Je remercie sincèrement M. André Charette D.Sc., directeur, et M. Rung Tien Bui Ph.D., co-directeur, qui m'ont appuyé et encouragé tout au long de ce mémoire.

Je tiens à remercier également tous les membres du groupe de recherche en ingénierie des procédés et systèmes, en particulier Messieurs Thierry Bourgeois, Yasar Kocaefe, Réjean Ouellet et Guy Simard pour leur aide et leurs judicieux conseils. Une pensée toute particulière pour mes parents qui m'ont encouragé du début à la fin.

Je remercie le groupe de recherche en ingénierie des procédés et systèmes, ainsi que la compagnie Alcan International pour le support financier nécessaire à la bonne marche de ce projet.

TABLES DES MATIÈRES

RÉSUMÉ.....	i
REMERCIEMENTS.....	ii
TABLE DES MATIÈRES.....	iii
LISTE DES SYMBOLES.....	v
LISTE DES FIGURES.....	xvi
LISTE DES TABLEAUX.....	xx
INTRODUCTION.....	1
I- LE RAYONNEMENT DANS LES FOURS INDUSTRIELS.....	3
1.1 Les méthodes en rayonnement.....	4
1.2 Choix d'une méthode en rayonnement.....	11
1.3 Le four de refonte.....	13
II- LA MÉTHODE DES PLANS IMAGINAIRES COMME SYSTÈME INDÉPENDANT...	16
2.1 Équations fondamentales de la méthode des plans imaginaires.....	17
2.2 Bilans énergétiques.....	37
2.3 Méthodes numériques.....	41
2.4 Formulation dite des gaz réels.....	56
III- LA MÉTHODE DES PLANS IMAGINAIRES COMME SOUS-SYSTÈME: MODÈLE EN RÉGIME PERMANENT.....	63
3.1 Le logiciel PHOENICS.....	65
3.2 Couplage de PHOENICS et des plans imaginaires.....	71
3.3 Les équations de conservation.....	78
3.3.1 Équation de continuité.....	78
3.3.2 Équations de Navier-Stokes.....	79
3.3.3 Équation d'énergie.....	80
3.3.4 Modèle de turbulence.....	81
3.3.5 Équations des espèces chimiques.....	82

3.4 Modèle de combustion.....	84
3.4.1 Réaction contrôlée par la diffusion.....	85
3.4.2 Réaction influencée par la cinétique.....	88
IV- LA MÉTHODE DES PLANS IMAGINAIRES COMME SOUS-SYSTÈME: MODÈLE TRANSITOIRE.....	90
4.1 Les méthodes numériques relatives au modèle transitoire.....	95
V- ANALYSE DES RÉSULTATS.....	101
5.1 Plans imaginaires comme modèle indépendant.....	102
5.1.1 Simulations sur des fours allongés.....	107
5.1.2 Fours non allongés.....	122
5.1.3 Formulation sous forme d'un gaz réel.....	130
5.1.4 Maillage non uniforme et distribution des facteurs d'absorption.....	136
5.1.5 Temps de calcul.....	144
5.2 Les plans imaginaires comme sous-système: modèle en régime permanent.....	148
5.3 Les plans imaginaires comme sous-système: modèle en régime transitoire.....	156
5.3.1 Description des cas simulés.....	156
5.4 Remarques générales.....	163
CONCLUSION.....	165
BIBLIOGRAPHIE.....	167
APPENDICE A Propriétés thermiques des réfractaires.....	169
APPENDICE B Calcul des propriétés thermiques équivalentes.....	173
APPENDICE C Chaleur spécifique des gaz de combustion.....	175

LISTE DES SYMBOLES

a_n	coefficient de pondération du $n^{\text{ième}}$ gaz gris pour l'émissivité d'un gaz	-
a'_n	coefficient de pondération du $n^{\text{ième}}$ gaz gris pour l'absorptivité d'un gaz	-
a_p	coefficient pour la discrétisation de l'équation de conservation	variable
A_k	aire d'une surface du maillage	m^2
A_0	constante d'Arrhenius	$\text{m}^3/\text{kg s}$
b_{kj}	élément de la matrice b_{kj}	-
b_{ij}	terme entrant dans le calcul des coefficients de pondération a_n	-
B_{kj}	élément de la matrice inverse de b	-
BM	matrice formée des éléments B_{kj}	-
c, Cp	chaleur spécifique	kJ/kg K
c_{ijk}	terme entrant dans le calcul des coefficients de pondération a'_n	-
C_0	constante contrôlant la longueur de la flamme	-
CM	vecteur (équation 2.21)	kW

CM_x	vecteur (équation 2.34)	kW
CM_y	vecteur (équation 2.35)	kW
CM_z	vecteur (équation 2.36)	kW
D	vecteur (équation 2.9)	kW/m ²
e_k	émittance de corps noir pour une surface	kW/m ²
e_g	émittance de corps noir pour un volume de gaz	kW/m ²
E	énergie d'activation	kJ/kg
f_{jk}	facteur de réception	-
f	fraction de mélange	-
F_{jk}	facteur de forme	-
F	vecteur pour la méthode de Newton-Raphson	kW
g	accélération gravitationnelle	m/s ²
\overline{gs}_k	aire d'échange direct d'un volume de gaz vers sa surface k	m ²
G	terme dans les équations 3.22 et 3.25	m ² /s ³
$\overrightarrow{G_j G_i}$	aire d'échange dirigé d'un volume j vers un volume i	m ²

$\overrightarrow{G_j S_i}$	aire d'échange dirigé d'un volume j vers une surface i	m^2
$\overline{G_j G_{i_n}}$	aire d'échange total d'un volume j vers un volume i pour le $n^{\text{ième}}$ gaz gris	m^2
$\overline{G_j S_{i_n}}$	aire d'échange total d'un volume j vers une surface i pour le $n^{\text{ième}}$ gaz gris	m^2
h_{CONV}	coefficient de transfert de chaleur par convection	$\text{kW}/\text{m}^2 \text{ K}$
h	enthalpie	kJ/kg
H_{GAZ} (ΔH_{GAZ})	variation de l'enthalpie sensible d'un volume de gaz	kW
J	jacobien pour la méthode de Newton Raphson	kW/K
k_i	facteur d'atténuation	$\text{m}^{-1} \text{ atm}^{-1}$
k	énergie cinétique de turbulence conductivité thermique équivalente	m^2/s^2 kW/mK
K_i	facteur d'atténuation	m^{-1}
L_i	épaisseur utile moyenne	m
L	nombre de divisions selon l'axe des x	-
$L_{\text{éq}}$	épaisseur équivalente des murs réfractaires	m

\dot{m}	débit massique	kg/s
M	nombre de divisions selon l'axe des y fraction massique	-
$M_{\text{éq}}$	masse équivalente des murs réfractaires	kg
N	nombre de divisions selon l'axe des z nombre total de zones dans un maillage	-
N_D	nombre de zones de dimension et de facteur d'absorption différents	-
P_i	pression partielle du produit de combustion i	atm
P	pression	Pa
Pr	nombre de Prandtl	-
q_k	flux net à une paroi réelle k	kW/m ²
q_{k_i}	flux entrant à une surface k	kW/m ²
q_{k_0}	flux sortant d'une surface k	kW/m ²
Q_k	puissance nette sur une surface imaginaire k	kW
Q	vecteur (équation 2.21)	kW
R	constante d'un gaz parfait	kJ/kg K

s	rapport stoéchiométrique	-
S_ϕ	terme source pour le logiciel PHOENICS	variable
$\underline{S_k} \vec{G}_i$	aire d'échange dirigé d'une surface k vers un volume de gaz i	m^2
$\underline{S_k} \vec{S}_i$	aire d'échange dirigé d'une surface k vers une surface i	m^2
$\underline{\underline{S_k} G_i}_n$	aire d'échange total d'une surface k vers un volume de gaz i pour le $n^{\text{ième}}$ gaz gris	m^2
$\underline{\underline{S_k} S_i}_n$	aire d'échange total d'une surface k vers une surface i pour le $n^{\text{ième}}$ gaz gris	m^2
t	temps	s
T	température	K
T^*	température au temps suivant températures approchées des températures d'équilibre	K
T'	température immatérielle	K
\bar{T}	température moyenne	K
T	vecteur température pour la méthode	
(ΔT)	Newton Raphson	K

\vec{u}	vecteur vitesse	m/s
u	composante de vitesse dans la direction x	m/s
U	coefficient global de transfert de chaleur	kW/m ² K
v	composante de vitesse dans la direction y	m/s
V	volume	m ³
w	composante de vitesse dans la direction z	m/s

Lettres grecques

α	facteur d'absorption des gaz	-
ϵ	facteur d'émission	-
	dissipation de l'énergie cinétique de turbulence	m^2/s^3
σ	constante de Stefan-Boltzmann	$\text{kW}/\text{m}^2 \text{ K}^4$
τ	transmissivité moyenne du milieu	-
δ_{ij}	delta de Kronecker	-
ϕ	variable indépendante de l'équation de conservation	variable
Γ	coefficient de diffusion de l'équation de conservation	variable
ρ	densité des produits de combustion	kg/m^3
μ	viscosité absolue	Ns/m^2
ζ	terme relatif à l'équation 3.34	-
ν	viscosité cinématique	m^2/s

Indices supérieurs

E,W,N,S position relative d'une zone

H,L,C,D (est, ouest, nord, sud, haut, bas, centre, quelconque)

NE,HE,HS nord-est, haut-est, haut-sud)

n numéro du gaz gris pour la formulation des gaz gris

t temps présent

$t + \Delta t$ temps suivant

* temps suivant

Premiers indices inférieurs

i dénote la $i^{\text{ème}}$ tranche dans les réfractaires

i,j,k dénote une surface

j,l dénote la zone de gaz

n dénote le $n^{\text{ième}}$ gaz gris

x,y,z selon les directions respectives x, y et z

COMB combustion

RAD radiation

g,GAZ gaz

CONV convection

AMB ambiant

COND conduction

IN entrant

wall,w paroi

vol volume

s source

METAL métal

E,W,N,S indique la position relative (spatiale ou temporelle)
H,L,T,P (est, ouest, nord, sud, haut, bas, temps, centrale)

FU carburant

OX oxydant

PROD produit

eff effectif

l laminaire

t turbulent

st stoéchiométrique

h enthalpie

k énergie cinétique de turbulence

ϵ dissipation de l'énergie cinétique de turbulence

a espèce chimique

A à la condition d'entrée de l'air

F à la condition d'entrée du carburant

ϕ variable dépendante

R côté droit
référence

L côté gauche

éq équivalent(e)

Seconds indices inférieurs

i entrant

o sortant

A ancien

N nouveau

g gaz

S source

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	Four de refonte.....	14
Figure 2.1	Cheminement des faisceaux d'énergie A) Méthode de zones B) Méthode des plans imaginaires.....	18
Figure 2.2	Bilan d'énergie sur une surface réelle de la fournaise.....	20
Figure 2.3	Bilan d'énergie sur une surface fictive de la fournaise.....	23
Figure 2.4	Orientation et identification des zones de gaz et numérotation des surfaces d'une zone.....	26
Figure 2.5	Hypothèses relatives aux flux sur les parois fictives A) Axe des x B) Axe des y C) Axe des z.....	27
Figure 2.6	Zone de coin dans une fournaise rectangulaire.....	35
Figure 2.7	Bilan d'énergie pour une zone ayant une surface réelle.....	38
Figure 2.8	Identification des parois et des volumes pour les dérivées partielles.....	45
Figure 2.9	Méthode des plans imaginaires: modèle indépendant.....	55
Figure 2.10	Méthode des plans imaginaires utilisant un gaz réel: modèle indépendant.....	60
Figure 3.1	Notation et axes de référence du logiciel PHOENICS.....	66
Figure 3.2	Fonctionnement simplifié du logiciel PHOENICS.....	68
Figure 3.3	Transfert des informations entre les deux logiciels plans imaginaires et PHOENICS.....	73
Figure 3.4	Maillage typique pour les logiciels PHOENICS et plans imaginaires.....	75
Figure 3.5	Couplage plans imaginaires et PHOENICS.....	77

Figure 4.1	Fonctionnement du logiciel couplé: régime transitoire, modèle avec écoulement calculé par PHOENICS.....	93
Figure 4.2	Fonctionnement du logiciel couplé: régime transitoire, modèle avec écoulement imposé.....	94
Figure 4.3	Conduction unidimensionnelle dans une tranche de brique réfractaire.....	96
Figure 4.4	Processus itératif calculant les températures internes des réfractaires.....	99
Figure 5.1	Distribution de l'énergie libérée par la combustion pour une tranche de la fournaise.....	105
Figure 5.2	Distribution des débits pour une tranche de la fournaise.....	106
Figure 5.3	Champs de débits pour les cas 2, 3, 4 et 5.....	110
Figure 5.4	Champs de débits pour les cas 6, 7, 8 et 9.....	111
Figure 5.5	Champs de débits pour les cas 10 et 11.....	112
Figure 5.6	Champs de combustion pour les cas 2, 3, 4 et 5.....	113
Figure 5.7	Champs de combustion pour les cas 6, 7, 8 et 9.....	114
Figure 5.8	Champs de combustion pour les cas 10 et 11.....	115
Figure 5.9	Pourcentage d'erreur sur la puissance totale au métal en fonction du nombre de volumes finis.....	117
Figure 5.10	Distribution A) des puissances au métal B) des températures de la voûte pour le cas de base.....	118
Figure 5.11	Distribution des températures de gaz pour le cas de base.....	120
Figure 5.12	Température de la voûte en fonction du nombre de divisions selon l'axe z.....	121
Figure 5.13	Distribution des flux volumiques radiatifs pour le cas 6.....	123

Figure 5.14 A) Champ des débits pour le cas 13 B) Champ de combustion pour le cas 13.....	125
Figure 5.15 Profil de la A) puissance au métal B) puissance aux réfractaires de la voûte C) température des gaz D) température des réfractaires de la voûte pour le cas 12.....	127
Figure 5.16 Profil de la A) puissance au métal B) puissance aux réfractaires de la voûte C) température des gaz D) température des réfractaires de la voûte pour le cas 13.....	128
Figure 5.17 Flux volumiques radiatifs pour le cas 12 et pour le cas 13, et température des parois pour le cas 13.....	129
Figure 5.18 Comparaison des puissances au métal obtenues par la méthode des plans imaginaires et de zones pour un gaz réel.....	132
Figure 5.19 Comparaison de la température des gaz obtenue par la méthode des plans imaginaires et de zones pour un gaz réel.....	133
Figure 5.20 Comparaison entre plans imaginaires et Zone pour un maillage non uniforme A) puissance au métal B) température de gaz.....	138
Figure 5.21 Maillage non uniforme utilisé pour les cas 15 et 16.....	139
Figure 5.22 A) Champ de combustion pour le maillage non uniforme B) Champ de débit pour le maillage non uniforme.....	140
Figure 5.23 Distribution des facteurs d'absorption.....	142
Figure 5.24 Comparaison entre un facteur d'absorption constant et variable A) Puissance au métal B) Température de gaz.....	143
Figure 5.25 Ratio du temps de calcul de Zone à celui des plans imaginaires en fonction du nombre de volumes finis.....	146

Figure 5.26	Chambre de combustion du four industriel utilisée pour les simulations 17 et 18.....	149
Figure 5.27	Contours de température au niveau du brûleur A) Couplage Zone-PHOENICS B) Couplage plans imaginaires-PHOENICS.....	151
Figure 5.28	A) Profil de température pour le cas 18 B) Profil de la fraction de masse de combustible pour le cas 18.....	153
Figure 5.29	Champ de vitesse pour le cas 18.....	155
Figure 5.30	Puissance au métal pour les simulations 19 à 23.....	160
Figure 5.31	Puissance aux réfractaires pour les cas 19 à 23.....	161
Figure 5.32	Température d'une des surfaces de la voûte pour les cas 19 à 23.....	162

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1.1	Explication des termes de l'équation 1.5.....	8
Tableau 3.1	Groupes relatifs aux fichiers QIF.DAT et GROUND.FOR.....	70
Tableau 3.2	Entrées et sorties des logiciels PHOENICS et plans imaginaires.....	72
Tableau 5.1	Entrées au modèle des plans imaginaires comme système indépendant.....	103
Tableau 5.2	Paramètres d'entrées pour le cas de base.....	104
Tableau 5.3	Paramètres pour les cas 2 à 23.....	109
Tableau 5.4	Puissances totales au métal et aux réfractaires obtenues par les méthodes des plans imaginaires et de zones.....	116
Tableau 5.5	Température moyenne et puissance totale pour les cas 12 et 13.....	126
Tableau 5.6	Puissance totale et température moyenne pour les cas 14, 14.1, 14.2 et 14.3.....	135
Tableau 5.7	Résumé des simulations pour le modèle transitoire....	158

INTRODUCTION

La recherche constante d'économie dans la production de l'aluminium et l'amélioration des produits finis obligent cette industrie à perfectionner ses équipements et contrôles. Les fours de métal entrent dans cette catégorie d'équipement. Ils servent à fondre des rebuts solides et à maintenir les alliages d'aluminium à des températures adéquates pour la coulée. Ces fours sont de grands consommateurs d'énergie et l'aluminium qui en sort doit respecter des normes de qualité sévères. On doit donc minimiser les rejets.

L'amélioration de ces fours est un but difficile à atteindre seulement par des études expérimentales, ces dernières étant longues et coûteuses. La modélisation mathématique est une alternative souhaitable puisqu'une fois le modèle validé, son utilisation est plus rapide et moins coûteuse.

Un des phénomènes les plus importants qui doit être modélisé dans ces fours est le rayonnement. Les méthodes en rayonnement sont nombreuses, mais la complexité de ces méthodes limite souvent leur utilisation pour des raisons reliées aux temps de calcul.

Nous croyons que l'élaboration d'une méthode simplifiée, mais fiable, serait un avancement certain dans ce domaine, et faciliterait la modélisation et donc l'amélioration des fours.

Le chapitre I passe en revue les principales méthodes en rayonnement. Le chapitre II présente les fondements de la méthode développée dans ce mémoire. Les chapitres III et IV présentent deux couplages différents de la présente méthode avec le logiciel commercial PHOENICS. Finalement, le chapitre V analyse et compare les résultats de la présente méthode face à une méthode reconnue.

CHAPITRE I

LE RAYONNEMENT DANS LES FOURS INDUSTRIELS

Nous présentons dans ce chapitre les principales méthodes en rayonnement qui s'appliquent aux fours industriels. Nous analysons leurs performances et nous donnons les raisons majeures qui sont à la base du développement d'une nouvelle méthode, soit la méthode des plans imaginaires. Nous présentons également un four typique, soit le four de refonte numéro 14 de l'usine d'Arvida de la compagnie Alcan. C'est sur ce four que seront appliquées la plupart des simulations développées.

1.1 Les méthodes en rayonnement

Avant de décrire brièvement les différentes méthodes en transfert de chaleur radiatif, nous avisons le lecteur que le présent chapitre ne fournit pas de détail sur le phénomène radiatif lui-même, nous décrivons plutôt les modèles permettant de quantifier le phénomène.

La méthode de zones développée par Hottel et al. (1967) est la plus rigoureuse de toutes les méthodes numériques utilisées à cette fin. Cette méthode divise le domaine physique (la chambre de combustion) en plusieurs zones, formant ainsi des volumes de gaz émetteurs et absorbants ainsi que des surfaces absorbantes et réfléchissantes. Un faisceau d'énergie issu d'une zone peut en traverser plusieurs autres, frapper une surface réfléchissante, être partiellement absorbé et réfléchi, et le cheminement est repris autant de fois qu'il y a de zones émettrices. On voit donc que les interactions radiatives entre les zones sont nombreuses et complexes. Nous décrivons sommairement ci-dessous la procédure qu'utilise la méthode de zones pour quantifier les températures des volumes de gaz et des surfaces réfléchissantes ainsi que les flux de chaleur à ces surfaces.

1- Calcul des aires d'échange total

Ces aires sont essentiellement une mesure de la façon dont une zone quelconque en voit une autre dans l'enceinte selon leurs positions

géométriques relatives et la nature du milieu interposé. Pour une fournaise divisée en 5 volumes et 22 surfaces, on obtiendra 729 aires d'échange, soit 27×27 . Notons que ces termes ne sont pas fonction des températures des zones, mais seulement de la géométrie du domaine, du facteur d'absorption des gaz et de l'émissivité des surfaces. On les identifie par $\overline{G_j G_i}$, $\overline{G_j S_i}$, $\overline{S_k G_i}$ et $\overline{S_k S_i}$, où $\overline{G_j S_i}$, par exemple, symbolise la vision qu'a le volume de gaz j de la surface i .

2- Calcul des aires d'échange dirigé

L'absorptivité et l'émissivité d'un volume de gaz peuvent être représentées par une somme pondérée de gaz gris, selon la forme suivante:

$$\alpha = \sum_{n=1}^N a'_n(T_g, T_s) (1 - e^{-k_n pL}) \quad (1.1)$$

$$\varepsilon = \sum_{n=1}^N a_n(T_g) (1 - e^{-k_n pL}) \quad (1.2)$$

Pour ces deux équations, la condition suivante s'applique:

$$\sum_{n=1}^N a'_n(T_g, T_s) = \sum_{n=1}^N a_n(T_g) = 1 \quad (1.3)$$

Nous donnons plus de détails sur cette formulation au chapitre II. Si N égale 1, le gaz est dit gris, par contre si N est plus grand que 1, le gaz est dit réel.

La procédure 1 ci-dessus est répétée N fois pour chaque gaz gris. On obtient ainsi une série d'aires d'échange total qu'on peut rassembler pour obtenir les aires d'échange dirigé, qui sont données par l'équation (1.4).

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{G_j G_i} &= \sum_{n=1}^N a_n(T_g) \overrightarrow{G_j G_{i_n}} \\
 \overrightarrow{G_j G_i} &= \sum_{n=1}^N a_n(T_g) \overrightarrow{G_j S_{i_n}} \quad (1.4) \\
 \overrightarrow{S_k G_i} &= \sum_{n=1}^N a'_n(T_s, T_g) \overrightarrow{S_k G_{i_n}} \\
 \overrightarrow{S_k S_i} &= \sum_{n=1}^N a'_n(T_s, T_g) \overrightarrow{S_k S_{i_n}}
 \end{aligned}$$

On remarque que les aires d'échange dirigé sont fonction des températures si le gaz est réel.

3- En général les températures et les flux thermiques sont inconnus dans un four. Or les flux de chaleur sont fonction des températures. Pour déterminer ces températures, il faut équilibrer les

bilans d'énergie effectués sur toutes les zones du domaine et dont la représentation qualitative apparaît à l'équation 1.5. Les termes sont décrits au tableau 1.1.

$$Q_{RAD} + Q_{SEN} + Q_{CONV} + Q_{COMB} = Q_{NET} \quad (1.5)$$

Une procédure itérative (décrise ci-dessous) permet de calculer les températures (des volumes et des surfaces) d'équilibre:

- 3.1 Poser un champ de températures initiales.
- 3.2 Calculer les a_n et a'_n si le gaz est réel.
- 3.3 Calculer les aires d'échange dirigé (point 2)
- 3.4 Résoudre les bilans d'énergie
- 3.5 Si les bilans ne sont pas satisfaits, corriger les températures en conséquence et reprendre au point 3.2 si le gaz est réel et au point 3.4 si le gaz est gris.

À la section 1.2 nous analysons les avantages et inconvénients de cette méthode.

La méthode de Monte-Carlo est basée sur un procédé stochastique auquel on impose les lois fondamentales du rayonnement. Howell (1972) donne les détails de cette méthode qu'on peut résumer ainsi. Des générations de nombres aléatoires entre 0 et 1 permettent de déterminer la position de départ d'un rayon dans l'enceinte, sa direction, son

DESCRIPTION	TERME DE L'EQUATION 1.5	POUR UN VOLUME i	POUR UNE SURFACE i
Rayonnement reçu des volumes j	Q_{RAD}	$\sum_j \overrightarrow{G_j G_i} \sigma T_{j,g}^4$	$\sum_j \overrightarrow{G_j S_i} \sigma T_{j,g}^4$
Rayonnement reçu des surfaces k	Q_{RAD}	$\sum_k \overrightarrow{S_k G_i} \sigma T_{k,s}^4$	$\sum_k \overrightarrow{S_k S_i} \sigma T_{k,s}^4$
Rayonnement émis d'une zone i	Q_{RAD}	$-4KV_i T_{i,g}^4$	$-A_i \varepsilon_i \sigma T_{i,s}^4$
Enthalpie sensible entrant, provenant des zones voisines ℓ	Q_{SEN}	$\sum_{\ell} (\dot{m}c_p)_{\ell} (T_{\ell,g} - T_R)$	0
Enthalpie sensible sortant de la zone i	Q_{SEN}	$(\dot{m}c_p)_i (T_{i,g} - T_R)$	0
Convection entre le gaz et un mur	Q_{CONV}	$-h_i A_i (T_{i,g} - T_{\ell,s})$	$-h_i A_i (T_{i,s} - T_{\ell,g})$
Energie libérée par la combustion	Q_{COMB}	quantité libérée	0
Transfert net vers la zone	Q_{NET}	0	$U_i A_i (T_{i,s} - T_{AMB})$

Tableau 1.1 Explication des termes de l'équation 1.5

absorption dans le milieu gazeux et sa réflexion (ou absorption) sur les surfaces. Des milliers de rayons sont ainsi générés et on note les endroits où ils sont absorbés. C'est donc une autre façon de quantifier la vision qu'a une zone donnée des zones qui l'entourent. Dans la version pure de la méthode, on attribue à chaque rayon une quantité de chaleur au prorata du nombre total de rayons émis, de sorte que les flux de chaleur peuvent être déterminés si les températures sont connues. Si les températures sont inconnues, la procédure décrite pour la méthode de zones s'applique. Il faut équilibrer les bilans d'énergie, corriger les températures et reprendre la procédure stochastique jusqu'à convergence des bilans.

Par ailleurs, on peut utiliser la méthode de Monte-Carlo pour calculer les aires d'échange dirigé nécessaires à la méthode de Hottel. Notre version de la méthode de zones procède de cette façon. On dit alors que la méthode de Monte-Carlo n'est pas pure, puisqu'elle n'est utilisée que pour une étape de la procédure globale.

La troisième méthode que nous décrivons est la méthode de flux. Cette méthode suppose une distribution spatiale de l'intensité de la radiation sous forme d'une équation algébrique. Cette équation est introduite dans l'équation de transfert qui gouverne le phénomène radiatif. Il en résulte une équation différentielle pour chaque subdivision de l'angle solide. Selon la distribution choisie, ces équations différentielles sont partielles, tel que proposé par De Marco (1975), ou

ordinaires, tel que proposé par Gosman et al. (1972). Ces équations, une fois résolues, permettent de calculer les flux de chaleur radiatifs aux parois.

Erchiqui (1988) a développé une méthode dite "des plans imaginaires" en deux dimensions. Cette méthode constitue une simplification de la méthode de zones tout en gardant la structure générale de l'approche. Ce mémoire constitue d'une part une extension en trois dimensions de la technique et d'autre part une amélioration de sa versatilité et de son champ d'application.

D'autres méthodes existent; elles sont basées sur la méthode de Monte-Carlo ou la méthode de flux. Parmi celles-ci, on peut citer: la méthode des transferts discrets de Lockwood et al. (1981), et la méthode des ordonnées discrètes telle que proposée par Carlson et al. (1968).

Nous analysons les trois premières méthodes à la section suivante.

1.2 Choix d'une méthode en rayonnement

La méthode de zones est la plus rigoureuse. Cependant, son temps de calcul est appréciable. De plus, cette méthode s'adapte difficilement aux maillages avec repère en coordonnées curvilignes et aux obstacles solides à l'intérieur du maillage. Un de ces obstacles peut être par exemple la charge utile du four. D'autre part, la méthode de Monte-Carlo est très coûteuse à utiliser car il faut répéter plusieurs fois le processus stochastique. Ce processus génère une quantité importante de nombres aléatoires, ce qui le rend grand consommateur de temps de calcul. Par ailleurs, la méthode de flux est très rapide et s'adapte facilement à tous les genres de maillages et aux obstacles solides. Cependant, la version proposée par Gosman et al., qui est celle utilisée dans les logiciels commerciaux tels que PHOENICS et FLUENT, est essentiellement une méthode unidimensionnelle, même si on peut l'utiliser en trois dimensions. En effet, cette méthode conduit à une équation différentielle ordinaire pour chaque direction considérée, mais ces équations sont totalement découplées les unes des autres. Cette technique est donc moins générale. Par contre pour des géométries bien particulières, telles que les fours allongés, cette méthode peut être utilisée avec succès. Pour des fours non allongés, dont la section perpendiculaire au brûleur est importante par rapport à l'axe de ce dernier, la méthode de flux est moins intéressante.

La présente méthode appelée méthode des plans imaginaires est basée sur les travaux de Strom (1981). Elle est une simplification de la méthode de zones; elle devrait donc être plus rapide que cette dernière et plus générale que la méthode des flux. La présente méthode est élaborée en trois dimensions, elle est utilisable pour tout genre de maillage et elle peut utiliser la formulation des gaz réels. Elle utilise les aires d'échange direct calculées par la méthode de Monte-Carlo, ce qui explique sa facilité d'adaptation à un maillage quelconque. Par ailleurs l'hypothèse de base de cette méthode, que nous expliquerons au chapitre II, facilite grandement l'utilisation d'un facteur d'absorption variable contrairement à la méthode de zones. De plus, les obstacles solides sont plus facilement traités avec cette méthode qu'avec la méthode de zones.

1.3 Le four de refonte

Nous présentons dans cette section le four de refonte auquel la plupart des simulations de ce mémoire font référence. Naturellement la méthode des plans imaginaires s'applique à tout autre four de géométrie cartésienne. Le four de refonte est présenté à la figure 1.1. L'enceinte est constituée de briques réfractaires. La partie haute sert de chambre de combustion et la partie basse reçoit l'aluminium et les rebuts. Le brûleur servant à chauffer le métal liquide et à fondre le solide, est situé au centre de la chambre de combustion et il est alimenté au gaz naturel. Cinq portes, situées du côté droit du four, servent à introduire les rebuts solides dans le four. Le siphon est utilisé pour remplir le bain d'aluminium liquide, et le bec de coulée sert à vider le four de sa charge vers les tables de coulée.

Le four de refonte sert à fondre le métal solide et à maintenir le métal liquide à une température adéquate pour la coulée. On y ajoute également des éléments d'alliage et on brasse le métal liquide à l'aide de lances d'azote et d'une pompe à jet, dans le but d'en homogénéiser les propriétés. Lorsque le métal atteint les conditions appropriées et que les tables de coulée sont prêtes à recevoir le liquide, le four bascule et vide son contenu dans des dalots qui acheminent le métal vers les tables.

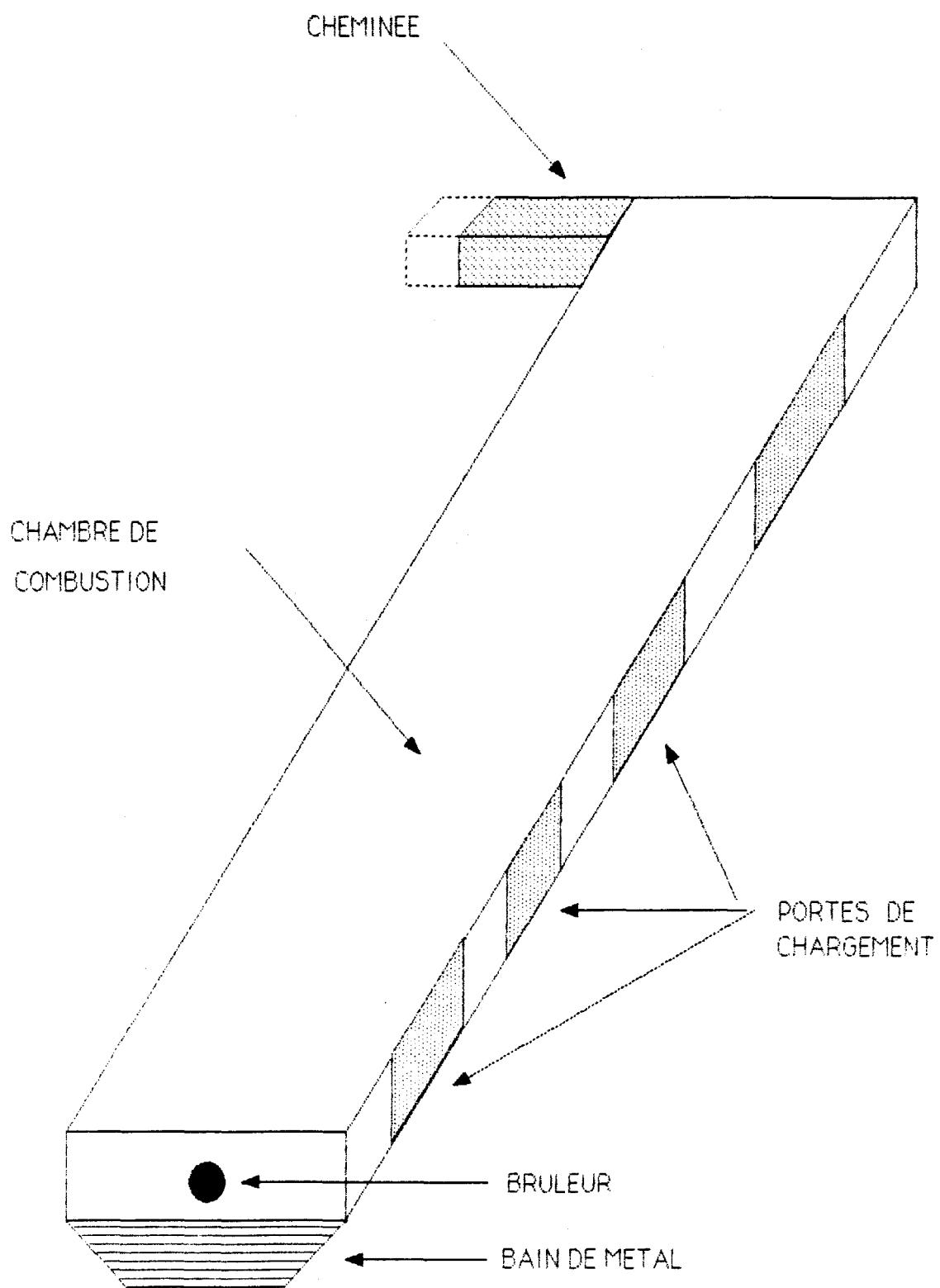


Figure 1.1 Four de refonte

Plusieurs phénomènes sont présents dans ce four. Pour la chambre de combustion ces phénomènes sont: rayonnement, convection forcée, conduction dans les murs réfractaires, turbulence de l'écoulement et combustion. Dans le bain de métal les phénomènes sont aussi nombreux: conduction dans le métal et dans les réfractaires, convection naturelle et forcée, fusion du métal, oxydation du métal, turbulence et migration des impuretés.

La modélisation d'un tel four est très intéressante puisque ce dernier offre une quantité de phénomènes variés et complexes. Dans ce mémoire, nous modélisons la partie haute du four, soit la chambre de combustion et tous les phénomènes qui s'y rattachent.

CHAPITRE II

LA MÉTHODE DES PLANS IMAGINAIRES COMME MODÈLE INDÉPENDANT

Nous présentons dans ce chapitre la méthode des plans imaginaires. Nous décrivons le fonctionnement de cette méthode comme modèle indépendant, conçue pour quantifier les échanges radiatifs dans une enceinte moyennant des entrées, fournies par l'utilisateur, relatives aux champs de vitesse et de combustion. Naturellement les équations de base de ce modèle s'appliqueront également aux trois autres modèles présentés aux chapitres III et IV

2.1 Équations fondamentales de la méthode des plans imaginaires

Les méthodes reconnues en transfert de chaleur radiatif, telles que la méthode de zones et la méthode de Monte-Carlo, découpent le domaine physique en un nombre fini de zones. Ces zones sont considérées comme des régions de propriétés constantes et ces méthodes permettent des interactions au niveau radiatif entre toutes les zones du domaine. Bien que ces interactions soient effectivement présentes dans la réalité, leurs importances relatives peuvent varier énormément selon le cas. Les techniques qui tiennent compte rigoureusement de tous les échanges radiatifs entre chaque zone du domaine sont coûteuses en temps de calcul.

La méthode des plans imaginaires est une méthode simplifiée qui propose une interaction radiative restreinte d'une zone à l'autre. En effet, nous posons comme hypothèse de base qu'une zone particulière du domaine est influencée de façon directe seulement par les zones adjacentes. La figure 2.1 illustre le principe de la méthode. Dans la méthode de zones et celle de Monte-Carlo, une surface quelconque située dans la zone 2 envoie et reçoit de l'énergie de tous les volumes et surfaces contenus dans les zones 1, 2 et 3. Ces interactions doivent être quantifiées et calculées, ce qui nécessite un effort considérable pour un maillage fin. La méthode des plans imaginaires s'affranchit de toutes ces interactions en posant les hypothèses suivantes:

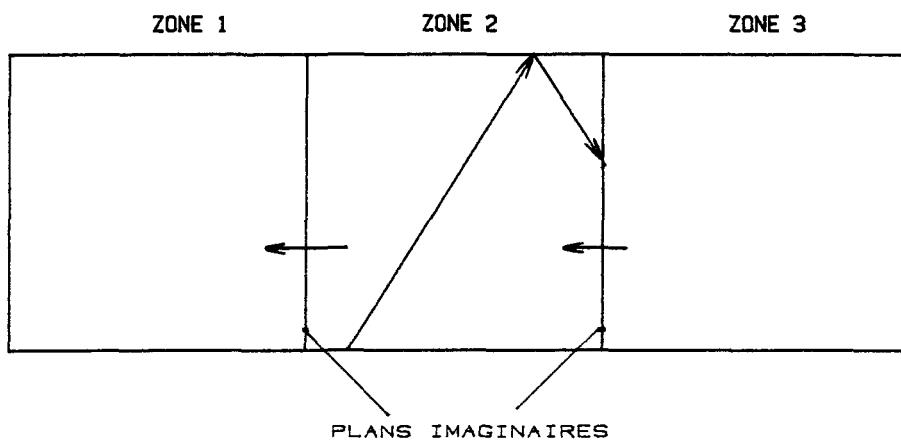
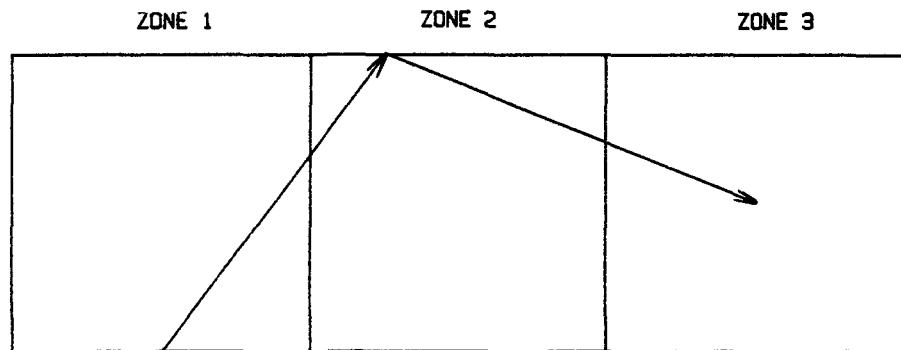


FIGURE 2.1 : CHEMINEMENT DES FAISCEAUX D'ENERGIE

- A) METHODE DE ZONES
- B) METHODE DES PLANS IMAGINAIRES

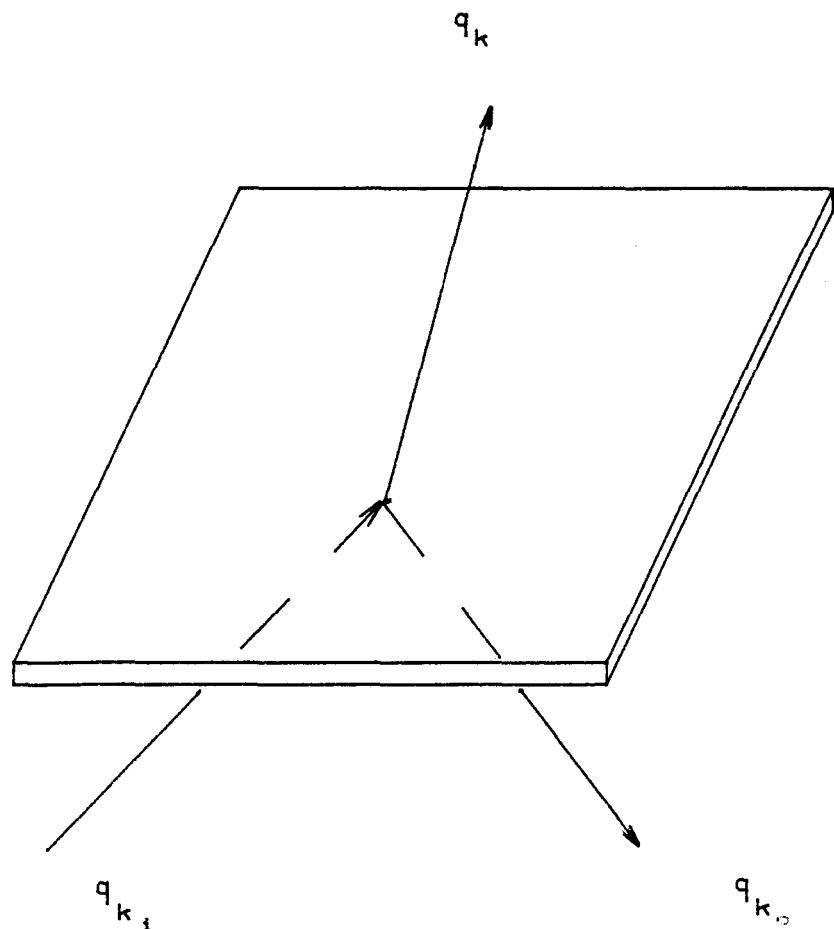
- Les plans imaginaires limitent le champ de vision d'une zone de gaz donnée à elle-même tout en permettant une forme particulière de couplage entre zones adjacentes.
- Les zones sont également couplées par le débit de masse des gaz de combustion.

En somme, chaque zone est partiellement isolée des autres et les surfaces fictives d'un volume donné de gaz sont considérées comme des sources ou des puits d'énergie radiative. On pose que ces flux de couplage peuvent diriger leur énergie dans toutes les directions, ce qui implique qu'il faut leur associer des facteurs de forme. Naturellement les valeurs numériques de ces flux de chaleur sont à priori inconnues. Mais comme nous le verrons plus loin, il est possible de les calculer. Les avantages majeurs de la méthode des plans imaginaires sont les suivants:

- Le nombre de facteurs de forme à calculer est réduit.
- Le nombre d'opérations mathématiques nécessaires pour calculer les bilans d'énergie est moins élevé que pour la méthode de zones.

Posons maintenant les équations qui permettront de calculer les flux de chaleur aux parois du domaine physique. Débutons par un bilan énergétique sur une paroi réelle tel que montré à la figure 2.2. Le flux net radiatif peut être défini par l'équation (2.1).

ENVIRONNEMENT



CHAMBRE DE COMBUSTION

FIGURE 2.2 : BILAN D'ENERGIE SUR UNE SURFACE REELLE DE LA FOURNAISE

$$A_k q_k = A_k (q_{k_0} - q_{k_i}) \quad (2.1)$$

Le flux de chaleur sortant de la surface peut être décomposé en deux termes distincts, soit l'énergie émise par la surface solide et l'énergie réfléchie par cette même paroi.

$$q_{k_0} = \epsilon_k e_k + (1 - \epsilon_k) q_{k_i} \quad (2.2)$$

où le terme $1 - \epsilon_k$ représente le facteur de réflexion de la paroi, que nous supposons grise. Nous pouvons aussi développer le terme q_{k_i} , qui représente le flux incident à la surface k . Ce flux est composé de l'énergie provenant des six surfaces (réelles et fictives) et du gaz de la zone en question.

$$A_k q_{k_i} = \sum_{j=1}^6 A_j F_{jk} \bar{\tau}_{jk} q_{j_0} + e_g \bar{gs}_k \quad (2.3)$$

où $A_j F_{jk} = A_k F_{kj}$ d'après le principe de réciprocité. En combinant les équations (2.1) et (2.2) de même que les équations (2.1) et (2.3), nous obtenons deux nouvelles équations où q_{k_i} n'apparaît plus.

$$q_k = \frac{\epsilon_k}{1 - \epsilon_k} (e_k - q_{k_0}) \quad (2.4)$$

$$q_k = q_{k_0} - \sum_{j=1}^6 F_{kj} \bar{\tau}_{kj} q_{j_0} - \frac{e_g \bar{gs}_k}{A_k} \quad (2.5)$$

Dans l'équation (2.5) on considère que $\bar{\tau}_{jk} = \bar{\tau}_{kj}$.

Si les températures des parois du domaine, ainsi que la température des gaz de chaque zone sont connues, les inconnus sont les flux de chaleur q_k et q_{k_0} . On peut cependant éliminer q_k , le flux net à la paroi, en combinant les équations (2.5) et (2.4).

$$q_{k_0} - (1 - \varepsilon_k) \sum_{j=1}^6 F_{kj} \bar{\tau}_{kj} q_{j_0} = \varepsilon_k e_k + (1 - \varepsilon_k) \frac{e_g \bar{gs}_k}{A_k} \quad (2.6)$$

Un bilan d'énergie sur une surface imaginaire doit être effectué pour permettre la création d'un système cohérent d'équations. La figure 2.3 montre un tel bilan sur une surface fictive. Appelons Q_k , la puissance nette reliant deux zones adjacentes à travers une surface imaginaire.

$$Q_k = (q_{k_0} - q_{k_1}) A_k \quad (2.7)$$

Les équations (2.3) et (2.5) sont valides pour une paroi imaginaire. Par contre, les équations (2.2) et (2.4) ne s'appliquent plus

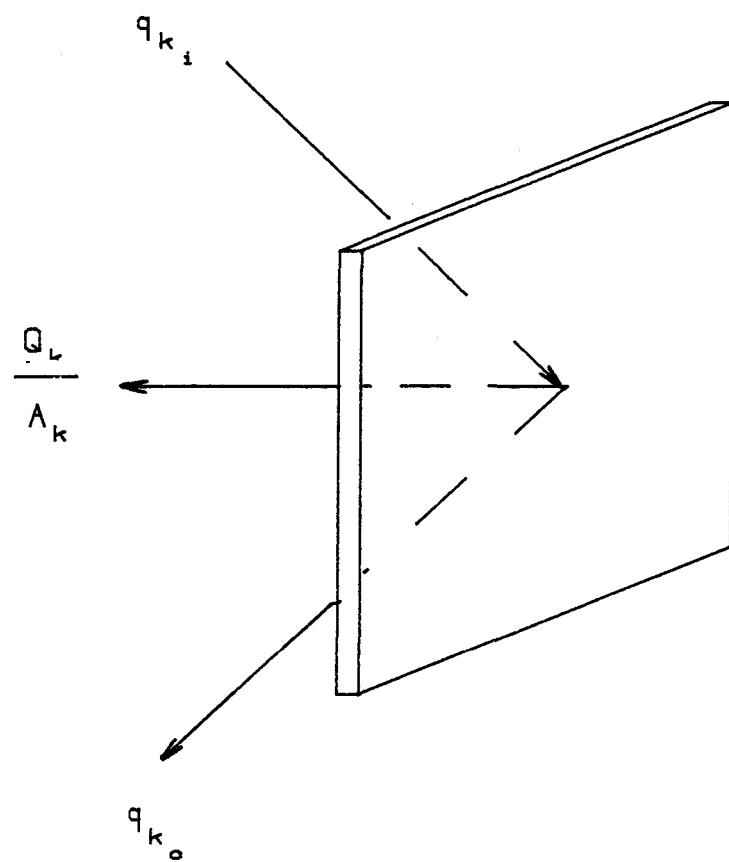


FIGURE 2.3 : BILAN D'ENERGIE SUR UNE SURFACE FICTIVE DE LA FOURNAISE

puisque une paroi fictive ne possède pas de facteur d'émission. On peut combiner les relations (2.3), (2.5) et (2.7) pour obtenir une équation similaire à (2.6).

$$q_{k_0} - \sum_{j=1}^6 F_{kj} \bar{\tau}_{kj} q_{j_0} = \frac{Q_k}{A_k} + \frac{\epsilon_g \bar{gs}_k}{A_k} \quad (2.8)$$

On peut exploiter la similarité des équations (2.6) et (2.8) pour simplifier l'écriture et exprimer ces équations sous forme compacte. On remarque que pour des températures connues, les inconnus sont q_{k_0} et Q_k . La différence entre les équations (2.6) et (2.8) est la présence du facteur d'émission pour une surface réelle et de Q_k pour une surface imaginaire. Alors on peut écrire ces deux équations sous forme abrégée.

$$\sum_{j=1}^6 b_{kj} q_{j_0} = D_k \quad k = 1 \text{ à } 6 \quad (2.9)$$

où b_{kj} et D_k sont définis de la façon suivante:

$$b_{kj} = \begin{cases} \delta_{kj} - (1 - \epsilon_k) F_{kj} \bar{\tau}_{kj} & \text{surface réelle} \\ \delta_{kj} - F_{kj} \bar{\tau}_{kj} & \text{surface fictive} \end{cases}$$

$$D_k = \begin{cases} \epsilon_k e_k + (1 - \epsilon_k) e_g \overline{gs}_k / A_k & \text{surface réelle} \\ Q_k / A_k + e_g \overline{gs}_k / A_k & \text{surface fictive} \end{cases}$$

Nous pouvons inverser le système d'équations représenté par l'équation (2.9) pour mettre en évidence q_{j_0} , un des inconnus recherché.

$$q_{k_0} = \sum_{j=1}^6 B_{kj} D_j \quad k = 1 \text{ à } 6 \quad (2.10)$$

où $B = b^{-1}$. Cependant le terme D_j contient l'inconnu Q_k , donc le système n'est pas soluble. Nous devons introduire d'autres relations qui permettront de calculer directement les termes Q_k .

Puisque nous désirons développer les équations pour représenter une fournaise en trois dimensions, nous devons introduire une notation spéciale qui permet de simplifier l'écriture et de nous affranchir de plusieurs indices encombrants. Le lecteur peut se référer à la figure 2.4 pour comprendre la notation cardinale introduite ci-dessous.

D'autre part, pour isoler et calculer les flux de chaleur Q_k , qui constituent les liens radiatifs entre les zones, nous devons poser les hypothèses suivantes (voir figure 2.5):

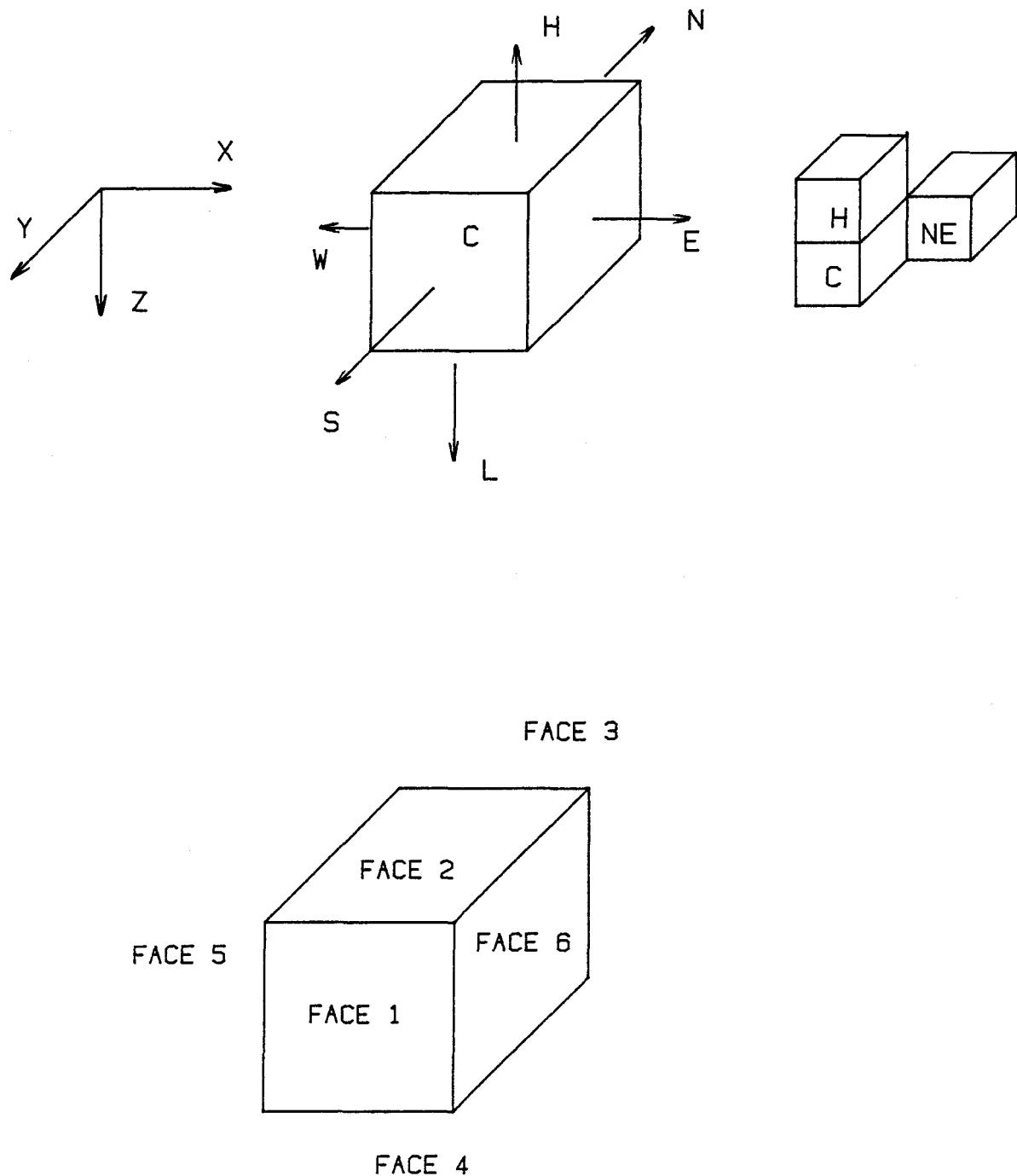
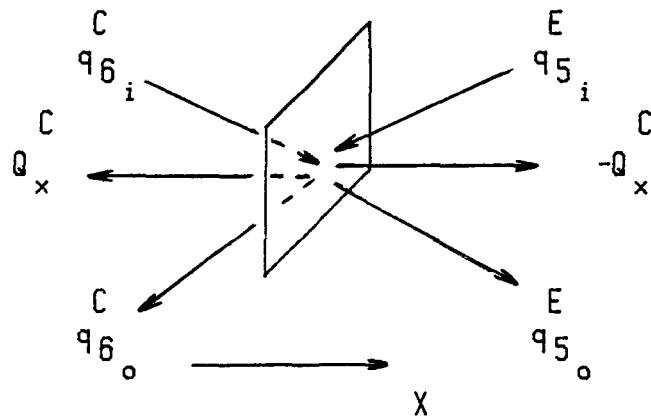
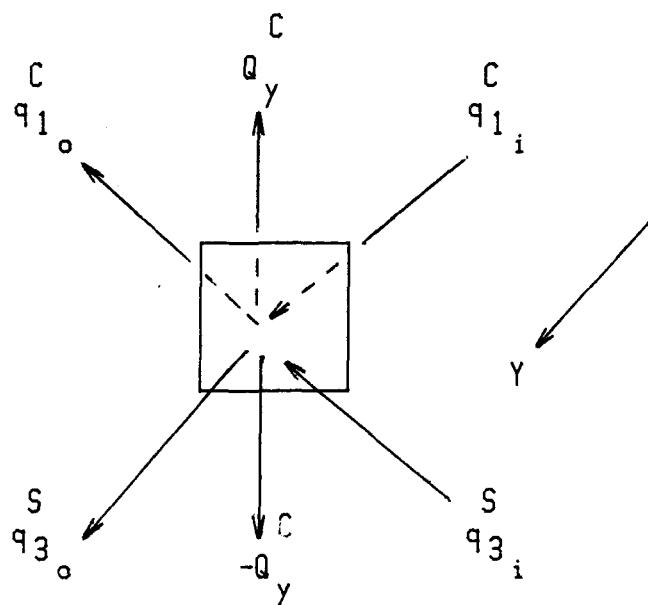


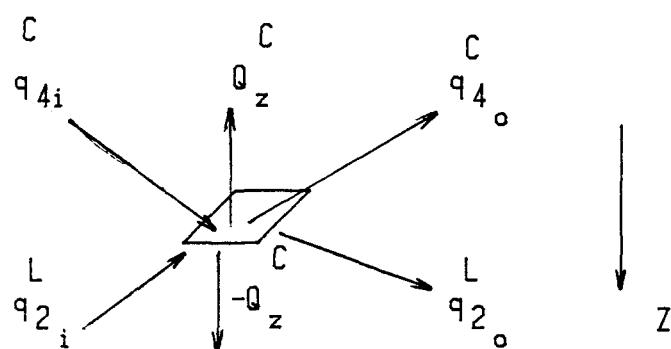
FIGURE 2.4 : ORIENTATION ET IDENTIFICATION DES ZONES DE GAZ
ET NUMEROTATION DES SURFACES D'UNE ZONE



$$\begin{aligned} C q_6 i &= E q_5 o \\ E q_5 i &= C q_6 o \end{aligned} \quad 27$$



$$\begin{aligned} C q_1 i &= S q_3 o \\ S q_3 i &= C q_1 o \end{aligned} \quad B$$



$$\begin{aligned} C q_4 i &= L q_2 o \\ L q_2 i &= C q_4 o \end{aligned} \quad C$$

FIGURE 2.5 : HYPOTHESES RELATIVES AUX FLUX SUR LES PAROIS FICTIVES

A) AXE DES X

B) AXE DES Y

C) AXE DES Z

$$q_{6i} = q_{5o}^E \quad (2.11)$$

$$q_{1i} = q_{3o}^S \quad (2.12)$$

$$q_{4i} = q_{2o}^L \quad (2.13)$$

Nous pouvons maintenant écrire des bilans d'énergie sur les plans imaginaires pour les trois directions x, y et z. Considérons une zone centrale telle que montrée à la figure 2.5 A, le bilan devient:

$$\frac{Q_x}{A} = q_{6o}^C - q_{6i}^C \quad (2.14)$$

Mais d'après la relation (2.11) le terme à l'extrême droite de l'équation (2.14) peut être remplacé, ce qui conduit à:

$$\frac{Q_x}{A} = q_{6o}^C - q_{5o}^E \quad (2.15)$$

Les termes du côté droit de l'équation (2.15) peuvent être définis à l'aide de l'équation (2.10).

$$\begin{aligned}
 q_{60} &= B_{65} \begin{pmatrix} C & C & W \\ -\frac{Q_x}{A_x} + \epsilon_5 e_5 + (1 - \epsilon_5) e_g \bar{gs}_5 / A_x & C & W \end{pmatrix} \\
 &+ B_{66} \begin{pmatrix} C & C & C \\ \frac{Q_x}{A_x} + \epsilon_6 e_6 + (1 - \epsilon_6) e_g \bar{gs}_6 / A_x & C & C \end{pmatrix} \\
 &+ B_{63} \begin{pmatrix} C & C & C \\ -\frac{Q_y}{A_y} + \epsilon_3 e_3 + (1 - \epsilon_3) e_g \bar{gs}_3 / A_y & C & C \end{pmatrix} \\
 &+ B_{61} \begin{pmatrix} C & C & C \\ \frac{Q_y}{A_y} + \epsilon_1 e_1 + (1 - \epsilon_1) e_g \bar{gs}_1 / A_y & C & C \end{pmatrix} \\
 &+ B_{62} \begin{pmatrix} C & C & C \\ -\frac{Q_z}{A_z} + \epsilon_2 e_2 + (1 - \epsilon_2) e_g \bar{gs}_2 / A_z & C & C \end{pmatrix} \\
 &+ B_{64} \begin{pmatrix} C & C & C \\ \frac{Q_z}{A_z} + \epsilon_4 e_4 + (1 - \epsilon_4) e_g \bar{gs}_4 / A_z & C & C \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

(2.16)

$$\begin{aligned}
 q_{50} &= B_{55} \left(\begin{array}{ccc} E & E & E \\ -\frac{Q_x}{A_x} + \epsilon_5 e_5 + (1 - \epsilon_5) e_g \overline{gs}_5 / A_x & \end{array} \right) \\
 &+ B_{56} \left(\begin{array}{ccc} E & E & E \\ \frac{Q_x}{A_x} + \epsilon_6 e_6 + (1 - \epsilon_6) e_g \overline{gs}_6 / A_x & \end{array} \right) \\
 &+ B_{53} \left(\begin{array}{ccc} E & E & E \\ -\frac{Q_y}{A_y} + \epsilon_3 e_3 + (1 - \epsilon_3) e_g \overline{gs}_3 / A_y & \end{array} \right) \\
 &+ B_{51} \left(\begin{array}{ccc} E & E & E \\ \frac{Q_y}{A_y} + \epsilon_1 e_1 + (1 - \epsilon_1) e_g \overline{gs}_1 / A_y & \end{array} \right) \\
 &+ B_{52} \left(\begin{array}{ccc} E & E & E \\ -\frac{Q_z}{A_z} + \epsilon_2 e_2 + (1 - \epsilon_2) e_g \overline{gs}_2 / A_z & \end{array} \right) \\
 &+ B_{54} \left(\begin{array}{ccc} E & E & E \\ \frac{Q_z}{A_z} + \epsilon_4 e_4 + (1 - \epsilon_4) e_g \overline{gs}_4 / A_z & \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

(2.17)

En introduisant les relations (2.16) et (2.17) dans l'équation (2.15) et en regroupant les termes inconnus dans le membre de gauche nous obtenons l'équation (2.18)

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{A_x} \left[Q_x^W \begin{pmatrix} C \\ B_{65} \end{pmatrix} + Q_x^C \begin{pmatrix} 1 - B_{66}^C - B_{55}^E \\ B_{56}^E \end{pmatrix} + Q_x^E \begin{pmatrix} E \\ B_{56}^E \end{pmatrix} \right] \\
& + \frac{1}{A_y} \left[Q_y^N \begin{pmatrix} C \\ B_{63} \end{pmatrix} + Q_y^C \begin{pmatrix} -B_{61}^C \\ -B_{53}^E \end{pmatrix} + Q_y^E \begin{pmatrix} E \\ B_{51}^E \end{pmatrix} \right] \\
& + \frac{1}{A_z} \left[Q_z^H \begin{pmatrix} C \\ B_{62} \end{pmatrix} + Q_z^C \begin{pmatrix} -B_{64}^C \\ -B_{52}^E \end{pmatrix} + Q_z^E \begin{pmatrix} E \\ B_{54}^E \end{pmatrix} \right] \\
& = \sum_{j=1}^6 B_{6j}^C \left(\epsilon_j e_j^C + \frac{(1 - \epsilon_j) e_g \overline{gs}_j^C}{A_j} \right) \\
& - \sum_{j=1}^6 B_{5j}^E \left(\epsilon_j e_j^E + \frac{(1 - \epsilon_j) e_g \overline{gs}_j^E}{A_j} \right)
\end{aligned} \tag{2.18}$$

La même procédure est reprise pour les directions y et z ce qui fournit les relations (2.19) et (2.20)

Direction y

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{A_x} \left[Q_x^W \begin{pmatrix} C \\ B_{15} \end{pmatrix} + Q_x^C \begin{pmatrix} C \\ -B_{16} \end{pmatrix} + Q_x^{SW} \begin{pmatrix} S \\ -B_{35} \end{pmatrix} + Q_x^S \begin{pmatrix} S \\ B_{36} \end{pmatrix} \right] \\
 & + \frac{1}{A_y} \left[Q_y^N \begin{pmatrix} C \\ B_{13} \end{pmatrix} + Q_y^C \begin{pmatrix} 1 - B_{11} \\ -B_{33} \end{pmatrix} + Q_y^S \begin{pmatrix} S \\ B_{31} \end{pmatrix} \right] \\
 & + \frac{1}{A_z} \left[Q_z^H \begin{pmatrix} C \\ B_{12} \end{pmatrix} + Q_z^C \begin{pmatrix} C \\ -B_{14} \end{pmatrix} + Q_z^{HS} \begin{pmatrix} S \\ -B_{32} \end{pmatrix} + Q_z^S \begin{pmatrix} S \\ B_{34} \end{pmatrix} \right] \\
 & = \sum_{j=1}^6 B_{1j}^C \left(\epsilon_j e_j^C + (1 - \epsilon_j) e_g \overline{gs}_j^C \right) \\
 & - \sum_{j=1}^6 B_{3j}^S \left(\epsilon_j e_j^S + (1 - \epsilon_j) e_g \overline{gs}_j^S \right)
 \end{aligned}$$

(2.19)

Direction z

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{A_x} \left[Q_x^W \begin{pmatrix} C \\ B_{45} \end{pmatrix} + Q_x^C \begin{pmatrix} C \\ -B_{46} \end{pmatrix} + Q_x^{LW} \begin{pmatrix} L \\ -B_{25} \end{pmatrix} + Q_x^L \begin{pmatrix} L \\ B_{26} \end{pmatrix} \right] \\
 & + \frac{1}{A_y} \left[Q_y^N \begin{pmatrix} C \\ B_{43} \end{pmatrix} + Q_y^C \begin{pmatrix} C \\ -B_{41} \end{pmatrix} + Q_y^{LN} \begin{pmatrix} L \\ -B_{23} \end{pmatrix} + Q_y^L \begin{pmatrix} L \\ B_{21} \end{pmatrix} \right] \\
 & + \frac{1}{A_z} \left[Q_z^H \begin{pmatrix} C \\ B_{42} \end{pmatrix} + Q_z^C \begin{pmatrix} C \\ 1 - B_{44} - B_{22} \end{pmatrix} + Q_z^L \begin{pmatrix} L \\ B_{24} \end{pmatrix} \right] \\
 & = \sum_{j=1}^6 B_{4j} \begin{pmatrix} C \\ \epsilon_j e_j \end{pmatrix} + \frac{(1 - \epsilon_j) e_g \overline{gs}_j}{A_j} \begin{pmatrix} C \\ \epsilon_j e_j \end{pmatrix} \\
 & - \sum_{j=1}^6 B_{2j} \begin{pmatrix} L \\ \epsilon_j e_j \end{pmatrix} + \frac{(1 - \epsilon_j) e_g \overline{gs}_j}{A_j} \begin{pmatrix} L \\ \epsilon_j e_j \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Les équations (2.18) à (2.20) doivent être appliquées à tous les plans imaginaires générés par le maillage de la fournaise. Soit L, M et N le nombre de zones dans les directions respectives x, y et z, alors le nombre de plans imaginaires de la fournaise, égal au nombre d'inconnus Q_k , est:

$$(L - 1)MN + (M - 1)LN + (N - 1)LM$$

ou encore:

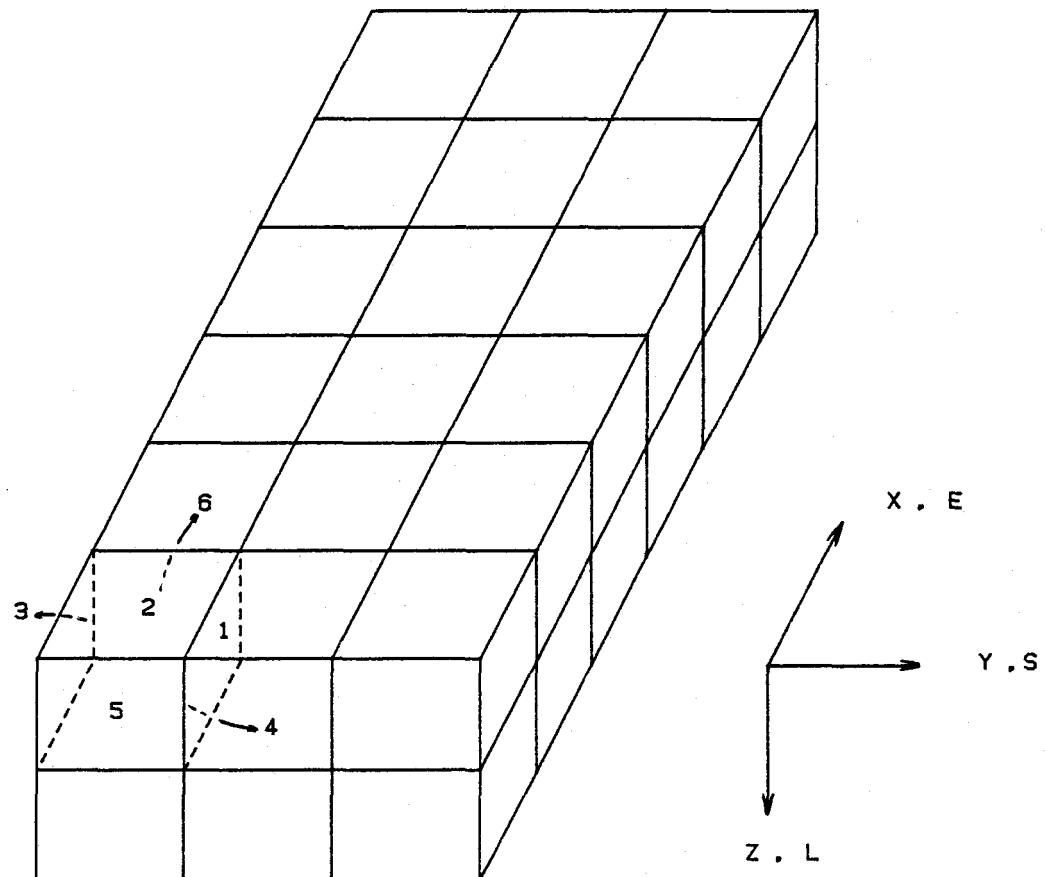
$$3LMN - LM - LN - MN$$

Nous obtenons donc un système matriciel bandé de cette dimension, qu'il faut résoudre numériquement. Appelons BM la matrice des coefficients rattachés aux inconnus Q_k et CM le vecteur représentant les membres de droite des équations (2.18) à (2.20). Alors nous pouvons écrire l'équation (2.21).

$$[BM] \{Q\} = \{CM\} \quad (2.21)$$

Les équations (2.18) à (2.20) s'appliquent, comme nous l'avons précédemment écrit, à une zone centrale, qui serait entourée dans toutes les directions par d'autres zones. Si, par contre, il s'agit d'un plan imaginaire situé dans une zone possédant une ou plusieurs parois réelles, certains termes en Q seront retranchés de ces équations. En d'autres termes, ces équations varient en fonction de la situation spatiale du plan imaginaire sur lequel on effectue le bilan d'énergie. Cette façon de procéder permet de généraliser le système d'équations tout en facilitant la programmation sur ordinateur.

La figure 2.6 montre une zone située dans un des coins d'une fournaise. Pour une telle zone les termes suivants des équations (2.18) à (2.20) sont nuls.



SURFACES REELLES : 2, 3, 5

SURFACES IMAGINAIRES : 1, 4, 6

FIGURE 2.6 : ZONE DE COIN DANS UNE FOURNAISE RECTANGULAIRE

$$Q_x, \quad Q_x, \quad Q_z$$

$$Q_x, \quad Q_x, \quad Q_y, \quad Q_y, \quad Q_z, \quad Q_z$$

$$\epsilon_1, \quad \epsilon_4, \quad \epsilon_6$$

$$\epsilon_1, \quad \epsilon_4, \quad \epsilon_5, \quad \epsilon_6$$

$$\epsilon_1, \quad \epsilon_3, \quad \epsilon_4, \quad \epsilon_6$$

$$\epsilon_1, \quad \epsilon_2, \quad \epsilon_4, \quad \epsilon_6$$

Résumons ici les étapes à suivre qui permettront ultimement de calculer les flux de chaleur nets aux parois de la fournaise. On suppose que les températures sont connues.

- Résoudre le système matriciel donné par l'équation (2.21)
- Connaissant les flux nets Q_k reliant les zones entre elles, nous utilisons la relation (2.10) pour calculer les flux sortant de chaque paroi (réelle ou fictive) du domaine.
- En dernier lieu, nous calculons les flux nets aux parois réelles de la fournaise à l'aide de l'équation (2.4).

2.2 Bilans énergétiques

La méthodologie développée à la section 2.1 suppose une connaissance à priori du champ de températures des gaz dans la fournaise, de même que les températures des réfractaires constituant le revêtement intérieur. Ces températures sont généralement inconnues dans les fournaises industrielles, ou bien partiellement connues, les instruments de mesure ne permettant qu'une estimation ponctuelle. Il importe donc, pour que la procédure soit complète, de calculer ces températures. Puisque le transfert de chaleur radiatif est fonction des températures, nous utiliserons une procédure itérative basée sur la vérification des bilans d'énergie. Ces bilans seront vérifiés, autant sur les zones de gaz que sur les surfaces réelles qui délimitent l'enceinte.

2.2.1 Bilans énergétiques sur les zones de gaz

Pour une zone quelconque, le bilan d'énergie est le suivant:

$$Q_{COMB}^C + Q_{RAD}^C + \Delta H_{GAZ}^C + Q_{CONV}^C = 0 \quad (2.22)$$

La figure 2.7 montre comment nous pouvons détailler les termes Q_{RAD}^C et Q_{CONV}^C . L'équation (2.22) devient alors:

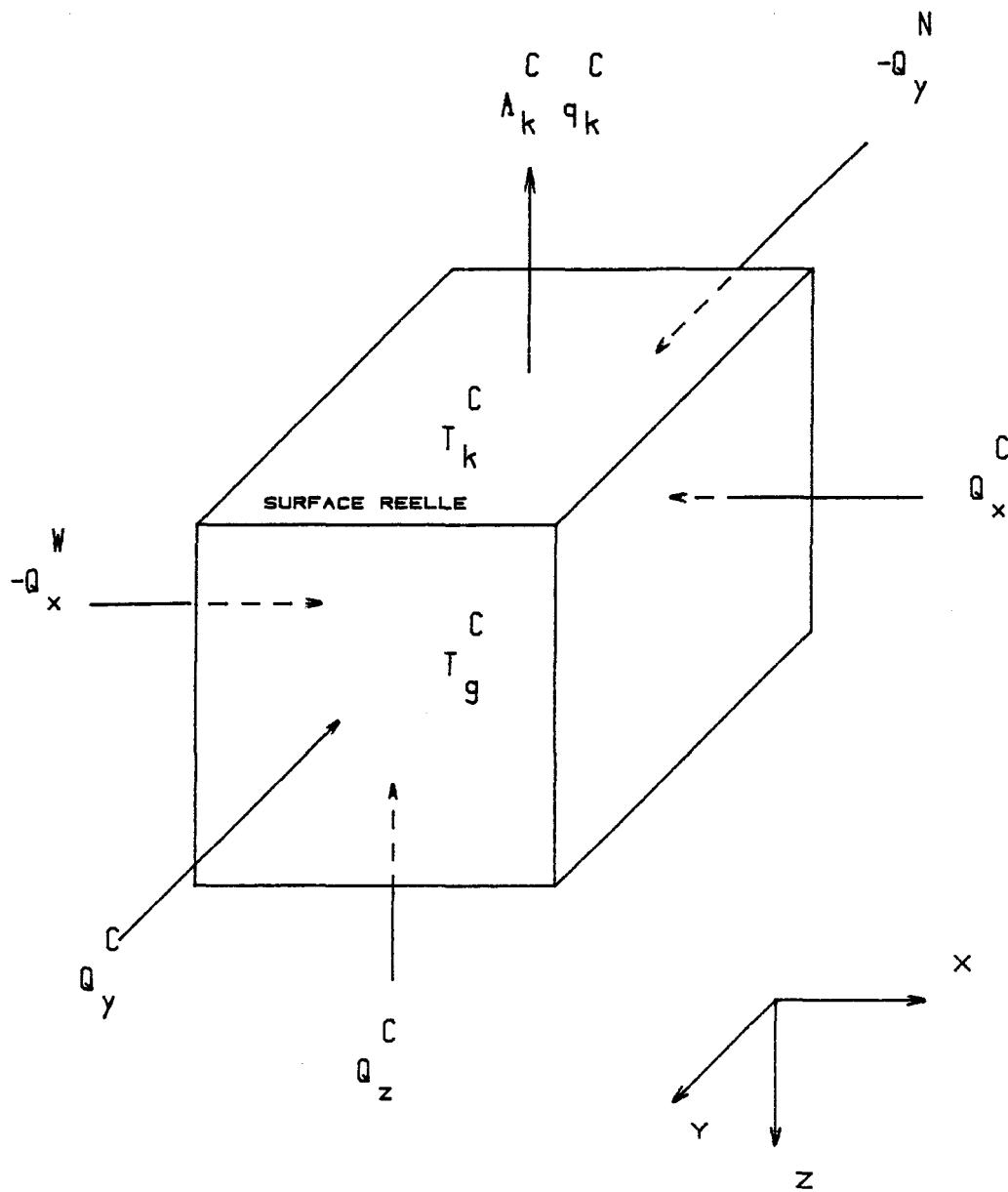


FIGURE 2.7 : BILAN D'ENERGIE POUR UNE ZONE AYANT UNE SURFACE REELLE

$$\begin{aligned}
 & Q_{COMB}^C + \sum_k^{\text{surfaces réelles}} \left[A_k q_k^C + h_{CONV}^C A_k (T_k^C - T_g^C) \right] + \Delta H_{GAZ}^C \\
 & + (Q_x^W - Q_x^N) + (Q_y^N - Q_y^H) + (Q_z^H - Q_z^W) = 0
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

où Q_{COMB}^C est la chaleur libérée par la combustion et ΔH_{GAZ}^C est identique à Q_{SEN}^C (voir tableau 1.1). Encore une fois, nous tenons à spécifier que selon la position de la zone dans la chambre de combustion certains termes de l'équation (2.23) sont retranchés. Par exemple, pour la zone montrée à la figure 2.6, il y a trois surfaces réelles et les termes Q_x^W , Q_y^N et Q_z^H sont nuls.

2.2.2 Bilans énergétiques aux surfaces réelles

Le bilan d'énergie pour une paroi de la fournaise prend la forme suivante:

$$Q_{RAD} + Q_{CONV} + Q_{COND} = 0 \tag{2.24}$$

Le terme Q_{COND} représente la chaleur transférée de la paroi interne du four à l'environnement et sera défini en fonction d'un coefficient global de transfert de chaleur. L'équation (2.24) après développement peut être réécrite:

$$A_k \frac{C}{q_k} + h_{\text{CONV}} \frac{C}{A_k} (T_k - T_g) + U \frac{C}{A_k} (T_k - T_{\text{AMB}}) = 0 \quad (2.25)$$

2.2.3 Termes relatifs aux bilans d'énergie

Nous discuterons dans cette section de l'évaluation de certains paramètres qui sont présents dans les bilans de chaleur.

Les coefficients de transfert de chaleur par convection sont tirés de Kreith et al. (1980) et Kocaebe (1987). Les coefficients globaux de transfert de chaleur sont également tirés de Kocaebe (1987). La chaleur massique à pression constante des produits de combustion sera évaluée comme étant la somme sur chaque espèce, du produit de la fraction massique et de la chaleur massique. Au début, l'énergie libérée par la combustion du gaz naturel sera évaluée pour chaque zone. Plus tard (chapitre III), la distribution de l'énergie de combustion sera calculée par un modèle approprié. Il en est de même pour les débits entrant ou sortant de chaque volume.

2.3 Méthodes numériques

Nous présentons ci-dessous les méthodes numériques qui nous ont permis de résoudre les équations présentées jusqu'ici dans le chapitre. On retrouve également à la figure 2.9 (à la fin de cette section) un logigramme expliquant le fonctionnement général du programme FORTRAN nécessaire à la résolution des équations.

Pour calculer les facteurs de réception, ainsi que les aires d'échange direct, nous avons utilisé la méthode de Monte-Carlo (Munger 1986). Les calculs matriciels sont effectués à l'aide de sous-routines provenant de William et al. (1986).

La section 2.2 présentait les bilans d'énergie qui doivent être vérifiés. Comme les températures des gaz et des parois de la fournaise sont inconnues, nous devons utiliser une procédure itérative pour calculer ces températures. La procédure consiste à converger vers la solution finale à partir d'un champ de température supposé. Nous devons donc utiliser une méthode qui permettra une convergence rapide et qui soit assez robuste pour traiter des équations non linéaires. En effet, les bilans d'énergie constituent des fonctions non linéaires multi-variables dont on désire annuler les valeurs numériques. La méthode de Newton-Raphson a été retenue car elle répond aux critères mentionnés ci-haut. Nous en rappelons ci-dessous les caractéristiques essentielles.

La méthode de Newton-Raphson pour une fonction à une variable est développée à partir d'une expansion de Taylor du premier ordre autour d'une solution approchée.

Soit la fonction

$$F(T) = 0 \quad (2.26)$$

où l'on cherche la valeur correcte de T . On peut poser que la solution T sera égale à une valeur approchée T^* à laquelle on ajoute une correction ΔT^* . La fonction $F(T)$ pourra alors être donnée par une expansion en série de Taylor autour de la valeur T^* .

Ainsi:

$$F(T) = F(T^* + \Delta T^*) = F(T^*) + F'(T^*)\Delta T^* + \frac{F''(T^*)\Delta T^{*2}}{2!} + \dots = 0 \quad (2.27)$$

En conservant seulement les termes du premier ordre on obtient:

$$-F(T^*) = F'(T^*)\Delta T^* \quad (2.28)$$

à partir d'une valeur initiale T^* de la température, on converge vers la solution à l'aide de l'équation (2.28). Cette dernière peut être étendue à un système à plusieurs variables. En effet, pour un tel cas,

l'expansion en série de Taylor conduit à (en écartant les astérisques par commodité et en ne retenant que les termes du premier ordre):

$$\begin{aligned}
 F_1(T_1 + \Delta T_1, \dots, T_n + \Delta T_n) &= F_1(T_1, \dots, T_n) + \frac{\partial F_1}{\partial T_1} \Delta T_1 + \frac{\partial F_1}{\partial T_2} \Delta T_2 + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial T_n} \Delta T_n = 0 \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 F_n(T_1 + \Delta T_1, \dots, T_n + \Delta T_n) &= F_n(T_1, \dots, T_n) + \frac{\partial F_n}{\partial T_1} \Delta T_1 + \frac{\partial F_n}{\partial T_2} \Delta T_2 + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial T_n} \Delta T_n = 0
 \end{aligned}
 \tag{2.29a}$$

Ce système d'équations peut être écrit sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix}
 \frac{\partial F_1}{\partial T_1} & \frac{\partial F_1}{\partial T_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial T_n} \\
 \frac{\partial F_2}{\partial T_1} & \frac{\partial F_2}{\partial T_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial T_n} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 \frac{\partial F_n}{\partial T_1} & \frac{\partial F_n}{\partial T_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial T_n}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \Delta T_1 \\
 \Delta T_2 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \Delta T_n
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 -F_1 \\
 -F_2 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 -F_n
 \end{bmatrix}
 \tag{2.29b}$$

ou encore

$$[J] \{ \Delta T \} = \{ -F \} \quad (2.29c)$$

ou $[J]$ est le Jacobien des fonctions $\{F\}$. La quantité cherchée est $\{\Delta T\}$ et elle s'obtient en inversant le système défini par (2.29c).

L'évaluation de ce Jacobien peut se faire par différences finies ou de manière analytique. Lorsque nous utilisons la méthode des plans imaginaires en trois dimensions, le calcul du Jacobien par différences finies demande un temps de calcul appréciable. Par souci d'économie, nous avons évalué analytiquement le Jacobien. Le développement mathématique est présenté aux sections suivantes.

2.3.1 Dérivée partielle, par rapport à une température de paroi, de la fonction représentant un bilan de chaleur à une paroi

Deux indices servent à identifier la paroi où on établit le bilan. L'indice supérieur définit la position de la zone contenant la paroi en question et l'indice inférieur indique la position de la paroi dans la zone (e.g. T_i^C). Pour les équations qui suivent on peut se référer à la figure 2.8.

L'équation (2.25) constitue le bilan de chaleur pour une surface située sur une des parois de la fournaise. Posons:

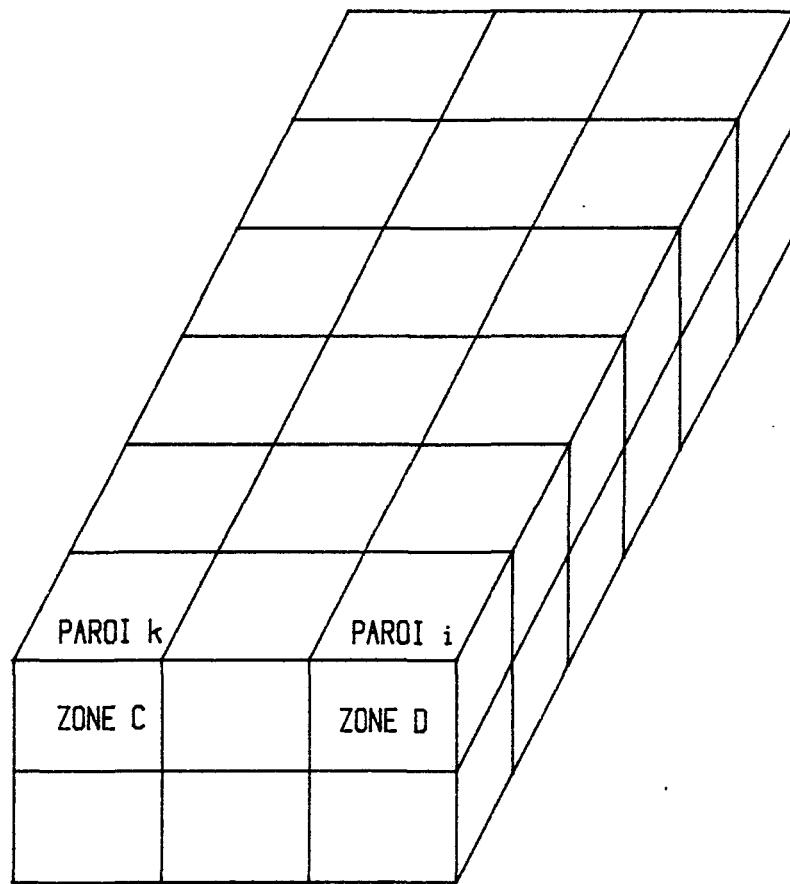


FIGURE 2.8 : IDENTIFICATION DES PAROIS ET DES VOLUMES POUR LES DERIVEES PARTIELLES

$$F_k^C = A_k^C \left(q_k^C + U_k^C (T_k^C - T_{AMB}^C) + h_{CONV}^C (T_k^C - T_g^C) \right) = 0$$

$$\frac{\partial F_k^C}{\partial T_i^D} = \begin{cases} A_k^C \left(\frac{\partial q_k^C}{\partial T_k^C} + U_k^C + h_{CONV}^C \right) & \text{si } C = D \\ & \text{et } k = i \\ A_k^C \frac{\partial q_k^C}{\partial T_i^D} & \text{autrement} \end{cases}$$

(2.30)

L'équation 2.4 donne le terme q_k^C :

$$q_k^C = \frac{\epsilon_k^C}{1 - \epsilon_k^C} \left(\sigma(T_k^C)^4 - q_{k0}^C \right)$$

$$\frac{\partial q_k^C}{\partial T_i^D} = \begin{cases} \frac{\epsilon_k^C}{1 - \epsilon_k^C} \left(4\sigma(T_k^C)^3 - \frac{\partial q_{k0}^C}{\partial T_k^C} \right) & \text{si } C = D \\ & \text{et } k = i \\ \frac{\epsilon_k^C}{1 - \epsilon_k^C} \left(-\frac{\partial q_{k0}^C}{\partial T_i^D} \right) & \text{autrement} \end{cases}$$

(2.31)

L'équation (2.10) donne le terme $q_{k_0}^C$:

$$\begin{aligned}
 q_{k_0}^C &= \sum_{j=1}^6 B_{kj}^C \left(\varepsilon_j e_j^C + (1 - \varepsilon_j) e_g \frac{\overline{gs}_j}{A_j} \right) \\
 &+ \frac{B_{k5}^C}{A_x} (-Q_x^W) + \frac{B_{k6}^C}{A_x} (Q_x^C) \\
 &+ \frac{B_{k3}^C}{A_y} (-Q_y^N) + \frac{B_{k1}^C}{A_y} (Q_y^C) \\
 &+ \frac{B_{k2}^C}{A_z} (-Q_z^H) + \frac{B_{k4}^C}{A_z} (Q_z^C) \\
 \frac{\partial q_{k_0}^C}{\partial T_i} &= \begin{cases} \text{Terme} + 4B_{ki} \varepsilon_i \sigma(T_i)^{C/3} & \text{si } C = D \\ \text{Terme} & \text{autrement} \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{2.32}$$

$$\begin{aligned}
 \text{où Terme} = & \frac{C}{A_x} \left(-\frac{\partial Q_x}{\partial T_i} \right) + \frac{C}{A_x} \left(\frac{\partial Q_x}{\partial T_i} \right) \\
 & + \frac{C}{A_y} \left(-\frac{\partial Q_y}{\partial T_i} \right) + \frac{C}{A_y} \left(\frac{\partial Q_y}{\partial T_i} \right) \\
 & + \frac{C}{A_z} \left(-\frac{\partial Q_z}{\partial T_i} \right) + \frac{C}{A_z} \left(\frac{\partial Q_z}{\partial T_i} \right)
 \end{aligned}$$

Notons que certains de ces termes sont nuls selon la position de la zone contenant la surface sur laquelle on calcule le bilan.

Pour calculer les dérivées $\partial Q / \partial T$, il faut dériver le système matriciel défini par l'équation (2.21)

$$\{Q\} = [BM]^{-1} \{CM\}$$

Pour des gaz considérés comme gris la matrice $[BM]$ n'est pas fonction de la température, alors nous pouvons écrire:

$$\left\{ \frac{\partial Q}{\partial T_i} \right\} = [BM]^{-1} \left\{ \frac{\partial CM}{\partial T_i} \right\} \quad (2.33)$$

Un élément du vecteur $\{CM\}$ est défini par le membre de droite des équations (2.18) à (2.20) pour un plan imaginaire particulier. Appelons $\{CM_x\}$, $\{CM_y\}$ et $\{CM_z\}$ les sous-vecteurs de $\{CM\}$ qui proviennent des bilans d'énergie sur les plans imaginaires dans les directions x , y et z . Alors nous pouvons écrire les dérivées suivantes:

$$\frac{\partial CM_x}{\partial T_i} = \begin{cases} \frac{D}{4} B_{6i} \frac{D}{\epsilon_i} \sigma (T_i)^3 & \text{si } D = C \\ -\frac{D}{4} B_{5i} \frac{D}{\epsilon_i} \sigma (T_i)^3 & \text{si } D = E \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial CM_y}{\partial T_i} = \begin{cases} \frac{D}{4} B_{1i} \frac{D}{\epsilon_i} \sigma (T_i)^3 & \text{si } D = C \\ -\frac{D}{4} B_{3i} \frac{D}{\epsilon_i} \sigma (T_i)^3 & \text{si } D = S \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (2.35)$$

$$\frac{\frac{\partial CM_z}{\partial T_i}}{D} = \begin{cases} 4 B_{4i}^D \epsilon_i^D \sigma (T_i^D)^3 & \text{si } D = C \\ -4 B_{2i}^D \epsilon_i^D \sigma (T_i^D)^3 & \text{si } D = L \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (2.36)$$

Par substitutions à rebours on peut calculer les dérivées $\frac{\partial F_k^C}{\partial T_i^D}$.

2.3.2 Dérivée partielle, par rapport à une température de gaz, d'une fonction représentant un bilan de chaleur à une paroi

Nous identifions la paroi solide de la même façon qu'à la section 2.3.2, et nous utiliserons un indice seulement pour la température du volume de gaz. Cet indice indique la position du volume dans la fournaise. Reposons la fonction décrivant le bilan d'énergie sur une paroi solide:

$$F_k^C = A_k^C \left(q_k^C + U_k^C (T_k^C - T_{AMB}^C) + h_{CONV}^C (T_k^C - T_g^C) \right) = 0$$

Alors:

$$\frac{\partial F_k}{\partial D} = \begin{cases} A_k \left(\frac{C}{D} \frac{\partial q_k}{\partial T_g} - h_{\text{CONV}}^C \right) & \text{si } D = C \\ A_k \frac{C}{D} \frac{\partial q_k}{\partial T_g} & \text{autrement} \end{cases} \quad (2.37)$$

où

$$\frac{\partial q_k}{\partial T_g} = \frac{C}{1 - \epsilon_k} \left(\frac{C}{D} \frac{\partial q_{k0}}{\partial T_g} \right) \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial q_{k0}}{\partial T_g} = \begin{cases} \left(\sum_{j=1}^6 4\sigma B_{kj} \frac{D}{1 - \epsilon_j} (T_g^D)^3 \frac{g s_j D}{A_j} \right) + \text{terme} & \text{si } D = C \\ \text{terme} & \text{autrement} \end{cases} \quad (2.39)$$

L'expression "terme" est définie de la même façon que dans l'équation (2.32), mais cette fois la dérivée est prise par rapport à une température de gaz.

On peut aussi écrire:

$$\frac{\partial C_x}{\partial T_g} = \begin{cases} \sum_{j=1}^6 4\sigma B_{6j}^D (1 - \epsilon_j^D) (T_g^D)^3 \frac{g s_j^D}{A_j^D} & \text{si } D = C \\ \sum_{j=1}^6 -4\sigma B_{5j}^D (1 - \epsilon_j^D) (T_g^D)^3 \frac{g s_j^D}{A_j^D} & \text{si } D = E \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial C_y}{\partial T_g} = \begin{cases} \sum_{j=1}^6 4\sigma B_{1j}^D (1 - \epsilon_j^D) (T_g^D)^3 \frac{g s_j^D}{A_j^D} & \text{si } D = C \\ \sum_{j=1}^6 -4\sigma B_{3j}^D (1 - \epsilon_j^D) (T_g^D)^3 \frac{g s_j^D}{A_j^D} & \text{si } D = S \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial C_z}{\partial T_g} = \begin{cases} \sum_{j=1}^6 4\sigma B_{4j}^D (1 - \epsilon_j^D) (T_g^D)^3 \frac{g s_j^D}{A_j^D} & \text{si } D = C \\ \sum_{j=1}^6 -4\sigma B_{2j}^D (1 - \epsilon_j^D) (T_g^D)^3 \frac{g s_j^D}{A_j^D} & \text{si } D = L \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (2.42)$$

Par substitution à rebours on peut calculer les dérivées désirées.

2.3.3 Dérivée partielle, par rapport à la température d'une surface, d'une fonction représentant un bilan d'énergie sur un volume de gaz

La fonction représentant le bilan d'énergie sur un volume de gaz peut s'écrire (équation (2.23)):

$$F_g^C = Q_{COMB}^C + (Q_x^C - Q_x^W) + (Q_y^C - Q_y^N) + (Q_z^C - Q_z^H)$$

$$+ \sum_{\substack{\text{surfaces} \\ \text{réelles} \\ k}} \left[A_k q_k^C + h_{CONV}^C A_k^C (T_k^C - T_g^C) \right] + \Delta H_{GAZ}^C = 0$$

Alors:

$$\frac{\partial F_g^C}{\partial T_i^D} = \left(\frac{\partial Q_x^C}{\partial T_i^D} - \frac{\partial Q_x^W}{\partial T_i^D} \right) + \left(\frac{\partial Q_y^C}{\partial T_i^D} - \frac{\partial Q_y^N}{\partial T_i^D} \right) + \left(\frac{\partial Q_z^C}{\partial T_i^D} - \frac{\partial Q_z^H}{\partial T_i^D} \right)$$

$$+ \sum_{\substack{\text{surfaces} \\ \text{réelles} \\ k}} \left(A_k^C \frac{\partial q_k^C}{\partial T_i^D} \right) + \text{terme} \quad (2.43)$$

$$\text{où terme} = \begin{cases} h_{CONV}^D A_i^D & \text{si } D = C \\ & \text{et } i = k \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

Les différentes dérivées partielles de cette équation ont été développées aux sections 2.3.2 et 2.3.3.

2.3.4 Dérivée partielle, par rapport à la température d'un volume de gaz quelconque, d'une fonction représentant un bilan d'énergie sur un volume de gaz

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F_g}{\partial T_g} &= \left(\frac{C}{D} - \frac{\partial Q_x}{\partial T_g} \right) + \left(\frac{C}{D} - \frac{\partial Q_y}{\partial T_g} \right) + \left(\frac{C}{D} - \frac{\partial Q_z}{\partial T_g} \right) \\
 &+ \sum_{\substack{\text{surfaces} \\ \text{réelles}}} \left(A_k \frac{\partial q_k}{\partial T_g} \right) + \frac{\partial \Delta H_{GAZ}}{\partial T_g} + \text{terme} \\
 \text{où terme} &= \begin{cases} \sum_{\substack{\text{surfaces} \\ \text{réelles}}} - h_{CONV}^C A_k^C & \text{si } D = C \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (2.44)
 \end{aligned}$$

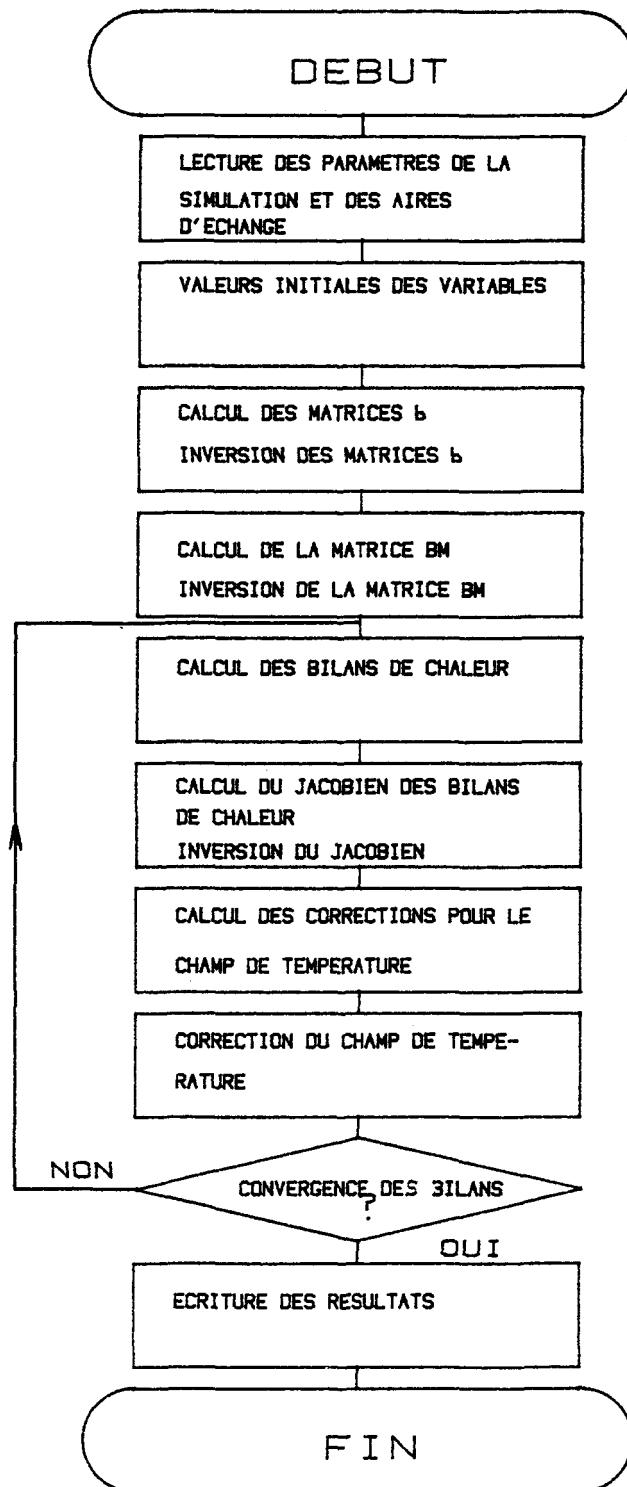


FIGURE 2.9 : METHODE DES PLANS IMAGINAIRES : MODELE INDEPENDANT

2.4 Formulation dite des gaz réels

Le comportement en émission et en absorption des gaz de combustion est très complexe. L'émissivité et l'absorptivité d'un volume de gaz sont toutes deux fonctions de la température du volume considéré, des pressions partielles des gaz constitutifs, de la longueur utile moyenne et de la longueur d'onde. L'absorptivité est de plus fortement dépendante de la température de la source d'émission.

Dans la littérature (Hottel, 1967), on trouve pour différentes flammes (combustible liquide, gaz naturel) des abaques empiriques qui permettent d'évaluer l'émissivité et l'absorptivité de quelques produits de combustion. Les principaux produits de combustion d'une fournaise sont la vapeur d'eau, le dioxyde de carbone, le monoxyde de carbone et les particules solides. Les gaz n'ont pas un comportement continu dans le spectre thermique et il est recommandé de considérer les produits de combustion comme des gaz réels par opposition à des gaz gris. D'autres composantes existent, comme l'azote et l'oxygène, mais leur effet radiatif peut être négligé.

Pour les besoins des méthodes numériques en radiation, on doit représenter mathématiquement l'émissivité et l'absorptivité des gaz selon une forme compatible avec le reste du développement. Hottel (1967) propose une formulation selon laquelle le comportement du gaz est

représenté par une somme pondérée de gaz gris. Le comportement d'un gaz gris unique est donné par la loi de Beer-Lambert:

$$\alpha = \epsilon = 1 - e^{kpL} \quad (2.45)$$

où k : facteur d'absorption du gaz [1/m atm]

p : pression partielle du gaz absorbant [atm]

L : longueur utile moyenne du milieu absorbant [m]

La pondération d'Hottel tient compte de la variation de l'émissivité en fonction de la température. Elle s'écrit:

$$\epsilon = \sum_{i=1}^N a_i (T_g) (1 - e^{-k_i pL}) \quad (2.46)$$

$$\alpha = \sum_{i=1}^N a'_i (T_g, T_s) (1 - e^{-k_i pL}) \quad (2.47)$$

où T_g : température du milieu absorbant

T_s : température de la source émettrice

Il existe deux méthodes pour calculer les valeurs des a_i et k_i . La première permet de les calculer directement à partir des données spectrales d'émissivité et d'absorptivité. La seconde méthode consiste à lisser une courbe sur les données totales d'émissivité et d'absorptivité.

vité. Nous avons choisi d'utiliser les résultats de Smith et al. (1982) dont les travaux sont basés sur la seconde méthode.

La méthode des plans imaginaires a été initialement développée pour des gaz considérés comme gris, c'est-à-dire où N , a_n et a'_n sont égaux à 1 dans les équations (2.46) et (2.47). On peut toutefois traiter les gaz comme réels en modifiant quelques termes dans les équations de la section 2.1. En suivant la même logique que pour la méthode de Hottel, l'équation (2.3) devient dans ce cas:

$$A_k q_{k_i} = \sum_{j=1}^6 \sum_{n=1}^N a'_n (T_j, T_g) A_j f_{jk}^n q_{j_0} + \sum_{n=1}^N e_g a_n (T_g) \bar{gs}_k^n \quad (2.48)$$

$$\text{où } f_{jk} = F_{jk} \bar{\tau}_{jk}$$

Mais le principe de réciprocité s'applique pour chaque gaz gris de la sommation interne de l'équation (2.48):

$$A_j f_{jk}^n = A_k f_{kj}^n \quad (2.49)$$

Alors l'équation (2.48) devient:

$$q_{k_i} = \sum_{j=1}^6 \sum_{n=1}^N a'_n (T_g, T_j) f_{kj}^n q_{j_0} + e_g \sum_{n=1}^N a_n (T_g) \bar{gs}_k^n \quad (2.50)$$

Les équations (2.6), (2.8) et (2.9) sont modifiées de façon similaire.

Cette représentation sous forme d'une somme pondérée de gaz gris engendre deux difficultés pour les plans imaginaires. Dans un premier temps, cette représentation mathématique implique que la matrice $[B]$ des équations (2.10) et suivantes n'est plus constante, mais désormais fonction des températures. Par enchaînement, la matrice $[BM]$ de l'équation (2.21) est également fonction des températures. Alors l'équation (2.33) n'est plus valide, elle devrait maintenant s'écrire:

$$\left\{ \frac{\partial Q}{\partial T_i} \right\} = [BM]^{-1} \left\{ \frac{\partial CM}{\partial T_i} \right\} + \frac{\partial}{\partial T_i} [BM]^{-1} \{CM\} \quad (2.51)$$

Cependant, puisque les variations des a et a' avec la température sont faibles, alors nous négligerons le terme $\frac{\partial}{\partial T_i} [BM]^{-1} \{CM\}$. La matrice $[BM]$ sera toutefois réévaluée à chaque itération avec le nouveau champ de température donné par l'équation (2.29c). La figure 2.10 présente un logigramme démontrant le fonctionnement de la méthode des plans imaginaires pour des gaz réels.

La seconde difficulté causée par la formulation dite "pondérée" apparaît à l'examen de l'équation (2.50). On remarque qu'on devra évaluer $a'_n (T_g, T_j)$ pour les six surfaces d'un volume de gaz. Ceci implique que T_j peut être la température d'une paroi imaginaire, température qui en réalité n'existe pas. Il faut revenir à la

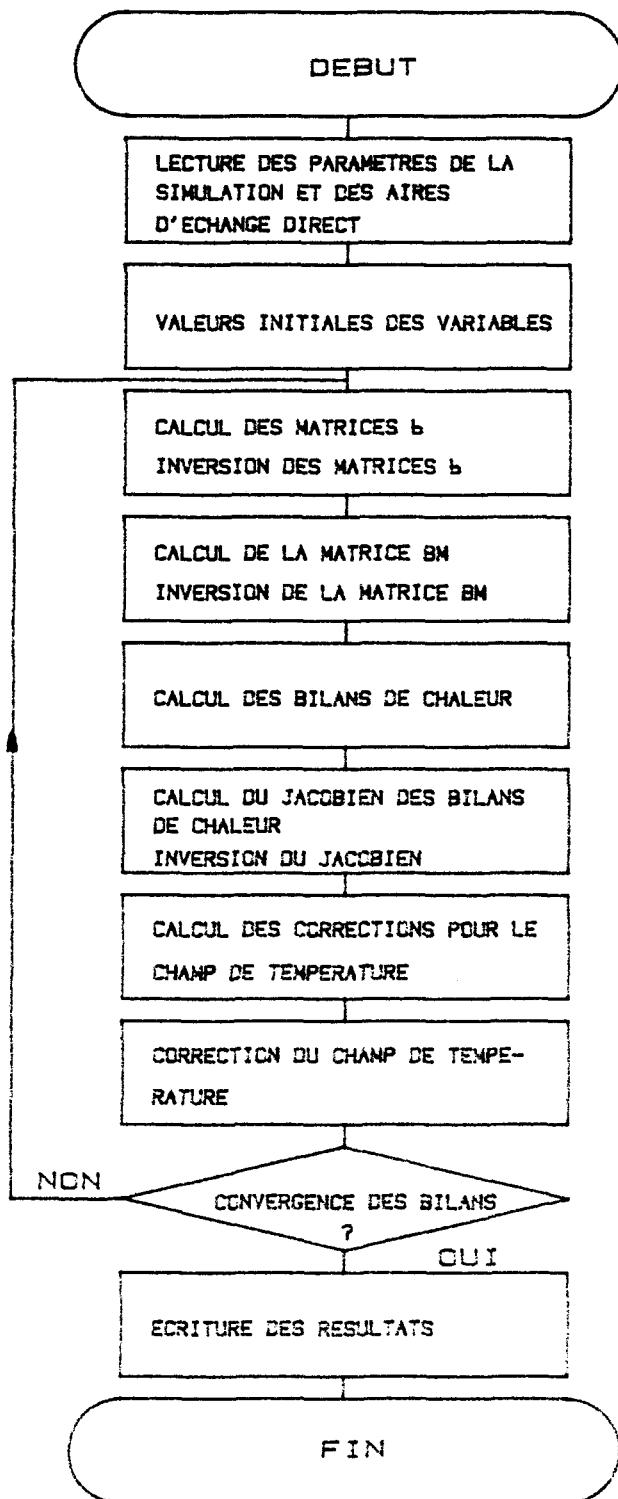


FIGURE 2.10 : METHODE DES PLANS IMAGINAIRES UTILISANT UN GAZ REEL : MODELE INDEPENDANT

signification physique des coefficients pour surmonter cette difficulté.

Le terme $\sum_{n=1}^N a'_n (T_g, T_j) f_{kj}^n$ représente la fraction du rayonnement q_{j_0} provenant de la surface j et qui atteint la surface k . Pour deux surfaces réelles cette fraction dépend de trois paramètres, soit la disposition relative des deux surfaces, la température du milieu présent entre les deux surfaces et la température de la surface émettrice j . Si la surface j est fictive, cette fraction du rayonnement q_{j_0} est fonction de la disposition des surfaces, de la température du gaz entre les surfaces j et k et d'une autre température caractéristique du rayonnement issu de la surface fictive. Cette dernière température ne peut être déterminée qu'à la suite d'essais convenablement choisis. On posera que le terme $\sum_{n=1}^N a'_n (T_g, T_j)$ est égal à $\sum_{n=1}^N a'_n (T', T_g)$ où T' peut prendre théoriquement plusieurs formes. Parmi les possibilités on a:

$$a'_n (T', T_g) = a_n (T_g)$$

$$a'_n (T', T_g) = a'_n (T_{METAL}, T_g)$$

$$a'_n (T', T_g) = a'_n (\bar{T}, T_g)$$

où \bar{T} peut être une pondération quelconque sur les températures des parois réelles de la fournaise.

Nous évaluerons l'efficacité de certaines de ses possibilités au chapitre V.

CHAPITRE III

LA MÉTHODE DES PLANS IMAGINAIRES COMME SOUS-SYSTÈME: MODÈLE EN RÉGIME PERMANENT

Nous avons exposé au chapitre II les bases de la méthode des plans imaginaires, ainsi que son utilisation comme modèle indépendant. Utilisé de cette façon, ce modèle permet de calculer les températures des gaz et des murs réfractaires, ainsi que les flux de chaleur aux réfractaires et au bain de métal. Pour ce faire il faut imposer un champ de combustion et un champ de vitesse dans la fournaise. Cependant l'ingénieur-designer désire souvent connaître l'influence de certains paramètres sur la performance de la fournaise à l'étude. Par exemple, il désire évaluer l'influence de la géométrie de la fournaise, l'influence de l'inclinaison ou de la position des brûleurs. Ces paramètres de design influencent directement les champs de vitesses et de combustion. Il devient alors difficile pour le concepteur d'imposer ces champs de façon adéquate. Pour augmenter l'efficacité et la flexibilité d'utilisation de notre modèle, nous devons inclure un modèle complémentaire qui pourra évaluer les champs de vitesses et de combustion pour chaque essai de design.

Pour calculer ces champs, il faut résoudre l'équation de conservation pour chaque variable indépendante. Pour une fournaise rectangulaire en trois dimensions, ces variables sont les suivantes: pression,

trois composantes de vitesse, concentration des espèces chimiques, variables du modèle de turbulence et l'enthalpie. L'équation de conservation est une équation aux dérivées partielles, ce qui rend sa solution analytique presque impossible pour un domaine complexe et en trois dimensions. Nous utiliserons donc des méthodes numériques pour résoudre les équations de conservation. L'élaboration d'un programme informatique assez puissant et fiable pour résoudre ces équations en trois dimensions, demanderait un temps énorme. De plus la création d'un tel code n'entre pas dans les objectifs du présent travail.

Nous avons donc concentré nos efforts sur l'utilisation d'un code commercial. Deux logiciels étaient à notre disposition, soit FLUENT de la compagnie américaine CREARE et le logiciel PHOENICS (Parabolic Hyperbolic Or Elliptic Numerical Integration Code Series) de la compagnie britannique CHAM (Concentration Heat And Mass). Le logiciel FLUENT est plus facile d'utilisation que PHOENICS, cependant il n'est pas aussi versatile que PHOENICS. En effet PHOENICS permet à l'utilisateur d'introduire ses propres sous-routines et de simuler des phénomènes en régime dynamique, ce que ne permet pas FLUENT. Comme nous désirons utiliser la méthode des plans imaginaires pour le calcul radiatif, nous avons choisi d'utiliser le logiciel PHOENICS.

3.1 Le logiciel PHOENICS

Nous donnerons dans cette section les principes généraux qui gouvernent l'utilisation et le fonctionnement du logiciel PHOENICS. Ce logiciel permet la simulation d'écoulements fluidiques, de transfert de chaleur ainsi que de réactions chimiques simples. Pour ce faire, PHOENICS résout numériquement les équations du mouvement, de la conservation de l'énergie et des espèces chimiques. Ces équations sont décrites sous la forme d'une équation de conservation généralisée qui prend la forme:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) + \operatorname{div} (\rho\vec{u}\phi - \Gamma_\phi \operatorname{grad} \phi) = S_\phi \quad (3.1)$$

Le premier terme du membre de gauche de l'équation (3.1) représente l'effet transitoire, le second terme décrit la convection et la diffusion. Le terme de droite est appelé terme source. On peut mentionner que Γ_ϕ est le coefficient d'échange de la loi de comportement de la variable. Le terme S_ϕ est le terme source qui représente les sollicitations au système. Nous donnerons à la section 3.3 les différentes valeurs de Γ_ϕ et S_ϕ pour chaque variable indépendante.

Les algorithmes qu'utilise PHOENICS pour résoudre cette équation peuvent être retrouvés dans Patankar (1980). PHOENICS utilise une notation cardinale telle que présentée à la figure 3.1. Une fois

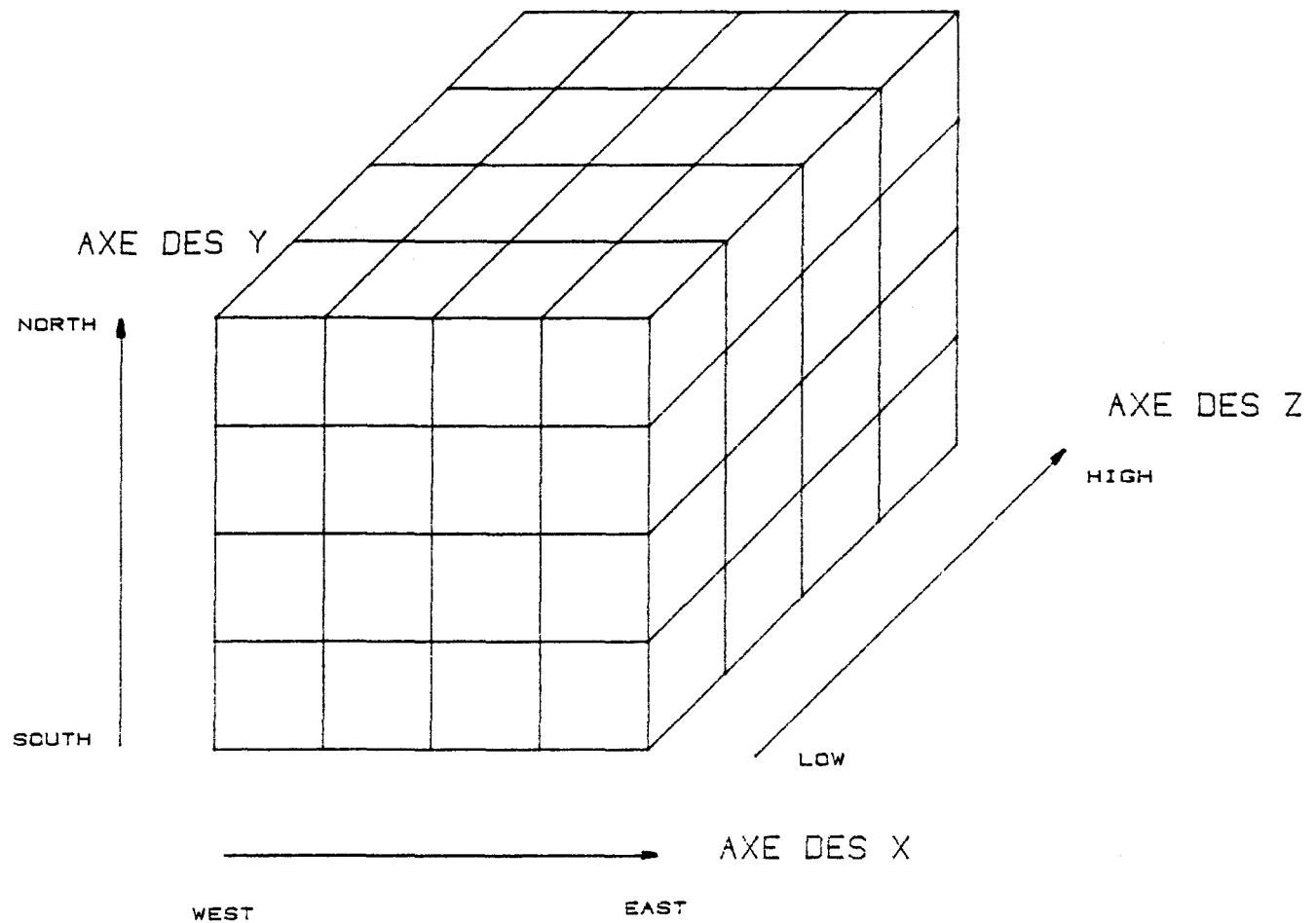


FIGURE 3.1 : NOTATION ET AXES DE REFERENCE DU LOGICIEL PHENICS

l'équation (3.1) intégrée, Patankar obtient l'équation algébrique suivante:

$$\phi_P = \frac{a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + a_H \phi_H + a_L \phi_L + S_\phi + a_T \phi_T}{a_E + a_W + a_N + a_S + a_H + a_L + a_T + a_P} \quad (3.2)$$

Les indices inférieurs indiquent la position relative d'une cellule par rapport à la cellule centrale (P). Les coefficients a découlent directement de l'intégration de l'équation (3.1). L'indice inférieur T indique la valeur de la variable au temps précédent. Pour un domaine contenant N volumes finis sur lesquels on désire évaluer M variables indépendantes, PHOENICS devra solutionner un système algébrique de dimension $NM \times NM$. De plus ces équations sont fortement couplées et non-linéaires malgré l'apparence de l'équation (3.2). PHOENICS a recours à une procédure itérative pour solutionner ce système d'équations.

L'usager de PHOENICS n'a pas accès au code informatique permettant de résoudre les équations algébriques; ce code est la propriété exclusive de la compagnie CHAM. Cependant il peut, selon ses besoins, modifier le terme source. Ceci nous amène à discuter brièvement de l'utilisation de PHOENICS.

La figure 3.2 montre schématiquement le fonctionnement de ce logiciel. L'utilisateur peut accéder à deux fichiers différents pour

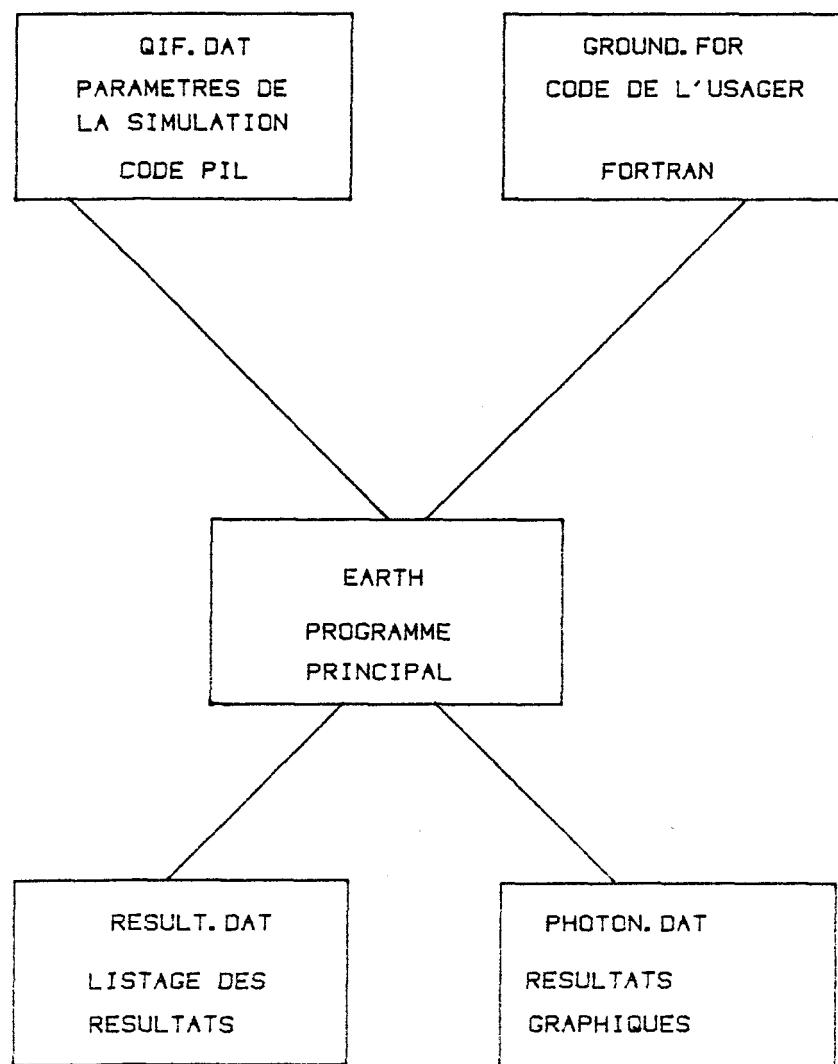


FIGURE 3.2 : FONCTIONNEMENT SIMPLIFIE DU LOGICIEL PHOENICS

définir son problème. Chaque fichier possède vingt-quatre groupes (décris au tableau 3.1), dans lesquels l'usager peut définir les paramètres de la simulation. Le fichier QIF.DAT (quick input file) contient les informations suivantes:

- dimensions et maillage du domaine
- variables à solutionner
- conditions initiales
- conditions aux limites et autres termes sources
- paramètres numériques pour la convergence

En somme l'utilisateur introduit dans ce fichier un code (PIL) permettant de décrire le modèle à simuler. De plus PHOENICS offre l'opportunité à l'usager d'introduire son propre code source FORTRAN via le fichier GROUND.FOR. Ces deux fichiers, QIF.DAT et GROUND.FOR, transmettent les informations qu'ils contiennent au programme principal EARTH.EXE. Ce programme résoudra les équations algébriques selon les informations reçues.

L'usager peut visualiser les résultats de deux manières différentes. Il peut lire les valeurs numériques des variables solutionnées dans le fichier RESULT.DAT. Il peut également visualiser ces résultats sur un terminal graphique à l'aide du fichier PHOTON.DAT.

GROUPE 1 : TITRE DE LA SIMULATION
GROUPE 2 : VALEURS NUMERIQUES DES PAS DE TEMPS
GROUPE 3 : MAILLAGE DANS LA DIRECTION X
GROUPE 4 : MAILLAGE DANS LA DIRECTION Y
GROUPE 5 : MAILLAGE DANS LA DIRECTION Z
GROUPE 6 : DISTORSION DU MAILLAGE ET BFC
GROUPE 7 : VARIABLES A SOLUTIONNER
GROUPE 8 : TERMES A SOLUTIONNER DANS L'EQUATION (3.1)
GROUPE 9 : PROPRIETES DU MILIEU
GROUPE 10 : PROPRIETES DU TRANSFERT INTER-PHASE
GROUPE 11 : VALEURS INITIALES DES VARIABLES
GROUPE 12 : AJUSTEMENTS CONVECTIFS ET DIFFUSIFS
GROUPE 13 : CONDITIONS AUX LIMITES ET SOURCES SPECIALES
GROUPE 14 : PRESSION EN AVAL SI ECOULEMENT PARABOLIQUE
GROUPE 15 : NOMBRE DE BALAYAGES
GROUPE 16 : NOMBRE D'ITERATIONS
GROUPE 17 : PARAMETRES DE SOUS-RELAXATION
GROUPE 18 : LIMITES SUR LA VALEUR DES VARIABLES
GROUPE 19 : INFORMATION POUR LA SOUS-ROUTINE GROUND.FOR
GROUPE 20 : LISTAGE PRELIMINAIRE
GROUPE 21 : LISTAGE DES VARIABLES
GROUPE 22 : LISTAGE POUR DES POINTS PRECIS DU DOMAINE
GROUPE 23 : LISTAGE DU CHAMP COMPLET
GROUPE 24 : REDEMARRAGE

TABLEAU 3.1 : GROUPES RELATIFS AUX FICHIERS QIF.DAT ET GROUND.FOR

3.2 Couplage de PHOENICS et des plans imaginaires

On peut envisager différents couplages entre PHOENICS et les plans imaginaires. Nous donnons au tableau 3.2 les entrées et sorties de chaque logiciel, ce qui permet d'établir une stratégie de couplage efficace. On remarque que les deux logiciels ont la possibilité de calculer la température des gaz. Puisqu'il n'est pas nécessaire de faire calculer la même variable par les deux logiciels, il faut opter pour l'un ou l'autre. Pour faire un choix nous devons tenir compte du maillage du domaine pour chaque logiciel. La méthode des plans imaginaires, comme nous le verrons au chapitre V, est rapide, mais le temps de calcul augmente rapidement avec le nombre de volumes finis utilisés. Pour obtenir un temps de calcul raisonnable, nous devons utiliser un maillage grossier comprenant environ 50 à 80 volumes finis. Le logiciel PHOENICS peut utiliser un nombre beaucoup plus élevé de volumes finis tout en ayant un temps de calcul acceptable. Puisque le maillage de PHOENICS est plus fin que celui des plans imaginaires, les températures des gaz seront calculées par PHOENICS dans le but d'augmenter la précision des résultats.

Nous pouvons maintenant définir les tâches de chaque logiciel à l'intérieur du modèle global. La figure 3.3 montre schématiquement le fonctionnement du modèle couplé PHOENICS-plans imaginaires. PHOENICS calcule donc les vitesses, la pression, l'enthalpie, les concentrations des espèces chimiques et les variables du modèle de turbulence. De

PLANS IMAGINAIRES		PHOENICS
ENTREES NECESSAIRES	<ul style="list-style-type: none">CHAMP DE VITESSECHAMP DE COMBUSTION	<ul style="list-style-type: none">PERTES ENERGETIQUES AUX PAROIS DU DOMAINE (TERME SOURCE D'ENTHALPIE)
SORTIES POSSIBLES	<ul style="list-style-type: none">TEMPERATURE DES GAZENTHALPIETEMPERATURE DES REFRACTAIRESFLUX DE CHALEUR AUX REFRACTAIRES ET AU METAL	<ul style="list-style-type: none">CHAMP DE VITESSECHAMP DE COMBUSTIONENTHALPIETEMPERATURE DES GAZ

TABLEAU 3.2 : ENTREES ET SORTIES DES LOGICIELS PHOENICS ET PLANS IMAGINAIRES

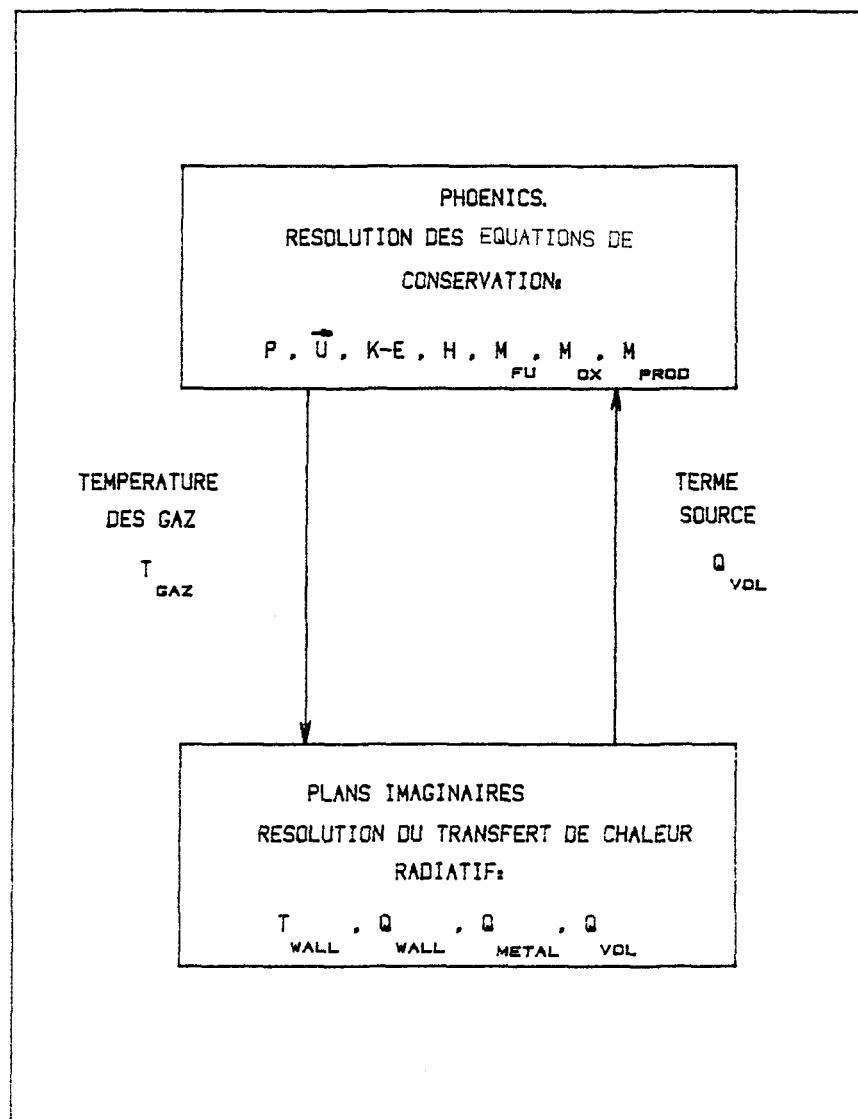


FIGURE 3.3 : TRANSFERT DES INFORMATIONS ENTRE LES DEUX LOGICIELS
PLANS IMAGINAIRES ET PHOENICS

l'enthalpie PHOENICS peut déduire les températures des gaz de chaque volume fini. Il transmet ces températures au logiciel des plans imaginaires. Celui-ci résout les bilans d'énergie sur les surfaces réelles de la fournaise pour ainsi calculer les températures des réfractaires et les flux de chaleur aux réfractaires et au bain de métal ainsi que les flux volumiques radiatifs. Ces derniers peuvent être calculés en divisant la puissance nette traversant les six faces d'une zone par le volume de cette zone. À son tour le logiciel des plans imaginaires transmet ces flux de chaleur sous forme de termes sources d'enthalpie à PHOENICS.

Puisque les maillages sont différents d'un logiciel à l'autre, il faut traiter l'information venant d'un logiciel afin qu'elle soit utilisable par l'autre logiciel. La figure 3.4 montre des maillages typiques.* Pour plus de simplicité dans les programmes FORTRAN, le maillage de PHOENICS doit être un multiple de celui des plans imaginaires et cela selon les trois axes de référence. Comme on peut le voir à la figure 3.4, un volume fini du maillage des plans imaginaires contient huit volumes finis du maillage de PHOENICS. Les températures des volumes finis de PHOENICS sont moyennées pour obtenir une seule température dont la valeur est assignée au volume fini correspondant des plans imaginaires. À l'opposé, les flux de chaleur aux parois réelles d'un volume fini des plans imaginaires sont transférés à toutes les surfaces réelles des volumes finis correspondant du maillage de PHOENICS.

* Pour des raisons chronologiques les axes de PHOENICS et plans imaginaires sont différents.

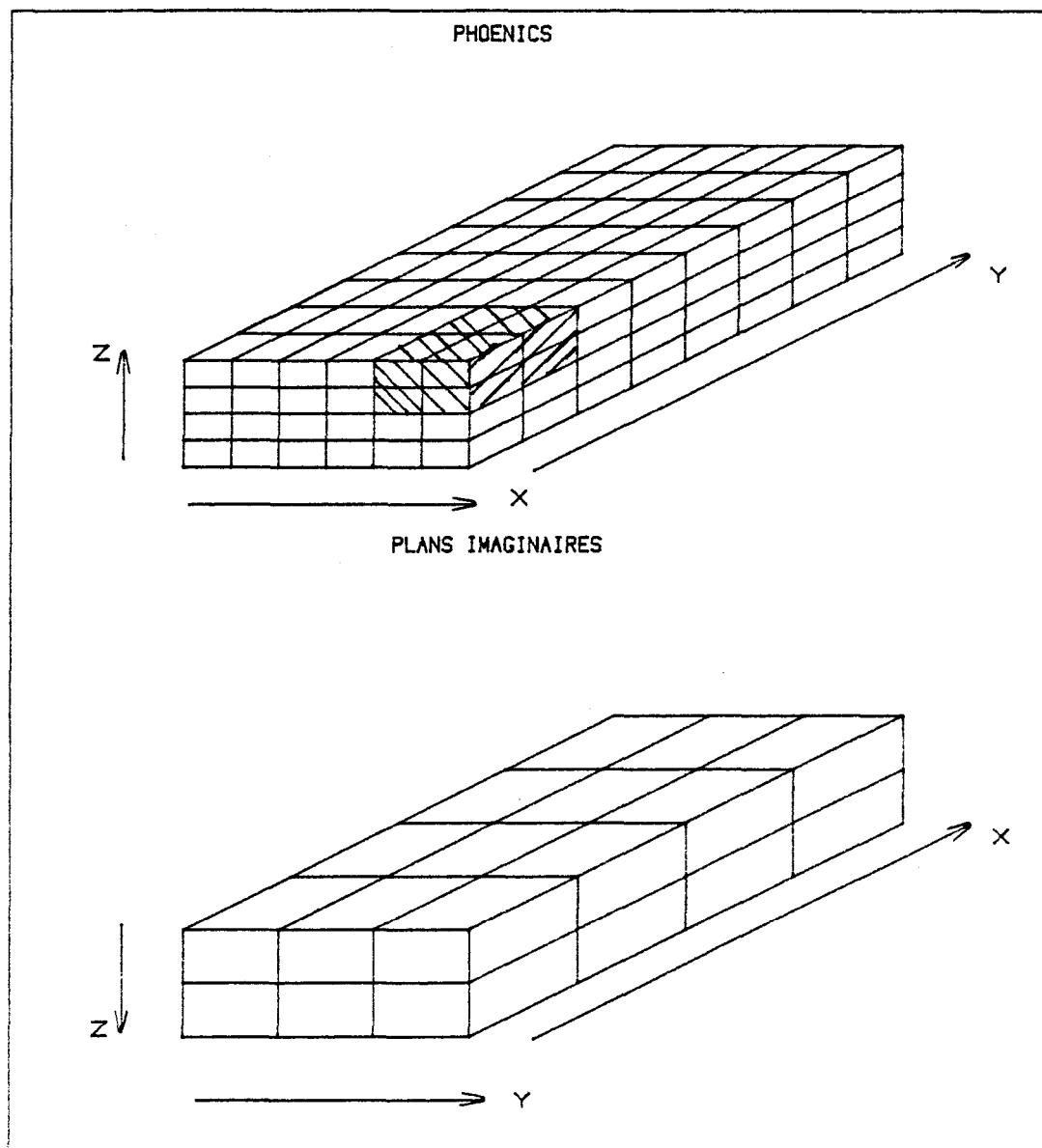


FIGURE 3.4 : MAILLAGE TYPIQUE POUR LES LOGICIELS PHOENICS ET PLANS IMAGINAIRES

Puisque le logiciel PHOENICS résout de façon itérative les équations de conservation, il faut introduire à l'intérieur de ces itérations le logiciel des plans imaginaires. PHOENICS possède plusieurs niveaux d'itération, le niveau supérieur est appelé balayage (sweep). Après un balayage, les valeurs numériques de toutes les variables dans tous les volumes finis ont été corrigées selon la loi imposée par l'équation de conservation correspondante. Ce processus continue jusqu'à convergence, c'est-à-dire lorsque l'écart entre le membre de gauche et le membre de droite de l'équation 3.2 soit minime. Il faut donc faire appel aux plans imaginaires après ces balayages pour corriger le terme source d'enthalpie pour le balayage suivant. Nous utilisons les plans imaginaires à tous les dix balayages de PHOENICS. Cette façon de faire offre un bon compromis entre le temps de calcul et la convergence. En effet, si on fait appel aux plans imaginaires à tous les balayages, le temps de calcul sera trop élevé. À l'opposé si on utilise les plans imaginaires à tous les vingt ou trente balayages, la convergence est compromise.

La figure 3.5 présente un logigramme qui montre en détail le couplage PHOENICS-plans imaginaires.

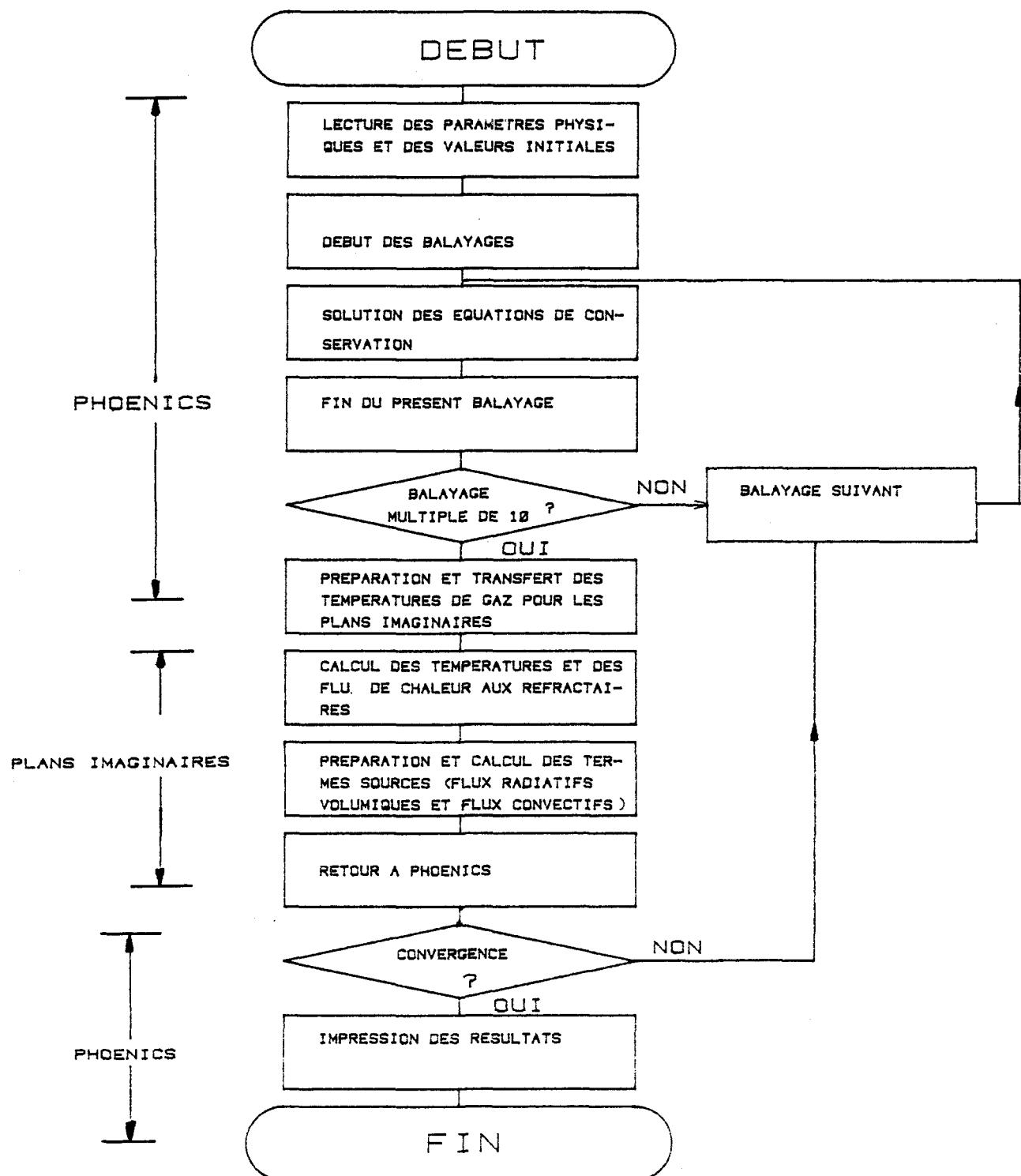


FIGURE 3.5 • COUPLAGE PLANS IMAGINAIRES ET PHOENICS

3.3 Les équations de conservation

Nous donnerons dans cette section les équations de conservation pour chaque variable indépendante solutionnée par le logiciel PHOENICS. Selon le modèle de combustion employé, il y a huit ou neuf équations à résoudre. Elles sont:

- équation de continuité
- équations de Navier-Stokes (trois équations en 3-D)
- équation d'énergie
- modèle de turbulence (deux équations)
- conservation des espèces chimiques (une ou deux équations)

Pour toutes ces équations nous donnerons la signification des termes ϕ , Γ_ϕ , S_ϕ relatifs à l'équation (3.1)

3.3.1 Équation de continuité

L'équation de continuité est caractérisée par:

$$\phi = 1 \quad (3.3)$$

$$\Gamma_\phi = 0 \quad (3.4)$$

$$S_\phi = 0 \quad (3.5)$$

et on obtient donc:

$$\operatorname{div}(\rho \vec{u}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (3.6)$$

Pour un phénomène en régime établi l'équation (3.6) devient:

$$\operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0 \quad (3.7)$$

3.3.2 Équations de Navier-Stokes

Dans la direction de l'axe des x, les paramètres dans l'équation (3.1) sont:

$$\phi = u \quad (3.8)$$

$$\Gamma_\phi = \mu_{\text{eff}} = \mu_\ell + \mu_t \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} S_\phi &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_{\text{eff}} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_{\text{eff}} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_{\text{eff}} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ &\quad - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_{\text{eff}} \operatorname{div}(\vec{u}) + \rho k \right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Dans la direction de l'axe des y:

$$\phi = v \quad (3.11)$$

$$\Gamma_\phi = \mu_{\text{eff}} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} S_\phi = & - \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} (\mu_{\text{eff}} \frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial y} (\mu_{\text{eff}} \frac{\partial v}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (\mu_{\text{eff}} \frac{\partial w}{\partial y}) \\ & - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} (\mu_{\text{eff}} \operatorname{div}(\vec{u}) + \rho k) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Dans la direction de l'axe des z:

$$\phi = w \quad (3.14)$$

$$\Gamma_\phi = \mu_{\text{eff}} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} S_\phi = & - \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} (\mu_{\text{eff}} \frac{\partial u}{\partial z}) + \frac{\partial}{\partial y} (\mu_{\text{eff}} \frac{\partial v}{\partial z}) + \frac{\partial}{\partial z} (\mu_{\text{eff}} \frac{\partial w}{\partial z}) \\ & - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial z} (\mu_{\text{eff}} \operatorname{div}(\vec{u}) + \rho k) + \rho g_z \end{aligned} \quad (3.16)$$

3.3.3 Équation d'énergie

Pour l'équation de conservation de l'énergie, les paramètres dans l'équation (3.1) sont les suivants:

$$\phi = h \quad (3.17)$$

$$\Gamma_\phi = \frac{k}{C_p} + \frac{\mu_t}{Pr_h} \quad (3.18)$$

$$S_\phi = S_{RAD} + S_{CONV} \quad (3.19)$$

Le terme source dans le cas de l'équation d'énergie est constitué des pertes convectives aux réfractaires et des gains convectifs au bain de métal ainsi que des pertes volumiques radiatives.

3.3.4 Modèle de turbulence

Le modèle de turbulence utilisé est appelé modèle k-epsilon où k est l'énergie cinétique de turbulence et epsilon la dissipation de l'énergie cinétique de turbulence. Pour la variable k, les paramètres dans l'équation (3.1) sont:

$$\phi = k \quad (3.20)$$

$$\Gamma_\phi = \mu_{eff}/Pr_k \quad (3.21)$$

$$S_\phi = - \rho (G + \epsilon) \quad (3.22)$$

Et pour la seconde variable epsilon:

$$\phi = \epsilon \quad (3.23)$$

$$\Gamma_\phi = \mu_{\text{eff}} / \rho r_\epsilon \quad (3.24)$$

$$S_\phi = - \rho (1.44G + 1.92\epsilon) \frac{\epsilon}{k} \quad (3.25)$$

Le terme G qu'on retrouve dans les équations (3.22) et (3.25) est défini ainsi:

$$\begin{aligned} \rho G &= 2\mu_t \left(\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial z} \right) \\ &\quad - \mu_t \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ &\quad + \frac{2}{3} (\rho k + \mu_t \operatorname{div}(\vec{u})) \operatorname{div}(\vec{u}) \end{aligned}$$

3.3.5 Équation de conservation des espèces chimiques

Les paramètres dans l'équation (3.1) pour cette équation sont les suivants:

$$\phi = M_a \quad (3.26)$$

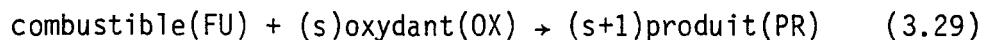
$$\Gamma_\phi = \mu_{\text{eff}} \quad (3.27)$$

$$S_\phi = R_a \quad (3.28)$$

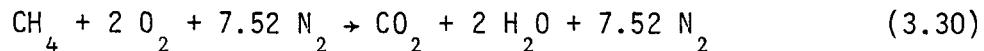
où M_a est la fraction massique de l'espèce chimique a et R_a le taux de réaction chimique de l'espèce a.

3.4 Modèle de combustion

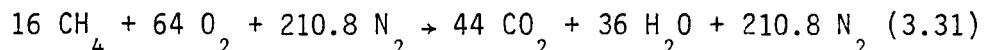
PHOENICS permet à l'usager d'utiliser deux modèles de combustion. Malin et al. (1982) donnent les détails de ces modèles. La réaction permise par ces deux modèles est très simple, elle implique seulement deux réactifs et un produit de combustion sans autre composé intermédiaire:



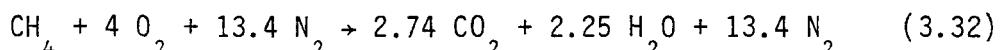
Pour une fournaise alimentée au gaz naturel (96% méthane) la réaction chimique s'écrit:



Cette équation ne considère pas de pourcentage d'excès d'air. Écrite sur une base massique, elle devient:



et par kilogramme de méthane:



On peut transformer l'équation (3.32) pour obtenir la forme compatible avec PHOENICS (équation 3.29):



3.4.1 Réaction contrôlée par la diffusion

Ce premier modèle de combustion peut être appliqué lorsque le combustible et l'oxydant ne sont pas prémelangés. Ce modèle considère que la réaction de combustion est infiniment rapide de telle sorte que le combustible et l'oxydant ne peuvent coexister au même endroit en aucun temps. Pour ce modèle il n'y a qu'une variable indépendante à solutionner à l'aide de PHOENICS, il s'agit de la fraction de mélange f qui est définie ainsi:

$$f = \frac{\zeta - \zeta_A}{\zeta_F - \zeta_A} \quad (3.34)$$

$$\text{où } \zeta = M_{FU} - \frac{M_{OX}}{s}$$

et les indices inférieurs A et F indiquent les conditions à l'entrée de l'oxydant et du combustible respectivement, et les termes M_{FU} et M_{OX} sont les fractions massiques de carburant et d'oxydant; le terme s est défini à travers l'équation (3.29). On a alors:

$$\begin{aligned}\xi_A &= -\frac{1}{s} \\ \xi_F &= 1\end{aligned}\tag{3.35}$$

Les paramètres à introduire dans l'équation (3.1) pour résoudre l'équation de conservation relative à cette fraction de mélange sont les suivants:

$$\phi = f\tag{3.36}$$

$$\Gamma_f = \mu_{eff}/\rho r_f\tag{3.37}$$

$$S_f = 0\tag{3.38}$$

Comme le combustible et l'oxydant ne peuvent exister simultanément, la flamme se divise en deux régions.

région 1: l'oxydant et les produits de combustion coexistent, c'est-à-dire M_{FU} égale zéro dans l'équation (3.34), on obtient alors:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{FU} = 0 \\ M_{OX} = 1 - f(s+1) \\ M_{PR} = 1 - M_{OX} \end{array} \right. \quad (3.39)$$

Si nous appelons f_{st} la fraction de mélange aux conditions stoéchiométriques pour lesquelles M_{OX} égale $s M_{FU}$ d'après l'équation (3.29).

Alors f_{st} prend la forme suivante:

$$f_{st} = \frac{1}{1+s} \quad (3.40)$$

et l'équation (3.39) devient:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{FU} = 0 \\ M_{OX} = 1 - \frac{f}{f_{st}} \\ M_{PR} = 1 - M_{OX} \end{array} \right. \quad (3.41)$$

région 2: le combustible et les produits coexistent, c'est-à-dire que M_{OX} égale zéro. Alors des équations (3.34) et (3.40) on obtient:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{OX} = 0 \\ M = \frac{f - f_{st}}{1 - f_{st}} \\ M_{PR} = 1 - M_{FU} \end{array} \right. \quad (3.42)$$

3.4.2 Réaction influencée par la cinétique

Ce second modèle est utilisé pour des flammes dont le combustible et l'oxydant sont prémélangés. Dans ce cas, l'hypothèse d'un taux de réaction infini n'est plus valide. Ceci implique qu'il faut résoudre l'équation de conservation pour la fraction de masse du combustible en plus de la fraction de mélange. Dans ce cas, le terme R_a de l'équation (3.28) représente le taux de disparition du combustible. PHOENICS permet d'utiliser plusieurs équations pour évaluer ce taux de réaction. Nous mentionnons ici les deux plus connues.

- taux de réaction d'Arrhenius

$$R_{FU} = - A_0 \rho^2 M_{FU} M_{OX} e^{-(E/RT)} \quad (3.43)$$

où A_0 est une constante préexponentielle

E est l'énergie d'activation

R est la constante universelle des gaz

- taux de réaction "eddy break-up" (bris des tourbillons)

$$R_{FU} = - C_0 \rho \frac{\epsilon}{k} M_{FU} \quad (3.44)$$

où C_0 est une constante pouvant modifier la longueur de la flamme.

Ce dernier modèle est celui utilisé pour les simulations de la combustion.

CHAPITRE IV

LA MÉTHODE DES PLANS IMAGINAIRES COMME SOUS-SYSTÈME: MODÈLE TRANSITOIRE

Nous avons décrit aux chapitres II et III la méthode des plans imaginaires comme modèle indépendant et comme sous-système couplé avec le logiciel PHOENICS. Ces deux modèles simulent une fournaise de métal chaud en régime stationnaire, c'est-à-dire lorsque les phénomènes de convection, radiation, combustion et conduction dans les réfractaires sont stabilisés. Le transfert de chaleur par conduction dans les murs réfractaires est celui qui se stabilise le plus lentement. En effet, ces murs sont composés de briques réfractaires et isolantes dont les constantes de temps sont élevées. De plus, le mode opératoire d'une fournaise de métal chaud est tout à fait transitoire. Les brûleurs peuvent être ouverts pendant une heure, fermés pendant vingt à trente minutes, ainsi de suite. Alors l'effet combiné du mode opératoire transitoire et des grandes constantes de temps des murs réfractaires rend essentielle la création d'un modèle en transitoire pour la simulation d'une fournaise de métal chaud. Les lignes qui suivent traitent d'un tel modèle.

Il est à remarquer qu'un modèle complet doit aussi tenir compte du caractère transitoire de la surface du métal (liquide ou solide) à la base de la fournaise. C'est précisément le rôle du modèle de prédire ce

qui arrive au métal dans la fournaise au cours de l'opération. Toutefois, ce qui sera présenté dans ce chapitre supposera que la température du métal est constante et que l'effet transitoire n'est dû qu'à l'iner- tie thermique des murs réfractaires. Le but ici est plutôt d'illustrer une méthode qui sera ensuite reprise plus tard dans l'élaboration du modèle complet. La matière exposée dans ce chapitre doit donc être vue comme une étape.

L'hypothèse relative au modèle transitoire est la suivante:

- le champ de vitesse dans la fournaise se stabilise plus rapidement que le transfert de chaleur par conduction dans les murs réfractaires. En conséquence:
 - les champs de vitesse, de pression et le champ des variables de turbulence seront calculés à l'aide du modèle en régime stationnaire et seront maintenus constants pour le modèle transitoire.

Cette hypothèse découle du fait que la résolution rigoureuse de l'écoulement en transitoire demande des temps de calcul trop importants pour une utilisation pratique. Nous avons cependant créé un modèle où l'écoulement est calculé rigoureusement en transitoire, à partir duquel il sera possible de valider l'hypothèse du premier modèle.

Il y aura donc deux étapes distinctes pour le modèle:

- 1) Calcul du champ de vitesse à l'aide du couplage plans imaginaires-PHENICS en régime permanent. Ce champ de vitesse sera maintenu constant par la suite.
- 2) Utilisation du modèle transitoire avec champ de vitesse pré-établi.

Pour cette dernière partie, le logiciel PHENICS calculera seulement les variables suivantes: enthalpie, fraction de masse de carburant et fraction de mélange. Le logiciel des plans imaginaires pour sa part calculera toujours les flux de chaleur radiatifs et convectifs ainsi que les températures des réfractaires. Les figures 4.1 et 4.2 présentent des logigrammes qui expliquent respectivement le fonctionnement du modèle transitoire rigoureux et le fonctionnement du modèle transitoire avec les champs imposés. Les résultats sont présentés et analysés au chapitre V. On remarquera que le processus itératif expliqué auparavant (voir figure 3.5) est repris ici pour chaque pas de temps avec réévaluation des variables à tous les dix balayages.

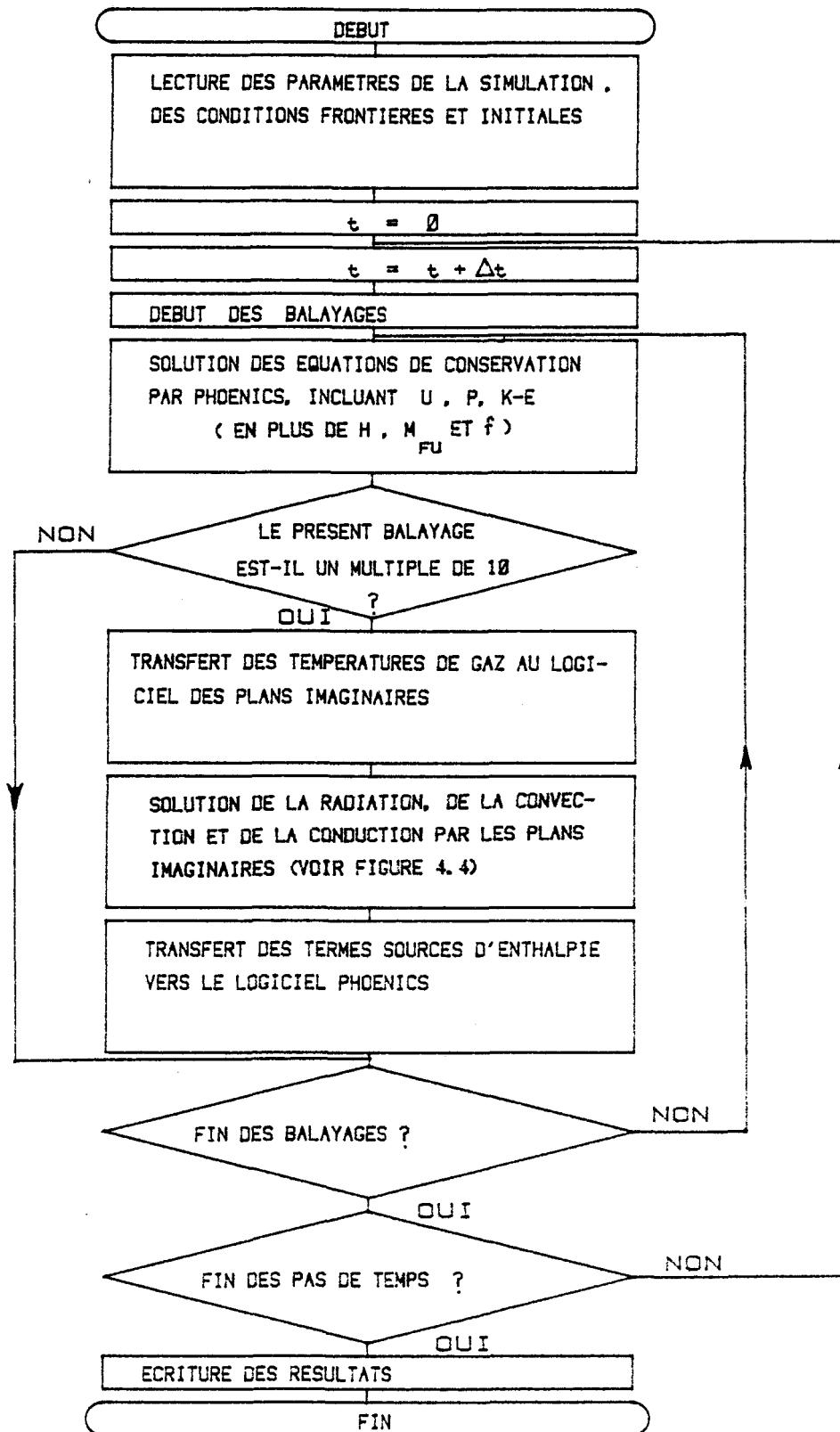


FIGURE 4.1 : FONCTIONNEMENT DU LOGICIEL COUPLE : RÉGIME TRANSITOIRE
MODÉLE AVEC ECOULEMENT CALCULÉ PAR PHOENICS

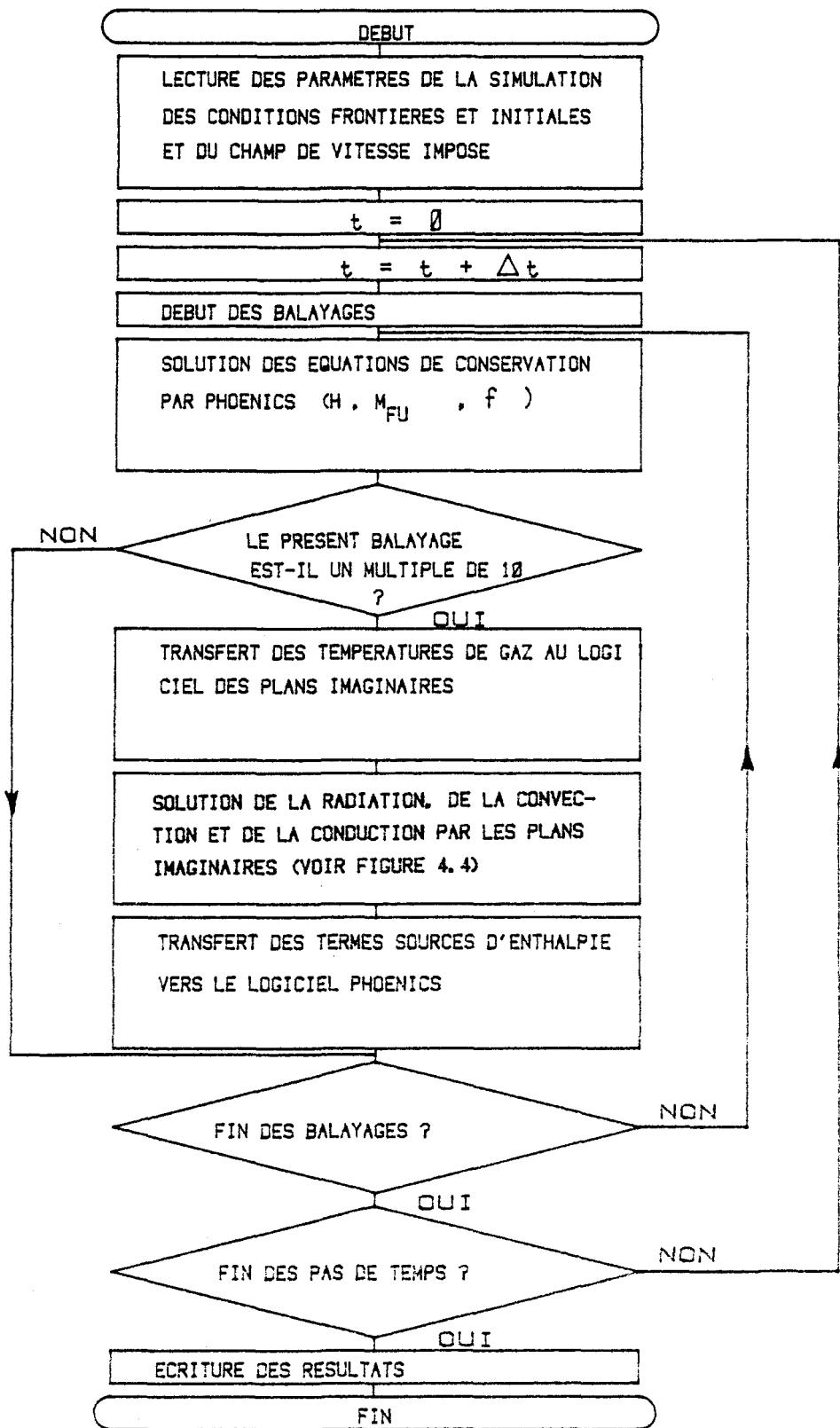


FIGURE 4.2 : FONCTIONNEMENT DU LOGICIEL COUPLE : RÉGIME TRANSITOIRE
MODÈLE AVEC ECOULEMENT IMPOSÉ

4.1 Les méthodes numériques relatives aux modèles transitoires

Pour les modèles transitoires, l'équation (2.25) doit être modifiée pour tenir compte de l'inertie thermique des murs réfractaires. Le terme $AU(T_k^C - T_{AMB})$ doit être changé. Pour chaque surface réfractaire du maillage des plans imaginaires, nous résolvons l'équation unidimensionnelle de conduction.

Considérons la surface réfractaire présentée à la figure 4.3. Pour le noeud situé sur la surface interne du four de métal, nous pouvons écrire l'équation (4.1), qui résulte d'un bilan de chaleur sur la première tranche:

$$Q_{IN}^{t+\Delta t} + k_R^t \frac{(T_2^{t+\Delta t} - T_1^t)}{\Delta x} = (\rho c)^t \frac{\Delta x}{2} \frac{(T_1^{t+\Delta t} - T_1^t)}{\Delta t} \quad (4.1)$$

Pour un noeud interne le bilan d'énergie peut s'écrire:

$$k_L^t \frac{(T_{i-1}^{t+\Delta t} - T_i^t)}{\Delta x} + k_R^t \frac{(T_{i+1}^{t+\Delta t} - T_i^t)}{\Delta x} = (\rho c)^t \frac{\Delta x}{\Delta t} \frac{(T_i^{t+\Delta t} - T_i^t)}{\Delta t} \quad (4.2)$$

pour $i = 2 \text{ à } N - 1$

Et pour le noeud situé sur la surface externe du four le bilan d'énergie est donné par l'équation (4.3)

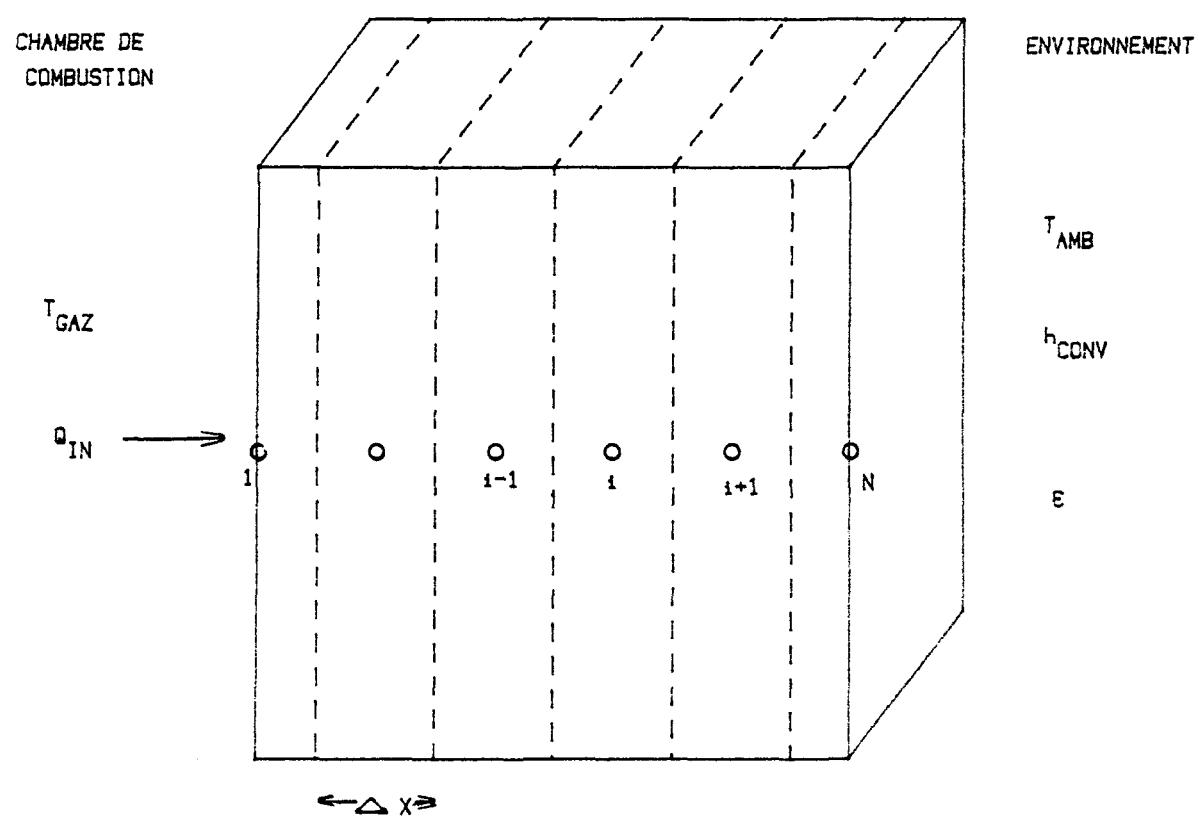


FIGURE 4.3 : CONDUCTION UNIDIMENSIONNELLE DANS UNE TRANCHE DE BRIQUE REFRACTAIRE

$$\frac{k_L (T_{N-1} - T_N)}{\Delta x} - [h_{\text{CONV}} (T_N^{t+\Delta t} - T_{\text{AMB}}) + \sigma \epsilon (T_N^4 - T_{\text{AMB}}^4)] \quad (4.3)$$

$$= (\rho c) \frac{t}{2} \frac{\Delta x}{\Delta t} \frac{(T_N^{t+\Delta t} - T_N^t)}{\Delta t}$$

où

$$K_L = \frac{k_{i-1} + k_i}{2}$$

$$K_R = \frac{k_{i+1} + k_i}{2}$$

$$(\rho c) = \rho_i c_i \quad (4.4)$$

Nous considérons que les propriétés thermiques des réfractaires varient en fonction de la température. Cependant, bien que les murs réfractaires soient constitués de plusieurs couches de matériaux de propriétés différentes, nous utilisons des propriétés thermiques équivalentes. En d'autres termes, les couches de réfractaires sont modélisées comme une seule couche de propriété thermique équivalente. Les calculs relatifs à cette simplification sont présentés à l'appendice B.

Bien que la formulation proposée par les équations (4.1) à (4.4) soit implicite, nous considérons les pertes radiatives de la surface externe de la fournaise au temps précédent de façon à ne pas introduire de non-linéarité dans le système d'équations formé par les relations

(4.1) à (4.3). Ce système matriciel est tridiagonal, ce qui rend sa résolution très simple et rapide à l'aide de l'algorithme de Thomas. Ames (1977) donne les détails de cet algorithme.

A noter également que le terme $Q_{IN}^{t+\Delta t}$ est constitué des flux radiatif et convectif arrivant à la portion de surface considérée. Ce flux est fonction des températures de toutes les surfaces et de tous les volumes de gaz de l'enceinte. Ce terme est non-linéaire et inconnu pour le temps suivant ($t + \Delta t$). Pour contourner ce problème, nous utilisons une méthode itérative schématisée à la figure 4.4. Sur cette figure le temps $t + \Delta t$ est noté par un astérisque en indice supérieur, tandis que le temps présent n'est pas indicé. Les indices inférieurs A et N signifient respectivement ancien et nouveau.

Posons que l'on connaisse les résultats d'une simulation à un temps t quelconque, et que l'on cherche la valeur des variables au temps $t + \Delta t$. Après dix balayages du logiciel PHOENICS, celui-ci transfert les températures de gaz au logiciel des plans imaginaires. On considère que ce sont les températures au temps $t + \Delta t$, bien que la convergence avec PHOENICS ne soit pas atteinte. On connaît également les températures des réfractaires T_W au temps t . Comme première approximation, on pose que la température des réfractaires au temps $t + \Delta t$ est celle au temps t . À partir de ces deux champs de température (gaz et réfractaire) on calcule par la méthode des plans imaginaires les flux de chaleur aux parois réfractaires (Q_{IN}^*). On impose alors ce champ de flux

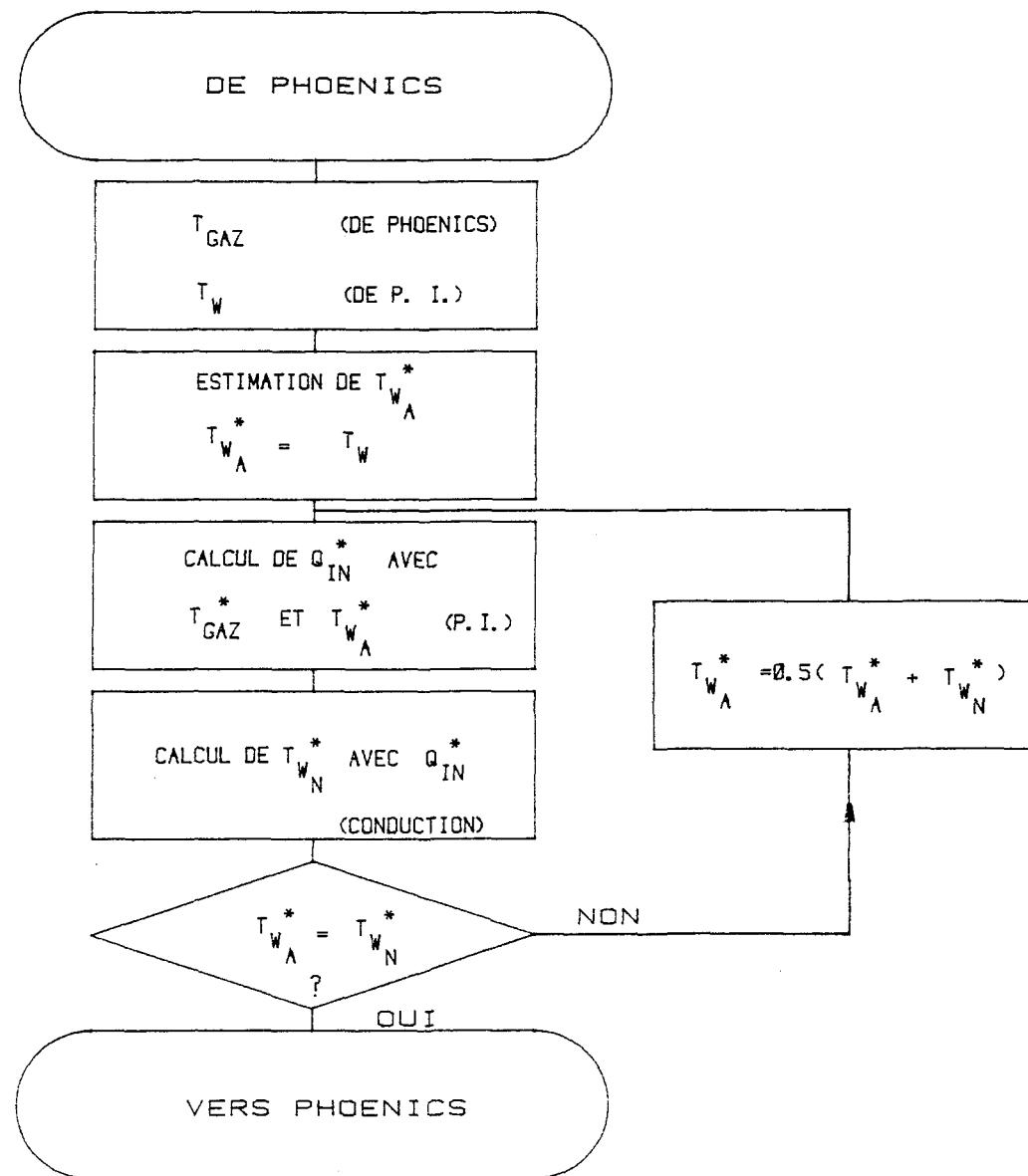


FIGURE 4.4 : PROCESSUS ITERATIF CALCULANT LES TEMPERATURES INTERNES DES REFRACTAIRES

dans les équations (4.1) à (4.4), ce qui permet de calculer un nouveau champ de température des réfractaires au temps $t + \Delta t$ ($T_{W_N}^*$). Les deux champs $T_{W_A}^*$ et $T_{W_N}^*$ sont comparés. S'ils sont identiques, la convergence est atteinte pour le logiciel des plans imaginaires, sinon on corrige le champ de température des réfractaires et on reprend la procédure jusqu'à convergence.

On note que ce processus itératif est imbriqué dans les balayages de PHOENICS, comme on le voit aux figures 4.1 et 4.2.

CHAPITRE V

ANALYSE DES RÉSULTATS

Nous présentons dans ce chapitre divers cas de simulation qui ont pour but de comparer la méthode des plans imaginaires à la méthode de zones. Nous avons choisi la méthode de zones comme base de comparaison pour les raisons suivantes: 1) La méthode de zones est la plus rigoureuse en transfert de chaleur radiatif. 2) La méthode des plans imaginaires étant une simplification de la méthode de zones, une comparaison avec celle-ci est essentielle pour vérifier la justesse des hypothèses posées.

Le chapitre sera divisé en trois sections, soit respectivement les résultats de la méthode des plans imaginaires comme modèle indépendant, comme modèle couplé avec le logiciel PHOENICS en régime établi et finalement comme modèle couplé avec PHOENICS en régime transitoire. Pour cette dernière section, il n'y aura pas de comparaison avec la méthode de zones, cette dernière n'étant pas disponible en régime transitoire.

5.1 Les plans imaginaires comme modèle indépendant

Rappelons que pour utiliser la méthode des plans imaginaires comme modèle indépendant, il faut fournir le champ de vitesse (sous forme de débits) et le champ de combustion (sous forme de puissance libérée par la combustion). Ces deux champs sont imposés et fixes pour ce modèle. De plus l'utilisateur doit fournir au modèle les paramètres physiques de la fournaise, les paramètres radiatifs, les température initiales des gaz et des réfractaires, et les paramètres de simulation. Un résumé de ces entrées au modèle est présenté au tableau 5.1

Les sections 5.1.1 à 5.1.5 présentent les différents cas simulés à l'aide de la méthode des plans imaginaires et de la méthode de zones. Plusieurs simulations s'avèrent nécessaires pour valider pleinement la présente méthode. Cependant, certains paramètres sont identiques d'une simulation à l'autre. Nous allégeons la description de ces simulations en faisant référence à un cas de base. Nous présentons au tableau 5.2 et aux figures 5.1 et 5.2, les paramètres d'entrée pour ce cas de base ou cas 1. Par la suite toutes les autres simulations se référeront à ce cas de base. Les aires d'échange direct sont calculées à l'aide de la méthode de Monte Carlo pour toutes les simulations. La puissance totale libérée par la combustion est de 4213 kW, et le débit total du brûleur est de 1.754 kg/s. La figure 5.1 présente la puissance libérée par la combustion pour chaque tranche selon l'axe des z. La figure 5.2 présente la distribution des débits (en kg/s) pour chaque division selon

ENTREES AU MODELE	UNITE
CHAMPS IMPOSES	
combustion	[W]
vitesse (debit)	[kg/s]
PARAMETRES RADIATIFS	
facteur d'absorption	[$m^{-1} \text{atm}^{-1}$]
aires d'échange direct	[m^2]
emissivite des surfaces	[-]
nature du gaz	gris ou reel
PARAMETRES PHYSIQUES	
- dimension de la fournaise	[m]
- maillage (x, y, z)	
- coefficient global de transfert de chaleur pour les murs refractaires	[W/m ² K]
- coefficient de transfert de chaleur par convection	[W/m ² K]
- composition des gaz (en volume)	[%]
- temperature de l'environnement	[K]
- temperature du melange carburant/ oxydant a l'entree du bruleur	[K]
- temperature de la charge	[K]
PARAMETRES DE LA SIMULATION	
critere de convergence	[W]
temperature initiale des refractaires	[K]
temperature initiale des gaz	[K]

TABLEAU 5.1 : ENTREES AU MODELE DES PLANS IMAGINAIRES COMME SYSTEME INDEPENDANT

ENTREES AU MODELE	VALEUR NUMERIQUES
CHAMPS IMPOSES	
combustion	voir figure 5.1
vitesse (debit)	voir figure 5.2
PARAMETRES RADIATIFS	
facteur d'absorption	0.175
aires d'échange direct	M.C.
emissivite des refractaires	0.7
emissivite de la charge	0.6
nature du gaz	gris
PARAMETRES PHYSIQUES	
dimension de la fournaise	10.75x3.75x1.2
maillage (x , y , z)	6x3x4
coefficient global de transfert de chaleur	
cote des portes de chargement	1.30
cote oppose aux portes	0.86
la voute	1.37
cote du bruleur et oppose	0.75
coefficient de transfert de chaleur	
par convection	
cote du bruleur et oppose	50.0
les autres	25.0
composition des gaz (en volume)	8.9 CO ₂ 17.7 H ₂ O 1.3 N ₂ 0.721 N ₂
temperature de l'environnement	298.0
temperature a l'entree du bruleur	333.0
temperature de la charge	1033.0
PARAMETRES DE LA SIMULATION	
critere de convergence	0.5
temperature initiale des refractaires	1220.0
temperature initiale des gaz	1220.0

TABLEAU 5.2 : PARAMETRES D'ENTREES POUR LE CAS DE BASE

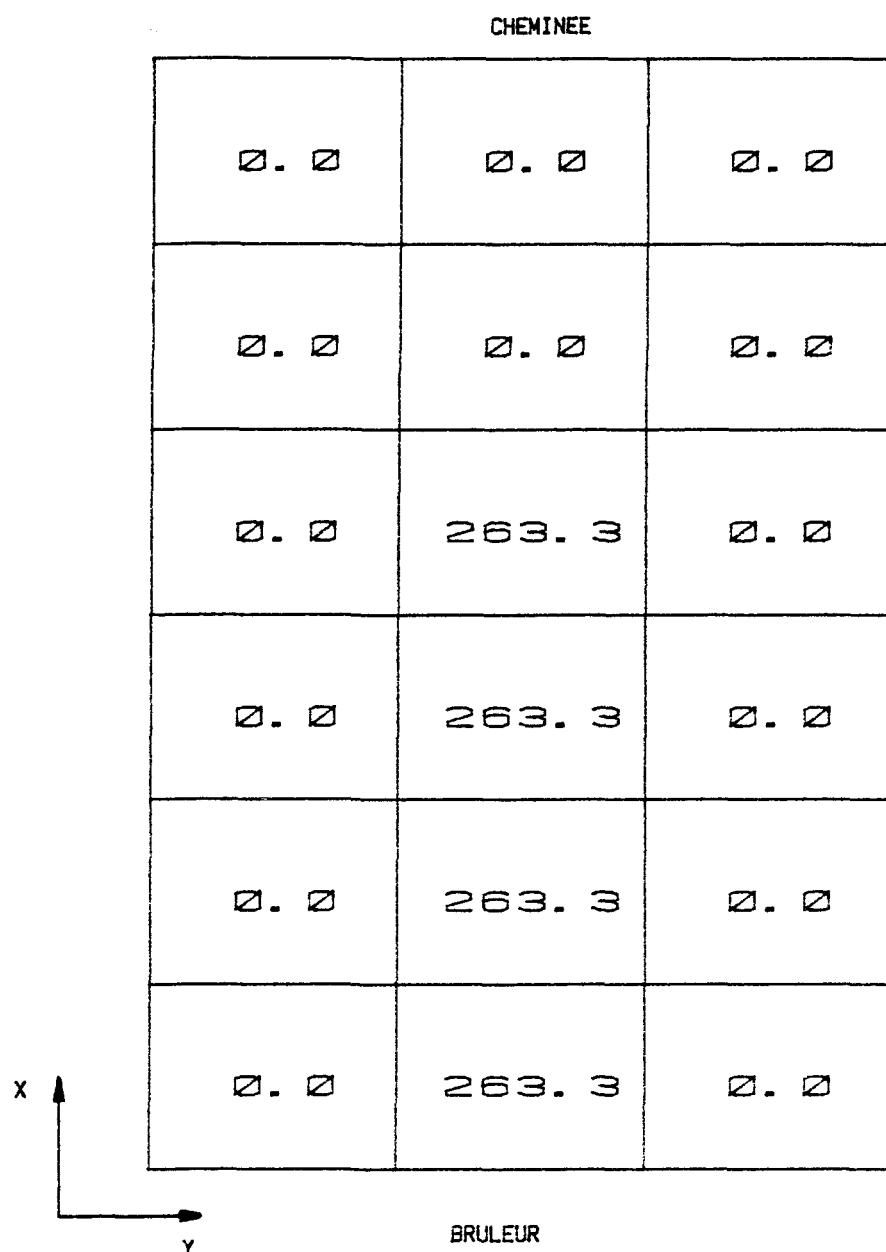


FIGURE 5.1 : DISTRIBUTION DE L'ENERGIE LIBEREE PAR LA COMBUSTION
POUR UNE TRANCHE DE LA FOURNAISE (EN kW)
(CAS DE BASE)

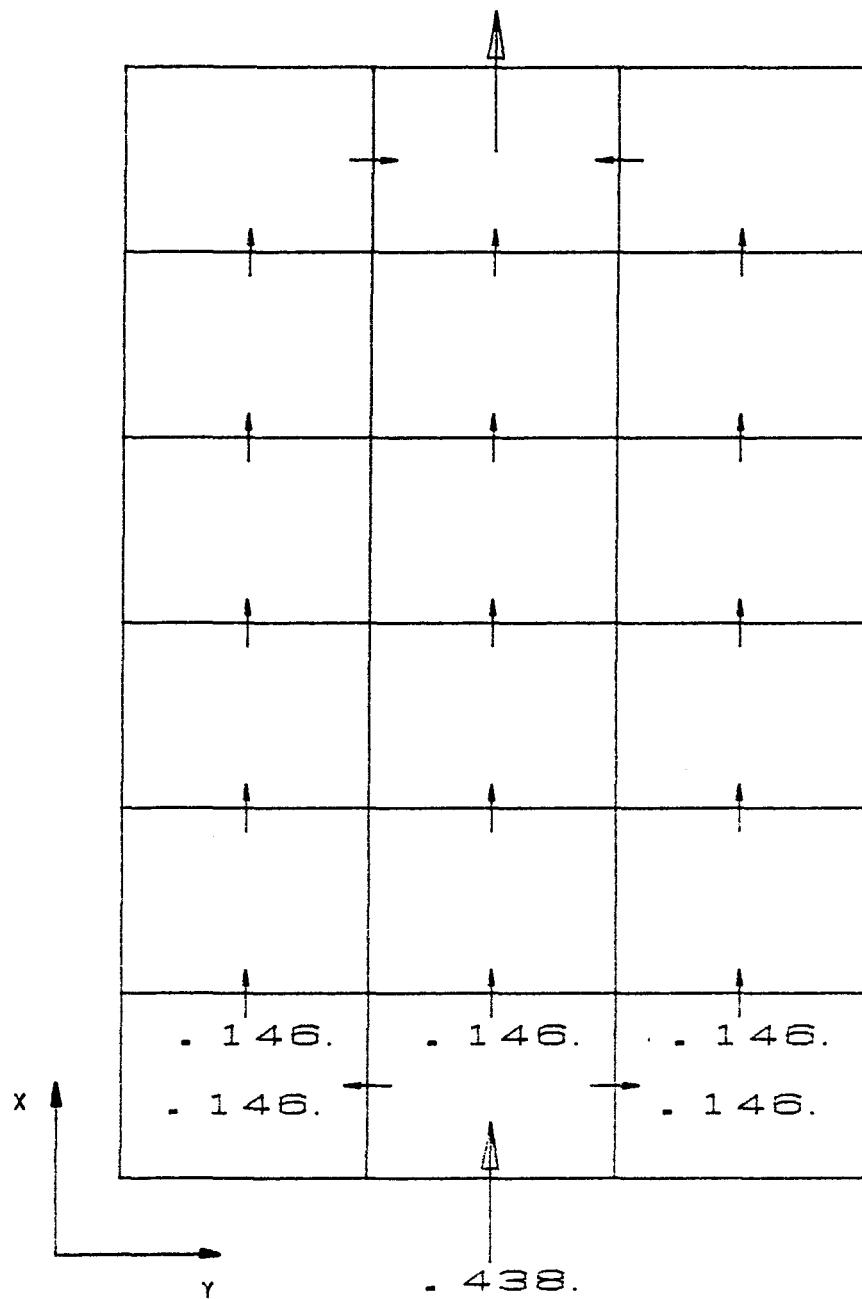


FIGURE 5.2 : DISTRIBUTION DES DEBITS POUR UNE TRANCHE DE LA FOURNAISE (kg/s)
(CAS DE BASE)

l'axe z. Pour ces deux figures les distributions sont uniformes selon l'axe z.

5.1.1 Simulations sur des fours allongés^{*}

Une fournaise allongée est caractérisée par une dimension (habituellement l'axe du brûleur) plus importante que les deux autres. Pour ce genre de fournaise le transfert de chaleur radiatif dans la direction de cet axe est moins important que dans les autres directions. En principe, les modèles simplifiés devraient bien s'appliquer à ce genre de four. Nous avons donc conçu une série de cas qui permettent de tester la présente méthode sur un four allongé. Pour toutes les simulations de cette section nous avons utilisé un gaz gris ayant un facteur d'absorption relativement faible de $0.175 \text{ m}^{-1} \text{ atm}^{-1}$. Ce gaz est plutôt transparent au rayonnement, ce qui permet de mieux vérifier la présente méthode. En effet, l'hypothèse de base de la méthode des plans imaginaires, isole partiellement les volumes de gaz les uns des autres, ce qui la rend en principe plus valide si le gaz est opaque. L'utilisation d'un gaz clair permet de vérifier la robustesse de la méthode des plans imaginaires.

Les onze cas présentés dans cette section simulent toujours la même fournaise, seuls le maillage, le profil de l'écoulement et de la combustion varient. Ces simulations permettent d'analyser le comportement de la présente méthode vis-à-vis ces paramètres.

* Il s'agit du four 41 de l'usine d'Arvida de la compagnie ALCAN.

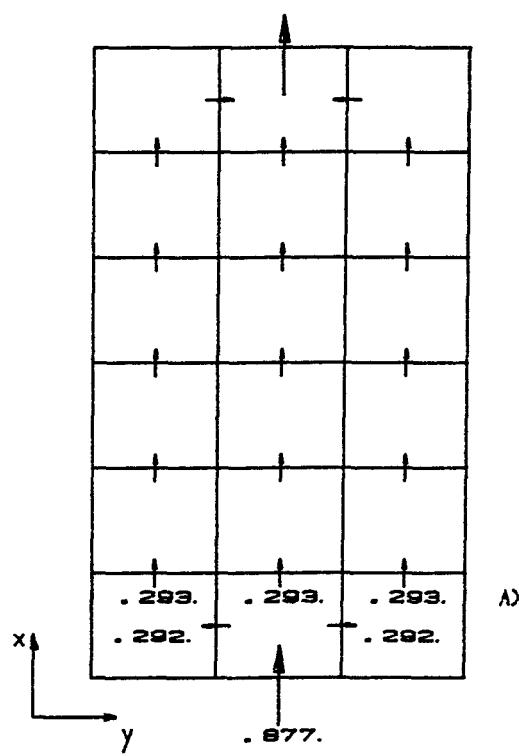
Le tableau 5.3 présente les différences entre les cas simulés dans ce chapitre et le cas de base. Les paramètres qui ne sont pas mentionnés dans ce tableau sont identiques au cas de base. On note qu'aux figures 5.3 à 5.8, la puissance totale libérée par la combustion et le débit total du brûleur sont les mêmes que pour le cas de base.

Le tableau 5.4 présente les puissances totales transmises au métal liquide ainsi qu'aux réfractaires. Les pourcentages d'erreur minimal et maximal pour la puissance au métal sont respectivement de 0.09 et 2.0. Ces résultats sont intéressants puisque les simulations effectuées représentent plusieurs situations physiques différentes: écoulement centré, écoulement uniforme sur toute la section transversale du four, combustion centrée, combustion uniforme dans tout le four. La précision sur les puissances totales indique la fiabilité et la versatilité de la présente méthode dans le cas d'un four allongé. La figure 5.9 montre la variation du pourcentage d'erreur sur la puissance au métal en fonction du nombre de volumes finis. Cette courbe ne montre pas de tendance bien définie; l'influence du maillage sur les résultats est donc mineure dans ces simulations où un pourcentage d'erreur est déjà faible avec des maillages relativement grossiers.

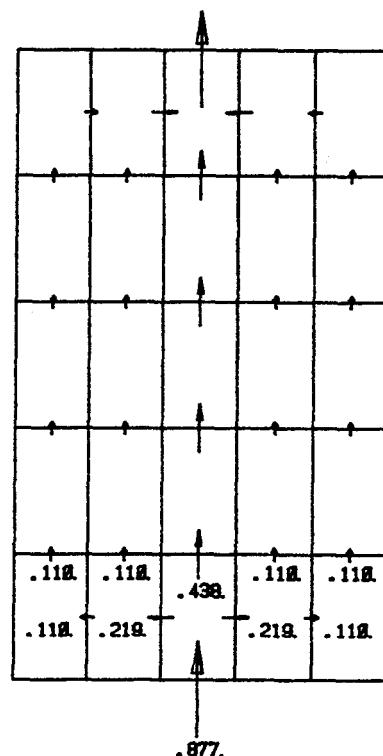
Le fait que le présent modèle soit à trois dimensions permet une analyse encore plus fine des résultats. La figure 5.10 A) présente la distribution des puissances au métal pour le cas de base. Seules les surfaces du centre et de gauche sont représentées. La figure 5.10 B)

CAS	MAILLAGE X, Y, Z	MODELE	CHAMP DE DEBIT	CHAMP DE COMBUSTION	TYPE DE GAZ	PAS DE TEMPS (S)	NOMBRE DE BALAYAGES
2	6 X 3 X 2	INDEPENDANT	FIGURE 5.3A	FIGURE 5.6A	GRIS	-	-
3	5 X 5 X 2	INDEPENDANT	FIGURE 5.3B	FIGURE 5.6B	GRIS	-	-
4	4 X 3 X 2	INDEPENDANT	FIGURE 5.3C	FIGURE 5.6C	GRIS	-	-
5	6 X 3 X 3	INDEPENDANT	FIGURE 5.3D	FIGURE 5.6D	GRIS	-	-
6	6 X 3 X 5	INDEPENDANT	FIGURE 5.4A	FIGURE 5.7A	GRIS	-	-
7	2 X 3 X 2	INDEPENDANT	FIGURE 5.4B	FIGURE 5.7B	GRIS	-	-
8	3 X 3 X 2	INDEPENDANT	FIGURE 5.4C	FIGURE 5.7C	GRIS	-	-
9	5 X 3 X 2	INDEPENDANT	FIGURE 5.4D	FIGURE 5.7D	GRIS	-	-
10	5 X 2 X 2	INDEPENDANT	FIGURE 5.5A	FIGURE 5.8A	GRIS	-	-
11	5 X 4 X 2	INDEPENDANT	FIGURE 5.5B	FIGURE 5.8B	GRIS	-	-
12	6 X 3 X 4	INDEPENDANT	DOUBLE	DOUBLE	GRIS	-	-
13	4 X 4 X 4	INDEPENDANT	DOUBLE	DOUBLE	GRIS	-	-
14	6 X 3 X 4	INDEPENDANT	FIGURE 5.2	FIGURE 5.1	REEL	-	-
15	FIGURE 5.21	INDEPENDANT	FIGURE 5.22B	FIGURE 5.22A	GRIS	-	-
16	FIGURE 5.21	INDEPENDANT	FIGURE 5.22B	FIGURE 5.22A	GRIS	-	-
17	6 X 3 X 2	PERMANENT	CALCULE	FIGURE 5.6A	GRIS	-	528
18	6 X 3 X 2	PERMANENT	CALCULE	CALCULE	GRIS	-	528
19	6 X 3 X 4	TRANSITOIRE (RIGoureux)	CALCULE	CALCULE	GRIS	120	250
20	6 X 3 X 4	TRANSITOIRE (RIGoureux)	CALCULE	CALCULE	GRIS	180	250
21	6 X 3 X 4	TRANSITOIRE (RIGoureux)	CALCULE	CALCULE	GRIS	120	120
22	6 X 3 X 4	TRANSITOIRE (RIGoureux)	CALCULE	CALCULE	GRIS	60	250
23	6 X 3 X 4	TRANSITOIRE (SIMPLIFIE)	CALCULE	CALCULE	GRIS	120	120

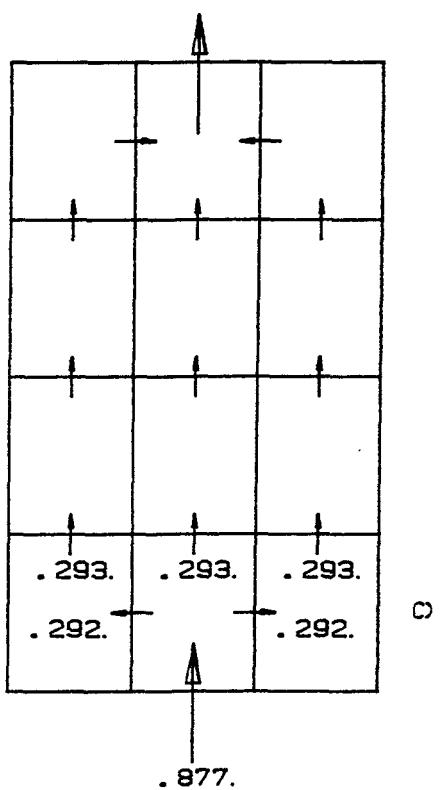
TABLEAU 5.3 : PARAMETRES POUR LES CAS 2 A 23



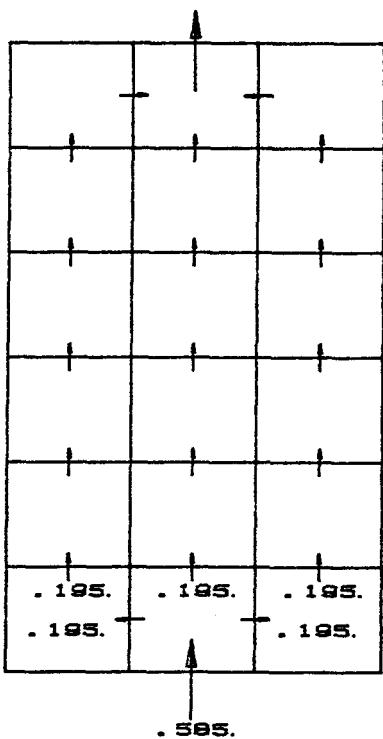
A)



B)

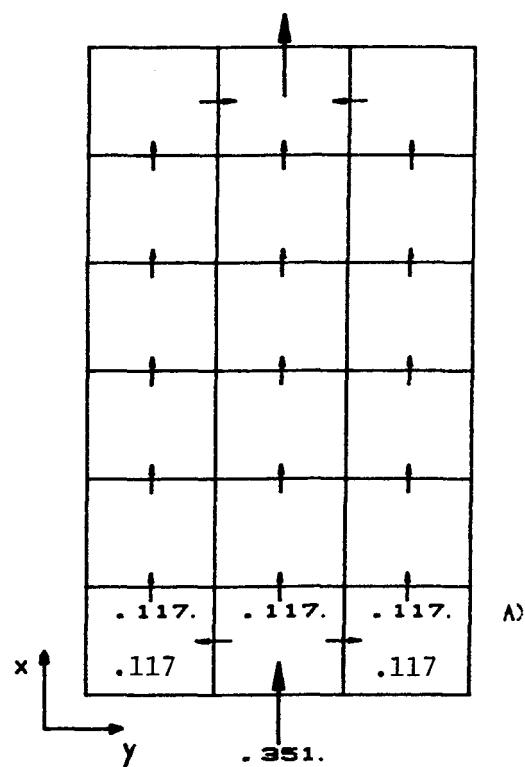


C)

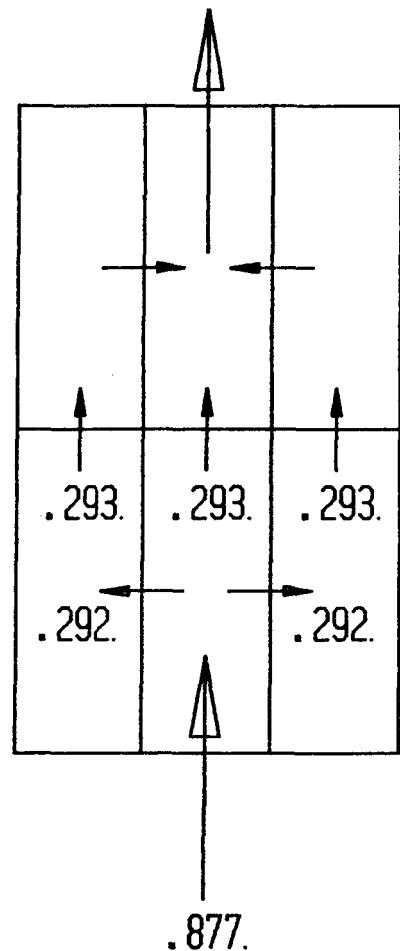


D)

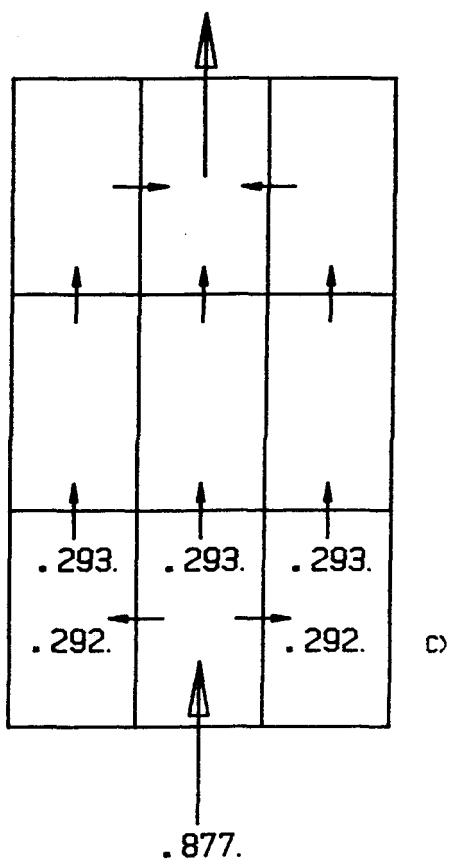
FIGURE 5.3 : CHAMPS DE DEBIT POUR LES CAS 2,3,4 ET 5 (kg/s)



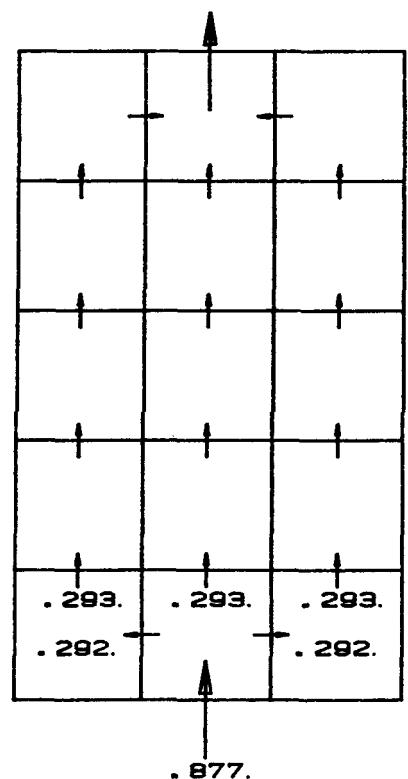
A)



B)



C)



D)

FIGURE 5.4 : CHAMPS DE DEBIT POUR LES CAS 6, 7, 8 ET 9 (kg/s)

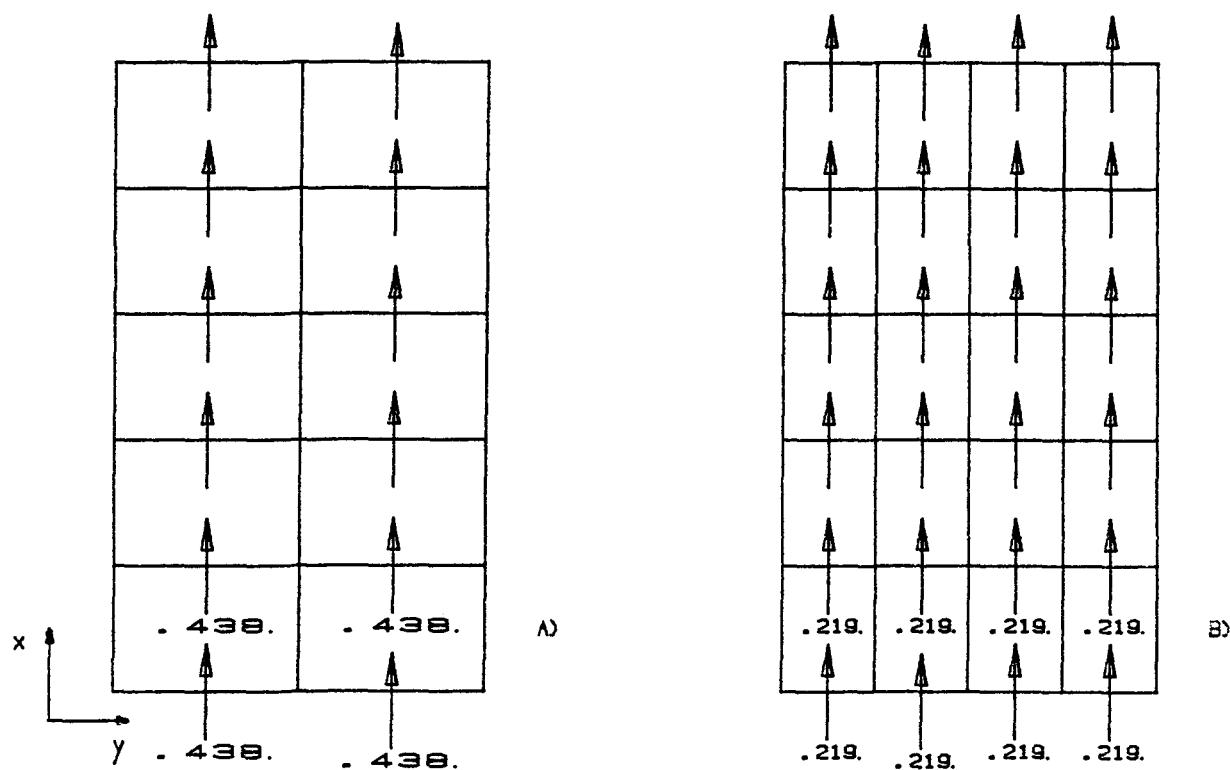


FIGURE 5.5 : CHAMPS DE DEBIT POUR LES CAS 10 ET 11 (kg/s)

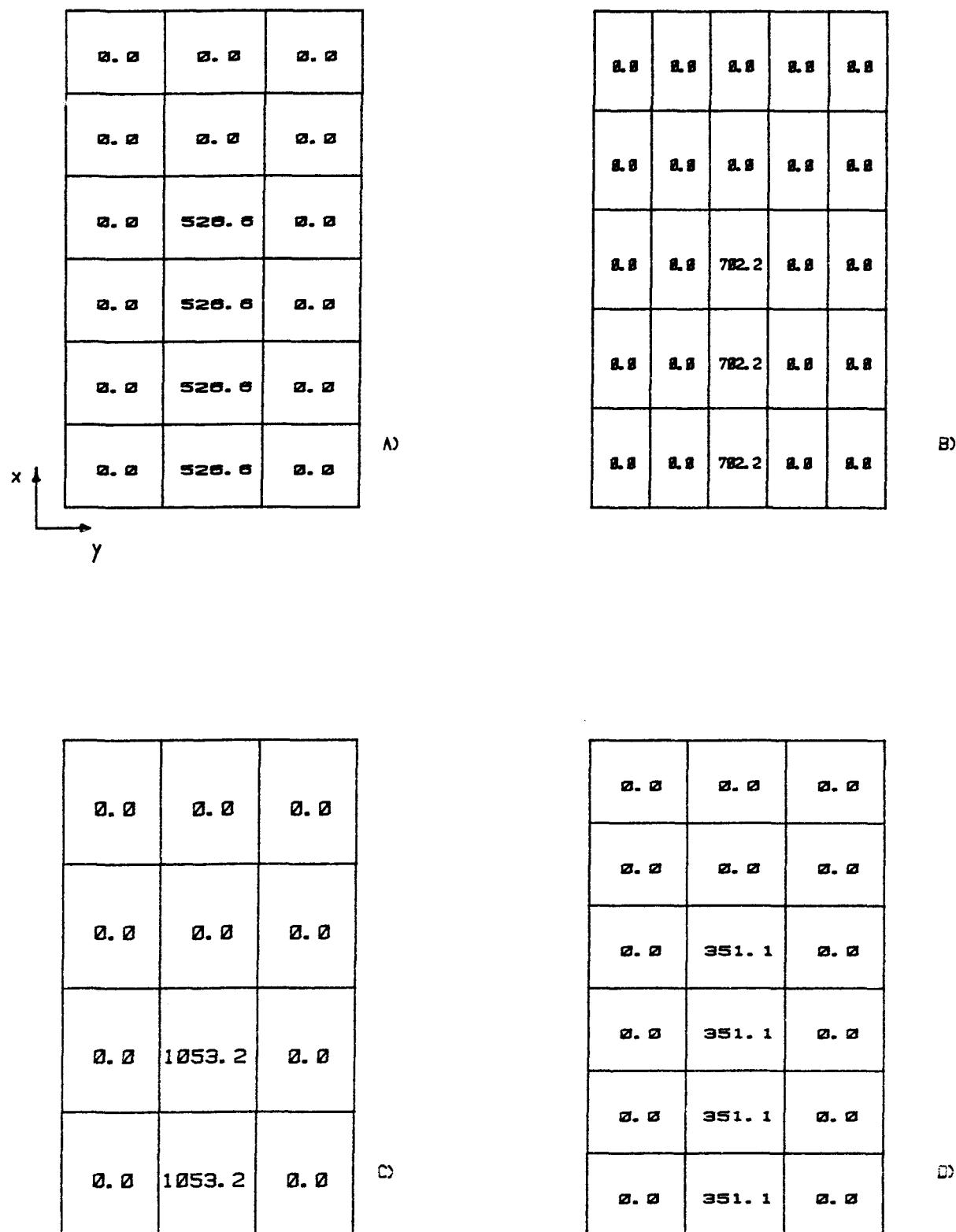


FIGURE 5.6 : CHAMPS DE COMBUSTION POUR LES CAS 2, 3, 4 ET 5 (kW)

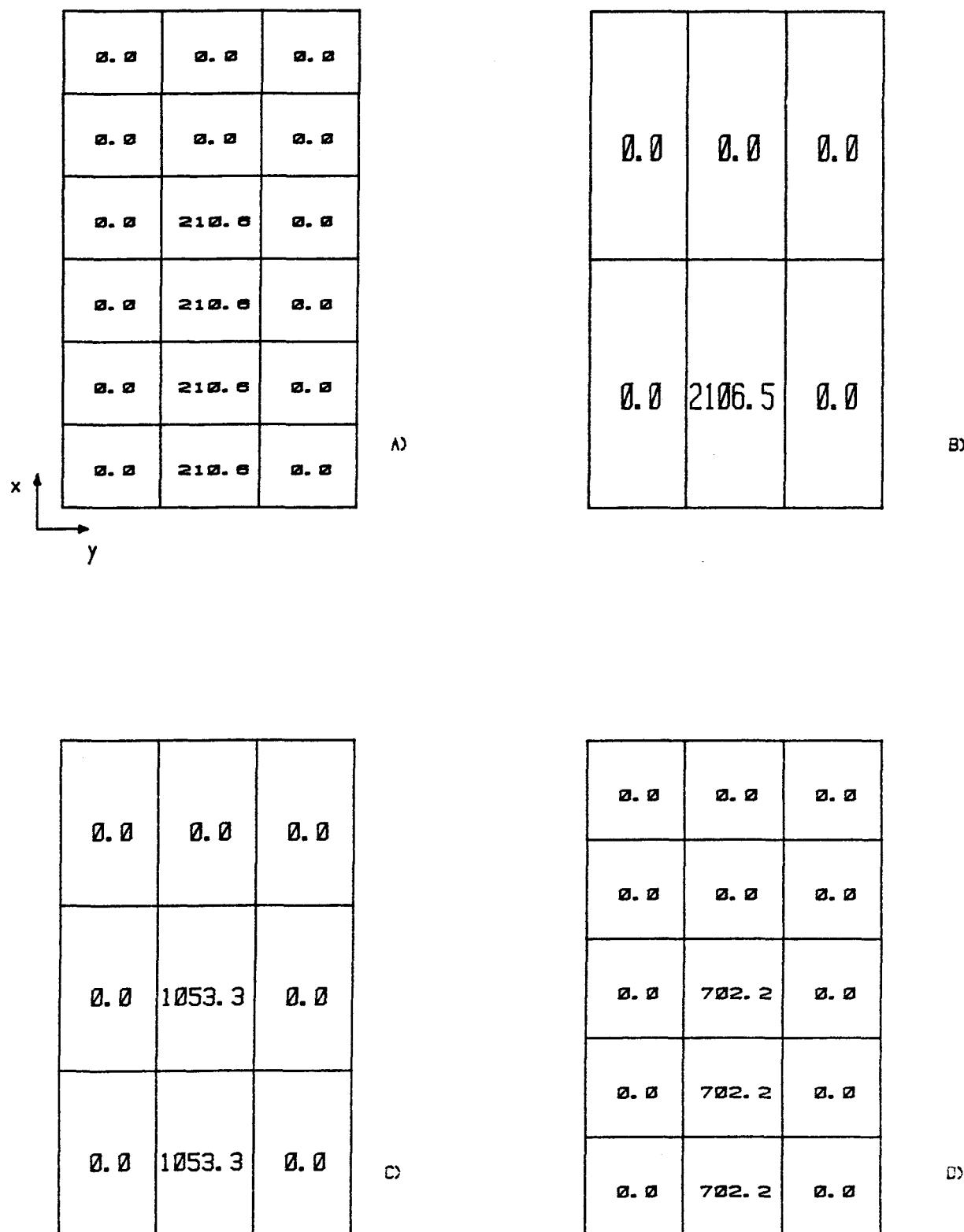


FIGURE 5.7 : CHAMPS DE COMBUSTION POUR LES CAS 6,7,8 ET 9 (kW)

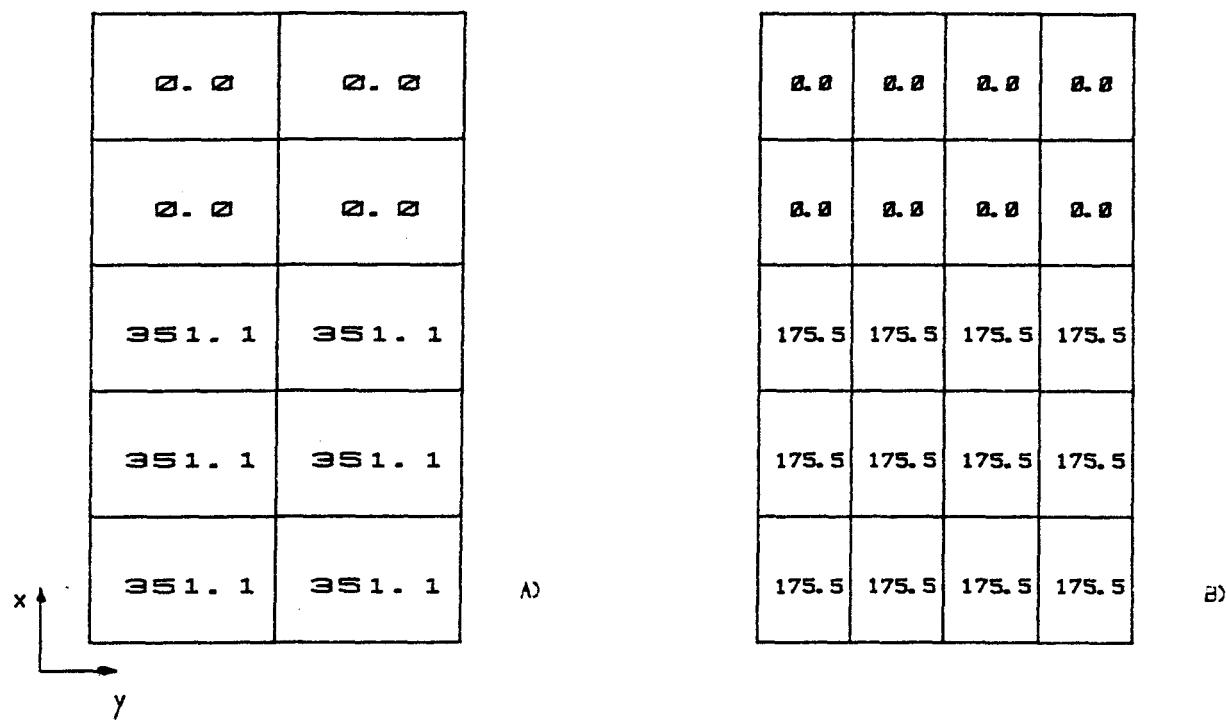


FIGURE 5.8 : CHAMPS DE COMBUSTION POUR LES CAS 10 ET 11 (kW)

CAS	METAL (kW)	REFRACTAIRES (kW)
1	2062.1 (2087.9)	82.4 (80.5)
2	2067.4 (2090.7)	82.2 (80.6)
3	1798.3 (1833.8)	81.3 (79.5)
4	2159.6 (2147.0)	83.9 (82.0)
5	2073.3 (2082.2)	82.3 (81.0)
6	2001.8 (1992.9)	82.1 (80.5)
7	2128.0 (2126.0)	84.0 (82.5)
8	1984.6 (1986.3)	82.6 (81.7)
9	2112.6 (2133.6)	82.9 (81.7)
10	2117.0 (2122.7)	83.8 (82.9)
11	2103.0 (2111.1)	84.4 (82.6)

TABLEAU 5.4 : PUISSANCES TOTALES AU METAL ET AUX REFRACTAIRES
OBTENUES PAR LES METHODES DES PLANS IMAGINAIRES
ET DE ZONES. (ZONE ENTRE PARENTHESES)

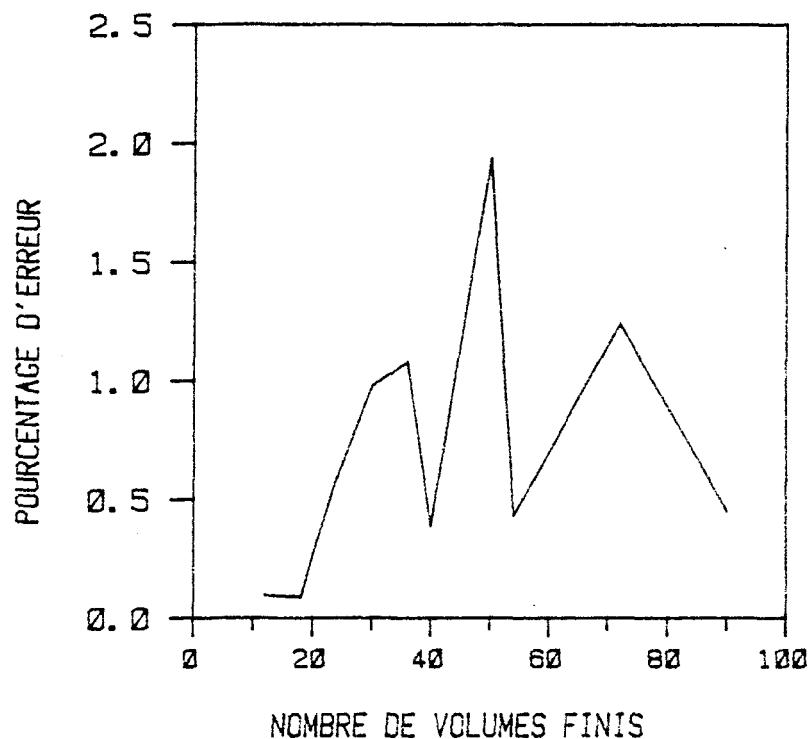


FIGURE 5.9 : POURCENTAGE D'ERREUR SUR LA PUISSANCE TOTALE AU METAL
EN FONCTION DU NOMBRE DE VOLUMES FINIS

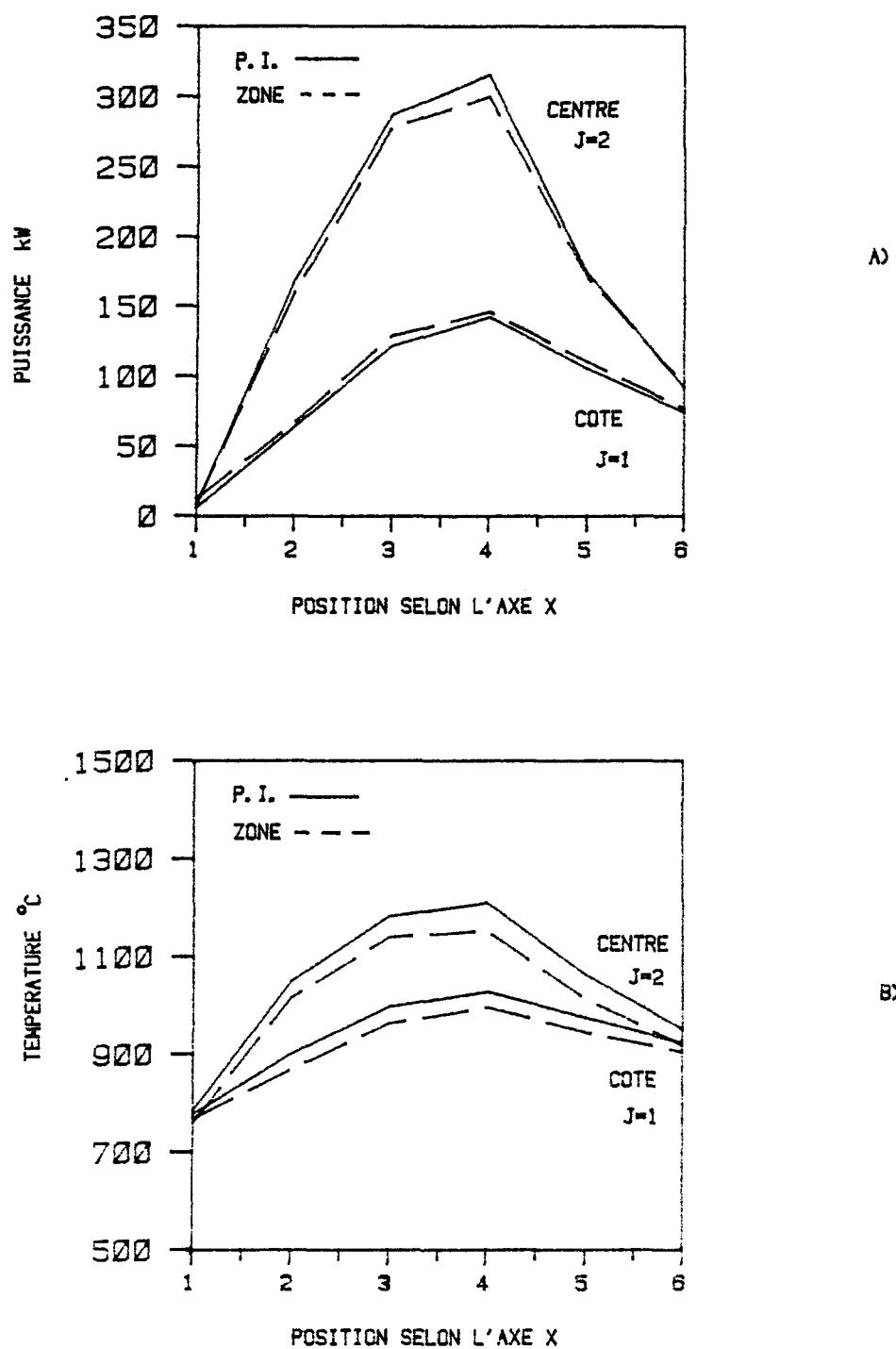


FIGURE 5.10 : DISTRIBUTION A) DES PUSSANCES AU METAL
B) DES TEMPERATURES DE LA VOUTE
POUR LE CAS DE BASE

pour sa part présente les températures de la voûte au centre et sur le côté gauche pour le même cas*. Les résultats des deux méthodes montrent la même tendance avec un maximum aux deux tiers de la chambre. La température de la voûte calculée par les plans imaginaires est légèrement plus élevée, l'erreur maximale étant de 5%. Toujours pour le même cas, la figure 5.11 présente la température moyenne (selon la hauteur) des gaz au centre du four. On note une superposition presque parfaite des résultats obtenus avec les deux méthodes. Par ailleurs, le tableau 5.4 montre qu'en général les puissances totales au métal sont plus faibles lorsque calculées par la présente méthode. Un bilan d'énergie sur le four donne les résultats suivants: pour la méthode de zones, il y a 25.8 kW de plus au métal, 1.9 kW de moins aux réfractaires et le contenu énergétique résiduel des gaz est inférieur de 23.9 kW. Il y a donc un déplacement de l'énergie vers les réfractaires et les gaz pour la méthode des plans imaginaires.

La figure 5.12 montre l'influence du nombre de divisions sur les résultats. Cette figure compare le cas 6 simulé avec la méthode de zones aux cas 1, 2, 5, 6 simulés avec la méthode des plans imaginaires. Il s'agit toujours des températures au centre de la voûte. Les simulations 1, 2, 5, 6 ont des maillages identiques sauf selon l'axe z où il y

* On note qu'aux figures 5.10 et suivantes nous indiquons la position à laquelle les figures se rapportent par les indices j et k qui indiquent respectivement la position d'une surface ou d'un volume de gaz par rapport à l'axe des x et y . Nous rappelons également que les maillages utilisés sont indiqués au tableau 5.2 pour les cas de base et 5.3 pour les autres cas.

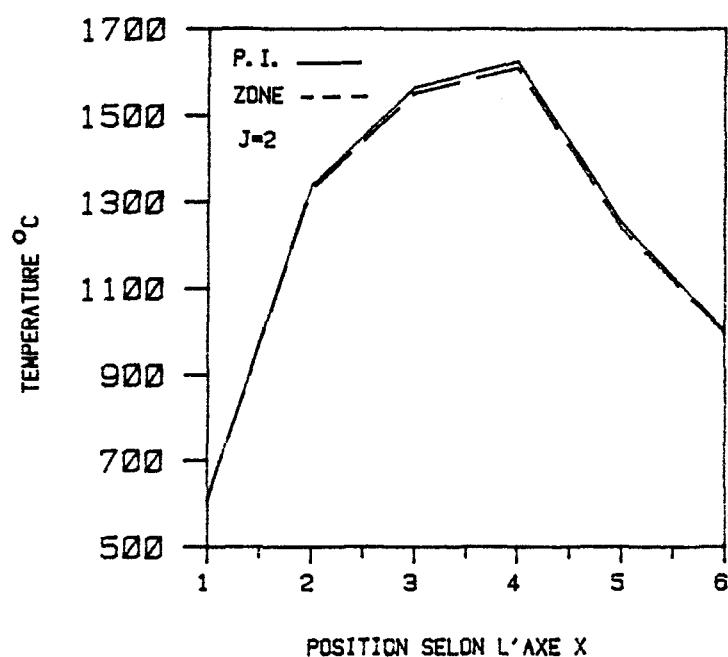


FIGURE 5.11 : DISTRIBUTION DES TEMPERATURES DE GAZ
POUR LE CAS DE BASE

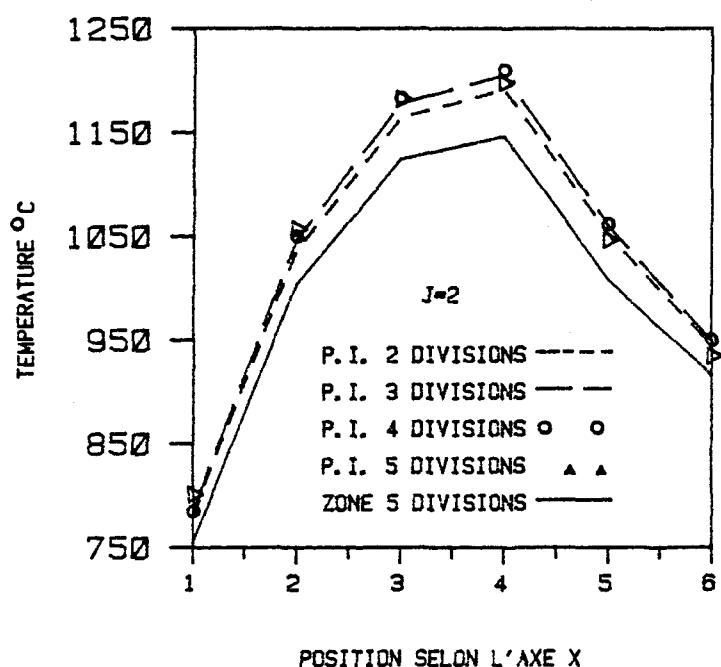


FIGURE 5.12 : TEMPERATURE DE LA VOUTE EN FONCTION DU NOMBRE DE DIVISIONS SELON L'AXE Z

a respectivement 4, 2, 3 et 5 divisions. Cette figure montre que le nombre de volumes finis a relativement peu d'influence sur la nature des résultats pour les cas considérés. En principe, une augmentation de la finesse du maillage devrait rapprocher les résultats de ceux de la méthode de zones; il semble toutefois que la multiplication des approximations, inhérentes à la méthode des plans imaginaires, retarde le rapprochement. D'autre part, nous avons vu aux chapitres III et IV que les flux radiatifs volumiques sont transférés au logiciel PHOENICS comme termes sources; il est donc important de vérifier leur précision. La figure 5.13 présente les résultats de ces flux calculés pour le cas 6 et moyennés sur la hauteur de la fournaise en son centre. On voit que les courbes se confondent presque.

Les résultats présentés jusqu'ici permettent de formuler certains commentaires face à l'utilisation de la méthode des plans imaginaires sur un four allongé. La précision de la présente méthode est assez bonne pour une utilisation industrielle et de plus le couplage avec un autre logiciel tel que PHOENICS semble prometteur. Le raffinement du maillage permet d'obtenir plus d'informations sur un four, mais n'augmente pas nécessairement la précision des résultats. Pour les maillages utilisés en pratique, c'est-à-dire entre 70 et 120 volumes finis (ce que permet les ordinateurs de moyenne puissance), les résultats se situent à l'intérieur de 5% de ceux de la méthode de zones.

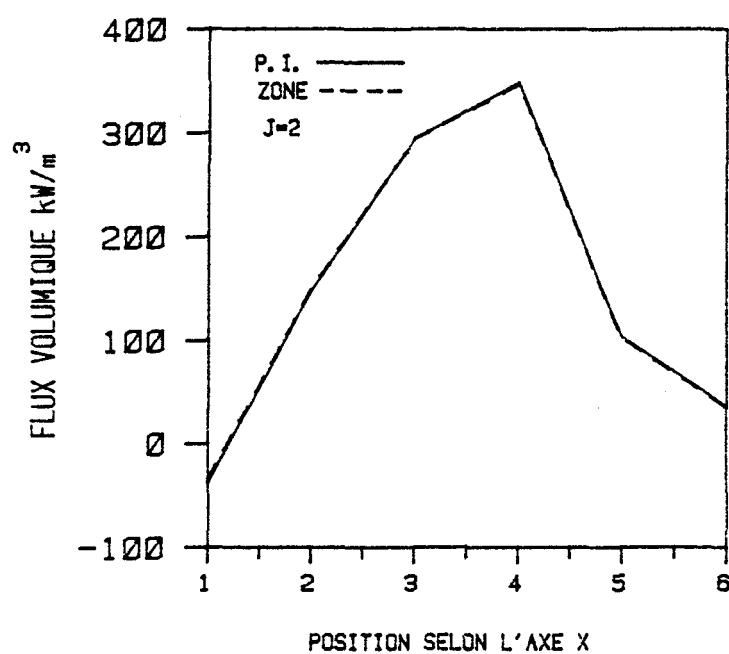


FIGURE 5.13 : DISTRIBUTION DES FLUX VOLUMIQUES RADIATIFS
POUR LE CAS 6

5.1.2 Fours non allongés

Nous présentons et analysons dans cette section les résultats relatifs aux fours non allongés. Dans ces fours il n'y a pas de direction privilégiée, on ne peut négliger l'interaction des flux entre eux. Les flux, dans chaque direction, sont couplés plus fortement que dans le cas d'une fournaise allongée. C'est pourquoi il est essentiel de vérifier le comportement des plans imaginaires pour ce genre de fournaise.

Nous présentons dans cette section deux nouveaux cas, soit les cas 12 et 13. Le cas 12 est similaire au cas de base, à la différence que la section perpendiculaire au brûleur est maintenant de 25 m^2 ($5*5$) et que l'énergie libérée par la combustion et le débit total sont doublés. Les distributions relatives de l'énergie et des débits sont toutefois inchangées. Le cas 13 simule une fournaise cubique de 5 mètres de côté, le débit total et l'énergie de combustion étant identiques à ceux du cas 12. La figure 5.14 A) présente le champ de débit imposé et la figure 5.14 B) le champ de combustion imposé pour le cas 13. Ces champs s'appliquent pour les tranches $k=2$ et $k=3$. Le tableau 5.5 présente les puissances totales et les températures moyennes calculées pour ces deux cas. Les figures 5.15, 5.16 et 5.17 présentent les distributions de ces variables. Pour les puissances et les températures des réfractaires, les résultats sont présentés pour les surfaces $j=2$, sauf pour la figure 5.17 C) où il s'agit d'une vue isométrique. Pour les tempéra-

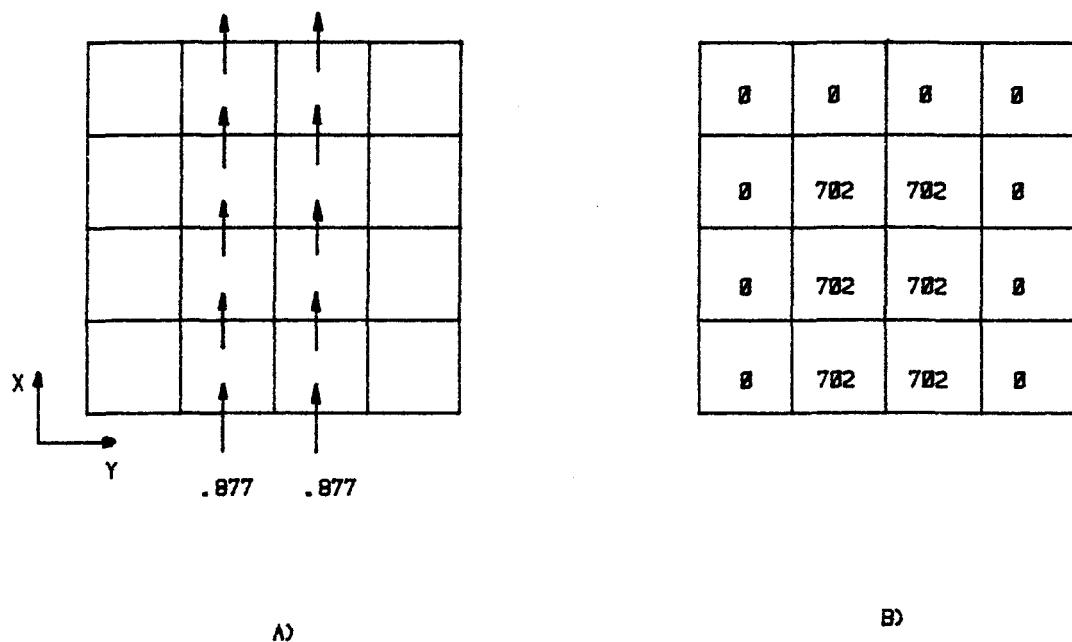


FIGURE 5.14 : A) CHAMP DES DEBITS POUR LE CAS 13 (kg/s)
B) CHAMP DE COMBUSTION POUR LE CAS 13 (kW)

VARIABLE \ CAS	12			13		
	P. I.	ZONE	% ERREUR	P. I.	ZONE	% ERREUR
PUISSEANCE TOTALE AU METAL (kW)	3649	3798	3.9	2213	2381	7.1
PUISSEANCE TOTALE AUX PAROIS (kW)	238	229	3.9	145	139	4.2
TEMPERATURE MOYENNE DES GAZ (°C)	1090	1055	3.4	1189	1149	3.5
TEMPERATURE MOYENNE DES PAROIS (°C)	1059	1023	3.5	1172	1125	4.2

TABLEAU 5.5 : TEMPERATURE MOYENNE ET PUISSANCE TOTALE POUR LES CAS 12 ET 13

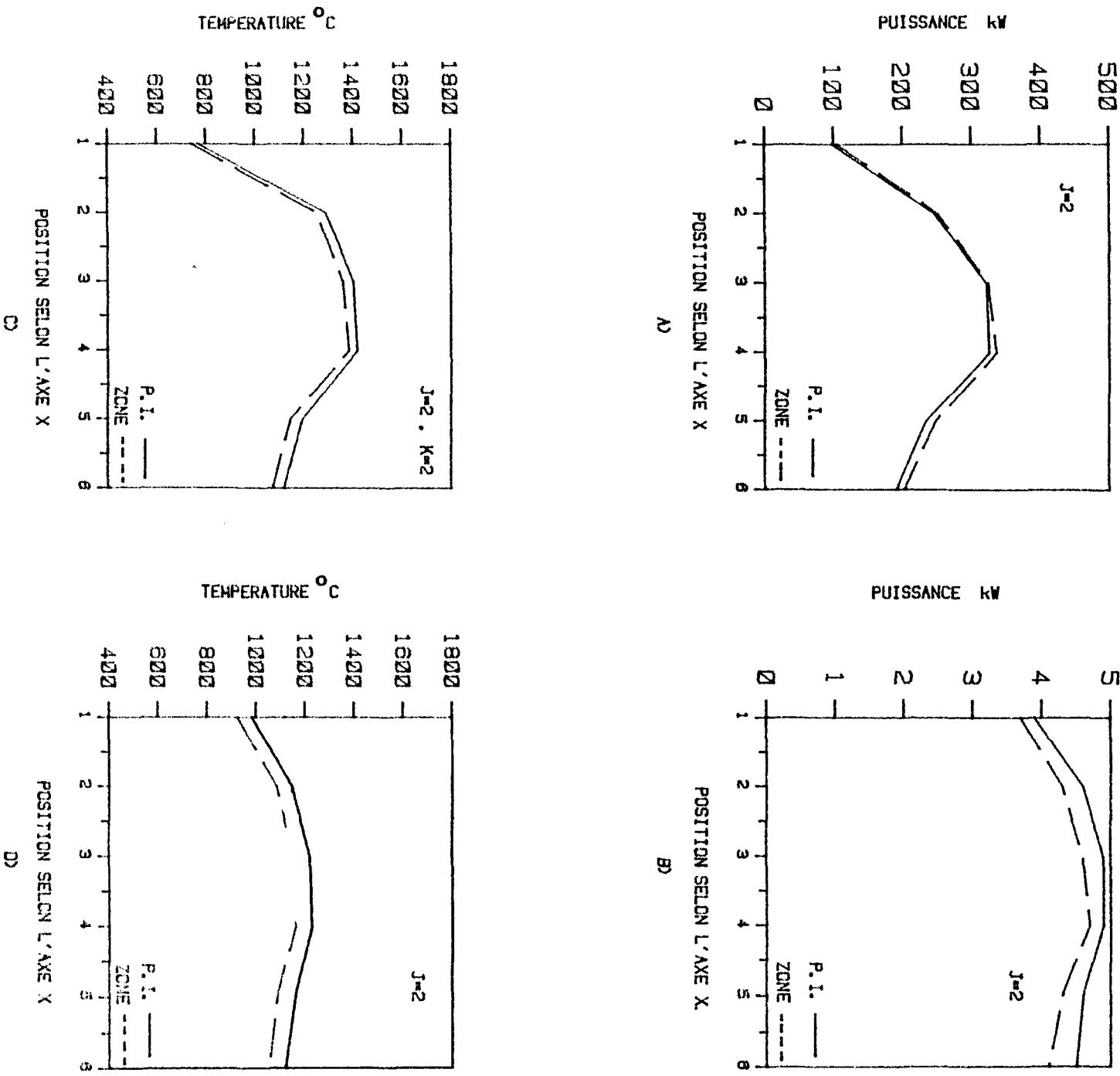


FIGURE 5.15 : PROFIL DE LA PUISSANCE AU MÉTAL

B) PUISSANCE AUX REFRACTAIRES DE LA VOûTE

C) TEMPERATURE DES GAZ

D) TEMPERATURE DES REFRACTAIRES DE LA VOûTE

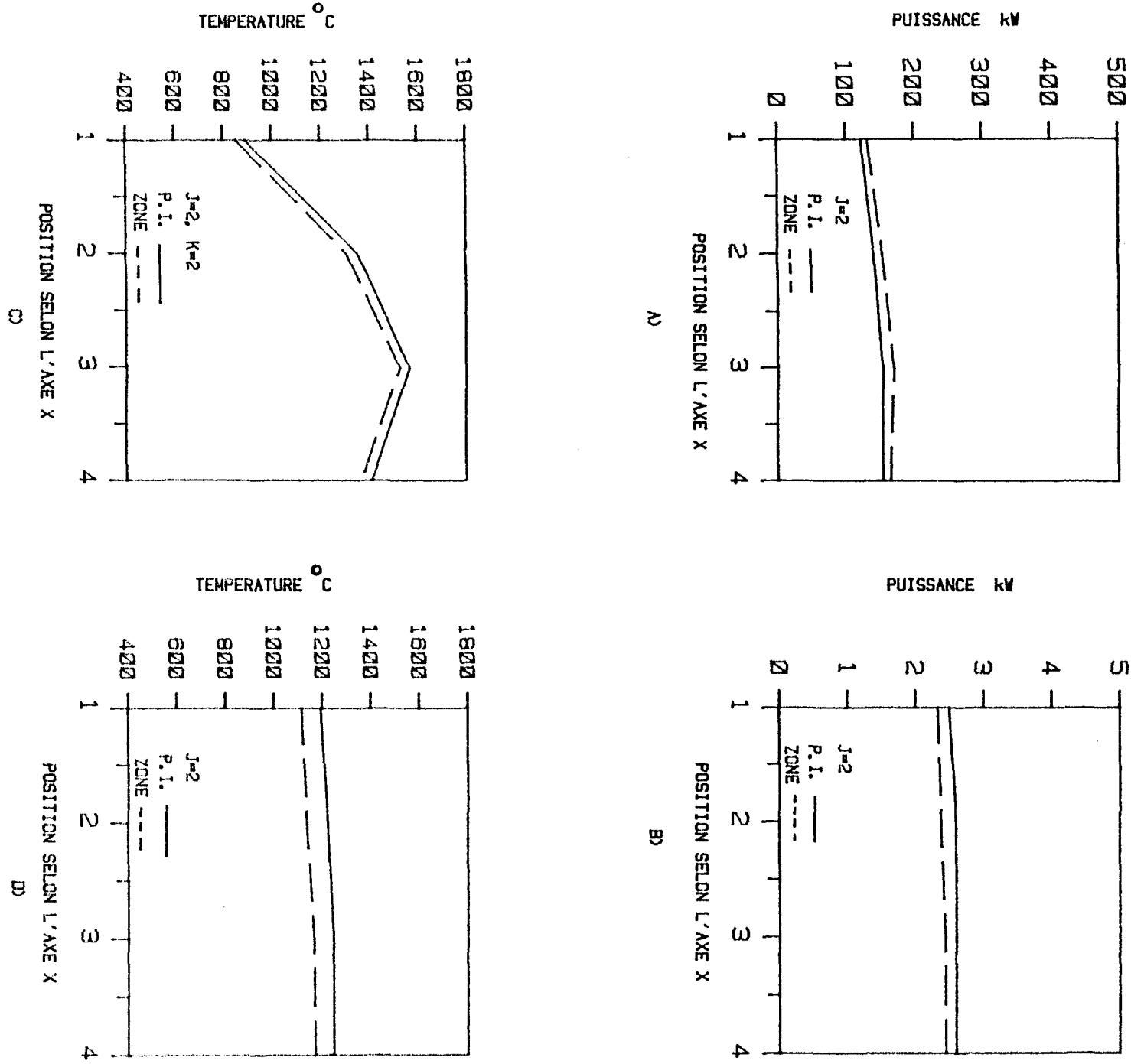
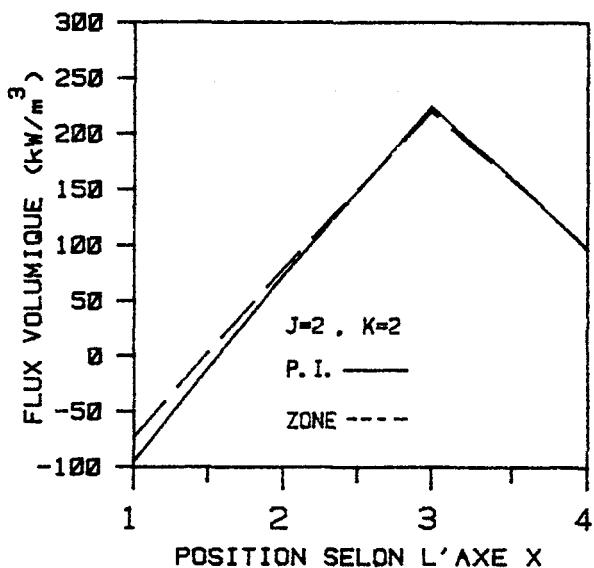
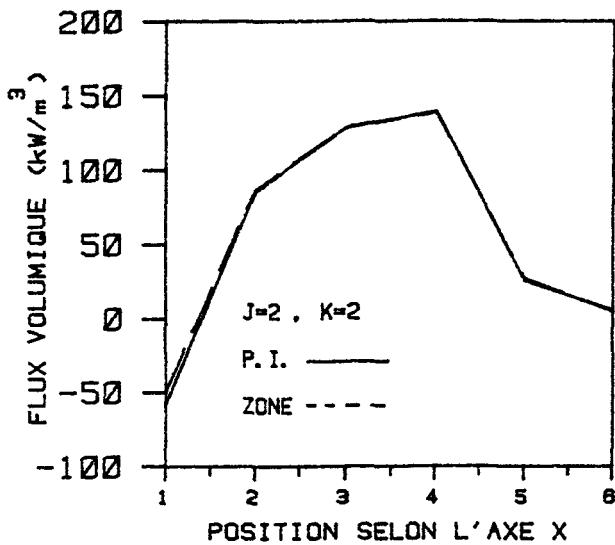


FIGURE 5.16 : PROFIL DE LA PUISSANCE AU METAL

B) PUISSANCE AUX REFRACTAIRES DE LA VOUTE

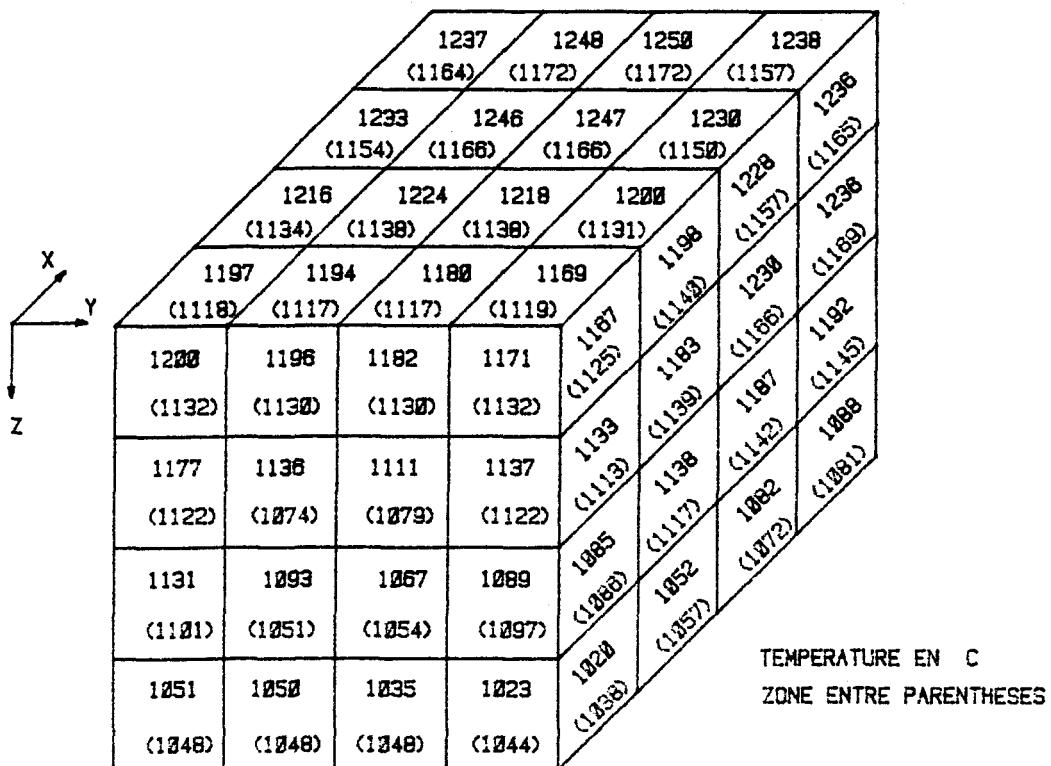
C) TEMPERATURE DES GAZ

D) TEMPERATURE DES REFRACTAIRES DE LA VOUTE



A)

B)



C)

FIGURE 5.17 : FLUX VOLUMIQUES RADIATIFS POUR LE CAS 12 (FIGURE A)
ET POUR LE CAS 13 (FIGURE B) , ET TEMPERATURE DES
PAROIS POUR LE CAS 13 (FIGURE C)

tures de gaz et flux volumiques les résultats s'appliquent pour les zones $j=2$ et $k=2$.

Les pourcentages d'erreur sur les valeurs totales et moyennes présentées au tableau 5.5 sont plus importants que dans le cas d'une fournaise allongée, mais ceux-ci restent acceptables. Tout comme pour les simulations 1 à 11, les flux au métal sont sous-évalués et les températures sont surestimées. Les courbes des figures 5.15 à 5.17 montrent encore une fois que les erreurs sur les puissances et les flux sont plus faibles que celles des températures.

5.1.3 Formulation sous forme de gaz réels

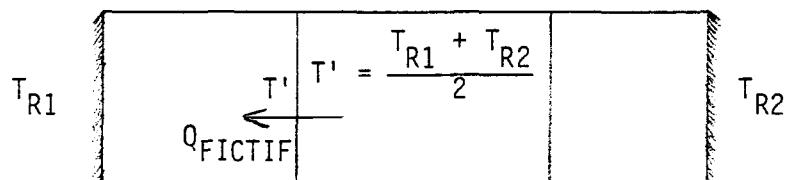
Dans cette section, nous évaluons les performances de la méthode des plans imaginaires lorsqu'on considère les gaz de combustion comme des gaz réels au lieu de gaz gris. Il est bien connu qu'un tel comportement peut être représenté assez fidèlement par une somme pondérée de gaz gris (voir section 2.4). Les facteurs de pondération, déjà introduits aux équations (2.46) et (2.47), sont fonction de la température selon:

$$a_i(T_g) = \sum_{j=1}^4 b_{ij} T_g^{j-1} \quad (5.1)$$

$$a'_i(T_g, T_s) = \sum_{j=1}^4 \left(\sum_{k=1}^4 c_{ijk} T_s^{k-1} \right) T_g^{j-1} \quad (5.2)$$

Smith et al. (1982) donnent les coefficients b_{ij} et c_{ijk} pour le mélange vapeur d'eau et dioxyde de carbone pour les rapports 1 et 2. Pour les cas simulés dans cette section, le rapport des pressions partielles de la vapeur d'eau au dioxyde de carbone est de deux. Les simulations présentées sont identiques au cas de base, sauf que la formulation gaz réels est utilisée.

À la section 2.4, nous avons formulé différentes hypothèses sur la valeur des températures à utiliser pour l'évaluation des coefficients a'_i . Nous reprenons ici certaines de ces hypothèses. Pour la simulation 14.1 la température immatérielle T' est égale à la température du métal liquide. Pour la simulation 14.2 cette température immatérielle est posée comme étant la température moyenne des surfaces réfractaires, et dans la simulation 14.3 cette température est la moyenne des températures des surfaces réfractaires parallèles à la surface d'où provient le rayonnement. Le schéma suivant illustre cette troisième hypothèse.



La figure 5.18 présente la puissance au métal à la position $j=2$ pour le cas 14 simulé avec la méthode de zones et pour les cas 14.1 à 14.3 simulés avec la présente méthode. La figure 5.19 pour sa part

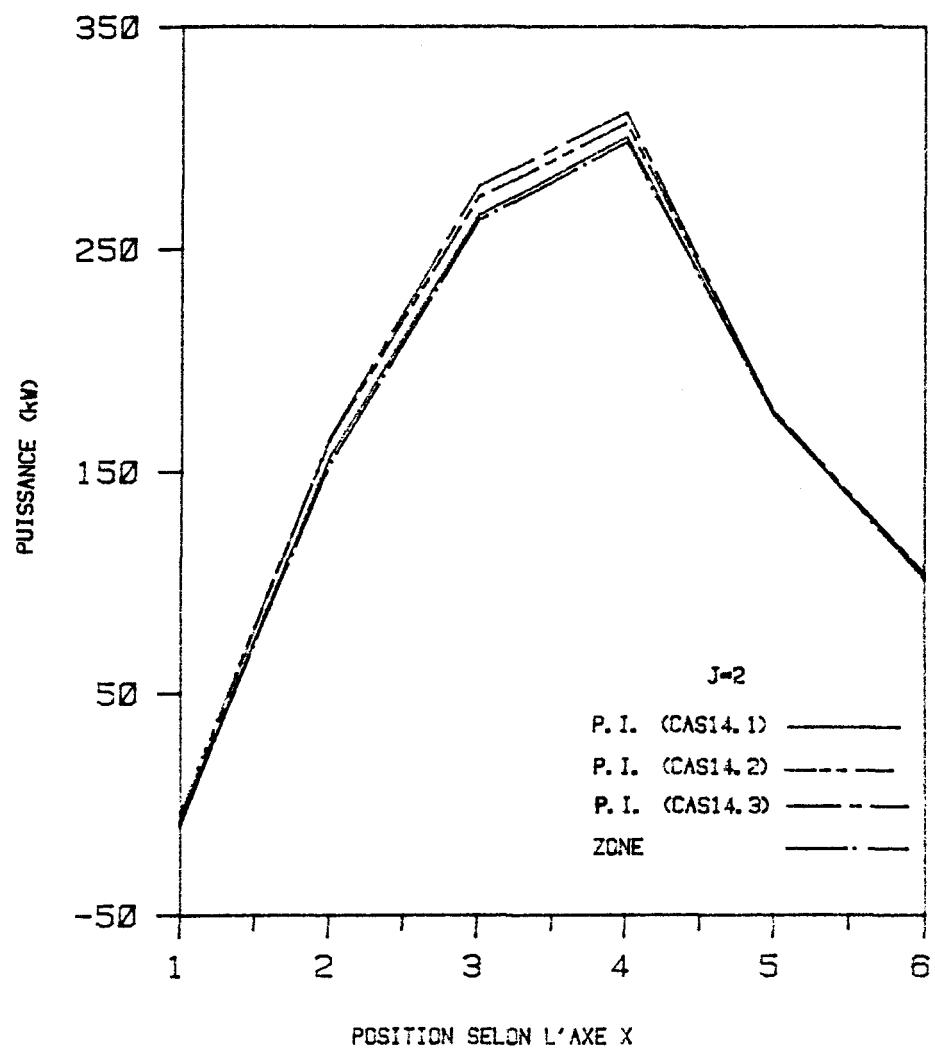


FIGURE 5.18 : COMPARAISON DES PUISSANCES AU METAL OBTENUES PAR LA
METHODE DES PLANS IMAGINAIRES ET DE ZONES POUR UN GAZ REEL

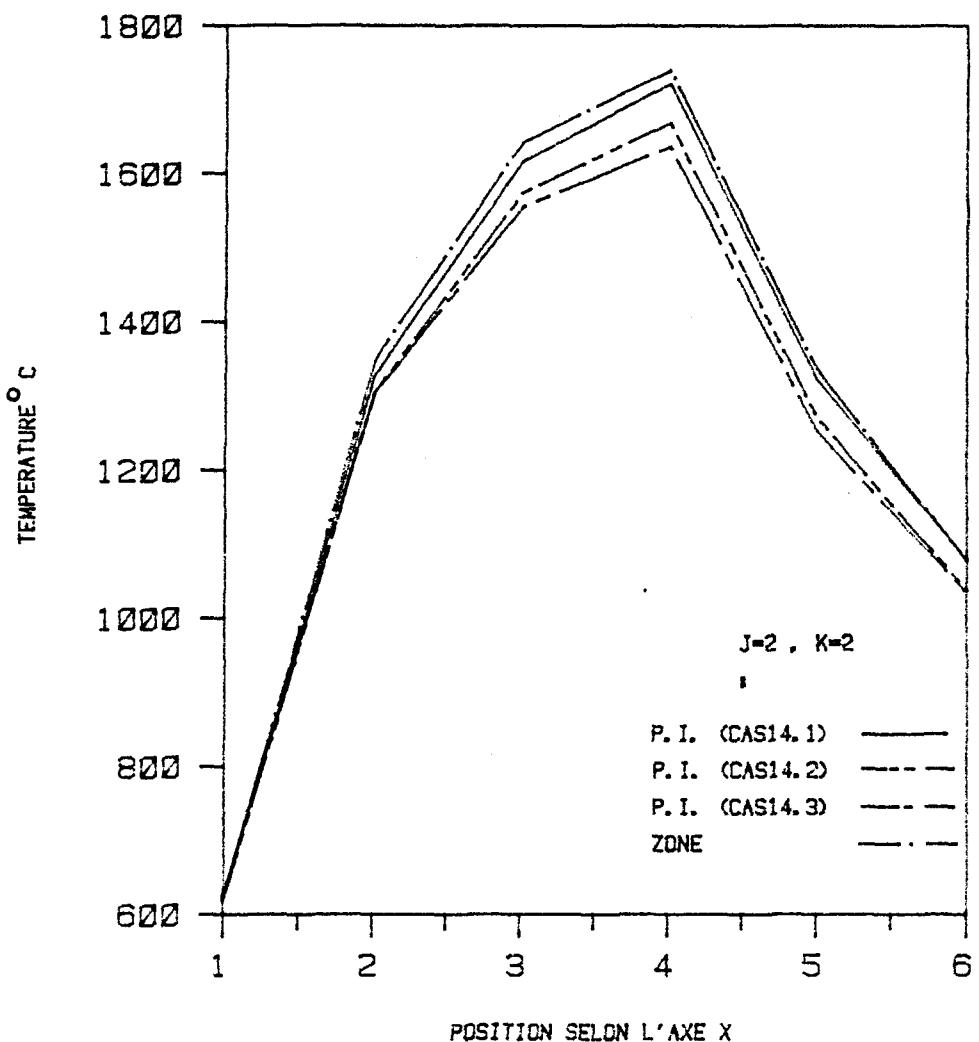


FIGURE 5.19 : COMPARAISON DE LA TEMPERATURE DE GAZ OBTENUE PAR LA METHODE DES PLANS IMAGINAIRES ET DE ZONES POUR UN GAZ REEL

montre la température de gaz pour les volumes compris dans la tranche $j=2$ et $k=2$. Le tableau 5.6 présente les valeurs totales des puissances et les valeurs moyennes des températures.

Le tableau 5.6 et les figures 5.18 et 5.19 indiquent que la première hypothèse, celle du cas 14.1, donne de meilleurs résultats que les deux autres. Il reste toutefois que les variations dans les résultats des cas 14 étaient prévus; ils peuvent être expliqués de la façon suivante.

Les coefficients a'_i sont en quelque sorte une mesure de la qualité du rayonnement provenant d'une surface et absorbé par le gaz dans les bandes du spectre thermique. Plus spécifiquement, ils représentent la fraction de l'énergie de corps noir comprise dans le domaine de longueurs d'ondes où le coefficient d'absorption est k_i . Pour la méthode de zones, les rayons sont toujours émis par des surfaces réelles, tandis que, dans la présente méthode, les rayons peuvent provenir de surfaces imaginaires via un flux de chaleur fictif couplant deux zones entre elles. Pour de tels faisceaux il est difficile de déterminer la température de la surface d'où provient le rayonnement, il reste toutefois que la température immatérielle T' doit tenir compte des températures des surfaces réelles, sinon on aboutit à de piètres résultats. Nous avons notamment posé que:

$$a'_i (T_g, T') = a_i (T_g) \quad (5.3)$$

CAS VARIABLE	14 (ZONE)	14.1 (P. I.)	14.2 (P. I.)	14.3 (P. I.)
PUISSEANCE TOTALE AU METAL (kW)	1960	1961	2037	2042
PUISSEANCE TOTALE AUX REFRACTAIRES (kW)	80	82	83	83
TEMPERATURE MOYENNE DES GAZ °C	1039	1030	1008	1008
TEMPERATURE MOYENNE DES RE- FRACTAIRES °C	888	905	909	908

TABLEAU 5.6 : PUISSANCE TOTALE ET TEMPERATURE MOYENNE POUR LES CAS 14,
14.1, 14.2 ET 14.3

Les résultats obtenus avec cette hypothèse se sont avérés effectivement très pauvres.

Une étude ultérieure sur le choix de la meilleure hypothèse possible devra être effectuée si l'on veut utiliser de façon intensive la formulation des gaz réels.

5.1.4 Maillage non uniforme et distribution des facteurs d'absorption

Un maillage non uniforme peut être utilisé pour deux raisons distinctes:

- 1- améliorer la précision des résultats dans les régions du domaine où l'on soupçonne des gradients importants.
- 2- ajuster le maillage, pour tenir compte des contraintes physiques ou de programmation.

Pour des situations en dynamique des fluides pour lesquelles il est possible d'utiliser de mille à deux milles volumes finis, le maillage non uniforme est très intéressant. Dans le cas des méthodes radiatives, telles que la méthode de zones et la présente méthode, le nombre de volumes finis ne doit pas dépasser cent à cent vingt, ce qui rend la distribution non uniforme des volumes finis moins intéressante. Cependant, il est utile de doter la présente méthode d'une telle capacité

pour la seconde raison citée plus haut. En effet, si l'on couple la partie radiative d'un four avec le bain de métal liquide, le transfert d'informations entre les deux sous-modèles sera plus facile si le maillage d'un sous-modèle peut s'ajuster sur l'autre. En général, pour un tel couplage le maillage du bain de métal est beaucoup plus fin que celui nécessaire à la résolution du phénomène radiatif dans la chambre de combustion.

Nous comparons donc, dans cette section, les résultats de la présente méthode et de la méthode de zones pour un maillage non uniforme (cas 15). La figure 5.20 A) présente une comparaison de la puissance transmise au métal et la figure 5.20 B) montre une comparaison de la température de gaz. Les puissances présentées à la figure 5.20 A) s'appliquent pour les surfaces $j=2$, et les températures de la figure 5.20 B) sont celles situées à $j=2$ et $k=2$. Le maillage utilisé est présenté à la figure 5.21 où les distances sont en mètres. Les figures 5.22A) et B) présentent respectivement le champ de combustion et le profil de l'écoulement pour le cas 15. Ces champs sont uniformes selon l'axe des z .

On remarque que la forme de la courbe 5.20 A) est légèrement différente de celles montrées jusqu'à présent. Ceci est dû au maillage non uniforme et au fait que les résultats sont des puissances et non des flux. Les deux méthodes donnent des résultats identiques.

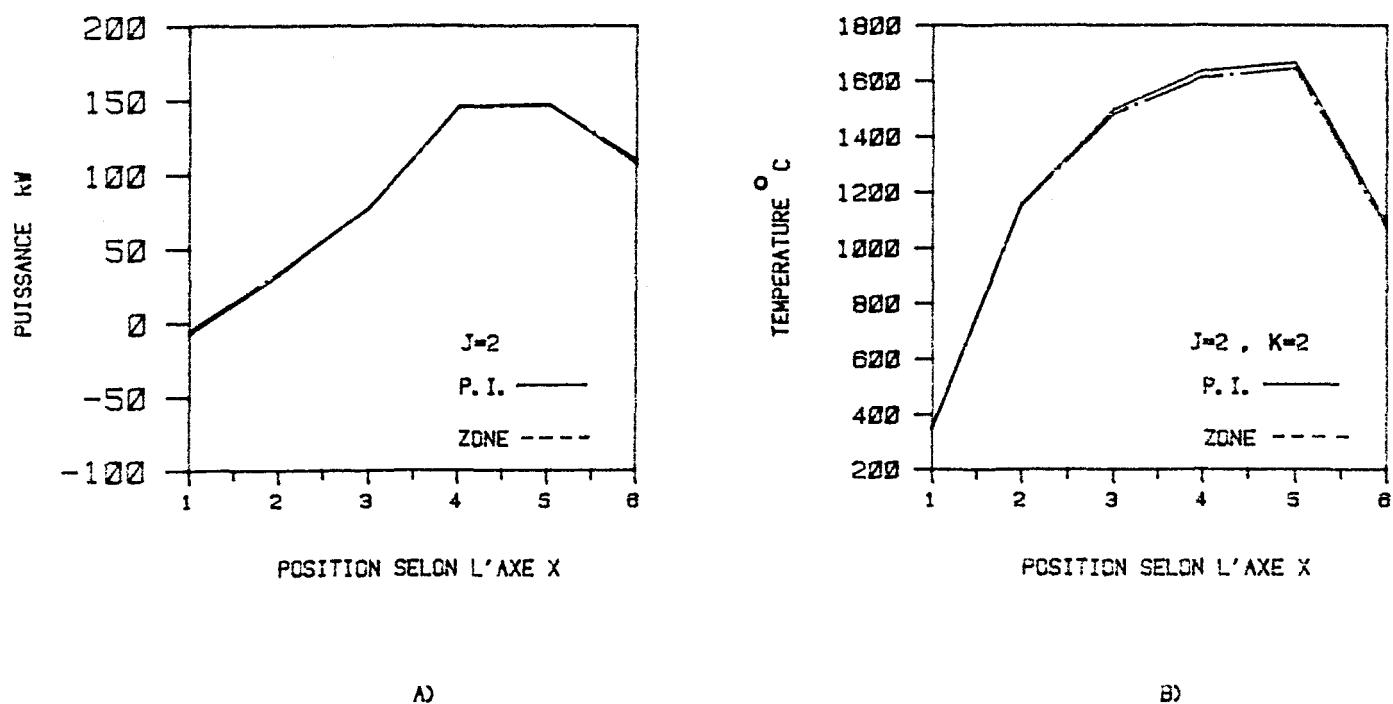


FIGURE 5.20 : COMPARAISON ENTRE PLANS IMAGINAIRES ET ZONE POUR UN MAILLAGE NON UNIFORME
 A) PUISSANCE AU METAL
 B) TEMPERATURE DE GAZ

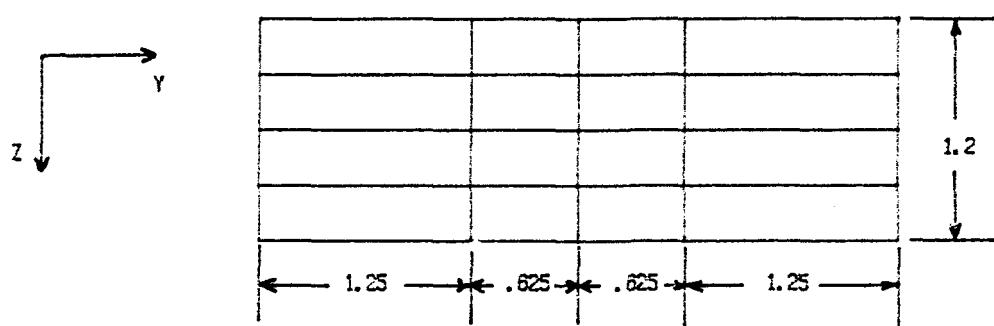
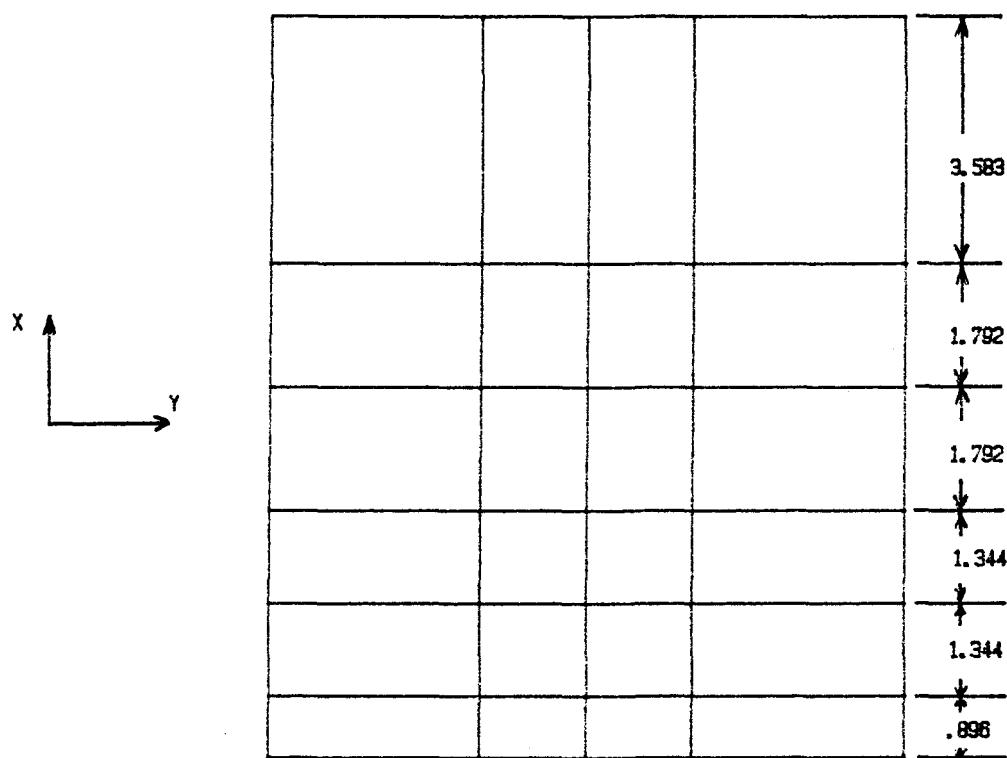


FIGURE 5.21 : MAILLAGE NON UNIFORME UTILISE POUR LES CAS 15 ET 16

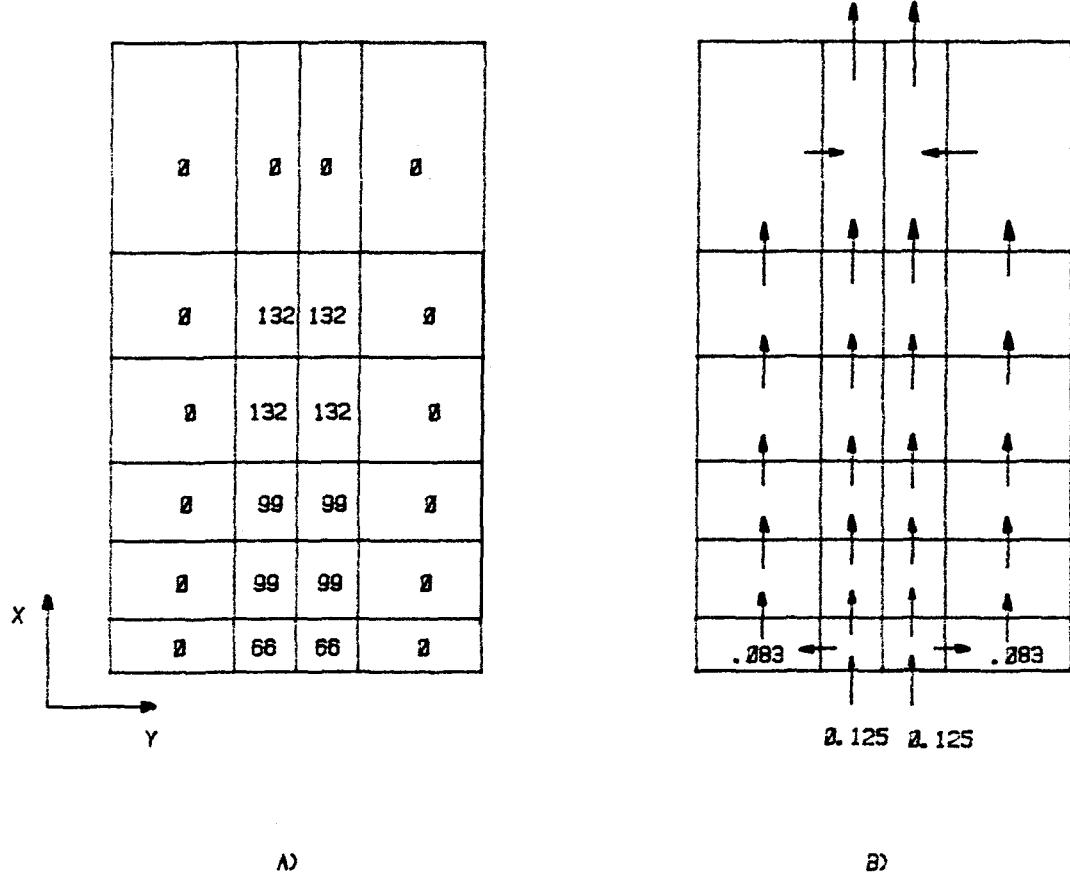


FIGURE 5.22 : A) CHAMP DE COMBUSTION POUR LE MAILLAGE NON UNIFORME (kg)
B) CHAMP DE DEBIT POUR LE MAILLAGE NON UNIFORME (kg/s)

Nous avons inclus dans le logiciel des plans imaginaires la possibilité d'imposer un champ variable de facteurs d'absorption lorsque la formulation sous forme de gaz gris est utilisée. Ce champ permet de modéliser plus adéquatement la flamme du brûleur. La figure 5.23 montre une distribution supposée des facteurs d'absorption pour une flamme se situant au centre et sur toute la hauteur de la fournaise. On doit noter que ce champ peut ne pas correspondre à un champ réel, puisqu'un tel champ est fonction de la concentration des produits de combustion. Nous avons fixé ce champ plus ou moins arbitrairement en tenant compte que la région où se situe la flamme est plus absorbante. Les deux courbes présentées à la figure 5.24 ont été obtenues par la méthode des plans imaginaires. Elles permettent de constater l'effet d'une distribution non uniforme des facteurs d'absorption du gaz (cas 16). La comparaison est faite par rapport au cas 15. La figure 5.24 A) présente la puissance au métal pour les surfaces $j=2$ et la figure 5.24 B) présente les températures des gaz pour les volumes $j=2$ et $k=2$.

Le caractère arbitraire de la distribution supposée exclut toute comparaison rigoureuse avec le cas où les coefficients d'absorption sont uniformes. La juxtaposition des résultats permet toutefois d'apprécier la versatilité du logiciel développé et la sensibilité du modèle à une variation des concentrations. Il y a une diminution importante de la température des gaz, et cette énergie est transférée en partie vers le bain de métal. La puissance totale au métal pour le cas 15 est de 1915 kW, contre 2020 kW pour le cas 16.

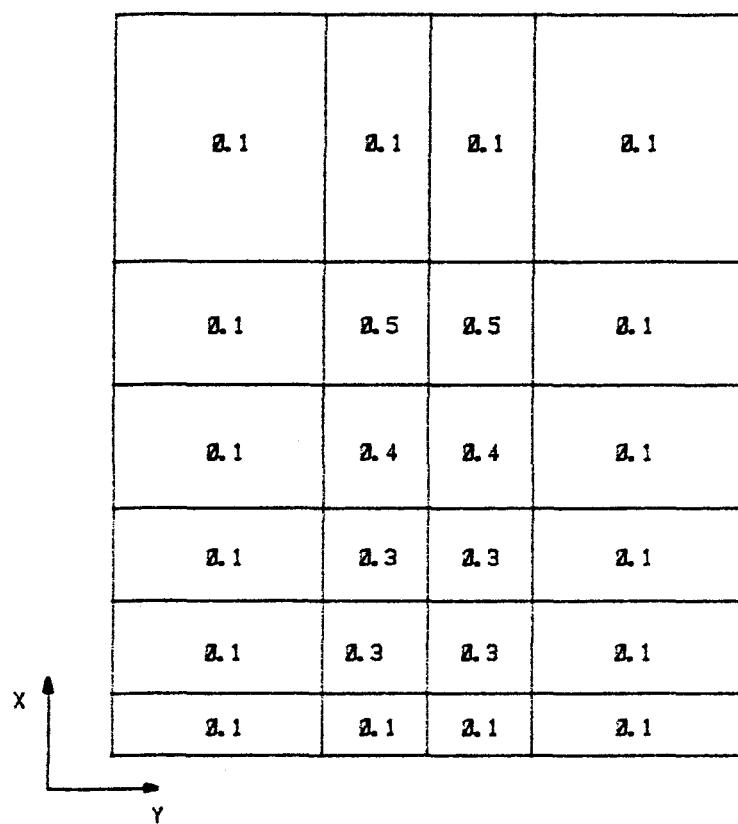


FIGURE 5.23 : DISTRIBUTION DES FACTEURS D'ABSORPTION ($m^{-1} \text{ atm}^{-1}$)

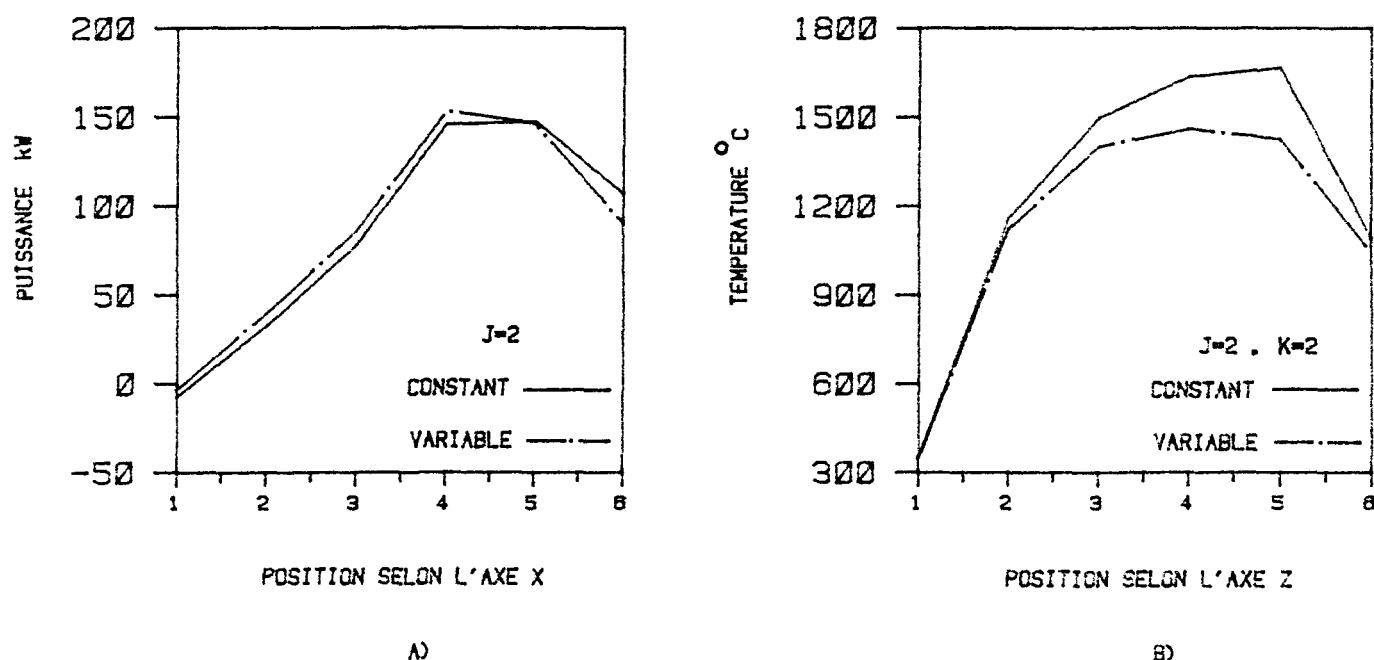


FIGURE 5.24 : COMPARAISON ENTRE UN FACTEUR D'ABSORPTION CONSTANT ET VARIABLE
 A) PUISANCE AU METAL
 B) TEMPERATURE DE GAZ

On voit donc qu'en utilisant conjointement la formulation d'un gaz gris, avec un champ variable des facteurs d'absorption, on peut influencer passablement les résultats et peut-être approcher les résultats provenant de la formulation sous forme de gaz réels. Cela pourra faire l'objet d'une étude future.

5.1.5 Temps de calcul

La fiabilité de la méthode des plans imaginaires a été analysée aux sections précédentes. Dans cette section nous analysons la performance de la méthode par rapport au temps de calcul. Il existe, autant dans la présente méthode que dans la méthode de zones, deux temps de calcul différents. Le premier est le temps nécessaire pour calculer, à l'aide de la méthode de Monte Carlo, les aires d'échange direct. Pour la méthode des plans imaginaires, le nombre d'aires d'échange direct à calculer est de $42 \times N_D$, où N_D est le nombre de volumes finis de dimension et de facteur d'absorption différents dans le maillage utilisé. Pour un maillage uniforme et un facteur d'absorption constant dans le domaine, N_D égale 1. Pour la méthode de zones, ce nombre est $42 \times N^2$, où N est le nombre de volumes finis dans le maillage. L'économie est donc énorme avec la présente méthode, surtout si le maillage est uniforme et si la distribution des facteurs d'absorption est uniforme.

Le second temps est celui nécessaire pour calculer les flux de chaleur radiatifs et pour équilibrer de façon itérative les bilans

d'énergie sur les surfaces et les volumes du maillage. Le temps de calcul associé aux bilans d'énergie est fonction du nombre de volumes finis, et cela pour les deux méthodes.

Le temps nécessaire pour équilibrer les bilans d'énergie est approximativement le même pour les deux méthodes, puisqu'elles utilisent toutes deux l'algorithme de Newton-Raphson. L'économie de temps se fait donc au niveau du calcul des flux radiatifs. Puisque, dans la méthode des plans imaginaires, les volumes finis sont partiellement isolés, le nombre de liens radiatifs avec les autres volumes finis est plus réduit qu'avec la méthode de zones; c'est pourquoi la méthode des plans imaginaires demande moins de temps pour calculer les flux radiatifs. Nous appellerons ce second temps de calcul, le temps de calcul itératif.

La figure 5.25 montre le ratio du temps de calcul de la méthode de zones à celui des plans imaginaires pour un gaz gris, sur un VAX 785, en fonction du nombre de volumes finis. Le temps total est la somme du temps itératif et du temps pour calculer les aires d'échange direct. On remarque que la présente méthode peut être jusqu'à dix-huit fois plus rapide que la méthode de zones au niveau du temps de calcul total, et jusqu'à neuf fois pour le temps de calcul itératif. On note également que c'est le temps de calcul itératif qui crée une limite supérieure pour le temps total, puisque le ratio du temps de calcul pour les aires d'échange direct est croissant avec le nombre de volumes finis. On peut expliquer cette limite de gain en temps de calcul de la façon suivante:

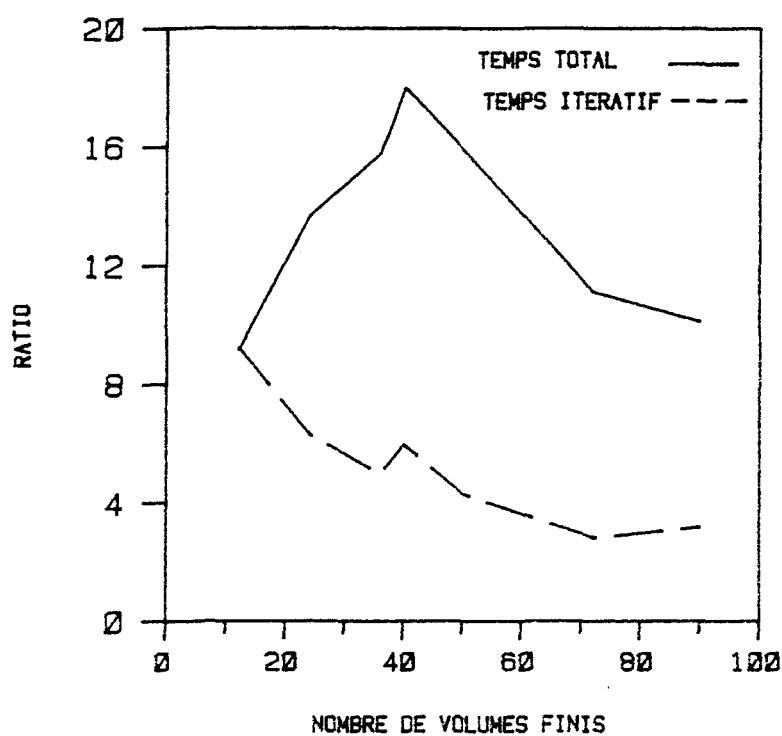


FIGURE 5.25 : RATIO DU TEMPS DE CALCUL DE ZONE A CELUI DES PLANS IMAGINAIRES
EN FONCTION DU NOMBRE DE VOLUMES FINIS

la méthode des plans imaginaires utilise des équations matricielles pour calculer les flux radiatifs, tandis que la méthode de zones utilise des équations algébriques. Pour un nombre de volumes finis très élevé, les matrices utilisées dans la présente méthode sont de dimensions importantes, et comme le temps de calcul pour des manipulations matricielles est proportionnel à la dimension de la matrice au cube, l'économie propre à la méthode des plans imaginaires est quelque peu réduite.

Pour le modèle indépendant, la figure 5.25 montre que le temps de calcul des aires d'échange direct est prépondérant, et qu'il faut en tenir compte dans une évaluation du modèle. Donc, pour un maillage assez fin (72 à 90 volumes finis) qui est habituellement utilisé, la méthode des plans imaginaires permet un gain fort appréciable. Pour les modèles couplés avec le logiciel PHOENICS, on effectue entre 30 et 70 passes dans le sous-modèle radiatif, mais les aires d'échange direct ne sont calculées que lors du premier passage. Dans ce cas, c'est le temps de calcul itératif qui est prépondérant. Malgré des ratios plus faibles dans ce cas, l'économie absolue de temps de calcul est très appréciable.

5.2 Les plans imaginaires comme sous-système: modèle en régime permanent

Les simulations de cette section ainsi que celles de la section 5.3 se rapportent à un four industriel de la compagnie ALCAN. Il s'agit du four 14 de l'usine d'Arvida. La fournaise est présentée à la figure 5.26. Le maillage pour la méthode des plans imaginaires est de $3 \times 6 \times 2$ divisions selon l'axe des x, y et z. Le maillage du logiciel PHOENICS pour les mêmes axes est de $9 \times 12 \times 8$. Nous avons simulé deux cas différents, soit le cas 17 pour lequel le champ de l'énergie libérée par la combustion est imposé et identique à celui du cas 5, et le cas 18 pour lequel un modèle de combustion est utilisé. Pour le cas 17 les résultats du couplage plans imaginaires/PHOENICS sont comparés à ceux du couplage Zone/PHOENICS, ces derniers provenant de Bourgeois (1988).

Le modèle utilisé est celui où la réaction de combustion est influencée par la cinétique chimique et dont le taux de réaction est défini par l'équation (3.44). Pour ces deux simulations les paramètres d'entrée sont identiques au cas 5, sauf pour les valeurs qui suivent. L'émissivité de la charge et des réfractaires sont respectivement de 0.5 et 0.6; la chaleur spécifique est fonction de la température (cette variation, donnée par Himmelblau (1967), est présentée à l'appendice C); la densité des gaz est calculée à l'aide de la loi des gaz parfaits et la viscosité cinématique est linéarisée à partir des valeurs données par Kreith et al. (1980). L'équation obtenue pour la viscosité est:

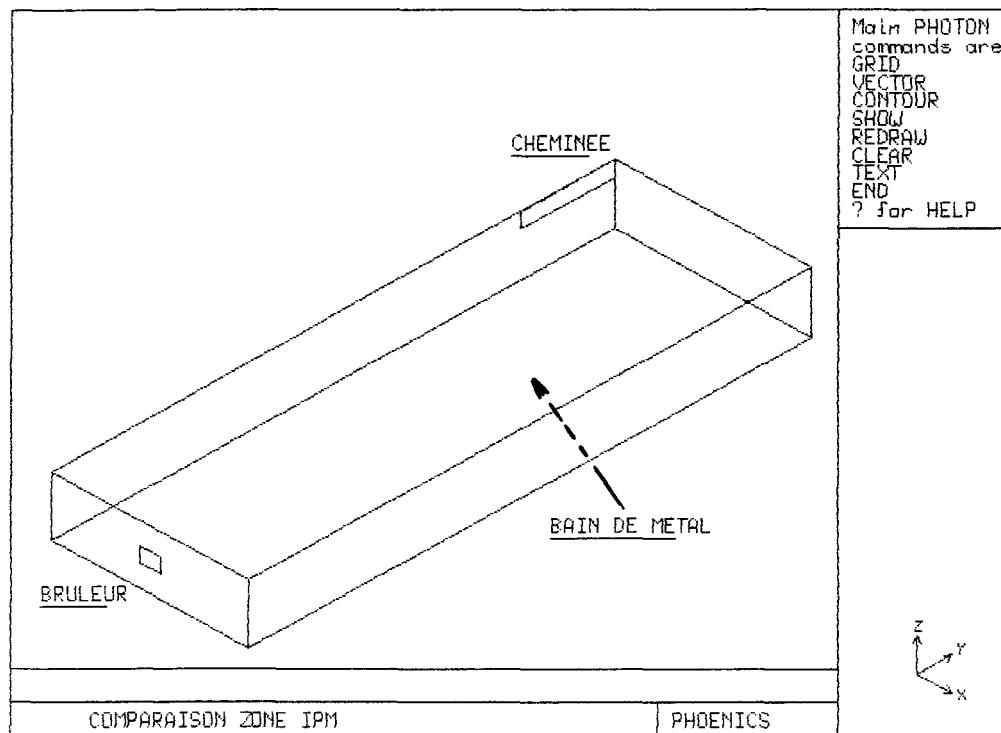


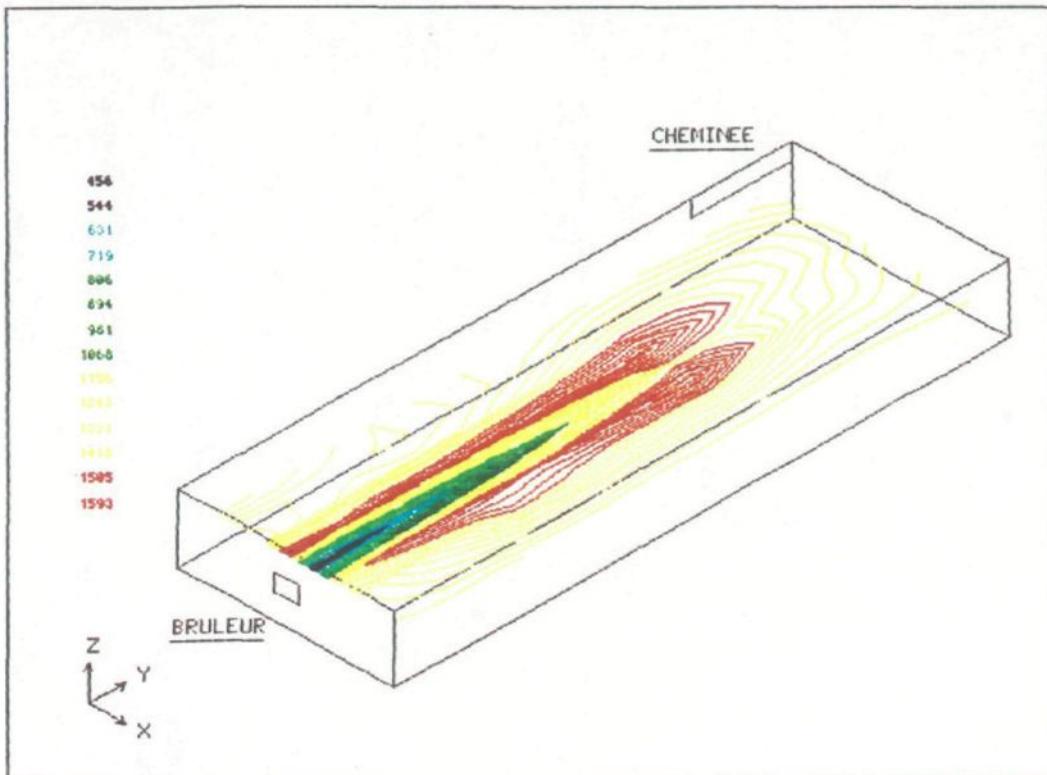
FIGURE 5.26 : CHAMBRE DE COMBUSTION DU FOUR INDUSTRIEL UTILISEE POUR
LES SIMULATIONS 17 ET 18

$$v(T_g) = -2.54 \times 10^{-5} + 1.37 \times 10^{-7} \times T_g \quad (5.4)$$

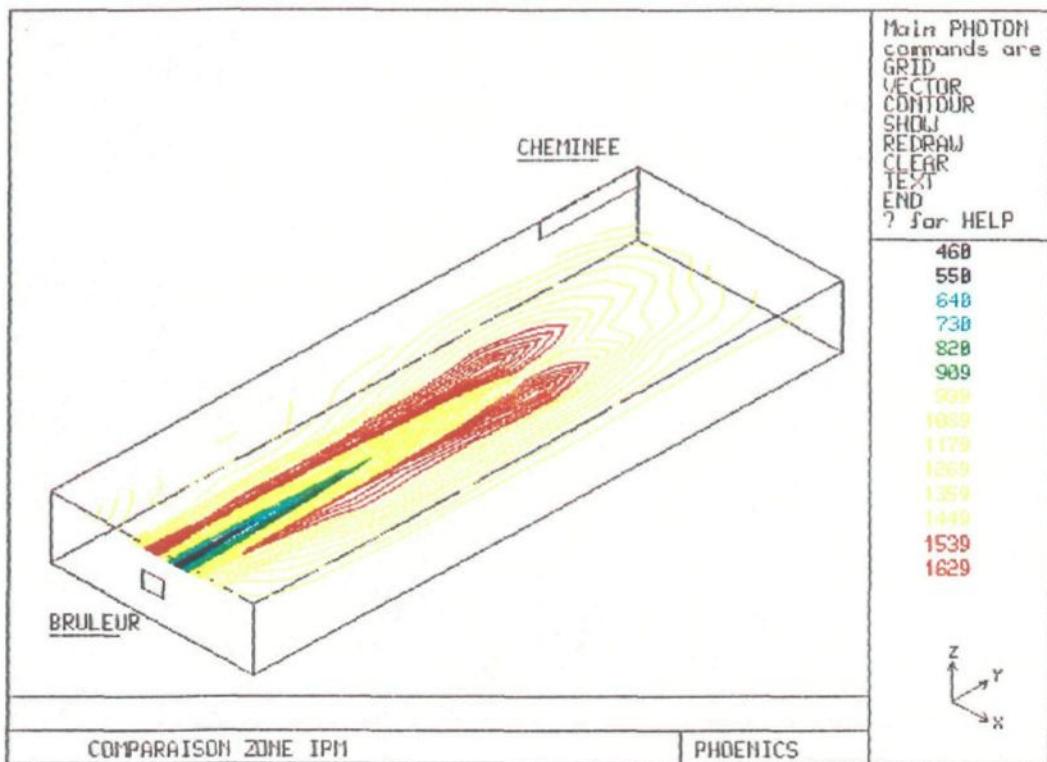
ou v est exprimé en m^2/s et T_g en kelvin.

Naturellement, l'écoulement du fluide est calculé par le logiciel PHOENICS. La vitesse choisie à l'entrée du brûleur est de 14 m/s, ce qui correspond à une section d'entrée de 0.125 m^2 . Notons également que pour le cas 18 il n'y a pas de comparaison avec la méthode de zones puisque cette dernière n'est pas pourvue d'un modèle de combustion.

Les figures 5.27 A) et 5.27 B) présentent respectivement le contour de température au niveau du brûleur pour le couplage zone-PHOENICS et pour le couplage plans imaginaires-PHOENICS. Il s'agit du cas 17 pour lequel la combustion est imposée. Les teintes de couleur sur ces deux figures sont trompeuses. Par exemple la teinte jaune de la figure 5.27 A) représente une température de 1156 K, alors qu'elle correspond à une température de 1000 K sur la figure 5.27 B). On doit cette distorsion au logiciel de post-traitement de PHOENICS. On peut affirmer par ailleurs que les deux contours sont presque identiques. Pour Zone la température maximale est de 1593 K et pour la présente méthode, elle est de 1629 K, soit un écart de 2.3%. La puissance totale au bain de métal est 2021 pour Zone contre 2019 pour les plans imaginaires. Nous ne pouvons présenter ici tous les résultats, mais nous pouvons affirmer que les modèles couplés plans imaginaires/PHOENICS donnent à toute fin



A)



B)

FIGURE 5.27 : CONTOURS DE TEMPERATURE AU NIVEAU DU BRULEUR
 A) COUPLAGE ZONE-PHOENICS
 B) COUPLAGE PLANS IMAGINAIRES-PHOENICS

pratique des résultats identiques à ceux des modèles couplés Zone/PHOENICS.

La figure 5.28 A) présente encore un profil de température calculé avec la méthode des plans imaginaires (comme celui de la figure 5.27 B), mais il s'agit cette fois de la simulation 18, c'est-à-dire avec utilisation d'un modèle de combustion. Il y a d'importantes différences entre les deux simulations. Pour le cas 17, la flamme est plutôt froide au centre et elle est entourée de gaz chaud, tandis que pour le cas 18, la zone froide est beaucoup plus restreinte et moins froide que celle du cas 17. On peut expliquer cela de la façon suivante. Pour le cas 17, la combustion imposée est répartie uniformément sur tout le tiers central de la fournaise. L'écoulement, d'autre part, est plutôt centralisé et il correspond au maillage de PHOENICS (puisque n'est pas imposé). Il s'ensuit donc que dans la zone périphérique au brûleur, le débit est faible et le degré de combustion est aussi fort qu'au centre où il y a beaucoup de débit. La température, dans cette zone périphérique, ne peut donc qu'être très élevée.

La figure 5.28 B) présente pour le cas 18 le contour de la fraction de masse de combustible. On remarque que la flamme est allongée; en effet, au deux tiers de la fournaise, la fraction de masse est réduite à 10% de sa valeur initiale. Cette longue flamme correspond bien aux observations faites sur le four industriel.

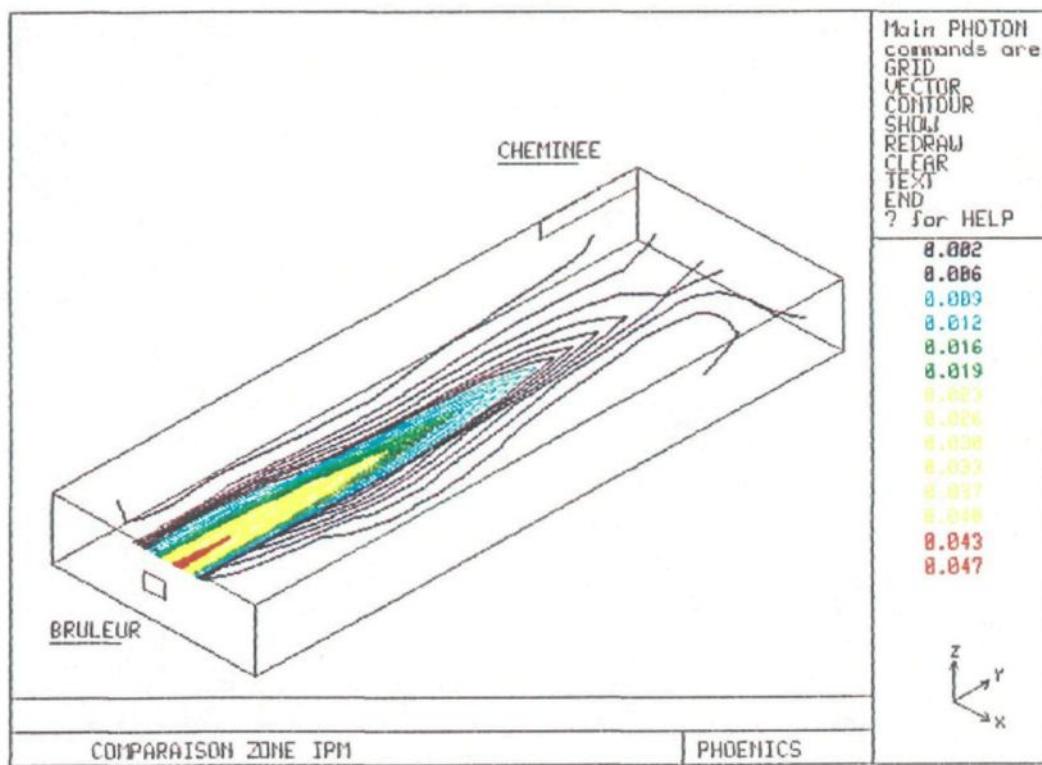
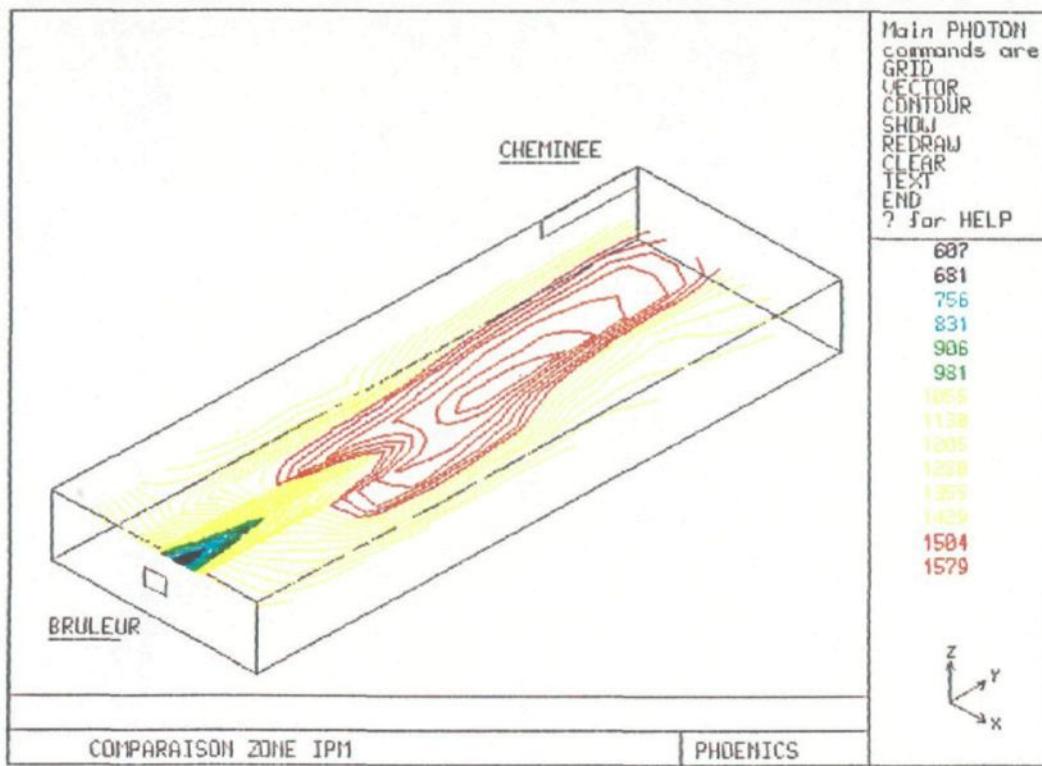


FIGURE 5.28 : A) PROFIL DE TEMPERATURE POUR LE CAS 18

B) PROFIL DE LA FRACTION DE MASSE DE COMBUSTIBLE POUR LE CAS 18

La figure 5.29 montre le profil de vitesse dans la chambre de combustion pour le cas 18. On remarque qu'au centre le profil est parabolique pour ensuite devenir linéaire près du mur opposé au brûleur. On remarque également deux zones de recirculation, l'une étant plus importante que l'autre. Au centre de la fournaise l'écoulement se divise en deux, du côté droit le fluide négocie le virage imposé et longe le mur droit pour former une importante zone de recirculation. Du côté gauche, la cheminée amoindrit ce phénomène en absorbant une partie importante du fluide. Bien qu'aucune mesure expérimentale ne soit disponible pour valider cet écoulement, celui-ci semble logique et conforme aux lois de la dynamique des fluides.

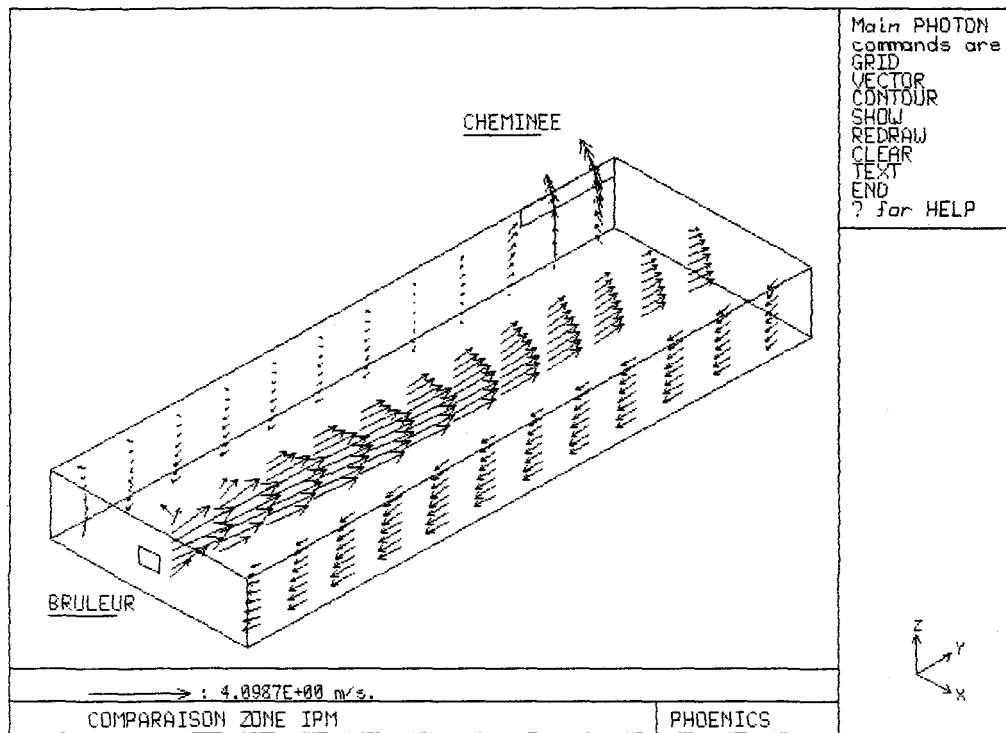


FIGURE 5.29 : CHAMP DE VITESSE POUR LE CAS 18

5.3 Les plans imaginaires comme sous-système: modèle en régime transitoire

Comme nous l'avons décrit au chapitre IV, nous avons créé deux modèles différents pour simuler une fournaise en régime transitoire. Le premier, plus rigoureux, où les champs de vitesse, de pression et les paramètres de turbulence sont constamment calculés et corrigés dans le temps. Naturellement, l'enthalpie et les concentrations des espèces chimiques sont également calculées. Dans le second modèle, seules l'enthalpie et les concentrations des espèces chimiques sont calculées. Les champs de vitesse, de pression et de turbulence sont imposés et fixes dans le temps. Ces trois derniers proviennent d'une simulation avec le modèle couplé en régime établi.

Nous donnons dans cette section les résultats nécessaires à l'analyse de ces deux modèles.

5.3.1 Description des cas simulés

La fournaise sur laquelle nous testons nos deux modèles est identique à celle présentée à la section 5.2, sauf que les coefficients globaux de transfert de chaleur des murs réfractaires sont remplacés par le logiciel de conduction unidimensionnelle. Les paramètres physiques tels que la conductivité thermique, la densité, la chaleur spécifique des réfractaires proviennent de Plibrico (1980) et sont présentés à l'appendice A. Les conditions initiales pour les murs réfractaires sont

les suivantes: la température des parois (côté chambre de combustion) est de 700 K, la température de la coque de métal (côté environnement) est de 373 K, à l'intérieur des réfractaires la température décroît linéairement. Les gaz au début de la simulation sont à une température de 723 K. À un temps t quelconque, on ouvre le brûleur et la simulation nous permet de suivre l'évolution du système.

Nous devons préalablement déterminer les pas de temps et le nombre de balayages nécessaires au logiciel PHOENICS. Idéalement le pas de temps devrait être très petit. La compagnie CHAM recommande d'utiliser la règle suivante: le pas de temps devrait égaler la plus petite dimension d'une zone du maillage, divisée par une vitesse caractéristique (dans notre cas la vitesse à l'entrée du brûleur). Cependant pour le cas présent, ce pas de temps est très petit et son utilisation demanderait un temps de calcul très élevé. Mais le logiciel PHOENICS permet d'utiliser des pas de temps plus grands si l'on sous-relaxe le processus de convergence. De cette façon nous pouvons utiliser des pas de temps de l'ordre de la minute et plus. Le nombre de balayages est aussi variable et seule l'expérience acquise avec PHOENICS permet de fixer une valeur appropriée. Pour le modèle rigoureux nous avons utilisé plusieurs pas de temps et nombres de balayages pour voir leurs effets sur les résultats et le temps de calcul. Le tableau 5.7 montre ces paramètres pour les différentes simulations, ainsi que le rapport du temps de calcul au temps du procédé sur un VAX 785. Notons que ces simulations portent sur une partie du procédé de fusion dans un four de refonte, soit les 1200 premières secondes.

CAS	MODELE	PAS DE TEMPS (SECONDE)	NOMBRE DE BALAYAGES	RATIO TEMPS CPU/PROCEDE
19	RIGoureux	120	250	21
20	RIGoureux	180	250	16
21	RIGoureux	120	100	10
22	RIGoureux	60	250	44
23	SIMPLIFIE	120	100	4

TABLEAU 5.7 : RESUME DES SIMULATIONS POUR LE MODELE TRANSITOIRE

Les figures 5.30 à 5.32 présentent respectivement la puissance totale transmise au bain de métal, aux réfractaires et la température d'une des surfaces de la voûte. On remarque que les simulations effectuées avec le modèle rigoureux (cas 19, 20, 21, 22) donnent des résultats pratiquement similaires. On remarque également que le modèle avec écoulement imposé se rapproche bien des résultats du modèle rigoureux. Dans le cas de la puissance au métal le modèle simplifié la sous-estime d'environ 10%. Mais l'erreur est acceptable si l'on tient compte du temps de calcul épargné avec ce modèle. Les cas 19 à 22 sont intéressants puisqu'ils nous font voir que la diminution du nombre de balayages et l'augmentation des pas de temps n'influencent pas énormément les résultats. Par contre, le tableau 5.7 montre qu'on peut épargner beaucoup de temps de calcul en choisissant des pas temps et un nombre de balayages adéquats. Une étude future sur les pas de temps et le nombre de balayages pour le modèle simplifié permettra peut-être d'arriver à la même conclusion.

Nous insistons beaucoup dans ce travail sur les techniques simplifiées, car celles-ci permettent de sauver considérablement en temps de calcul. Les temps de calcul doivent être réduits au minimum si l'on désire que les modèles présentés dans ce travail soient utilisables en industrie, compte tenu des multiples couplages nécessaires et du caractère transitoire du procédé.

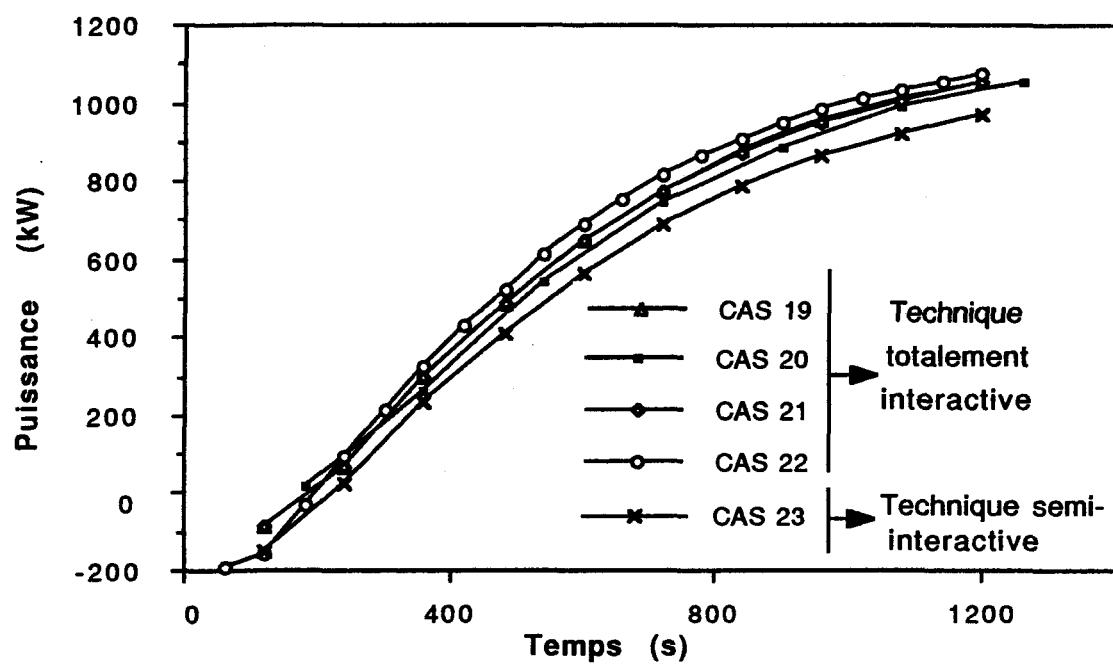


Figure 5.30 : Puissance au métal pour les simulations 19 à 23

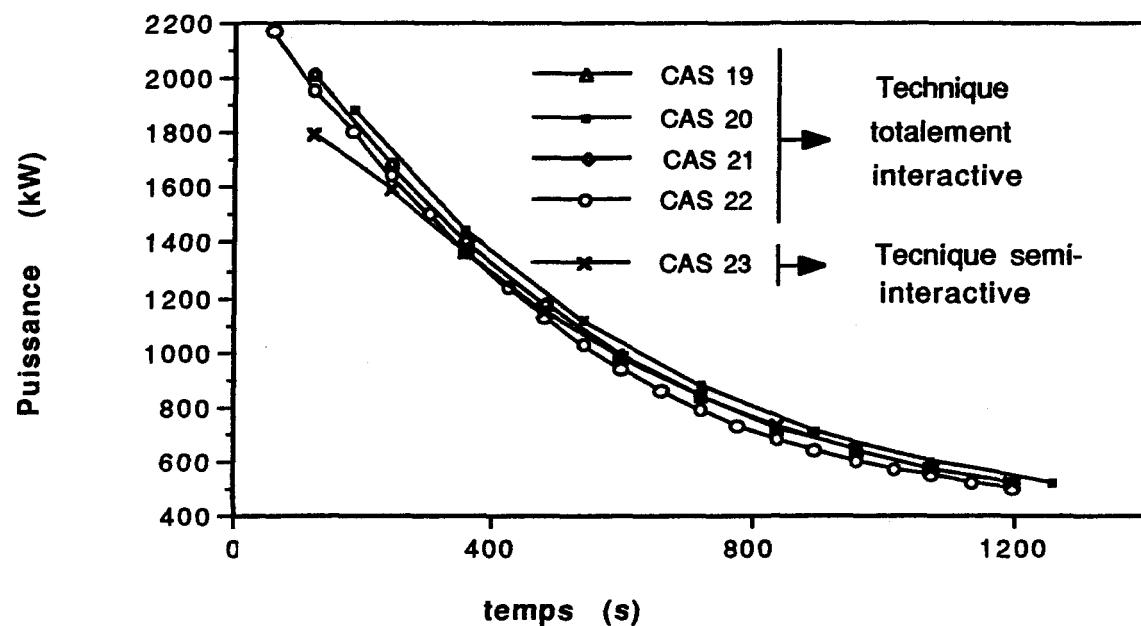


Figure 5.31 : Puissance aux réfractaires pour les cas 19 à 23

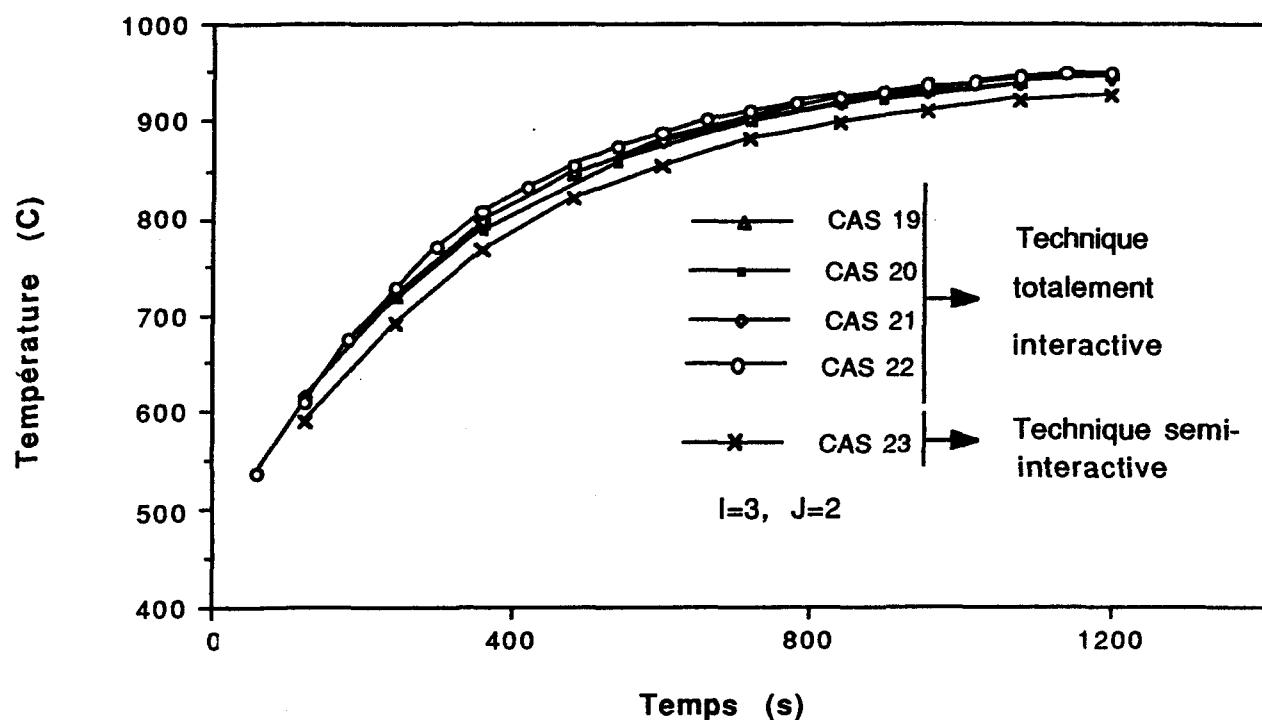


Figure 5.32 : Température d'une des surfaces de la voûte
pour les cas 19 à 23

5.4 Remarques générales

Les résultats présentés dans ce chapitre tendent à démontrer que la méthode des plans imaginaires est très fiable et rapide. Sa fiabilité dépend de la situation physique à simuler. Mais les erreurs relatives restent toujours acceptables. Il nous semble opportun ici de rappeler certaines limitations de la méthode proposée:

- L'utilisation d'un gaz réel devra faire l'objet d'une étude plus approfondie, dans le but de déterminer la valeur optimale de la température immatérielle T' .
- Pour des maillages très fins, le temps de calcul peut devenir important. Cependant cela n'est pas une caractéristique propre à la méthode des plans imaginaires. Les méthodes basées sur celle de Hottel montrent toutes le même inconvénient. Mais pour des maillages moyens, la présente méthode est définitivement plus rapide que la méthode de zones.
- Les modèles créés ne sont applicables que pour des géométries cartésiennes, sans obstacle à l'intérieur du domaine.

Nous n'avons pas comparé la méthode des plans imaginaires avec des résultats expérimentaux. Cela sera fait dans le cadre de la suite d'un

projet conjoint entre la compagnie Alcan et le Groupe de recherche en ingénierie des procédés et systèmes de l'Université du Québec à Chicoutimi.

CONCLUSION

La méthode des plans imaginaires a été développée comme modèle indépendant et comme sous-modèle dans le but de modéliser une chambre de combustion d'un four de métal chaud. Les points suivants peuvent être mentionnés suite à cette étude.

- * La présente méthode est pleinement vérifiée par rapport à la méthode de zones. Pour le modèle global et pour un maillage usuel d'une centaine de volumes finis, la méthode des plans imaginaires est dix fois plus rapide que la méthode de zones.
- * La méthode des plans imaginaires est actuellement utilisable pour tout genre de four ayant une géométrie cartésienne. Le maillage peut être uniforme ou non, mais orthogonal. Pour le moment les obstacles solides dans le maillage ne sont pas permis. Dans la version actuelle de la méthode, l'utilisation de la formulation dite "de gaz gris" est recommandée.
- * Le modèle transitoire avec écoulement imposé est suffisamment précis par rapport au modèle rigoureux et peut être utilisé dès maintenant pour modéliser les fours de façon économique. Pour les flux au métal, le pourcentage d'erreur inhérent au premier modèle est d'environ dix.

- * Nous avons certaines valeurs expérimentales sur le four de refonte qui permettront une validation des modèles présentés dans ce mémoire. Cette validation n'a pas été faite ici faute de temps. En effet, les simulations avec le modèle transitoire sont très longues et une bonne validation demande plusieurs simulations. Cette validation sera faite dès la fin de ce travail.

BIBLIOGRAPHIE

Ames, W.F., "Numerical Methods for Partial Differential Equations", 2nd edition, Academic Press éditeur, New York, 1977.

Bourgeois, T., "Couplage du logiciel PHOENICS et de la méthode de zones en vue de la modélisation du transfert de chaleur dans les fournaises industrielles", Mémoire de maîtrise, Département des sciences appliquées, Université du Québec à Chicoutimi, 1988.

Carlson, B.G., Lathrop, K.D., "Transport Theory-the Method of Discrete-Ordinates in Computing Methods in Reactors Physics", Greenspan et al. éditeur, New York, 1968.

De Marco, A.G., Lockwood, F.C., "A New Flux Method for the Calculation of Radiation in Furnaces", La Rivista dei Combustibili, vol. 29, fasc. 5-6 1975, pp 184-196.

Erchiqui, F., "Modélisation mathématique d'une chambre de combustion par la méthode des plans imaginaires", Mémoire de maîtrise, Département des sciences appliquées, Université du Québec à Chicoutimi, 1988.

Gosman, A.D., Lockwood, F.C., "Incorporation of a Flux Model for Radiation into a Finite Difference Procedure for Furnace Calculations", Fourteenth Symposium (International) on Combustion, 1972, pp 661-671.

Himmelblau, D.M., "Basic Principles and Calculations in Chemical Engineering", 2nd edition, Prentice-Hall éditeur, Englewood Cliffs, 1967.

Hottel, H.C., Sarofim, A.F., "Radiative Transfer", McGraw Hill éditeur, New York, 1967.

Howell, J.R., "Application of Monte-Carlo to Heat Transfer Problems", Advances in Heat Transfer, Irvine et al. éditeurs, vol. 5, 1968, pp 1-54.

Kocaefe, Y.S., Charette, A., Bui, R.T., Stevens, W., "Predicting Flame Heat Transfer in a Melting Furnace", Light Metals (AIME), Denver, 1987, pp 827-831.

Kreith, F., Black, W.Z., "Basic Heat Transfer", Harper and Row éditeurs, New York, 1980.

Lockwood, F.C., Shah, N.G., "New Radiation Solution Method for Incorporation in General Prediction Procedures", The Eighteenth Symposium (International) On Combustion, Pittsburg, 1981, pp 1405-1414.

Malin, M.R., Tatchel, D.G., "Calculations of Steady Three Dimensional Turbulent Reacting Flow in a Combustion Chamber", Phoenics Demonstration Report/CHAM UK/19, 1982.

Munger, M., "Calcul des Facteurs d'Echange Total et des Bilans Energétiques", Rapport Interne de l'Equipe d'Ingénierie des Systèmes, Département des sciences appliquées, Université du Québec à Chicoutimi, 1986.

Patankar, S.V., "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", McGraw Hill éditeur, New York, 1980.

Perron, J., "Modélisation Mathématique Simplifiée d'un Four de Métal Chaud", Mémoire de maîtrise, Département des sciences appliquées, Université du Québec à Chicoutimi, 1987.

Plibrico (Canada) Limitée, "Produits Réfractaires Monolithiques", Dépliant Publicitaire, 1980, 17 p.

Smith, T.F., Shen, Z.F., Friedman, J.N., "Evaluation of Coefficients for the Weighted Sum of Gray Gases Model", Transactions of the ASME, vol. 104, Novembre 1982, pp. 602-608.

Strom, B., "A Simple Heat Transfer Model for Furnace Based on the Zoning Method", Wärme und Stoffübertragung 13, 1980, pp. 47-52.

William, H.P., Flannery, B.P., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T., "Numerical Recipes", Cambridge University Press éditeur, Cambridge, 1986.

APPENDICE A

PROPRIÉTÉS THERMIQUES DES RÉFRACTAIRES

Nous donnons dans cet appendice les propriétés thermiques des différentes couches de réfractaires constituant les murs de la fournaise industrielle. Ces valeurs proviennent de Plibrico (1980). Les valeurs de la conductivité thermique sont linéarisées par Perron (1987) et sont valides pour la plage 800 K à 1400 K. La température T des équations (A.1), (A.4), (A.7), (A.10) et (A.13) est en kelvin. Nous donnons aussi la composition des cinq murs réfractaires du four.

couche 1 Plibrico K-L Mix

$$k(T) = 5.3012 \times 10^{-7} T + 3.47 \times 10^{-4} \quad \text{kW/mK} \quad (\text{A.1})$$

$$C_p = 921.1 \times 10^{-3} \quad \text{kJ/kgK} \quad (\text{A.2})$$

$$\rho = 2114.4 \quad \text{kg/m}^3 \quad (\text{A.3})$$

couche 2 Plibrico Plicast Verilite

$$k(T) = 1.2972 \times 10^{-7} T + 7.485 \times 10^{-5} \text{ kW/mK} \quad (A.4)$$

$$C_p = 921.1 \times 10^{-3} \text{ kJ/kgK} \quad (A.5)$$

$$\rho = 400.5 \text{ kg/m}^3 \quad (A.6)$$

couche 3 Plibrico Super F A.B.

$$k(T) = 3.117 \times 10^{-7} T + 5.453 \times 10^{-4} \text{ kW/mK} \quad (A.7)$$

$$C_p = 921.1 \times 10^{-3} \text{ kJ/kgK} \quad (A.8)$$

$$\rho = 2270 \text{ kg/m}^3 \quad (A.9)$$

couche 4 Plibrico LW1 20

$$k(T) = 1.5662 \times 10^{-7} T + 1.765 \times 10^{-4} \text{ kW/mK} \quad (A.10)$$

$$C_p = 921.1 \times 10^{-3} \text{ kJ/kgK} \quad (A.11)$$

$$\rho = 961.1 \text{ kg/m}^3 \quad (A.12)$$

couche 5 K fac 19 Block Insulation

$$k(T) = 1.6216 \times 10^{-7} T + 3.486 \times 10^{-6} \text{ kW/mK} \quad (A.13)$$

$$C_p = 921.1 \times 10^{-3} \text{ kJ/kgK} \quad (A.14)$$

$$\rho = 288.3 \text{ kg/m}^3 \quad (A.15)$$

couche 6 Papier 970 J

$$k = 47.1 \times 10^{-6} \text{ kW/mK} \quad (A.16)$$

$$C_p = 1130 \times 10^{-3} \text{ kJ/kgK} \quad (A.17)$$

$$\rho = 160.2 \text{ kg/m}^3 \quad (A.18)$$

couche 7 Revêtement d'acier

$$k = 45 \times 10^{-3} \text{ kW/mK} \quad (A.19)$$

$$C_p = 460.5 \times 10^{-3} \text{ kJ/kgK} \quad (A.20)$$

$$\rho = 7849.0 \text{ kg/m}^3 \quad (A.21)$$

Nous donnons la composition de chaque paroi de la chambre de combustion. L'énumération des couches débute du côté des gaz et se termine du côté extérieur.

Parois	Couche	Épaisseur (cm)
Voûte	1	22.86
	2	5.08
	7	0.63
Mur (côté portes de chargement)	3	17.78
	4	5.08
	6	0.32
Mur (côté opposé aux portes)	1	22.86
	5	10.16
	7	0.63
Mur (côté brûleur et opposé)	1	22.86
	4	7.62
	5	10.16
	7	0.63

APPENDICE B

CALCUL DES PROPRIÉTÉS THERMIQUES ÉQUIVALENTES

Pour un mur composé de N couches de matériaux différents, les propriétés équivalentes peuvent être calculées de la façon suivante:

Longueur équivalente

$$L_{\text{éq}} = \sum_{i=1}^N L_i \quad (\text{B.1})$$

conductivité équivalente

$$k_{\text{éq}} = \frac{L_{\text{éq}}}{\sum_{i=1}^N L_i / k_i} \quad (\text{B.2})$$

masse équivalente

$$M_{\text{éq}} = \sum_{i=1}^N \rho_i V_i \quad (\text{B.3})$$

chaleur spécifique équivalente

$$c_{\text{éq}} = \frac{\sum_{i=1}^N c_i M_i}{M_{\text{éq}}} \quad (\text{B.4})$$

densité équivalente

$$\rho_{\text{éq}} = \frac{M_{\text{éq}}}{A L_{\text{éq}}} \quad (\text{B.5})$$

APPENDICE C

CHALEUR SPÉCIFIQUE DES GAZ DE COMBUSTION

La chaleur spécifique est calculée par rapport à une température de référence T_R . Nous donnons ici les chaleurs spécifiques des principaux gaz de combustion. La chaleur spécifique moyenne est calculée comme étant la somme de la chaleur spécifique de chaque composant multipliée par sa fraction massique. La chaleur spécifique est ici donnée en kJ/kgK .

Nous utilisons la notation suivante pour abréger l'écriture:

T = température (kelvin) du volume de gaz considéré

T_R = température de référence (kelvin)

$T_1 = T - T_R$

$T_2 = T^2 - T_R^2$

$T_3 = T^3 - T_R^3$

$T_4 = T^{1/2} - T_R^{1/2}$

Azote

$$C_p = (6.529T_1 + 0.074 \times 10^{-2}T_2 - 0.00757 \times 10^{-5}T_3) / 6.62T_1 \quad (C.1)$$

Oxygène

$$C_p = (6.732 \times T_1 + 0.075 \times 10^{-2}T_2 - 0.00597 \times 10^{-5}T_3) / 6.62T_1 \quad (C.2)$$

Vapeur d'eau

$$C_p = (6.970 \times T_1 + 0.173 \times 10^{-2}T_2 - 0.01610 \times 10^{-5}T_3) / 6.62T_1 \quad (C.3)$$

Dioxyde de carbone

$$C_p = (18.04 \times T_1 - 0.224 \times 10^{-2}T_2 - 316.160 \times 10^{-5}T_4) / 6.62T_1 \quad (C.4)$$