UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ À

L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À CHICOUTIMI

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN ÉDUCATION

PAR

HÉLÈNE LABELLE

BACHELIÈRE EN ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

Les pratiques pédagogiques favorisant le développement de la pensée algébrique

NOVEMBRE 2008

Résumé

Lorsqu'il est question de difficultés ou d'échec dans une discipline scolaire, les mathématiques leur sont inévitablement associées. Pour bon nombre d'élèves, les problèmes apparaissent dès l'entrée à l'école secondaire, c'est-à-dire au moment où l'on introduit l'algèbre dans les cours. Plusieurs études se sont penchées sur le passage de l'arithmétique à l'algèbre en tant qu'élément de rupture entre deux modes de pensée. En arithmétique, les symboles mathématiques sont souvent perçus comme des procédures à appliquer alors qu'en algèbre, il est indispensable de les considérer comme des entités en soi et d'en comprendre le sens. Le développement de la pensée algébrique, qui demande parfois à l'élève des années d'investissement, représente également un réel défi pour l'enseignant.

Avec l'implantation du renouveau pédagogique, l'enseignement des mathématiques est appelé à changer. Les situations d'apprentissage doivent maintenant être signifiantes et permettre la conquête de sens par le biais de conflits sociocognitifs. Cette nouvelle vision de l'enseignement provoque de l'inquiétude chez les enseignants qui la considèrent comme étant difficilement applicable à la didactique de l'algèbre et qui croient toujours fermement aux vertus de l'exposé magistral.

Cette recherche aborde la problématique de l'enseignement et de l'apprentissage de l'algèbre dans le contexte du renouveau pédagogique. Pour ce faire, un groupe d'élèves de troisième secondaire a été invité à répondre à une épreuve faisant intervenir la mise en équation algébrique. Ils ont par la suite été rencontrés individuellement pour expliciter leur raisonnement et discuter des erreurs qu'ils avaient commises.

Les résultats montrent que les élèves se réfèrent davantage à la procédure suggérée en classe qu'à leur jugement personnel pour résoudre des problèmes. On a également constaté que la verbalisation du raisonnement contraint les élèves à s'attarder au sens des expressions algébriques et à approfondir leur compréhension. La recherche a

permis d'identifier des pratiques pouvant favoriser le développement de la pensée algébrique en accord avec la philosophie du renouveau pédagogique.

Remerciements

Je tiens à remercier en tout premier lieu ma directrice de mémoire, madame Diane Gauthier, professeure chercheure à l'Université du Québec à Chicoutimi, qui a su me faire profiter de son expertise en me prodiguant de judicieux conseils. Son dévouement, son ouverture d'esprit, de même que son support indéfectible, dans les bons moments comme dans les périodes plus difficiles, m'ont permis de mener à bien ce projet, et je lui en suis infiniment reconnaissante.

À mes deux filles, Jessica et Catherine, qui ont fait preuve de beaucoup de patience lorsque j'étais absorbée dans mon travail, je veux dire un gros merci.

Je réserve mes plus grands remerciements à Laurent, mon époux, qui a toujours cru en moi et qui m'a offert son soutien moral et affectif. Sans ses encouragements répétés, la réalisation de ce travail n'aurait pas été possible.

Enfin, je remercie madame Lynda Veillet, enseignante à l'école polyvalente Dominique-Racine de Chicoutimi, qui a si gentiment accepté de se prêter à cette étude et m'a accordé une partie de son précieux temps d'enseignement avec ses élèves.

Table des matières

LISTE DES TABLEAUX ET ANNEXES

Tableaux :

Annexes :

Introduction

Depuis de nombreuses années, les résultats aux épreuves uniques de fins d'années des écoles secondaires québécoises montrent que ce sont les mathématiques qui accusent le plus faible taux de réussite comparativement aux autres matières (MEQ, 2002; 2003; 2004; 2005). Les mathématiques et les sciences sont les domaines que les jeunes québécois considèrent comme étant les plus difficiles (Gauthier; Garnier & Marinacci, 2005) et ils leur reprochent leur caractère abstrait, leur nomenclature complexe ainsi que la variété de symboles spécialisés auxquels elles font appel. Or, les résultats en mathématiques constituent l'un des principaux critères de sélection pour l'accession à plusieurs programmes d'études supérieures, et les élèves qui ne satisfont pas aux exigences se voient contraints de reconsidérer leur choix de carrière. Cela crée de l'angoisse chez certains jeunes qui considèrent les mathématiques comme étant à la fois inaccessibles et indispensables pour mener à bien leurs projets d'avenir.

Pour les enseignants en mathématiques des écoles secondaires, la situation est également très préoccupante. Ces derniers ressentent de la pression à l'approche des épreuves de fin d'année, car la réussite des élèves repose en grande partie sur leurs épaules. Ils observent que malgré tous les efforts mis de l'avant pour ramener cette discipline à la portée de tous les élèves et augmenter le niveau de réussite, les problèmes de compréhension persistent année après année.

Contrairement à plusieurs autres disciplines, il s'avère que l'apprentissage des mathématiques doive nécessairement passer par l'appropriation de différents langages. Une seule page d'un livre de mathématiques peut comporter plusieurs modes de représentation tels les graphiques, les tableaux, les équations, ou autres objets avec lesquels l'élève doit être à l'aise pour pouvoir saisir toutes les informations (De Serres; Bélanger; Piché; Riopel; De Granpré, 2003). Or, dans une étude portant sur des élèves de niveau collégial, De Serres & Groleau (1997) montrent que la maîtrise des langages graphique et symbolique est inadéquate chez près des trois quarts d'entre eux.

Cela dit, parmi les différents modes de représentations utilisés en mathématiques, celui qui cause davantage de problèmes est le langage algébrique. La publication des *tendances de l'enquête internationale sur les mathématiques et les sciences* (TEIMS, 2003), portant sur la performance des élèves de 2e secondaire, a fait ressortir que la note moyenne du Québec dans la majorité des items est significativement supérieure à la moyenne, sauf en algèbre, qui affiche le résultat le plus bas. On remarque que, de manière générale, les problèmes apparaissent après l'introduction de l'algèbre dans les cours de mathématiques. Des élèves qui réussissaient bien jusqu'alors, ont souvent des difficultés à résoudre des problèmes écrits en algèbre. L'étape qui consiste à traduire des données textuelles en langage algébrique s'avère particulièrement problématique. Les difficultés liées à cette activité de conversion, de même que les incohérences entre le langage naturel et le langage algébrique sont des problèmes importants qui seront traités au premier chapitre.

Avec l'implantation du renouveau pédagogique, les enseignants des écoles secondaires doivent délaisser quelque peu les exposés magistraux au profit de situations qui permettent à l'élève de confronter ses idées avec celles de ses pairs et avec celles de l'enseignant. La classe devient alors un lieu d'échanges où l'enseignant n'est plus considéré comme l'unique détenteur d'un savoir à transmettre; il occupe maintenant la fonction de médiateur pédagogique (Blaye, 1988; Gilly, 1989). Or, jusqu'à présent, l'enseignement de l'algèbre a toujours fait l'objet d'un enseignement magistral, ce qui contraint l'enseignant à s'engager dans une voie pour laquelle il ne possède pas de repère. Le but de la présente recherche consiste donc à identifier certains obstacles qui s'opposent à la compréhension de l'algèbre et à cibler un ensemble de pratiques qui pourraient permettre aux élèves d'acquérir une meilleure compréhension de ce langage abstrait.

Le premier chapitre expose la problématique de la recherche. Dans ce chapitre, on traite des difficultés associées à l'apprentissage du langage algébrique. L'activité de conversion, qui consiste à traduire des énoncés mathématiques d'un langage à un autre, ne s'opère pas de façon spontanée. Elle fait intervenir des processus mentaux qui demandent une suite de traitements et un travail cognitif important. La conversion du langage naturel au langage algébrique est particulièrement ardue, car il existe des incohérences entre ces deux formes de langage et cela porte les élèves à commettre des erreurs d'interprétation. Face aux difficultés rencontrées, certains jeunes ont tendance à éviter d'avoir recours à l'algèbre, car cet outil ne revêt que très peu de sens pour eux. Pour comprendre l'algèbre, l'élève doit adopter un mode de pensée différent de celui utilisé en arithmétique et sa façon d'interpréter certains concepts mathématiques doit évoluer. La recherche de sens constitue l'une des préoccupations majeures du renouveau pédagogique, mais elle comporte certaines implications en ce qui concerne la didactique de l'algèbre. Ce sont ces constats qui ont mené aux objectifs et questions de recherche qui figurent à la fin de ce chapitre.

Le second chapitre présente le cadre théorique. On y traite tout d'abord de l'importance du langage dans l'apprentissage des mathématiques et, plus particulièrement, dans l'apprentissage de l'algèbre. Un bref aperçu historique trace les grandes lignes du développement de l'algèbre au fil du temps et permet d'en saisir toute la portée. Les différents concepts associés à la pensée algébrique y sont exposés, soient les dimensions outil et objet de l'algèbre, les notions enseignables et non enseignables, de même que les conceptions procédurale et structurale. La dernière partie de ce chapitre est consacrée aux pratiques pédagogiques. Elle évoque le processus de transposition didactique et aborde l'analyse sémiotique pour finalement déboucher sur la didactique de l'algèbre à proprement parler.

Le troisième chapitre décrit la méthodologie utilisée dans cette étude qui est de type qualitative interprétative. On y retrouve des renseignements sur la composition de l'échantillon d'élèves participant à cette recherche, ainsi qu'une description détaillée des instruments de collecte de données. Ces instruments consistent en une épreuve écrite composée de quatre problèmes faisant intervenir le langage algébrique, de même qu'une série d'entretiens individuels dont le protocole a été élaboré à partir des difficultés rencontrées lors de l'épreuve écrite. Après avoir répondu à l'épreuve écrite, les élèves sont invités à verbaliser leur raisonnement et à s'attarder sur les erreurs qu'ils ont commises. Chacun de ces entretiens est enregistré et retranscrit pour fin d'analyse.

Le chapitre IV est consacré à l'analyse des résultats. Cette analyse consiste à identifier les différents obstacles rencontrés lors de la passation de l'épreuve écrite, et à évaluer la pertinence des échanges verbaux sur le développement de la pensée algébrique. L'interprétation des données a tout d'abord permis de constater une tendance chez l'élève à se référer systématiquement à la procédure exposée en classe. Cependant, un questionnement en profondeur lors des entretiens d'explicitation a fait ressortir que l'apprentissage d'une procédure peut servir de levier pour effectuer un arrimage entre les conceptions procédurales et structurales de l'algèbre. La verbalisation et la justification du raisonnement se sont avérées très efficaces pour permettre à l'élève d'approfondir sa compréhension en algèbre et remédier à certaines de ses erreurs.

La conclusion permet de faire un parallèle entre les résultats des analyses et la nouvelle vision de l'enseignement. Ceux-ci permettent d'observer l'efficacité de certaines pratiques qui sont mises de l'avant avec l'arrivée du renouveau pédagogique, tout en confirmant certaines des vertus de l'enseignement magistral dans les cours de mathématiques.

Chapitre I
Problématique

Ce chapitre traite de la complexité du travail intellectuel imposé par la coordination des différents langages utilisés en mathématiques et, plus spécifiquement, du passage du langage naturel au langage algébrique. Il est question des incohérences entre ces deux langages, des fréquentes erreurs commises par les apprenants, de même que du peu d'attrait que l'algèbre exerce chez les élèves. La problématique du passage de l'arithmétique à l'algèbre en tant que rupture entre deux modes de pensée y est également abordée, notamment en ce qui concerne l'interprétation du signe d'égalité et de l'évolution du statut de la lettre. La section suivante présente la nouvelle vision de l'enseignement fondée sur le socioconstructivisme et fait part des changements qu'elle impose en didactique et sur les stratégies éducatives reliées à l'apprentissage de l'algèbre. Les questions et objectifs qui découlent de la problématique sont exposés à la fin de ce chapitre.

1.1 L'activité cognitive de conversion

Le rôle des différents langages dans l'activité cognitive a été analysé par Duval (1995). Selon lui, l'activité cognitive de conversion qui consiste à passer d'un registre à un autre, soit du langage aux formules mathématiques ou aux graphes ou encore à l'interprétation d'un graphique en langage courant, est très sollicitée en mathématiques. Il déplore le fait qu'on y ait recours comme si elle était acquise chez tous les élèves, alors qu'elle fait appel à une suite de traitements, ce qui n'a rien d'évident ou de spontané. Il décrit l'activité mathématique comme un processus qui fait intervenir trois activités cognitives :

- **La formation** : Constitution d'une trace dans un système déterminé qui respecte certaines règles de façon à avoir du sens pour celui qui ne l'a pas lui-même produite.
- **Le traitement :** Transformation des représentations par des opérations qui s'effectuent dans un même registre.
- **La conversion :** Transfert des représentations dans un autre système, (comme un nombre décimal en fraction, par exemple).

Il s'agit donc d'une activité mentale qui n'a rien d'évident ou de spontané pour la plupart des élèves. Elle passe par l'intériorisation de différents registres qui deviendront pour eux des unités signifiantes. Elle commande également la capacité de les convertir et de les coordonner entre eux, de façon à permettre le traitement de l'information de la manière la plus efficace possible. À cela, il faut ajouter que les règles de conversion ne sont parfois pas les mêmes selon le sens dans lequel le changement de registre est effectué, ce qui ajoute aux difficultés. Par exemple, la représentation d'un nombre impair sous la forme algébrique ne peut pas être systématiquement reconvertie en langage naturel à partir de l'expression *« 2n + 1 »*, puisque celle-ci pourrait faire référence à une infinité de situations.

Dépendamment du contexte dans lequel elle est présentée, une même expression algébrique peut revêtir diverses significations. Celle-ci ne suit pas nécessairement un modèle linguistique car le langage symbolique de l'algèbre obéit à ses propres conventions, c'est pourquoi la coordination entre le langage naturel et le langage algébrique est particulièrement ardue (Duval, 1995).

1.2 Incohérences entre le langage naturel et le langage algébrique

La traduction d'expressions algébriques en langage naturel comporte certaines difficultés car ces deux langages obéissent à des règles différentes. Par exemple, *« Le carré de la somme de x et y »* ne se lit pas de gauche à droite, comme un texte, à partir de l'expression *« $(x + y)^2$ »*, tout comme la lecture d'un grand nombre, tel que 35 400 000 000, dont l'appellation dépend du nombre de chiffres qu'il comporte. Cependant, l'activité inverse, soit la conversion d'informations du langage naturel au langage algébrique, est encore plus complexe.

En effet, le langage algébrique ne possède pas d'adverbes comme « toujours » ce qui contraint l'élève à faire appel à un système de signification qui est en opposition avec le langage naturel pour passer à la généralisation symbolique (Radford, 2004). De plus, il arrive fréquemment qu'une règle que l'on peut facilement exprimer en langage naturel doive être reformulée avant d'être exprimée sous forme algébrique puisque la forme ne peut être traduite directement. Par exemple, si on propose le problème suivant à des jeunes du secondaire :

Un fermier a 6 fois plus de cochons que de vaches. Si C représente le nombre de cochons et V représente le nombre de vaches, donne l'équation associée à cette situation.

Près des deux tiers d'entre eux commettent une erreur d'inversion ($6C=V$ au lieu de $C=6V$) en transposant directement la forme linguistique *« Il y a 6 cochons pour une vache »* (Sims-Knight & Kaput, 1983). Pour obtenir l'équation appropriée, l'élève doit développer le réflexe de traduire mentalement l'énoncé de manière à bien illustrer la relation qui existe entre les deux variables, soit : « Le nombre de cochons est égal à 6 fois le nombre de vaches ».

De même, pour représenter un nombre impair algébriquement, la forme $2n + 1$ ne constitue pas une traduction directe de : *« Nombre non divisible par deux »*. Elle découle d'une logique mathématique. Stacey & MacGregor (1997) nous donnent un autre exemple de problème de conversion : La façon naturelle de décrire la suite *« 2, 5, 8, 11, 14, ... »* se limiterait normalement à décrire l'addition répétée, soit : "Commencer à 2 et ajouter 3 à chaque terme". Cependant, pour la décrire en langage algébrique, il importe de considérer le rang occupé par chacun des termes pour obtenir la règle : $y = 3n - 1$. Bien que cette représentation donne une description plus abstraite de la suite, elle a l'avantage de permettre d'accéder à n'importe lequel des termes qui la composent, à partir de son rang et à l'aide d'un calcul simple. La représentation algébrique est en effet très efficace pour calculer rapidement la valeur d'une quantité inconnue, c'est pourquoi elle est l'outil à privilégier à partir d'un certain niveau. Pour s'investir dans l'apprentissage de l'algèbre, l'élève doit en connaître les avantages et il est du ressort de l'enseignant de les faire valoir auprès de ses élèves.

Cela dit, les écarts entre le langage naturel et le langage algébrique exposés un peu plus haut, découragent les élèves qui ont de la difficulté à comprendre le sens des expressions algébriques qu'ils utilisent. On note d'ailleurs qu'ils commettent régulièrement des erreurs d'interprétation en algèbre.

1.3 Fréquentes erreurs commises par les élèves en algèbre

L'addition de termes non semblables, les erreurs de signe, ou la soustraction d'un nombre pour annuler son opposé, ne sont qu'une partie des erreurs récurrentes en algèbre. Vlassis et Demonty (2002) font remarquer que plusieurs élèves ont de la difficulté à résoudre une équation du type $ax + b = cx + d$, ou qu'ils sont incapables de supprimer correctement les parenthèses dans l'expression $c - (e - f)$, que certains élèves croient toujours que $a + a + a = a^3$ ou que $(a^2 + b^2) = (a + b)^2$. On note également certaines erreurs d'interprétation qui transgressent les règles associées au langage algébrique.

Günther (1990) a recensé les fréquentes erreurs commises par les élèves dans le processus de mise en équation qui mettent en cause certaines conventions :

- En algèbre, les lettres ne représentent pas des objets, mais des nombres. Par exemple, x ne représente pas les pommes, mais x nombre de pommes.

- Une expression algébrique représente à la fois un processus et le résultat de ce processus. Par exemple, x + 4 veut dire : ajouter 4 au nombre x, mais il veut également dire : Le nombre plus grand que x de 4 unités.

- Une expression algébrique représente à la fois une action et une relation. Par exemple, S = 6P peut vouloir dire : On obtient S en multipliant P par 6, mais il peut aussi vouloir dire : S est 6 fois plus grand que P.

- Une même variable ne peut pas prendre deux valeurs différentes. Par exemple, dans l'expression x + 13 = x, on ne peut pas attribuer une valeur à la variable x dans le membre de droite pour obtenir x + 13 = 20 et obtenir une valeur de 7 pour la seconde variable x.

Par ailleurs, on remarque que certains élèves ont de la difficulté à repérer les quantités inconnues qui pourraient être représentées par des expressions algébriques et ne savent pas par où commencer lorsqu'ils sont placés devant un problème qui nécessite le recours à l'algèbre. Ils n'ont pas le réflexe de représenter les quantités inconnues par des variables, si cela n'est pas précisé dans l'énoncé, par une formulation du genre : *« Utilise la variable x pour représenter le nombre de pommes »* (Vlassis & Demonty, 2002). De plus, ils ne sont pas portés à utiliser l'algèbre pour résoudre des problèmes car il ne leur apparaît pas comme étant un outil aussi efficace que les méthodes arithmétiques.

1.4 Résistance au langage algébrique

On constate que l'algèbre ne représente pas un outil de prédilection pour les jeunes du secondaire. Une étude menée par Lee & Wheeler (1989) a montré que, pour les élèves, les exemples numériques représentent une preuve beaucoup plus fiable que la démonstration algébrique. Encore de nos jours, lorsqu'on demande à des élèves du secondaire d'expliquer leur raisonnement en situation de résolution de problèmes, seule une minorité (généralement ceux qui se situent au dessus de la moyenne), choisissent le mode de représentation algébrique pour se justifier (Neria & Amit, 2004). La grande majorité d'entre eux préfèrent s'exprimer verbalement ou à l'aide d'exemples numériques. Il convient ici de préciser que les situations problèmes qui sont présentées aux élèves de 2e et 3e secondaire pour les introduire au langage algébrique peuvent habituellement être résolues par des modes différents, et parfois tout aussi efficacement. Par exemple, si on propose ceci aux élèves :

« On ajoute 17 à un nombre, on le multiplie par 3 et on obtient 114. Quel est ce nombre ? »

Ce type de problème peut être facilement résolu en effectuant les opérations inverses à rebours, c'est-à dire diviser 114 par 3 et soustraire 17 au résultat pour trouver 21. Même lorsque les équations sont présentées sous forme algébrique, il arrive qu'elles soient résolues avec des méthodes arithmétiques, sans faire appel aux propriétés des transformations des équations algébriques. C'est notamment le cas des équations de la forme $x + a = b$, $ax = b$ et $ax + b = c$.

Il arrive même que certains problèmes dits *« algébriques »* puissent être résolus en recourant à des procédés arithmétiques (Coulange, 2000). C'est notamment le cas des problèmes de partage en parties inégales qui, autrefois, étaient étudiés dans un contexte arithmétique. Prenons par exemple le problème suivant :

Marie, Paul et Brenda ont ensemble une collection de 288 timbres. Si Marie en a six fois plus que Paul et Brenda en a 128 de moins que Marie, quel est le nombre de timbres de chacun ?

Ce problème pourrait être qualifié de *« problème déconnecté »*, puisqu'on ne peut calculer directement les données inconnues à partir des données connues (Bednarz & Janvier, 1997). Il apparaît donc pertinent de recourir à l'algèbre pour le résoudre. Il existe bel et bien une technique de résolution arithmétique qui était enseignée dans la première moitié du XXe siècle, mais de nos jours, ce type de problème serait systématiquement abordé dans un cadre algébrique. L'algèbre est en effet considéré comme un outil très efficace, qui devient incontournable dès qu'on atteint un certain niveau. Il n'est toutefois pas facile de convaincre les élèves que les efforts que demande l'appropriation de ce langage en valent la peine, puisque la démonstration de la puissance de cet outil n'est pas encore à leur portée.

1.5 Le passage de l'arithmétique à l'algèbre

1.5.1 Rupture entre deux modes de pensée

On remarque que l'algèbre constitue un obstacle majeur pour un nombre signifiants d'élèves du début du secondaire (Freiman & Lee, 2004). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre, en tant qu'élément de rupture entre deux modes de pensée, a d'ailleurs déjà fait l'objet de plusieurs études (Booth, 1988; Chevallard, 1989; Kieran, 1994; Vlassis & Demonty, 1999; Subramaniam, 2004). Pour l'apprenant, il ne s'agit pas uniquement de transférer ou généraliser des connaissances, mais de procéder à un changement de mode de raisonnement qui ne s'opère pas de façon spontanée. L'arithmétique utilise un nombre d'outils sémiotiques très limité, ces derniers ayant pour fonction de mettre des quantités en relation. Chevallard (1989) la considère comme étant le langage ordinaire, auquel on a ajouté le calcul sur les nombres. En général, faire de l'arithmétique se limite à effectuer des opérations en vue d'obtenir la valeur numérique d'une quantité inconnue, ce qui n'est pas nécessairement le cas avec le calcul algébrique.

En outre, l'élève ne doit pas toujours s'attendre à en arriver à un résultat numérique lorsqu'il fait de l'algèbre; il peut aboutir à une expression contenant des variables et même des signes opératoires, comme : $2x^2 + 3x$. Cela peut être difficile à concevoir étant donné la présence du signe d'addition que l'élève a l'habitude d'interpréter comme une opération qui demande à être effectuée. Il est d'ailleurs fréquent que des élèves commettent l'erreur de réduire cette expression à un seul terme ($5x^3$).

1.5.2 Interprétation du signe d'égalité

Lors du passage de l'arithmétique à l'algèbre, la façon d'interpréter le signe d'égalité évolue. En arithmétique, il est perçu comme l'annonce d'un résultat et les jeunes du niveau primaire croient qu'il doit obligatoirement être associé à une opération, considérant que $3 = 3$ n'est pas une formulation acceptable et qu'il est préférable de la remplacer par $0+3 = 3$ (Freiman & Lee, 2004). Pour les élèves qui font de l'arithmétique, le signe d'égalité signifie "donnent" ou "font" comme dans "3 et 5 font 8". Les enseignants peuvent d'ailleurs constater que des élèves commettent souvent cette erreur d'interprétation, lorsqu'ils effectuent des calculs de gauche à droite, et qu'ils pocèdent comme suit: $3 + 5 = 8 \times 7 = 56 \div 2 = 28$ (Stacey & MacGregor, 1997).

Lors des manipulations algébriques, le signe d'égalité demande à être interprété comme une relation d'équivalence entre deux quantités, ce qui ne va pas de soi pour beaucoup d'élèves (Kieran, 1981). Les équations du type $3x + 5 = 17$ peuvent être interprétées ainsi: « en multipliant un certain nombre par 3 et en y ajoutant 5, on obtient 17 ». Cette façon d'aborder les équations relève d'une conception arithmétique du signe d'égalité. Lorsque l'inconnu apparaît dans les deux membres de l'égalité, comme dans l'équation $2x + 4 = 5x - 5$, une conception algébrique de l'égalité est indispensable pour lui donner du sens, à savoir qu'il s'agit de deux écritures différentes du même nombre.

1.5.3 Évolution du statut des lettres

L'interprétation des lettres en calcul algébrique pose particulièrement problème. Tantôt elles sont vues comme l'abréviation de certains mots, et tantôt on leur attribue une valeur en fonction de l'ordre alphabétique, comme *« a=1, b=2, c=3,... »* (Stacey & MacGregor, 1997; Kieran, 1994; Kücheman, 1978). En arithmétique, la lettre occupe une place très accessoire et elle est totalement ignorée dans les calculs intermédiaires. À l'école primaire, on l'utilise parfois pour découvrir un "code secret" en lui assignant une valeur fixée à l'avance. Stacey & MacGregor (1997) croient que cette pratique pourrait être à l'origine de la croyance des élèves selon laquelle la valeur d'une lettre correspond au rang qu'elle occupe dans l'alphabet.

On remarque que les lettres sont rarement considérées comme des variables représentant des nombres et les formules comme des expressions qui indiquent la relation entre ces nombres. Par exemple, la formule de l'aire du rectangle : A = L x l est considérée comme une version simplifiée de la procédure à appliquer pour calculer l'aire d'un rectangle (Vlassis et Demonty, 1997).

Pour les élèves, il paraît insensé d'effectuer des opérations sur des lettres qui sont supposées représenter des nombres, mais dont les valeurs numériques demeurent inconnues. Or, s'il est vrai que ces derniers ont de la difficulté à composer avec des lettres ayant un tel statut, alors ils risquent fort d'être complètement dépassés lorsqu'ils seront confrontés à des expressions algébriques où se côtoient variables et paramètres, tous représentés par des lettres, mais dont les unes représentent des quantités inconnues, et les autres des quantités supposément connues, comme dans l'équation $y = ax + b$.

1.6 Nouvelle vision de l'enseignement et didactique de l'algèbre

Par le passé, les enseignants avaient l'habitude d'accorder très peu d'importance aux interactions et aux échanges dans les cours de mathématique. (Lafortune, Mongeau, et Pallascio, 2002). Cette discipline faisait généralement l'objet d'exposés magistraux qui se limitaient à la présentation de procédures et à l'application d'algorithmes. Avec le renouveau pédagogique basé sur le socioconstructivisme, les enseignants se voient contraints d'adopter une nouvelle conception de l'apprentissage. Selon cette nouvelle conception, l'enseignant ne transmet pas uniquement des connaissances; il propose des activités permettant aux élèves de construire leurs propres savoirs. Les activités de ce type sont généralement élaborées de manière à porter l'élève à se questionner, et peuvent faire l'objet d'une discussion en classe. L'enseignement de type socioconstructiviste ne se limite donc pas à l'exposé de type magistral; il est composé de situations d'apprentissages signifiantes et favorisant les échanges sociaux. Ainsi, pour les socioconstructivistes, les élèves apprennent mieux dans un contexte favorisant les interactions sociales où le jugement des élèves est sollicité.

Le recours au conflit sociocognitif, qui est caractérisé par la confrontation entre les opinions divergentes (Gilly, 1989), est fréquemment suggéré en tant que dispositif de dépassement des obstacles à l'apprentissage (Lefebvre, 2006; Gauthier, 2005). Il est source de progrès (Descaves, 1992), car il amène les partenaires à prendre conscience de l'existence des réponses différentes de la leur ou à considérer des informations ou des significations qui leur avaient échappé. Les conflits générés par de telles situations, amènent les élèves à partager leurs réflexions et à argumenter, ce qui peut favoriser, à moyen ou à long terme, la construction de nouvelles connaissances. Dans un tel contexte, le rôle de l'enseignant consiste à alimenter la discussion et à relancer la réflexion par un questionnement judicieux. Il doit être soucieux de présenter des objets mathématiques qui soient contextualisés et porteurs de sens, c'est-à-dire rattachés à des situations de la vie courante (Gilly, 1989).

Or, la plupart des concepts mathématiques avancés ne sont pas accessibles par les sens; ils sont constitués de notions abstraites qui existent seulement dans la pensée. C'est notamment le cas du langage algébrique qui, jusqu'à présent, a toujours fait l'objet d'un enseignement de type magistral. En effet, l'exposé magistral est souvent la seule méthode que les enseignants connaissent ou maîtrisent (Chamberland; Lavoie & Marquis, 1995). Ces derniers sont donc contraints à réorienter leur pratique pour adhérer à une nouvelle vision de l'apprentissage pour laquelle ils ne possèdent pas de repère et pour laquelle les enseignants d'expérience n'ont pas été formés.

1.7 Questions et objectifs de recherche

La problématique soulevée dans les précédentes pages indique que de tous les modes de représentations auxquels les mathématiques font appel, c'est surtout le langage algébrique qui cause des difficultés. Le passage de l'arithmétique à l'algèbre impose une rupture entre deux modes de pensée impliquant une évolution dans la façon d'interpréter certains concepts mathématiques. La pensée algébrique est particulièrement sollicitée lors de la conversion du langage naturel au langage algébrique, et c'est dans le processus de mise en équation algébrique que surgissent les problèmes les plus criants. C'est ce constat, de même que les implications didactiques qui y sont associées qui ont motivé la présente recherche et suscité certaines interrogations.

Questions :

Quels sont les éléments qui entravent la compréhension des élèves dans le processus de mise en équation algébrique ?

Quelles sont les pratiques éducatives qui influencent positivement le développement de la pensée algébrique ?

Objectifs de recherche:

Identifier certains éléments causant obstacle à la compréhension dans le processus de mise en équation algébrique.

Définir les pratiques enseignantes qui influencent positivement le développement de la pensée algébrique.

Chapitre II
Cadre conceptuel

Dans ce chapitre, les éléments à considérer dans l'apprentissage de l'algèbre sont dégagés. La première section porte sur l'habileté avec les langages qui joue un rôle de premier plan dans la réussite en mathématiques. Un bref aperçu historique de l'algèbre présente ensuite les fondements et fait connaître les différents usages de ce langage. La section suivante est consacrée au développement de la pensée algébrique qui constitue un élément crucial à considérer en didactique de l'algèbre. La dernière partie de ce chapitre traite des pratiques pédagogiques. On y parle du concept de transposition didactique, de la sémiotique dans l'apprentissage de l'algèbre et on présente quelques pratiques pouvant favoriser le développement de la pensée algébrique.

2.1 Le langage et les mathématiques

2.1.1 Compétences langagières et mathématiques

Selon certaines études, le langage exerce une forte influence sur la cognition. On a montré qu'il existe une relation entre l'habileté à comprendre le langage mathématique, les connaissances procédurales et la réussite en mathématiques (Bradley, 1990), mais les pratiques éducatives traditionnelles mettaient l'accent sur les procédures sans s'attarder à la compréhension du langage mathématique. D'après certaines études, la complexité des langages utilisés en mathématiques et en sciences, serait l'un des principaux facteurs à l'origine des difficultés qu'éprouvent les élèves dans ces disciplines (De Serres; Bélanger; Piché; Riopel; Staub & De Granpré, 2003). Les enseignants auraient donc avantage à adopter des stratégies d'intervention pour corriger les faiblesses des élèves sur le plan des langages (naturel, symbolique et graphique), afin de faciliter leurs apprentissages et améliorer leurs résultats scolaires.

En classe de mathématiques, l'élève est appelé à interpréter des graphiques et des diagrammes, à travailler dans le plan cartésien ou à traduire des données textuelles en équations algébriques pour pouvoir les solutionner et effectuer un retour au langage courant afin d'interpréter ses résultats. Il importe de faire en sorte que les élèves s'approprient correctement toutes ces formes d'écriture puisqu'à mesure que la scolarité avance, elles sont de plus en plus abstraites et de plus en plus utilisées pour introduire de nouvelles notions.

2.1.2 Importance du langage dans la compréhension de l'algèbre

Pour Sierpinska (1999), le sens et même la substance d'un contenu notionnel peuvent varier en fonction des choix que fait l'enseignant dans la préparation de ses cours ou de sa façon de communiquer avec les élèves. Déjà en 1988, Booth suggérait aux enseignants de s'exprimer de façon à mettre en évidence la relation qui existe entre deux nombres. Ainsi, il serait préférable de lire *« 3 fois le nombre p »* au lieu de *« 3p »* pour éviter que les élèves se méprennent sur le sens de cette expression en lui assignant la signification : *« 3 pommes »*. Stacey & Mc Gregor (1997) ont également souligné l'importance de mettre l'emphase sur le fait que les lettres utilisées en algèbre représentent des nombres. Ils conseillent entre autres d'éviter d'utiliser la formulation *« La lettre c représente le coût »* et de dire plutôt *« La lettre c représente le nombre de dollars »* et de préférer la formulation *« L représente le nombre de mètres »* à *« L représente la longueur »*. Ils suggèrent également de demander aux élèves d'exprimer les relations dans leurs propres mots lorsqu'ils travaillent avec les fonctions. Le fait d'avoir à exprimer à voix haute la signification des expressions qu'ils utilisent pousse les élèves à s'attarder à leur sens et à s'assurer de leur bien fondé.

Pour combler les lacunes observées chez les élèves en ce qui concerne leur interprétation des concepts sous-jacents aux structures algébriques, Vlassis et Demonty (1997) proposent d'enseigner l'algèbre à partir de la géométrie et des suites. L'approche par la géométrie permettrait de construire une image visuelle des termes non semblables en associant, par exemple, a^2 à un aire et 4a à un périmètre, donc deux entités différentes ne pouvant être réduites. Quant à l'élaboration de différentes formules pour représenter des suites, elles permettraient de donner du sens aux différents concepts liés à la généralisation et pourrait même fournir une aide aux élèves pour exprimer des nombres pairs, impairs, multiples, consécutifs, etc. Par exemple, la suite 3, 6, 9, 12, ... qui correspond à l'ensemble des multiples de trois, peut être représentée par l'expression « 3n » et celle-ci pourrait convenir à n'importe quel multiple de trois cité comme valeur inconnue dans la donnée d'un problème.

Cela dit, amener les élèves à donner du sens aux expressions algébriques qu'ils utilisent constitue un travail de longue haleine. Il est tout à fait légitime de s'attendre à ce que l'élève prenne quelques années pour s'approprier l'algèbre puisque ce langage s'est développé sur plusieurs siècles, et qu'il a atteint un niveau de complexité considérable (Kieran 1992).

2.2 L'évolution de l'algèbre au fil du temps

2.2.1 Bref aperçu historique

L'appropriation du langage algébrique demande plusieurs années d'investissement et implique des processus cognitifs particuliers. Pour Kieran (1992), certains de ces processus trouvent leur fondement dans l'histoire du symbolisme algébrique qui a connu une évolution s'étalant sur plusieurs siècles.

Dans l'histoire du développement de l'algèbre, on distingue trois grandes époques (Kieran, 1992). La période rhétorique qui date d'avant l'an 250, où le langage ordinaire est utilisé pour représenter des inconnus, de même que les opérations, à défaut de l'existence de symboles spécifiques. La période de l'algèbre numéreuse introduite par Diophante au 3e siècle, pendant laquelle l'utilisation de la lettre se limite à représenter des quantités inconnues. À cette époque, l'activité algébrique consiste principalement à découvrir la valeur numérique d'une lettre et non à exprimer des généralités. L'œuvre de Diophante est constituée en majeure partie de problèmes de premier et second degré dont les solutions sont entières ou fractionnaires.

Dans les années 1500, les travaux de Diophante commencent à circuler en Europe et inspirent Viète qui innove en associant la lettre à un nombre donné, aussi bien qu'à une quantité inconnue. Ce dernier utilise les symboles + et – qu'il a empruntés à l'allemand Widmann pour représenter la somme et la différence, ce qui permet d'alléger l'écriture. Il devient alors possible d'exprimer des solutions générales et d'utiliser l'algèbre en tant qu'outil de preuve, ce qui mène à la 3e époque du symbolisme algébrique : La période de l'algèbre symbolique. On doit à Viète la résolution des équations du 2e degré de la forme « $ax^2 + bx = c$ » et celles du 3e degré de la forme « $x^3 + ax = b$ ».

Durant les siècles qui suivent, l'expansion du symbolisme et la réduction de détails superflus facilitent le développement d'autres concepts mathématiques, notamment celui de fonction. La conception procédurale de la fonction en tant que processus d'entrée/sortie, est remplacée par une conception plus structurale par Dirichlet dans les années 1830. Celui-ci la définit comme une relation de correspondance entre des nombres réels, définition qui sera généralisée une centaine d'années plus tard par Bourbaki qui la voit comme une relation entre deux ensembles

Sans être exhaustif, cet historique permet d'illustrer comment, au fil du temps, le langage naturel a progressivement laissé place au symbolisme algébrique. L'usage même des symboles a évolué avec les années, passant d'une simple fonction de remplacement à des emplois de niveaux d'abstraction élevé. Il est devenu un outil indispensable dans plusieurs domaines et ses usages sont aujourd'hui très variés.

2.2.2 Les différents usages de l'algèbre

L'algèbre est l'instrument idéal pour énoncer simplement des propriétés numériques. Il se révèle être un moyen beaucoup plus efficace que l'arithmétique pour démontrer des propriétés particulières ou générales, et ce, sans compter que son écriture permet de conserver l'information pertinente tout en étant beaucoup plus concise que celle de la langue parlée. Pour l'utilisateur, il est aussi plus aisé de mémoriser une expression algébrique qu'un texte énonçant des propriétés numériques. Prenons par exemple la relation de Pythagore dans un triangle rectangle : Il va sans dire qu'il est beaucoup plus simple de retenir la formule « $c^2 = a^2 + b^2$ » que l'énoncé : *« Le carré de la mesure de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des mesures des cathètes. »* (Ledoux; Brousseau; Boivin & Ricard, 2007), page 37.

La modélisation est aussi un exemple de l'utilité du langage algébrique. Celle-ci permet d'interpréter des problèmes qui sont issus non seulement des mathématiques, mais d'une foule d'autres domaines. C'est notamment le cas des sciences qui utilisent une grande quantité de formules représentées sous forme d'équations algébriques. Celles-ci permettent de prédire le comportement d'une variable en fonction d'autres. Prenons, à titre d'exemple, la seconde loi de Newton $F=ma$. Cette formule, qui n'est rien d'autre qu'une équation algébrique, permet de déterminer la force appliquée sur un corps d'après sa masse et l'accélération subie. Par une simple manipulation algébrique, cette relation pourrait aussi servir à calculer l'accélération que subira un corps en fonction de la force qui lui sera appliquée.

À l'origine, les mathématiques ont été crées pour cerner le monde réel et le modéliser. Pour Chevallard (1989), le modèle mathématique existe sous deux registres: un système et un modèle mathématique de ce système. Quant au processus de modélisation, il s'effectue en trois étapes :

- Une définition du système à étudier précisant les aspects pertinents de ce système.

- La construction du modèle en établissant des relations entre les variables et le système étudié.
- L'utilisation du modèle dans le but de produire des connaissances prenant la forme de nouvelles relations entre les variables du système.

Il serait possible, à titre d'exemple, d'étudier la trajectoire d'une balle de golf à partir du modèle mathématique illustré ci-dessous (Breton; Deschênes & Ledoux 1996) :

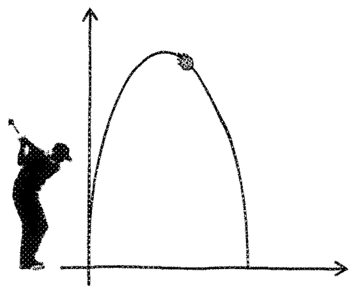


Figure 1: Modélisation de la trajectoire d'une balle de golf

Comme le montre la figure 1, la trajectoire de la balle de golf pourrait être associée à une fonction du second degré mettant en relation les variables temps et hauteur.

Enfin, qu'il s'agisse de résoudre des problèmes, d'exprimer des généralités, de démontrer des propriétés ou de modéliser, l'utilisation de l'algèbre s'avère essentielle. Toutefois, sa maîtrise nécessite un mode de pensée particulier.

2.3 La pensée algébrique

2.3.1 Les deux dimensions de l'algèbre

Douady (1986) a établi deux dimensions de l'algèbre, soient la dimension outil et la dimension objet de l'algèbre. Bien qu'elle fasse la distinction entre ces deux dimensions, elle précise qu'elles ne sont ni hiérarchisées, ni indépendantes l'une de l'autre. Il importe cependant de les distinguer.

L'algèbre est un ensemble structuré d'objets tels les coefficients, les variables, les équations, les fonctions, etc. pouvant être représentés sous différentes formes. La dimension objet de l'algèbre fait appel à la manipulation formelle des expressions algébriques ainsi qu'à l'interprétation de ces objets.

L'utilisation de l'algèbre en tant qu'objet peut se limiter à effectuer des manipulations sans finalité explicite comme additionner des polynômes, factoriser une équation du 2e degré ou faire l'étude des signes d'une fonction. Cela peut s'apprendre par imitation, à l'aide d'exercices de répétition ou en mémorisant des algorithmes.

Quant à la dimension outil de l'algèbre, celle-ci occupe un domaine plus vaste que la dimension objet. Elle peut être utilisée pour résoudre des problèmes, pour généraliser ou démontrer des propriétés numériques, et pour modéliser.

Utiliser l'algèbre en tant qu'outil implique une maîtrise fonctionnelle du calcul algébrique. C'est notamment le cas lorsqu'on doit partir d'énoncés présentés dans le langage naturel pour les convertir en équations algébriques, pour ensuite les solutionner à l'aide des propriétés de transformation des équations. L'utilisation de l'outil algébrique est très efficace pour traiter plusieurs inconnus à la fois et permet une économie de temps pour qui sait l'utiliser à bon escient. À titre d'exemple, le problème suivant implique une maîtrise fonctionnelle du calcul algébrique :

Le produit de deux nombres naturels pairs consécutifs est égal à 28 de plus que dix fois le plus grand de ces deux nombres. Quels sont ces deux nombres ?

Pour résoudre ce problème, l'élève doit poser lui-même l'équation qui le mènera à la solution en établissement correctement les relations qui existent entre les nombres cherchés. Cela implique le recours à certaines habiletés mentales qui sont très sollicitées en mathématiques, mais qui ne font pas spécifiquement l'objet d'un enseignement.

2.3.2 Notions enseignables et notions non enseignables

Chevallard (1991) fait la distinction entre les objets de savoir, les notions paramathématiques et les notions protomathématiques qui constituent des strates de plus en plus profondes du fonctionnement didactique du savoir.

Pour les enseignants de mathématiques, les objets de savoir sont les notions mathématiques (l'addition, le cercle, l'exponentiation, etc.). Ces notions sont clairement identifiées dans les programmes de mathématiques et font l'objet d'un enseignement direct. Comme elles sont construites par des définitions, elles peuvent facilement faire l'objet d'une évaluation. L'enseignant s'attend à ce que l'élève sache en donner la définition, les propriétés et les utiliser correctement.

Les notions paramathématiques, quant à elles, sont des notions outils de l'activité mathématique (la démonstration, les paramètres, etc.). Ce sont des objets de savoir « auxiliaires » nécessaires à l'apprentissage des mathématiques. Elles ne font pas l'objet d'un enseignement en tant que tel, mais elles doivent tout de même être apprises. Ces notions sont généralement exclues de l'évaluation directe.

Quant aux notions protomathématiques, elles sont situées dans une strate encore plus profonde. Ces dernières font référence à certaines aptitudes, comme la reconnaissance de certaines occasions d'emploi des notions mathématiques ou la capacité de faire des liens entre les éléments de contenus. Elles font appel à des capacités sous-jacentes qui sont attendues de l'élève sans être spécifiquement enseignées.

2.3.3 Conceptions procédurale et structurale

Comme il a été mentionné précédemment, le passage de l'arithmétique à l'algèbre nécessite une certaine évolution dans la façon de penser. En fait, il implique une transition entre une conception procédurale et une conception structurale (Sfard, 1991). Le langage algébrique est effectivement beaucoup plus qu'un outil procédural visant à effectuer des opérations sur des nombres. Il est utilisé en tant qu'objet structural, c'est-à-dire fondé sur des transformations d'écritures algébriques.

De manière générale, la résolution d'un problème arithmétique consiste à choisir les opérations appropriées pour calculer la valeur d'inconnus à partir de données connues. Chacune des étapes du processus permet d'obtenir une valeur numérique intermédiaire qui, par la suite, peut être utilisée pour en calculer une autre, et ainsi de suite, jusqu'à l'obtention de la solution. Ces suites d'opérations font référence à une conception procédurale des mathématiques.

La résolution algébrique, quant à elle, consiste à mettre en relation des inconnus et des données à l'aide d'expressions algébriques qui sont considérées comme des objets en soi. La progression vers la solution s'effectue en suivant un raisonnement logique et rigoureux où les structures présentes sont transformées en d'autres structures. Cette perspective dite structurale implique le recours à un raisonnement qui s'appuie sur des règles et des conventions qui régissent un langage abstrait.

Pour Sierpinska (1999), l'algèbre est un produit de la pensée analytique et elle nécessite un fonctionnement cognitif particulier. C'est une pensée qui s'appuie sur des systèmes de représentations externes et conventionnels, qui permet d'entrer en contact avec un objet à partir d'une description verbale. *« La langue ne sert pas seulement à nommer les objets, mais aussi à les décrire et surtout à les créer par des définitions et des systèmes de propositions »* p. 159.

Les conceptions procédurale et structurale d'une notion mathématique seraient hiérarchisées, mais indissociables l'une de l'autre. Selon Sfard (1991), il est aussi illusoire d'espérer qu'une personne puisse accéder à une compréhension structurale d'un objet sans d'abord être passée par une compréhension procédurale, que de reconnaître l'image d'un cube en perspective sans jamais avoir vu un cube en trois dimensions dans la réalité. Pour elle, l'évolution des concepts mathématiques consiste en une longue chaîne de transition entre des conceptions procédurales et structurales, où certaines notions deviennent des unités de base pour des théories plus avancées.

Pour illustrer cette chaîne de transition vers des objets de plus en plus élaborés, elle a construit le modèle général de formation d'un concept. Le schéma de la figure 2 illustre ce modèle qui montre que la transition des opérations mathématiques vers les objets abstraits s'effectue en trois étapes : L'intériorisation, la condensation et la réification.

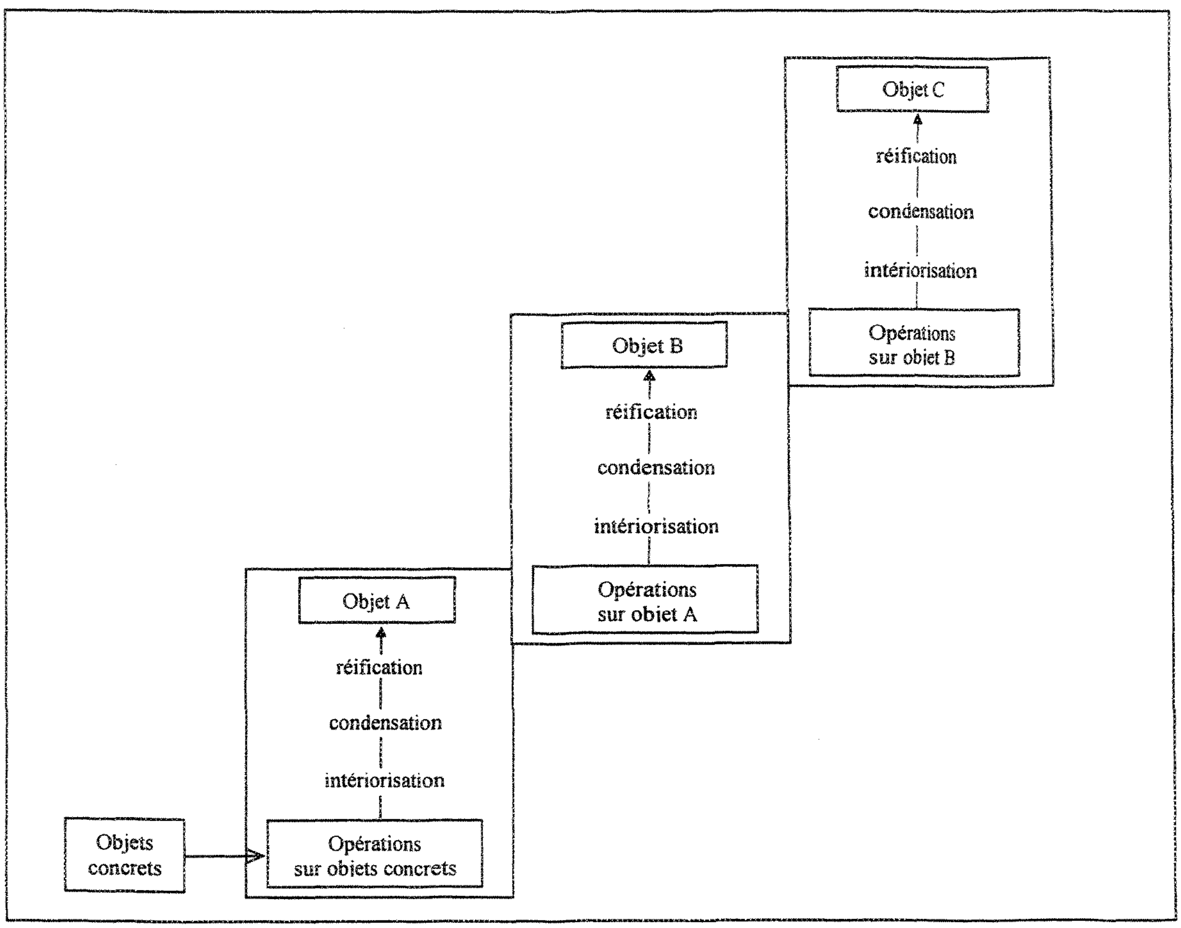


Figure 2: Modèle général de formation d'un concept de Sfard (1991)

À la phase d'intériorisation, l'apprenant est familiarisé avec des opérations lui permettant d'accéder à un nouveau concept à partir d'objets déjà conceptualisés (comme le comptage qui repose sur les nombres naturels ou la soustraction qui ouvre la voie sur les nombres négatifs). Graduellement, l'élève devient compétent avec ces opérations et ressent de moins en moins le besoin d'aller dans les détails. Il atteint alors la phase de condensation qui consiste à compresser les longues séquences d'opérations en unités plus maniables. À la phase de condensation, l'élève peut combiner des opérations, faire des comparaisons et généraliser plus facilement. C'est seulement à partir du moment où il devient capable de concevoir la notion comme une entité en soi qu'on peut dire que le concept a été réifié. La réification est le moment où l'intégration de concepts de haut niveau débute. C'est lorsque la personne est capable de concevoir l'objet comme faisant partie intégrante d'un ensemble bien défini, et non seulement en tant que prescription pour certaines opérations. C'est, en d'autres mots, lorsqu'elle a accédé à une conception structurale de l'objet. Une fois l'objet bien conceptualisé, celui-ci pourra ensuite servir de tremplin pour accéder à des notions de niveau supérieur en suivant le même processus.

Cette théorie de Sfard fait ressortir que lorsqu'une personne est confrontée à une nouvelle notion, la conception procédurale est habituellement la première à être développée. L'enseignant ne peut donc aspirer à amener directement ses élèves vers une conception structurale d'un objet mathématique. Il doit s'attendre à ce que ceux-ci mettent un certain temps pour y parvenir. Ainsi, le travail de l'enseignant consiste à accompagner les élèves dans leur progression vers une conception structurale de l'algèbre, c'est-à-dire vers la pensée algébrique.

2.3.4 Le développement de la pensée algébrique

Il semble que le contexte mathématique dans lequel les élèves évoluent puisse contribuer au développement de la pensée algébrique. Selon Teppo & Esty (1995), la structure d'une tâche a une incidence sur le type de connaissances qu'elle fait intervenir.

Voici trois exemples pouvant être résolus à l'aide de la formule quadratique, mais dont l'énoncé diffère:

Exercice numéro 1 : (Teppo & Esty, 1995)

Calculer $-b \pm \sqrt{\dfrac{b^2 - 4ac}{2a}}$ pour $a = 5$, $b = 2$ et $c = -3$

Dans ce type d'exercices, l'élève n'a pas à interpréter les symboles, il doit simplement remplacer les variables par les valeurs proposées, à la manière d'un ordinateur.

Exercice numéro 2 (Teppo & Esty, 1995) :

Utiliser le théorème de la fonction quadratique pour résoudre ces équations :

a) $5x^2 - 7x - 12$
b) $10 - 2x^2 + 7x = 0$
c) $x(x + 1) = 7$

Dans ce second exercice, l'élève doit centrer son attention sur la forme générale de l'équation quadratique, ce qui était ignoré dans l'exercice précédent. Toutefois, il s'agit encore là d'une simple utilisation de la formule dans le but d'en arriver à un résultat qui n'est pas signifiant pour l'élève.

Exercice numéro 3 (Breton & al, 1996 p.305) :

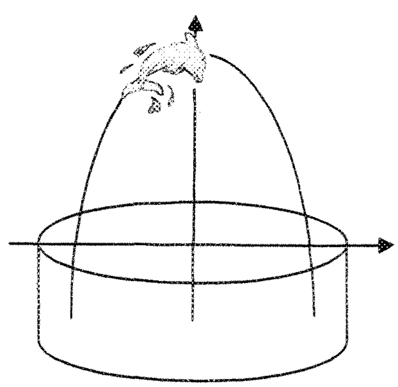


Figure 3 : Trajectoire du dauphin

Au cours d'un spectacle, le dauphin Kino doit effectuer un saut hors de l'eau. La trajectoire qu'il décrit dans un système gradué en mètres est la parabole d'équation :
$f(x) = -0{,}3125(x+4)(x-4)$

Sur quel intervalle le dauphin est-il hors de l'eau ?

L'énoncé de ce troisième exercice ne fait pas référence au théorème de la fonction quadratique, ce qui implique que l'élève doive comprendre par lui-même qu'il faut y avoir recours. Il s'agit là d'une habileté sous-jacente de l'activité mathématique. Cet exercice demande implique également d'interpréter les variables en fonction de ce qu'elles représentent dans la situation. Le théorème prend ici tout son sens; il occupe un statut d'outil et commande une conception structurale de l'objet mathématique. Toutefois, l'élève confronté à cet exercice trop précocement aurait sans doute du mal à s'acquitter de la tâche. Les acquis procéduraux n'étant pas assez solides, il ne disposerait pas des assises nécessaires à sa résolution et le sens lui échapperait. Cela dit, pour donner du sens, il n'est pas essentiel de recourir à la dimension outil de l'algèbre.

En effet, Douady (1994) estime que les situations dans lesquelles les élèves évoluent peuvent être génératrices de sens selon deux points de vue : sémantique ou syntaxique. Lorsque les notions occupent le statut d'outil, c'est-à-dire qu'elles sont mises en contexte et qu'on en fait usage pour résoudre des problèmes ou interpréter de nouvelles situations, elles sont génératrices de sens d'un point de vue sémantique. Lorsqu'il s'agit d'identifier des théorèmes, de formuler des définitions ou encore d'effectuer des opérations en respectant des règles précises, les notions sont décontextualisées et occupent le statut d'objet. Elles sont alors génératrices de sens d'un point de vue syntaxique. Ces deux aspects du travail mathématique contribuent à la construction de sens et à la capitalisation des savoirs, c'est pourquoi il importe de travailler autant sur les techniques par le biais d'exercices que sur les outils à l'aide de problèmes bien construits.

Kinzel (2001), a fait ressortir trois caractéristiques importantes à prendre en considération lors de l'élaboration d'un problème faisant intervenir le langage algébrique:

- Imposer le travail sur une valeur inconnue :
  La tâche proposée devrait être telle que le recours au travail sur une variable soit nécessaire pour pouvoir aller de l'avant.

- Présenter quelques ambigüités ou de multiples références à la valeur cherchée : Lorsqu'un problème présente des ambiguïtés ou de multiples références à l'inconnu, l'élève doit s'attarder au sens qu'il attribue à la variable pour construire les expressions appropriées.

- Coordonner plusieurs informations dans des situations complexes : Le premier travail de l'élève devrait consister à organiser l'information sans s'attendre à un certain type d'application dans des cas spécifiques.

La notion de problème dans un contexte plus large que celui de l'algèbre devrait, selon Douady (1994), répondre à quatre conditions pour être source et occasion d'apprentissage:

- À l'aide de ses connaissances antérieures, un élève peut comprendre l'énoncé et est en mesure d'entreprendre une démarche.

- Avec ses connaissances, l'élève ne peut pas résoudre complètement le problème, c'est-à-dire qu'il ne s'agit pas d'une simple application de notions ou méthodes connues.

- Les objets d'enseignement que l'enseignant veut que les élèves apprennent sont des outils adaptés à la résolution du problème.

- Le problème s'exprime dans au moins deux cadres (algébrique, graphique, numérique, …).

Comme on peut le constater, la construction des savoirs ne peut s'opérer sans le recours à des situations variées et de plus en plus complexes. Les choix pédagogiques semblent donc revêtir une place importante dans le processus didactique, ce qui nous amène à parler des pratiques pédagogiques.

2.4 Les pratiques pédagogiques

2.4.1 La transposition didactique

Les mathématiques ont été créés dans un esprit particulier et façonnées dans l'histoire. Ces objets, qui sont une invention humaine, sont désignés par Chevallard (1991), sous le terme de savoir savant. Ceux-ci ne sont pas directement enseignables, et pour les rendre aptes à être enseignés, le didacticien doit leur faire subir certaines transformations. Le savoir enseigné est alors différent du savoir initial et, pour ainsi dire, coupé de ses origines. Le concept de transposition didactique renvoie au passage du savoir savant au savoir enseigné et à la distance qui les sépare.

En tant qu'intermédiaire entre les mathématiciens et les apprenants, l'enseignant a pour mission d'adapter le contenu du programme pour le rendre assimilable par ceux qui doivent se l'approprier. Il se doit en même temps de le conserver suffisamment proche du savoir savant pour ne pas le dénaturer. Enseigner consiste donc à faire des choix qui permettront aux élèves d'apprendre en construisant leurs propres connaissances.

En effet, selon la thèse constructiviste de l'apprentissage, ce sont les apprenants qui construisent leurs propres connaissances à travers des situations-problèmes. Les situations-problèmes sont des activités d'apprentissage que les apprenants ne parviennent pas à résoudre complètement à l'aide des savoirs qu'ils possèdent déjà, ce qui les contraint à s'adapter. Le déséquilibre provoqué par ces situations pousse les élèves à reconsidérer leur point de vue, ce qui peut mener à une réorganisation des connaissances ou à l'acquisition de nouveaux savoirs. Avec l'ajout de la dimension sociale amenée par Vygotsky (1985), l'appoche de type de constructiviste a évolué vers celui de socioconstructivisme. Pour Vygotsky, la place des interactions sociales est centrale dans le processus d'apprentissage. L'apprenant ne construit pas ses connaissances seul, mais en collaboration avec les pairs et l'enseignant. L'enseignant occupe alors le rôle de médiateur qui favorise les échanges et relance la discussion.

En conformité avec l'approche socioconstruviste de l'apprentissage, l'une des principales tâches de l'enseignant consiste à traduire le programme en contenus de cours et à présenter des tâches susceptibles de faire évoluer les connaissances et les compétences des élèves. Lorsque les concepts sont assez simples, il peut suffire de décomposer l'action et de présenter les étapes successives, mais l'enseignement de l'algèbre ne se résume pas à de tels procédés. Pour Douady (1994) : *« ...on a besoin de prendre en compte l'influence du sens dans l'élaboration d'algorithmes et, en même temps, de travailler à s'en détacher »,* p. 11 . La conquête du sens est devenu aujourd'hui un élément primordial à considérer dans l'apprentissage des mathématiques car la mémorisation d'algorithmes ne peut suffire à elle seule à permettre une réelle compréhension des concepts mathématiques. L'algèbre, plus particulièrement, est un langage composé d'objets de nature symbolique appartenant à l'univers des significations et des représentations. On ne peut ignorer le rôle de la sémiotique dans l'apprentissage de cette discipline.

2.4.2 La sémiotique

Charles S. Pierce (1978), fondateur de la sémiotique (ou science des signes), fut l'un des premiers à s'intéresser au rôle de la fonction symbolique dans la pensée humaine.

Pour lui, penser et signifier sont un même processus que l'on nomme sémiosis, et toute pensée s'effectue à l'aide de signes. Le signe permet de se représenter un objet absent. C'est un symbole spécialisé, qui est souvent collectif et qui sert à communiquer. La fonction symbolique facilite la réflexion et permet l'établissement du jugement. Elle permet une multitude de phénomènes de pensée et de signification, allant de l'expression artistique à la démonstration d'un théorème.

Pour Pierce, un signe est une triade :

- Un representamen : Signe qui tient lieu de quelque chose et qui s'adresse à quelqu'un.
- Un interprétant : Signe que le représentamen évoque dans l'esprit de celui qui le perçoit.
- Un objet : Raison d'être du signe, ce qu'il représente en réalité.

Il importe ici de préciser que le rôle joué par les représentations sémiotiques ne se limite pas à la communication ou au remplacement. Duval (2006) précise que leur principale fonction est : *« ... le traitement d'informations, c'est-à-dire la transformation intrinsèque de leurs représentations en d'autres représentations pour produire de nouvelles connaissances »* p.57. Il s'est grandement intéressé au rôle des représentations sémiotiques dans l'activité mathématique.

> *La spécificité des représentations sémiotiques consiste dans ce qu'elles sont relatives à un système de signes, le langage, l'écriture algébrique ou les graphes cartésiens, et qu'elles peuvent être converties en des représentations équivalentes dans un autre système sémiotique, mais pouvant prendre des significations différentes pour le sujet qui les utilise* (Duval, 1995, p.17).

Toujours selon Duval (1995), le développement des représentations mentales est lié à l'acquisition et à l'intériorisation de systèmes et de représentations sémiotiques, à commencer par le langage. Ainsi, pour que les apprenants aient accès à l'objet de savoir, ils doivent disposer d'au moins deux systèmes sémiotiques différents pour le représenter et être capables de le convertir spontanément d'un système à un autre. Par exemple, l'élève à qui on présente : $0{,}2$, $2/10$ et $2x10^{-1}$ devrait être en mesure de reconnaître qu'il s'agit du même nombre présenté sous des formes différentes. Il en va de même pour certaines expressions algébriques qui n'utilisent pas les mêmes lettres mais qui font référence au même objet ($2x + 3$ et $2n + 3$, par exemple) ou celles dont l'ordre des termes est inversé ($5x - 100$ et $-100 + 5x$, par exemple).

2.4.3 Sémiotique dans l'apprentissage des mathématiques

En général, le déroulement d'un cours de mathématiques consiste à présenter des exemples en rapport avec un objet mathématique et à demander aux élèves d'effectuer des tâches similaires. Pour Bloch (2005), cette façon de procéder ne permet pas d'accéder à la connaissance fondamentale de l'objet (utilité, propriétés, ...). Elle peut même porter certains élèves à considérer la connaissance mathématique comme une activité ritualisée où l'on reproduit des modèles et à adopter une attitude de dépendance envers l'enseignant auquel ils se réfèrent pour justifier leur raisonnement par des formulations du genre *« C'est ce que l'on a appris »* ou *« C'est ce qu'il faut faire »*. C'est ce constat qui a amené Brousseau (1988) à proposer le concept de dévolution. La dévolution consiste à suggérer à l'élève des situations qui suscitent chez lui une activité non convenue et à faire en sorte qu'il se sente responsable du résultat obtenu. Cela l'amène à accepter sa part de responsabilité dans l'acte d'apprendre.

Bloch (2005) postule que l'analyse sémiotique peut aider à identifier les difficultés rencontrées par des élèves en situation de résolution de problème. Selon elle, la théorie des situations didactiques (TDS) proposée par Brousseau (1997), qui a d'abord été conçue pour les concepts mathématiques de l'école primaire, pourrait être adaptée à l'école secondaire. Elle propose de jumeler cette approche à la sémiotique de Pierce dans les pratiques pédagogique.

La TDS a pour objectif de donner du sens aux symboles mathématiques. Elle propose plusieurs situations en lien avec des thèmes mathématiques du primaire qui permettent aux élèves de s'engager dans un processus de découverte. Chacune de ces situations se déroule dans un milieu composé d'objets concrets permettant aux élèves d'expérimenter, et donne accès à des procédures de vérification à partir desquelles ils peuvent formuler des propriétés mathématiques.

Adapter cette stratégie à l'école secondaire peut sembler difficile puisque les mathématiques de ce niveau sont constituées de symboles abstraits. Le succès de la méthode proposée par Bloch (2005) réside donc dans la capacité des situations à proposer des activités qui mèneront les élèves à interpréter les symboles du milieu. Autrement dit, elles doivent mettre les élèves en contact avec une variété de signes, comme les symboles mathématiques, et permettre à l'enseignant de déterminer si le lien entre le signe et l'objet est bien établi par l'élève. Cette approche se déroule en trois phases :

- La première phase consiste à faire évoluer les élèves dans un milieu qui leur fournit des rétroactions, afin de leur permettre d'énoncer des propriétés.

- La seconde phase consiste à demander aux élèves de représenter leurs résultats (calculs, écrits, justification...). Dans un premier temps, les élèves formulent des propriétés mathématiques avec leurs propres symboles. À ce stade, on n'exige pas des élèves d'élaborer des écritures mathématiques correctes, mais de produire leur propre formulation. Ces écritures constituent des connaissances « privées » qui peuvent être exprimés à l'aide de différentes représentations sémiotiques, incluant les dessins, les mots, les phrases, les graphiques ...

- La dernière phase consiste en la conceptualisation des objets mathématiques.

Généralement, lors de la seconde phase, il est possible de constater que le lien entre le symbole et l'objet n'est pas tout à fait bien établi, d'où la nécessité d'étudier la dimension sémiotique dans le processus de conceptualisation. Il est alors essentiel pour l'enseignant d'avoir une vision claire de l'utilisation que font les élèves des différentes représentations sémiotiques et de comprendre leur niveau d'interprétation.

2.4.4 Didactique de l'algèbre

Dans nos écoles secondaires, on enseigne les notions algébriques à partir de manuels scolaires. Dans ces ouvrages, les règles de transformation des équations algébriques sont souvent présentées sans justification par souci d'économie d'écriture.

Pour Cortés et Kavafian (1999), cette absence de justification amène un grand nombre d'élèves à se représenter les mathématiques comme une juxtaposition de règles, correctes et parfois fausses, sans jamais s'interroger sur la justification des règles utilisées. Puisque les significations construites par les élèves risquent d'influencer leurs performances actuelles et à venir, le rôle de l'enseignant consiste en grande partie à relever les erreurs et à les aider à faire évoluer leurs conceptions erronées.

Plusieurs auteurs (Fluckiger, 2006; Lemoyne, 2000 ; Baruk, 1985; Astolfi, 1997) ont déjà mis en évidence la place inhérente de l'erreur dans les apprentissages. L'erreur est considérée d'un point de vue positif, comme une indication que l'élève est en processus d'apprentissage. Elle est l'expression d'une connaissance antérieure qui fait obstacle à de nouveaux apprentissages. Analyser les erreurs commises par les élèves permet d'en comprendre le sens et d'apporter le traitement didactique approprié. Elle est donc un élément fondamental du processus d'apprentissage scolaire.

Demander aux élèves d'exprimer dans leurs propres mots ce qu'ils comprennent de certains concepts peut contribuer à s'enquérir de leurs perceptions et susciter leur progression. L'apport de la théorie des interactions sociales (Vygotsky, 1985) de même que l'importance des conflits socio-cognitifs (Gilly, 1989) dans le processus d'apprentissage sont connus depuis longtemps. Pour Gilly (1989), le conflit socio-cognitif, qui est caractérisé par une confrontation des idées dans une perspective de dépassement des contradictions pour parvenir à une réponse commune, est source d'apprentissage. Radford et Demers (2004), indiquent que la communication en classe de mathématiques est un moyen incontournable d'apprentissage qui englobe diverses facettes de l'activité mathématique. Ils ajoutent qu'en participant à une discussion avec ses pairs et l'enseignant, l'élève acquiert une conscience de plus en plus nette de l'objet d'apprentissage.

2.5 Principaux constats sur lesquels s'appuie cette recherche

Les lectures relevées lors des pages précédentes ont fait ressortir que les habiletés langagières influencent positivement la réussite en mathématique (Booth, 1988; Bradley, 1990; Sierpinska, 1999; De Serres et al., 2003). La section portant sur l'historique de l'algèbre a illustré comment le langage algébrique a évolué au fil du temps (Kieran, 1992) et combien ses applications se sont multipliées, à tel point qu'il est devenu un outil indispensable dans plusieurs domaines d'étude de niveaux supérieurs. Par conséquent, l'algèbre est aujourd'hui un langage très rigoureux avec un niveau d'abstraction élevé, mais son appropriation ne se fait pas sans heurt puisqu'elle commande un mode de pensée particulier. Un premier objectif de la présente recherche consiste donc à déterminer les éléments qui entravent la compréhension des élèves en algèbre. Pour ce faire, on utilise le processus de mise en équation car il fait intervenir la dimension outil de l'algèbre.

En effet, on a vu que l'algèbre comporte deux dimensions : La dimension objet et la dimension outil (Douady, 1986). La dimension objet de l'algèbre réfère à la manipulation d'expressions algébriques et elle peut être apprise simplement en reproduisant des exemples qui servent de modèle. Quant à la dimension outil de l'algèbre, elle fait appel à des processus mentaux de plus haut niveau comme la reconnaissance d'utilisation d'un concept ou la capacité d'abstraction. Or, pour Chevallard (1991), il s'agit là d'habiletés qui ne sont pas directement enseignables puisqu'elles font appel à des processus internes. L'utilisation de l'algèbre en tant qu'outil exige une conception structurale, c'est-à-dire une connaissance approfondie de l'objet par opposition à la conception procédurale qui est basée uniquement sur les opérations sur les nombres. Par contre, le modèle de formation d'un concept apporté par Sfard (1991) montre que ces deux conceptions sont hiérarchisées, mais indissociables l'une de l'autre puisque la conception procédurale précède inévitablement la conception structurale dans le processus de formation d'un concept. L'apprentissage du calcul algébrique se caractérise donc par un équilibre entre la construction de sens et l'habileté technique avec des algorithmes (Douady, 2004). Cela dit, il n'est pas évident de traduire cette préoccupation par des gestes concrets en classe de mathématiques, c'est pourquoi le second objectif de cette recherche consiste à identifier des pratiques éducatives qui influencent positivement le développement de la pensée algébrique. Toutefois, avant d'en arriver là, il importe de savoir comment l'élève évolue dans l'apprentissage de l'algèbre.

Lorsqu'il se familiarise à un nouvel objet, l'apprenant peut lui attribuer un sens plus ou moins exact, ce qui crée un obstacle à son apprentissage. En l'occurrence, les activités proposées par les enseignants devraient être conçues de façon à contrer les effets perturbateurs des représentations qui sont propres à chacun. C'est dans cette optique que Bloch propose de jumeler la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) à l'analyse sémiotique dans les cours de mathématiques. La TDS pourrait favoriser la construction de connaissances en tant qu'outils de solution dans une situation, et l'analyse sémiotique permettrait de déceler les écarts entre ce qui a été enseigné et ce qui a été perçu. Cela suppose le recours aux échanges verbaux, ce qui amène à penser que la communication est un moyen incontournable d'apprentissage puisqu'elle permet d'apporter les correctifs aux erreurs commises par les élèves. Elle représente ainsi un élément de solution à certaines erreurs.

Chapitre III
Cadre méthodologique

Ce chapitre présente la méthodologie utilisée pour cette étude. Elle s'inscrit dans le contexte de l'implantation du renouveau pédagogique au deuxième cycle du secondaire, au moment où les élèves présentent de sérieuses lacunes en algèbre. Le premier objectif de la recherche étant de comprendre les difficultés des élèves lors du processus de mise en équation algébrique, il semblait pertinent de débuter par l'étude des productions écrites des élèves. Pour ce faire, une épreuve de quatre questions faisant intervenir la mise en équation algébrique leur a été administrée. Celle-ci était construite de manière à commander la pensée structurale (voir section 2.3.3), et présentait un niveau de difficulté suffisamment élevé, pour permettre un questionnement en profondeur lors des entretiens subséquents. C'est la composition de cette épreuve de même que les constats à la suite des entretiens individuels qui ont permis de répondre au second objectif de la recherche qui consistait à identifier des pratiques favorisant le développement de la pensée algébrique. Les pages qui suivent décrivent le type de recherche dont il s'agit, la composition de l'échantillon, les instruments de cueillette de données, de même que le déroulement et la durée des séances.

3.1 Type de recherche

La recherche est de type qualitatif interprétatif. Dans ce type de recherche, on ne tente pas d'établir un lien de cause à effet, mais on cherche à mieux comprendre certains phénomènes à partir de l'opinion de ceux qui les vivent (Karsenti & Savoie-Zajc, 2004). Les données obtenues proviennent en partie du discours des élèves à partir d'un travail sur le terrain. Celles-ci ne sont pas généralisables car l'échantillon n'est pas choisi en fonction de la représentation de la population. Il est de petite taille et il est composé d'élèves qui sont tous issus d'un même groupe-classe.

3.2 Composition de l'échantillon

L'échantillon choisi était uniquement composé d'élèves de troisième secondaire fréquentant l'école secondaire de l'Odyssée Dominique-Racine de Chicoutimi. Ils étaient tous issus d'un même groupe d'élèves, soit une classe de mathématique de profil régulier. Le profil régulier est la voie empruntée par la majorité des élèves de troisième secondaire de cette école et constitue la suite logique du deuxième secondaire régulier. Le nombre d'élèves ayant répondu au questionnaire correspond au nombre d'élèves composant le groupe, soit 31 élèves.

Les élèves faisant partie de ce groupe ont tous déjà été familiarisés avec la mise en équation algébrique au cours de l'année précédente, puisque l'algèbre constitue l'un des éléments du programme de mathématiques de deuxième secondaire. Les participants à cette étude possèdent donc une expérience suffisante en algèbre pour les besoins de la présente recherche.

3.3 Instruments de collecte de données

3.3.1 Épreuve écrite

Le principal intérêt de cette recherche étant de comprendre le raisonnement des élèves dans un contexte impliquant une maîtrise fonctionnelle du calcul algébrique, l'épreuve administrée devait se composer de problèmes faisait appel aux dimensions objet et outil de l'algèbre. Ainsi, la tâche qui a été proposée aux élèves consistait, dans un premier temps, à convertir des énoncés présentés dans le langage naturel en équations algébriques, pour ensuite les solutionner à l'aide des propriétés de transformation des équations.

Chacun des problèmes représentait une situation où il fallait traiter plusieurs inconnus devant être exprimés les uns en fonction des autres à l'aide d'une variable. Le niveau de difficulté des exercices proposés dans cette épreuve était gradué afin de situer le moment où les difficultés apparaissaient. De plus, chacune des questions a été élaborée en vue d'imposer une gradation dans le degré d'implication de l'algèbre mis en jeu.

Pour parvenir à résoudre chacun des problèmes, l'élève devait franchir les quatre étapes suivantes avec succès :

- Déterminer et inscrire les différents inconnus
- Représenter chacun des inconnus par une expression algébrique appropriée
- Traduire les informations par une équation à une variable
- Résoudre l'équation posée

Les questions faisant partie de l'épreuve ont été spécifiquement construites pour la présente étude. Elles ont été inspirées de problèmes que l'on retrouve dans le manuel de classe des élèves de 3e secondaire (Breton, 1996) et retravaillées pour les besoins de la présente étude. Chacune d'elles devait présenter une ou des particularités devant être prises en considération, lors de la résolution, de manière à imposer une interprétation des données.

La première question de l'épreuve visait à déterminer les difficultés associées à la procédure et aux techniques de résolution d'équations. L'élève devait donc être en mesure de résoudre le problème, en reproduisant fidèlement la démarche exposée par l'enseignante. Cette question comportait donc plusieurs similarités avec l'exemple présenté en classe :

- Aucune information n'était fournie sur l'une des valeurs cherchées
- La relation entre les inconnus pouvait être établie en fonction de celle-ci
- L'équation à poser était une somme dont on connaissait la valeur

Les trois autres questions visaient à déterminer la compétence de l'élève à utiliser l'algèbre dans sa dimension outil. Pour les besoins de la cause, le niveau d'implication de l'algèbre mis en jeu devait être plus élevé. L'objectif étant de forcer l'élève à pousser plus loin son raisonnement, chacune des questions a été construite de manière à revêtir une ou des particularités faisant en sorte que la procédure ne puisse être appliquée intégralement.

Ainsi, la deuxième question de l'épreuve faisait intervenir non pas une, mais à deux inconnues pour lesquelles aucune information n'était fournie. L'élève devait donc trouver par lui-même, un moyen d'établir la relation entre les différentes valeurs cherchées. Pour résoudre le troisième problème, l'élève devait poser l'équation correspondant au périmètre d'un rectangle. Il devait faire appel à sa connaissance du concept de périmètre, au moment de poser son équation. Enfin, la dernière question faisait appel à quelques concepts mathématiques en plus de ne fournir aucune donnée strictement numérique. Pour résoudre ce problème, l'élève devrait faire preuve d'une bonne compréhension du sens des expressions algébriques. Une copie de l'épreuve administrée aux élèves est fournie à l'annexe 1.

3.3.2 Entretiens individuels

Afin de comprendre les difficultés rencontrées par les participants à partir de leur propre perspective, ceux-ci ont été conviés à un entretien d'explicitation. Ce type d'entretien semblait constituer le meilleur choix puisqu'il permet une connaissance précise des démarches intellectuelles individuelles mises en œuvre dans la réalisation d'une tâche (Vermersch, 1994). Il s'agit d'un mode de questionnement constitué d'un ensemble de techniques qui ont pour but d'aider les élèves à verbaliser la manière dont ils réalisent une tâche (Vermersch, 2003) et il s'intéresse particulièrement au vécu de l'action, c'est-à-dire la succession d'actions que le sujet met en œuvre pour atteindre un but. L'avantage de cette méthode, c'est qu'elle ne permet pas seulement de renseigner le chercheur, mais elle apprend également à l'élève à s'auto-informer en verbalisant une connaissance en acte qui n'a pas encore été conceptualisée.

Lors d'un entretien d'explicitation, le questionnement doit faire référence à une tâche réelle et spécifiée, c'est pourquoi les élèves ont dû, dans un premier temps, réaliser l'épreuve écrite décrite un peu plus tôt. Le protocole d'entretien est fourni à l'annexe 2.

Chaque élève a été rencontré individuellement pour discuter de l'épreuve. Il a été invité à décrire sa démarche de résolution, à expliquer son raisonnement et à s'exprimer sur les difficultés rencontrées. Le protocole d'entretien fourni en annexe donne un aperçu du déroulement de chacune des rencontres. La durée des entretiens a varié de vingt minutes à soixante-quinze minutes.

3.4 Déroulement et durée des séances

Dans un premier temps, l'enseignante a effectué un bref rappel de la mise en équation algébrique. Pour ce faire, elle a exécuté un problème au tableau en explicitant chacune des étapes de sa démarche. L'exemple présenté au tableau, de même que les explications données en classe, figurent à l'annexe 3.

Par la suite, tous les élèves ont répondu simultanément au questionnaire écrit. On ne leur a pas imposé de limite de temps pour accomplir ce travail, mais après vingt-cinq minutes tous les élèves avaient terminé ou abandonné la tâche. Aucune explication n'était fournie pendant la passation de cette épreuve, mais les élèves étaient avisés qu'ils auraient l'occasion de faire part de leurs interrogations lors des entretiens individuels.

Les productions d'élèves ont ensuite été corrigées (sans faire de marque apparente sur la copie de l'élève) et certains éléments ont été retenus pour élaborer le protocole d'entretiens.

Finalement, chaque élève a été rencontré individuellement pour discuter de l'épreuve. Il a été invité à décrire sa démarche de résolution, à expliquer son raisonnement, et à s'exprimer sur les difficultés rencontrées. La durée des entretiens a varié de vingt minutes à soixante-quinze minutes et chacun d'entre eux a été enregistré.

Chapitre IV
Analyse des résultats

Ce chapitre présente les résultats obtenus aux épreuves écrites et aux questions des entretiens individuels. La première section définit les niveaux de réussite qui ont été établis pour analyser l'épreuve écrite. Les résultats obtenus à cette épreuve sont présentés sous forme de tableaux et chacun d'eux est brièvement commenté de manière à faire ressortir les tendances. Par la suite, certains constats sont dégagés des entretiens individuels. Ceux-ci sont appuyés de quelques propos d'élèves qui ont été retranscrits à partir des enregistrements. Enfin, une discussion dresse un bilan complet des résultats de l'étude et les compare à ceux d'autres recherches.

4.1 Niveaux de réussite pour l'épreuve écrite

Comme il a été mentionné plus tôt, la démarche attendue des élèves pour résoudre chacun des problèmes de l'épreuve écrite comprenait quatre étapes.

- **Étape 1** : Relever les différentes valeurs recherchées (inconnues)
- **Étape 2** : Attribuer une expression algébrique à chacune des valeurs inconnues
- **Étape 3** : Traduire les informations du texte par une équation
- **Étape 4** : Résoudre l'équation obtenue

Pour fin d'analyse, des niveaux d'atteinte ont été établis en fonction de chacune de ces étapes. Ainsi, chaque niveau d'atteinte que l'on retrouve dans le tableau 1 correspond à une étape de résolution franchie avec succès.

Tableau 1 : Niveaux de réussite pour l'ensemble des items de l'épreuve écrite

Niveau 0	L'élève n'a tenté aucune démarche
Niveau 1	L'élève a correctement identifié les inconnues
Niveau 2	L'élève a attribué une expression algébrique à chacune des inconnues
Niveau 3	L'élève a traduit les informations par une équation appropriée
Niveau 4	L'élève a résolu algébriquement l'équation

L'atteinte d'un niveau suppose que l'élève a exécuté la tâche correctement. L'élève ayant bien identifié chacune des inconnues, sans avoir correctement attribué les expressions, n'est donc pas réputé comme ayant atteint le niveau 2. De plus, chacun des niveaux est inclusif, c'est-à-dire que l'atteinte d'un niveau signifie l'atteinte de chacun des niveaux inférieurs.

4.2 Résultats obtenus pour l'ensemble des items de l'épreuve écrite

Le tableau 2 présente les niveaux d'atteinte pour chacun des items de l'épreuve. La compilation des résultats permet de comparer le nombre de répondants (sur un total de 31) ayant réussi à franchir chacune des étapes. À titre d'exemple, on peut constater que 23 élèves ont réussi à franchir l'étape 4 à l'item #1, alors que 20 élèves ne sont parvenus qu'à franchir l'étape 2 à l'item #4.

Tableau 2 : Niveaux d'atteinte pour chacun des items de l'épreuve écrite

	Niveau 0 Aucune tentative	**Niveau 1** Repérer les inconnues	**Niveau 2** Attribuer les expressions algébriques	**Niveau 3** Poser l'équation appropriée	**Niveau 4** Résoudre correctement l'équation
Item #1	0 élève	1 élève	5 élèves	2 élèves	23 élèves
Item #2	0 élève	11 élèves	5 élèves	1 élève	14 élèves
Item #3	1 élève	6 élèves	16 élèves	2 élèves	6 élèves
Item #4	3 élèves	20 élèves	1 élève	3 élèves	4 élèves

Une première analyse de ce tableau nous permet de constater que le nombre d'élèves ayant réussi à atteindre le niveau 4, diminue d'un item à l'autre. Ainsi, 23 élèves on résolu complètement et correctement la question numéro 1, alors que ce nombre n'est que de 4 élèves pour l'item #4. Cela montre bien que le degré de difficulté s'intensifiait d'une question à l'autre.

On remarque également que pour chacun des items de l'épreuve, le nombre d'élèves ayant atteint le niveau 3, correspondant à la mise en équation, est inférieur au nombre d'élèves ayant atteint le niveau 4, associé à la résolution de l'équation. Le tableau montre en effet que des 25 élèves ayant posé correctement l'équation à l'item #1, seulement 2 ne sont pas parvenus à la résoudre. Il montre également qu'un seul des 15 élèves ayant posé correctement l'équation pour l'item #2 ne l'a pas résolue correctement, que 6 des 8 élèves ayant posé l'équation à l'item #3 sont parvenus à la résoudre, et que 4 des 7 élèves ont correctement résolu l'équation qu'ils avaient posé à l'item #4. Cela suggère que l'étape de mise en équation cause davantage de problèmes aux élèves que l'étape de résolution d'équation, puisqu'une fois l'équation posée, la plupart des élèves parviennent à la résoudre.

Enfin, pour les problèmes 1 et 2, aucun élève n'apparaît sous la colonne de niveau 0, ce qui indique que tous les élèves ont au moins été en mesure d'identifier les valeurs cherchées qui auraient pu être représentées par des expressions algébriques.

4.3 Résultats obtenus pour chacun des items de l'épreuve écrite

4.3.1 Résultats obtenus à l'item numéro 1 de l'épreuve écrite

Le tableau 3 illustre la compilation du nombre d'élèves ayant atteint chacun des niveaux de réussite à l'item #1 de l'épreuve écrite. Ci-dessous, on retrouve l'énoncé du problème de même qu'un exemple de production attendue.

Trois amis se partagent un montant de 425$ de la façon suivante : Marc-André reçoit 15$ de plus que le double du montant que reçoit Frédéric, tandis que Mathieu reçoit 40$ de moins que le triple du montant que reçoit Frédéric. Quel est le montant que reçoit chacun d'entre eux ?

Exemple de production attendue pour cet item :

1. Identifier les inconnues et leur assigner une expression algébrique :

   Montant d'argent de Marc-André : $2x + 15$
   Montant d'argent de Mathieu : $3x - 40$
   Montant d'argent de Frédéric : x

2. Poser l'équation et la résoudre :

$$2x + 15 + 3x - 40 + x = 425$$
$$6x = 450$$
$$x = 75$$

3. Déterminer la solution en remplaçant x par sa valeur

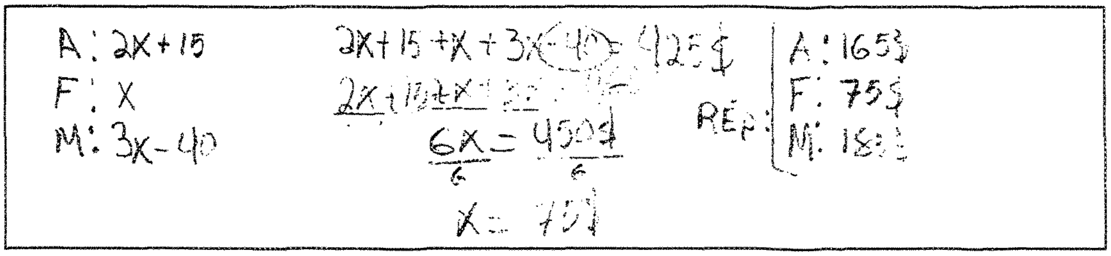
   Marc-André reçoit 165$, Mathieu reçoit 185$ et Frédéric reçoit 75$.

Tableau 3 : Nombre d'élèves ayant atteint chacun des niveaux de réussite à l'item #1

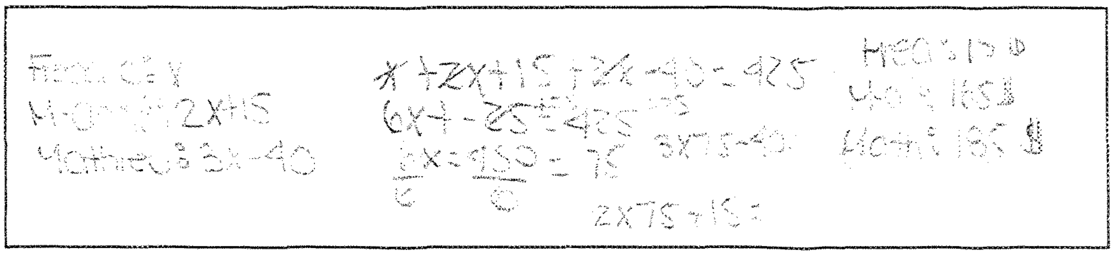
Niveau d'atteinte	Nombre d'élèves	Pourcentage
Niveau 0	0	0 %
Niveau 1	1	3,2 %
Niveau 2	5	16,1 %
Niveau 3	2	6,5 %
Niveau 4	23	74,2 %
Total	31	100 %

À la lecture de ce tableau, on peut constater que 23 des 31 élèves (soit 74,2% d'entre eux) sont parvenus à résoudre le problème à l'aide d'une démarche algébrique appropriée. Les traces laissées par chacun des élèves, de même que la disposition de chacun des éléments, sont très similaires. On retrouve généralement les expressions algébriques associées à chacune des inconnues à la gauche de l'encadré, la résolution de l'équation au centre et la solution à droite, comme le montrent les reproductions de copies d'élèves ci-après :

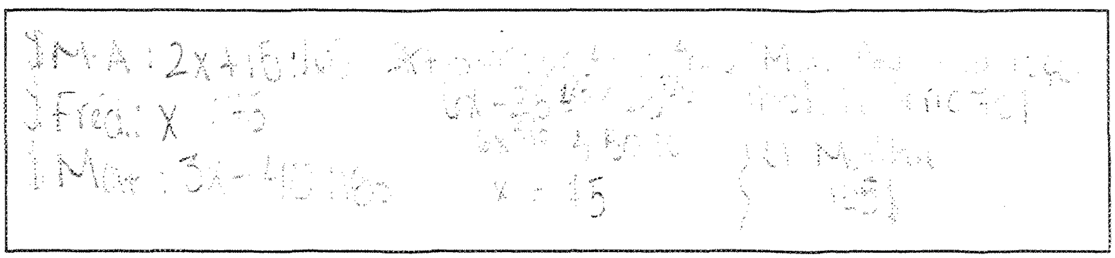
Élève #4 :



Élève #15:

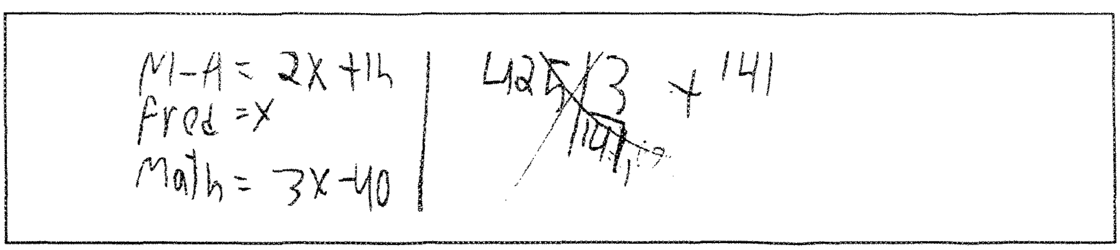


Élève 24 :



Cinq élèves ont représenté correctement les inconnus par des expressions algébriques, sans parvenir à poser l'équation. Parmi eux, deux ont tenté de poursuivre la résolution sans avoir recours à l'algèbre. On peut distinguer dans les traces qu'ils ont laissées, une division par trois, mais rien de signifiant par la suite.

Élève #5 :



Élève #11 :

.. Trois amis se partagent un montant de 425 $ de la façon suivante : Marc-André reçoit 15$ de plus que le double du montant que reçoit Frédéric, tandis que Mathieu reçoit 40$ de moins que le triple du montant que reçoit Frédéric. Quel est le montant que reçoit chacun d'entre eux ?

M-A : $2x + 15$

F : x

M : $(3x) - 40$

Réponse : M-A → 167 $

F → 75 $

M → 185 $

Ainsi, malgré une démarche algébrique bien amorcée, certains ont préféré utiliser une approche de type arithmétique pour tenter de résoudre le problème et seul l'un d'entre eux y est arrivé.

Enfin, tous les élèves ont été en mesure d'identifier les différentes inconnues, ce qui montre qu'il est rare qu'un élève soit totalement démuni face à ce genre de problème.

4.3.2 Résultats obtenus à l'item #2 de l'épreuve écrite

Le tableau 4 illustre la compilation du nombre d'élèves ayant atteint chacun des niveaux de réussite à l'item #2 de l'épreuve écrite. Ci-après, on retrouve l'énoncé du problème, de même qu'un exemple de production attendue.

Josiane possède 108 billes (des rouges, des jaunes et des bleues). Le nombre de billes rouges qu'elle possède est 9 de plus que celui de billes jaunes, mais 6 de moins que celui de billes bleues. Combien de billes de chaque couleur possède-t-elle ?

Exemple de production attendue pour cet item :

1. Identifier les inconnues et leur assigner une expression algébrique :

   Nombre de billes rouges : x
   Nombre de billes jaunes : $x - 9$
   Nombre de billes bleues : $x + 6$

2. Poser l'équation et la résoudre :

$$x + x + 9 + x + 6 = 108$$
$$3x = 111$$
$$x = 37$$

3. Déterminer la solution en remplaçant x par sa valeur

   Josiane possède 37billes rouges, 28 billes jaunes et 43 billes bleues.

Tableau 4 : Nombre d'élèves ayant atteint chacun des niveaux de réussite à l'item #2

Niveau d'atteinte	Nombre d'élèves	Pourcentage
Niveau 0	0 élève	0 %
Niveau 1	11 élèves	35,5 %
Niveau 2	5 élèves	16,1 %
Niveau 3	1 élève	3,2 %
Niveau 4	14 élèves	45,2 %
Total	31 élèves	100 %

Dans ce cas-ci, représenter les inconnues par des expressions algébriques nécessitait un peu plus de réflexion, compte tenu de la formulation de la question. Le nombre d'élèves n'ayant pas franchi cette étape est passé à 11 élèves sur 31, alors qu'un seul n'avait pas réussi à le faire dans l'exercice précédent. Les démarches fournies par certains de ces élèves attestent tout de même d'une compréhension partielle.

Élève #26 :

32 + 9 = 41
rouges : x + 9
32 + 9 − 6 = 35
jaunes : x
bleues : x + 9 − 6

x + 9 + x + x + 9 − 6 = 108
3x + 12 = 108
−12 −12
$\frac{3x}{3} = \frac{96}{3}$

x = 32

Josianne possède 32 billes jaunes, 41 billes rouges et 35 billes bleues

Élève #27 :

R : x + 9 = 41
J : x = 32
B : x + 9 − 6 = 35

108 = x + 9 + x + x + 9 − 6
108 = 3x + 12
−12 −12
$\frac{96}{3x} = \frac{3x}{3x}$

x = 32

Elle possède 41 billes rouges, 32 billes jaunes et 35 billes bleues.

Comme on peut le constater, en établissant la relation entre les différents inconnues, ces élèves ont attribué *« 6 de moins »* au nombre de billes bleues, alors que cette information concernait le nombre de billes rouges. De plus, bien que l'équation posée ne traduise pas correctement la donnée du problème, elle a tout de même été bien résolue dans les deux cas. D'ailleurs, la plupart des élèves ayant posé une équation, qu'elle soit erronée ou non, sont parvenus à la résoudre, comme en font foi les extraits de démarches suivants :

Élève #1 :

billes rouges : x + 9
billes jaunes : x
billes bleues : x + 3

3x + 12 = 108
−12 −12
$\frac{3x}{3} = \frac{96}{3}$

x = 32

Rouges 41
Jaunes 32
Bleues 35

Élève #7 :

[illegible]

Parmi les 20 élèves ayant réussi à représenter les inconnues par une expression algébrique appropriée, 15 ont réussi à poser l'équation et 14 l'ont résolue correctement. Dans ce cas-ci, c'est donc la représentation des inconnus par des expressions algébriques qui a posé problème puisqu'une fois cette étape franchie, la plupart des élèves sont parvenus à résoudre le problème.

4.3.3 Résultats obtenus à l'item #3 de l'épreuve écrite

Le tableau 5 illustre la compilation du nombre d'élèves ayant atteint chacun des niveaux de réussite à l'item #3 de l'épreuve écrite. Ci-après, on retrouve l'énoncé du problème, de même qu'un exemple de production attendue.

Le périmètre d'un rectangle est 37 cm. Sachant que la longueur mesure 1 cm de moins que le double de la largeur, détermine les dimensions de ce rectangle.

Exemple de production attendue pour cet item :

1. Identifier les inconnues et leur assigner une expression algébrique :

   Longueur du rectangle : 2x - 1
   Largeur du rectangle : x

2. Poser l'équation et la résoudre :

$$
\begin{aligned}
2(2x - 1) + 2(x) &= 37 \\
4x - 2 + 2x &= 37 \\
6x &= 39 \\
x &= 6,5
\end{aligned}
$$

3. Déterminer la solution en remplaçant x par sa valeur :

   Le rectangle mesure 6,5 cm de largeur et 12 cm et sa longueur .

Tableau 5 : Nombre d'élèves ayant atteint chacun des niveaux de réussite à l'item #3

Niveau d'atteinte	Nombre d'élèves	Pourcentage
Niveau 0	1 élève	3,2 %
Niveau 1	6 élèves	19,4 %
Niveau 2	16 élèves	51,6 %
Niveau 3	2 élèves	6,4 %
Niveau 4	6 élèves	19,4 %
Total	31 élèves	100 %

La relation entre les deux nombres cherchés était décrite de manière similaire à celle du problème numéro 1 qui a été très bien réussi. Il n'est pas surprenant que le nombre de participants ayant réussi à associer les expressions algébriques pour la longueur et la largeur soit passé à 24, comparativement à 11 pour l'exercice précédent.

Cependant, bien que 24 des 31 élèves soient parvenus à exprimer les inconnus à l'aide des expressions algébriques qui convenaient, 16 élèves n'ont pas traduit l'énoncé par une équation qui soit appropriée. L'erreur commise par 12 de ces 16 élèves a été de poser une égalité pouvant être traduite par : *«longueur + largeur = 37 »* pour convertir en langage algébrique : *« le périmètre d'un rectangle est 37 cm »*. Or, on sait que le périmètre d'un rectangle correspond à la somme des mesures de chacun de ses côtés, ce qui représente deux fois la somme de la longueur et de la largeur. Il semble qu'un élément de la donnée du problème ait échappé à ces élèves, puisque le terme périmètre n'a pas été pris en considération lors du processus de mise en équation. Voici, à titre d'exemple, les traces laissées par quelques élèves :

Élève #3 :

longueur : $2x - 1 = 24,34$ cm
largeur : $x = 12,66$ cm

$3x - 1 = 37$
$+1 \quad +1$
$\frac{3x}{3} = \frac{38}{3}$
$x = 12,66$

Élève #22 :

longueur : $2x - 1 \rightsquigarrow 24,34$
largeur : $x \rightsquigarrow 12,67$
$37,01$ cm

$2x - 1 + x = 37$
$3x - 1 = 37$
$+1 \quad +1$
$3x = 38$
$\div 3 \quad \div 3$
$\boxed{x = 12,67}$

Rép : La longueur est d'environ 24,34 cm et la largeur de 12,67 cm.

Deux élèves ont semblé tenir compte du terme périmètre, mais sans savoir quoi en faire. Ceux-ci ont abandonné la tâche au moment de poser l'équation, comme en font foi ces extraits de leurs démarches :

Élève #12 :

Le périmètre d'un rectangle est 37 cm. Sachant que la longueur mesure 1 cm de moins que le double de la largeur, détermine les dimensions de ce rectangle.

longueur : $2x - 1$
largeur : $x =$

Élève #27 :

larg : x
long : $2x - 1$

4.3.4 Résultats obtenus à l'item #4 de l'épreuve écrite

Le tableau 6 illustre la compilation du nombre d'élèves ayant atteint chacun des niveaux de réussite à l'item #4 de l'épreuve écrite. Ci-après, on retrouve l'énoncé du problème, de même qu'un exemple de production attendue.

La somme de deux nombres naturels pairs consécutifs est égale à 16 de moins que le triple du plus petit de ces deux nombres. Quels sont ces deux nombres ?

Exemple de production attendue pour cet item:

1. Identifier les inconnues et leur assigner une expression algébrique :

   Premier nombre : x *Deuxième nombre : x + 2*

2. Poser l'équation et la résoudre :

   $x + x + 2 = 3x - 16 \rightarrow x = 18$

3. Déterminer la solution en remplaçant x par sa valeur

   Les deux nombres sont 18 et 20.

Tableau 6 : Nombre d'élèves ayant atteint chacun des niveaux de réussite à l'item #4

Niveau d'atteinte	Nombre d'élèves	Pourcentage
Niveau 0	3 élèves	9,7 %
Niveau 1	20 élèves	64,5 %
Niveau 2	1 élève	3,2 %
Niveau 3	3 élèves	9,7 %
Niveau 4	4 élèves	12,9 %
Total	31 élèves	100 %

En plus de comporter plusieurs termes spécifiques aux mathématiques, l'énoncé de ce problème ne fournissait aucune donnée strictement numérique et la relation entre les deux inconnus n'était pas clairement indiquée. Aussi, seulement quatre élèves sont parvenus à solutionner complètement et correctement ce problème. Ceux-ci ont tous présenté une solution similaire à celle attendue.

Bien que 28 des 31 élèves, soit 90,3% de l'échantillon aient identifié correctement les deux inconnues (1er nombre et 2^{e} nombre), seulement huit d'entre eux sont parvenus à leur associer une expression algébrique. Il faut cependant préciser que la relation entre les deux inconnues était donnée de façon plus subtile, en ce sens qu'elle devait être tirée du fait qu'il s'agissait de deux nombres naturels pairs consécutif. Ce type de formulation ne faisant pas clairement ressortir un inconnu pour lequel aucune information n'est fournie, c'est l'élève qui doit prendre l'initiative d'associer la variable x à l'un d'entre eux. Il doit par la suite déduire logiquement qu'il y a forcément une différence de deux unités entre ces deux nombres, pour arriver à attribuer l'expression algébrique qui convienne ($x+2$ ou $x - 2$) pour le second nombre.

Parmi les 20 élèves ayant identifié les inconnus sans parvenir à leur attribuer des expressions algébriques correctes, près de la moitié (9 d'entre eux) ont associé la variable x au premier nombre et l'expression algébrique 3x – 16 au deuxième nombre cherché, comme le montrent les extraits qui suivent :

Élève #1 :

1er nombre : x
2e nombre : 3x-16

Élève #17 :

$n_1 = x$
$n_2 = 3x-16$

$4x-16=0$
$+16 \quad +16$
$4x = 16$
$x = 4$

Élève #25 :

$\#n = 3x-16$
$4x-16 =$
$\#n = x$

Ces élèves ont commis l'erreur d'attribuer au plus grand nombre, une expression équivalant à seize de moins que le triple du plus petit nombre. Cependant, la donnée du problème précisait que c'était la somme des deux nombres, qui valait seize de moins que le triple du plus petit des deux. Ils ont ensuite tenté de poser une équation, se sont retrouvés dans une impasse, et ont abandonné la tâche.

4.3.5 Éléments retenus pour l'élaboration des entretiens individuels

La correction et l'analyse de l'épreuve ont permis de faire ressortir les principaux éléments devant faire l'objet d'un questionnement lors des entretiens individuels.

La forte ressemblance entre les traces de solution laissées par chacun des élèves au problème numéro 1, montre qu'ils suivent une procédure bien établie. Les participants seront donc invités à expliciter leur démarche de résolution, afin de déterminer l'influence de l'apprentissage d'une procédure sur leur raisonnement.

Puisque seulement 16 élèves ont réussi à associer des expressions algébriques pour les inconnues du problème numéro 2, comparativement à 30 pour l'exercice précédent, les élèves seront invités à s'exprimer sur les difficultés rencontrées ou à expliquer leur raisonnement, le cas échéant.

Les élèves n'ayant pas su traduire le périmètre du rectangle par l'équation appropriée seront invités à donner une définition du terme périmètre et à expliquer comment se calcule celui d'un rectangle.

Enfin, puisque le problème numéro 4 a causé des ennuis à un très grand nombre d'élèves et que plusieurs d'entre eux ont associé des expressions algébriques erronées aux deux inconnus, le questionnement visera à déterminer comment la donnée du problème a été interprétée.

4.4 Constats à la suite des entretiens individuels

La présentation des résultats obtenus à la suite des entretiens individuels est présentée en deux parties : les expressions algébriques et la mise en équation. Chacun de ces thèmes a été abordé séparément lors des entretiens individuels et a fait l'objet d'un questionnement en profondeur.

4.4.1 Les expressions algébriques

Les entretiens individuels ont fait ressortir que tous les élèves ont utilisé la même stratégie pour attribuer les expressions algébriques aux différents inconnus. Voici, à titre d'exemple comment ils ont expliqué leur démarche pour le problème numéro 1 :

Élève #4 : *« ... Ben, j'ai lu l'énoncé. Ensuite j'ai mis un ...une variable à celui qui avait le moins de renseignement et puis j'ai mis les renseignements sur les autres, et puis j'ai fait une équation. »*

Élève #6 : *« O.K., ben là j'ai marqué les trois noms, puis celui que je savais rien sur lui, bien j'ai mis le x, puis après cela les deux autres je me suis fiée à la question. Puis j'ai fait 3x – 40 puis après cela j'ai tout additionnée eux autres pour que cela égale à 425... »*

Élève #9 : *« Bien, j'ai regardé lui qui avait le moins d'information. C'était Frédérick, c'est pour ça que j'ai écris x pour le nombre d'argent. Après ça j'ai vu Marc-André qui en recevait 15 de plus que le double là j'ai écrit ça... »*

Élève #17 : *« Bien on m'a toujours dit que le x revenait à la personne ou à la chose qu'on avait le moins de détails donc dans ce cas là c'était Frédérick donc j'ai mis un x sur lui. Fait que là le double du montant de Frédérick plus 15 dollars donc ça fait 2x+15 et après ça 40 moins le triple, donc 3x -40... »*

La procédure décrite par les élèves, voulant qu'on attribue la variable x à donnée inconnue pour laquelle le moins d'information a été fourni, provient d'une stratégie enseignée en classe. L'élève #17 y fait directement référence dans la verbalisation de son raisonnement. Cependant, il n'existe pas toujours une inconnue qui réponde à ce critère dans les problèmes auxquels ils sont confrontés. C'est notamment le cas du problème numéro 3 de la présente épreuve où toutes les informations étaient données en fonction de la même valeur inconnue, soit le nombre de billes rouges. Cela a été suffisant pour dérouter plusieurs élèves qui ne savaient plus comment s'y prendre pour établir le lien entre les différentes valeurs cherchées. Voici, à titre d'exemple, quelques extraits d'entrevue :

Élève # 8 : *« ... Ils disaient 9 de plus que les billes jaunes, et ils disaient 6 de moins que les billes bleues et c'était encore par rapport aux billes rouges. C'était les billes rouges il y en a 6 de moins que les billes bleues. C'est ça qui m'a mêlé. »*

Élève #13: *« Ben, sur les rouges ils disaient trop d'affaires et ça me mêlait toute (...), je suis toute mêlée là ! »*

Élève #11 : *« Parce que...on dirait que lui... c'est à cause que je pensais qu'il y avait deux x (...) Il y en avait deux qu'on parlait pas vraiment, puis il y en avait une qu'on parlait vraiment beaucoup. »*

Les dires de ce dernier élève illustrent bien son attachement à la procédure, voulant qu'on associe la variable x à l'inconnue pour laquelle le moins d'informations sont fournies. Comme deux des valeurs cherchées répondaient à ce critère, il a été quelque peu dérouté, et s'en est remis au destin :

Élève #11 : *« J'en ai pris un au hasard, puis ça donné que c'étaient les rouges. »*

Cette décision lui a été salutaire puisqu'il a ensuite réussi à représenter chacune des valeurs cherchées par une expression algébrique appropriée en s'attardant à la relation entre le nombre de billes rouges qu'il avait représenté par la variable x et le nombre de billes d'autres couleurs :

Élève #11 : *« Comme les rouges il y en avait 9 de plus que les jaunes donc les jaunes il y en avait 9 de moins fait que j'ai mis x – 9... »*

En tout, 16 élèves ont réussi à découvrir les expressions algébriques appropriées malgré qu'on ne leur ait pas enseigné de procédure à appliquer en de pareils cas. Ceux-ci ont été invités à expliciter leur raisonnement. En voici quelques extraits :

Élève #10 : *« Ben lui, pour pas avoir deux variables, j'suis obligé de changer les variables. Comme sur le rouge ils disaient quelque chose mais ils ne disaient rien sur le jaune puis le bleu fait que j'ai inversé. Ils disaient des affaires sur le rouge, ils disaient deux fois des affaires, mais qu'on pouvait placer sur le jaune puis le bleu. »*

Cet élève a décidé de représenter par la variable x l'inconnue pour laquelle il détenait toutes les informations et d'attribuer les expressions en faisant appel à la logique. Ainsi, sachant que le nombre de billes rouges est égale à 9 de plus que le nombre de billes jaunes, il en déduit que le nombre de billes jaunes est 9 de moins que le nombre de billes rouges. L'information qui, au départ, portait sur le nombre de billes rouges, est maintenant donnée en fonction du nombre de billes jaunes. Cette stratégie, qu'il appelle « *inverser* », lui permet de considérer le nombre de billes rouges comme la valeur inconnue pour laquelle il ne possède pas d'information et de poursuivre en utilisant la procédure enseignée en classe.

L'élève #14 a rencontré quelques difficultés, mais elle y est parvenue à force de persévérance.

Élève #14 : *« Lui je me souviens d'avoir hésité(...) j'ai commencé par écrire x + 9 aux rouges et après j'ai mis mon x aux jaunes, mais quand je suis arrivée pour mettre mes bleues, je savais plus trop quoi faire. Là j'ai décidé de changer mon x de place puis de le mettre aux rouges à la place(...) là les jaunes en avaient x – 9. Quand je suis arrivée aux bleues, là c'était plus facile de mettre le x +6. »*

Bien que cette élève semble procéder un peu à tâtons, l'explicitation de sa démarche dénote une bonne compréhension des relations entre les variables. La formulation de la question qui l'a un peu déroutée au départ l'a contrainte à s'ajuster. Il en a été de même pour l'élève #17 qui n'était pas certain d'y être parvenu.

Élève #17 : *« ... J'ai même pas l'impression d'avoir réussi à identifier mes inconnus.*
- Tu n'as pas l'impression d'avoir réussi à identifier tes inconnus ?
- Non. C'est le genre de problèmes qui me mêlent.
- Si je regarde ici, là...On va le lire ensemble et on va regarder tes expressions. C'est écrit : « Le nombre de billes rouges est 9 de plus que celui de jaunes ». Si tu regardes tes expressions, est-ce que tu as l'impression que le nombre de billes rouges est 9 de plus que celui des jaunes ?
- Euh... Oui.
- Et si tu regardes encore tes billes rouges, est-ce que tu as l'impression qu'il y en a 6 de moins que les bleues ? Tes rouges, est-ce qu'il y en a 6 de moins que les bleues?
-...Euh, oui... Donc, dans le fond, je l'ai eu !

Cette hésitation n'a pas été partagée par tous les participants, comme l'élève #20, pour qui la formulation de la question n'a pas semblé représenter un obstacle.

Élève #20 : *« Ben moi je trouve encore que c'est les jaunes qu'on a le moins d'informations. On dit que les rouges ont 9 billes de plus fait que j'ai mis x + 9 , puis les bleues, pour déterminer celui des bleus, ça dit que les rouges en ont 6 de moins donc les bleus en ont 6 de plus que les rouges c'est pour ça que j'ai mis x + 15. »*

Ces extraits d'entrevues montrent bien comment les démarches des élèves se sont diversifiées. En effet, comme la donnée du problème ne permettait pas d'amorcer la démarche à l'aide de la procédure enseignée en classe, les élèves ont dû puiser dans leurs ressources personnelles pour arriver à établir correctement la relation entre les différents inconnus. Certains d'entre eux n'ont pas semblés déroutés par la formulation de la question, tandis que d'autres ont dû s'ajuster après des essais infructueux. La donnée du problème a contraint les élèves à adapter leur stratégie en se centrant davantage sur le sens qu'ils confèrent aux expressions algébriques qu'ils utilisent.

Très peu d'élèves ont réussi à déterminer des expressions algébriques pour les deux nombres pairs consécutifs du problème numéro 4. Plusieurs d'entre eux ont eu du mal à interpréter le sens de la question.

Élève #5 : *« Ben lui c'est parce que j'ai pris d'abord le x, puis le x- 16 parce que ça le dit dans la question. Après ça il fallait trouver les deux nombres pairs, puis après ça, c'est ça que j'ai fait, je les ai trouvés, c'étaient 8 et 40, parce qu'il fallait que le plus petit des deux soit le triple moins 16 du plus grand. Puis j'ai pris des nombres et je les ai essayés puis ça donné 8 et 40. »*

Élève # 6 : *« Ben j'ai pris un des deux au hasard pour mettre mon x parce qu'ils ne disaient rien précisément que c'était lequel qu'il fallait prendre. Puis après ça, l'autre je l'ai mis à 3x-16 parce que c'était seize de moins que le triple. »*

Bien que les démarches de résolution décrites par ces deux élèves soient totalement erronées, ceux-ci ne remettent pas leur raisonnement en question. Ainsi, sans l'intervention d'une tierce personne, ils ne pourraient pas prendre conscience de leurs erreurs et y apporter les correctifs appropriés.

Plusieurs participants interrogés ont déclaré ne pas être parvenus à décoder la partie de l'énoncé comportant les termes naturels, somme, pairs, et consécutifs qui sont tous des concepts mathématiques. Ainsi, bien qu'il s'agisse là de notions que les élèves côtoient depuis l'école primaire, elles représentent toujours des obstacles pour eux.

Élève # 9 : *« Je ne le comprenais vraiment pas, j'étais trop mêlée.*
- Est-ce que tu comprenais ce qu'on voulait que tu fasses dans ce problème là ?
- Un peu, mais ce qui me mêlait le plus c'est la question... Je la lisais et je ne comprenais pas trop. Comme, admettons : « nombres naturels pairs consécutifs », je ne comprenais pas vraiment.
- Si je prends les quatre mots séparément : nombres, naturels, pairs, consécutifs. Est-ce que tu sais tous ce qu'ils veulent dire ?
- Oui, mais tous ensembles, ça me mêle. »

Élève #10 : *« ...Parce que c'est ça qui m'a mêlé : deux nombres naturels pairs consécutifs ».*

Élève # 11 : *« ... c'est écrit la somme de deux nombres naturels pairs consécutifs est égale à 16 de moins... Ah! J'suis toute mêlée là, Je comprends pas trop la phrase.*
- Si on s'attarde à la partie qui dit est « égale à », qu'est-ce que tu penses qui est égal à...?
- Ben ... c'est la somme de ... Je pense que c'est les deux qui sont égales à ça, mais j'suis pas sûre. Cette phrase là elle me mêle. Je sais pas trop ce qu'ils veulent dire. »

L'élève connaît la signification des mots que l'on retrouve dans l'énoncé, mais il ne parvient pas à dégager le sens de la phrase dans son ensemble. La quantité d'informations faisant appel à des termes spécifiques aux mathématiques fait en sorte que l'élève est incapable de comprendre la tâche qu'on lui demande d'exécuter. Le niveau de difficulté de la tâche est tel qu'il n'est pas envisageable d'amener l'élève vers une prise en charge dans un temps raisonnable.

D'autre part, bien que certains élèves aient bien cerné le sens de la question, ils ont tout de même été incapables d'extraire les informations apportées par les mots faisant appel à des concepts mathématiques. Il semble qu'ils n'en aient tout simplement pas tenu compte pour établir la relation entre les nombres cherchés.

Élève # 14 : *« Je le sais vraiment pas. C'est parce qu'on sait rien sur aucun des deux nombres.*
- On ne te donne pas d'information sur ces deux nombres là ?
- Non.
- Aucune information ?
- Ben, c'est des nombres pairs, puis il y en a un plus petit que l'autre, mais ça me dit pas... Ils nous disent pas comment il est plus petit ou plus grand que l'autre. »

On voit ici que l'élève aurait souhaité connaître la relation mathématique associant les deux nombres cherchés. Pourtant, lorsqu'il énumère ce qu'il connaît à propos de ces deux nombres, il omet de préciser qu'il s'agit de nombres consécutifs. Or, c'est précisément ce terme qui établit la relation entre les deux inconnus.

Les propos de l'élève #4 montrent bien comment certains éléments échappent aux élèves lorsqu'ils lisent la donnée du problème.

Élève #4 : *« Ben, au début j'avais pas lu, j'avais mal lu et j'avais pas vu pair, puis je m'avais trompé. Fait que là j'ai effacé. »*

Par ailleurs, les échanges avec chacun des élèves ayant commis l'erreur d'attribuer l'expression algébrique 3x – 16 au deuxième nombre plutôt qu'à la somme des deux nombres, ont permis de comprendre que ceux-ci avaient tout simplement repéré la formulation *« seize de moins que le triple »* et l'avaient machinalement associée à l'un des inconnus. Considérant que ce type de formulation est fréquemment utilisé pour fournir des renseignements sur l'une des valeurs cherchées, il était légitime de croire que ces élèves avaient eu recours à une suite d'opérations analogue à celle généralement employée. Ces derniers ont dès lors été invités à relire la donnée du problème et ont mis peu de temps à réaliser qu'ils avaient mal interprété les données.

Élève #1 : « ***Ton premier nombre tu l'as représenté par x et ton deuxième, par 3x – 16. Voudrais-tu m'expliquer pourquoi ?***
- *Dans le problème, ils disent : « La somme de deux nombres pairs consécutifs… » Ah non, je me suis trompé (…)c'est les deux qui sont égale à seize de moins que le triple. »*

Élève #6 : *« …Puis après ça il y en a un que j'ai mis x, puis l'autre je l'ai mis à 3x-16, parce que c'était seize de moins que le triple. »*

Cet élève a fait fausse route en associant l'expression *3x – 16* à l'une des valeurs cherchées plutôt qu'à la somme des deux inconnues, tel que précisé dans l'énoncé. Après avoir été invité à relire la donnée du problème, il a pris conscience de son erreur et a admis avoir pris l'habitude de repérer les expressions du même genre pour les associer à l'un ou l'autre des inconnus.

Élève #6 : *« Ben, je fais toujours de même. Je pensais que c'était comme ça qu'il fallait faire (…) mettre le x à celui que je sais le moins puis écrire des 3x-16 puis des affaires comme ça aux autres inconnus. C'est pour ça que je me suis pas attardée sur la somme. J'ai fais comme d'habitude, sans réfléchir vraiment. »*

On remarque encore une fois que l'élève a effectué une lecture sélective, faisant abstraction du concept de somme dont elle connaît pourtant la signification.

Cela dit, quelques élèves ont tout de même réussi à trouver les expressions appropriées et ils ont été questionnés sur leur raisonnement :

Élève #16 : *« Ben, consécutifs je me suis dit ça se suit (...) ça va être plus deux parce que c'est un nombre pair, ça c'est logique en partant. »*

Élève #20 : *« C'est deux nombres pairs consécutifs donc ils ont juste deux de différence et ça dit que les deux nombres additionnés c'est égal à 16 de moins que triple du plus petit de ces deux nombres, donc j'ai fait 3x – 16 et je l'ai résolu, j'ai trouvé la valeur de x. »*

Ceux-ci n'ont pas été intimidés par les notions mathématiques que comportait la donnée du problème. Il est intéressant d'observer la spontanéité avec laquelle ils ont respectivement reformulé dans leurs propres mots les termes « consécutifs » et « somme » par *« ça se suit »* et *« les deux nombres additionnés »*. Le fait qu'ils aient été en mesure de procéder à cette conversion montre qu'ils possèdent plus d'un système sémiotique pour se représenter l'objet, ce qui, selon Duval (1995), témoigne de leur compréhension. Cela porte à penser que la reformulation en ses propres mots pourrait être un outil à considérer dans une démarche didactique.

On constate que la réussite de cet exercice dépend grandement de la capacité à comprendre le langage mathématique, ce qui confirme l'étude de De Serres et al. (2003) faisant état d'une corrélation entre les habiletés langagières et la réussite scolaire.

4.4.2 La mise en équation

Tous les élèves interrogés ont été en mesure de définir le concept de périmètre d'un rectangle et d'expliquer comment s'y prendre pour le calculer. Or, comme il a été mentionné plus tôt, plusieurs d'entre eux n'ont pas semblé avoir tenu compte de cette information lors de la mise en équation. Les élèves ayant été questionnés à ce sujet ont cependant rapidement pris conscience de leur méprise et ont admis ne pas avoir pris le terme périmètre en considération pour poser leur égalité. Il s'agit encore une fois d'un terme spécifiquement lié aux mathématiques, connu des élèves, qui a été ignoré par plusieurs d'entre eux. Voici quelques extraits tirés des entrevues individuelles :

Élève # 3 : « P***ourquoi les as-tu additionné et égalés à 37 ?***
- Parce que c'était le périmètre au complet qui égalait à 37...
- J'aimerais attirer ton attention sur le mot « périmètre ». Le périmètre d'un rectangle, ça représente quoi pour toi ?
- Ben, c'est le coutour (...) c'est la longueur plus la largeur... Plus la longueur plus la largeur.
- Est-ce que cela te fait réaliser quelque chose ?
- (Rires)...Euh, ouais...Ben j'ai pas fait ça.
- Si tu avais à le refaire...
- Ben je ferais tout ça fois deux. Parce que ça revient deux fois. »

Élève # 6 : *« Celui que je savais le moins j'ai mis un x puis après ça j'ai fait 2x-1 parce que c'était le double moins un. Là je les ai additionnés ensemble pour que ça donne 37 puis j'ai cherché le x.*
- Pourquoi tu as décidé de les additionner ensemble dans ce cas-ci ?
- Ben ça donne 37. Parce qu'ils disaient que le périmètre d'un rectangle c'était 37 cm.
- Tu fais ça comme cela, le périmètre d'un rectangle ?
- Oui.
- Tu additionnes ce côté-là avec lui ?
- Ouais bien j'aurais dû faire deux fois. »

Élève #10 : « **Quand *tu calcules le périmètre d'un rectangle, tu additionnes deux côtés ?***
- Oui, ... ben, non. Les 4 côtés... La longueur plus la largeur... plus encore la longueur plus la largeur. Je pense que j'ai oublié de le refaire une autre fois. Ouais, c'est ça qu'il fallait que je fasse. Il fallait que je le refasse deux fois. »

Le questionnement orienté sur la signification du terme périmètre a permis à ces élèves de réaliser rapidement l'erreur d'interprétation qu'ils ont commise et d'envisager les correctifs appropriés sur-le-champ. En comparant l'équation posée en fonction de la définition du concept de périmètre, ils ont été contraints de se détourner quelque peu de la procédure pour se centrer sur les éléments de discordance entre deux représentations d'un même objet, soient l'équation algébrique et les données fournies dans le texte. Ces élèves ont réalisé que l'équation ne s'obtenait pas uniquement à partir d'un modèle car elle devait traduire fidèlement les informations contenues dans la donnée du problème. Il s'agit là d'une prise de conscience portant sur le sens de l'équation algébrique qui leur sera certainement salutaire.

Élève #20 : « *Ben, c'est parce que d'habitude ça dit tout le temps que les valeurs égalent tout le temps à ce qu'ils disent. Ça fait que j'me suis pas posé de question quand j'ai vu le 37. J'ai additionné puis j'ai égalé à ça.* »

Élève #28 : « *Je me suis pas arrêtée à périmètre, je pense. Je pense que j'ai additionné sans trop penser.* »

Les propos des élèves #20 et #28 illustrent bien comment, lors de la mise en équation, ils se sont appliqués à reproduire un modèle sans se préoccuper de savoir s'ils traduisaient correctement les informations contenues dans la donnée du problème. Après avoir été confrontés à plusieurs problèmes similaires, il semble que ceux-ci aient développé une façon de faire qui relève davantage de la mécanique que de la recherche de sens.

La problème numéro 4 a causé des ennuis à plusieurs élèves. Le fait qu'aucune donnée strictement numérique ne soit fournie rendait infructueuse toute tentative d'estimer l'ordre de grandeur de la solution cherchée. Les élèves ayant le réflexe de résoudre les problèmes par essai et erreur ont été particulièrement déstabilisés par cette situation. C'est notamment le cas des élèves #7 et #12 à qui l'on a demandé de dire ce qu'ils comprenaient de la question.

Élève #7 : « *Ben, ils me demandaient c'étaient quoi les deux nombres qui égalaient... Les nombres pairs qui égalaient un certain nombre, mais je n'avais pas d'indice. Fait que j'étais pas capable de le faire.* »

Élève #12 : « *Ben, des nombres pairs, mais il y a rien qui dit comme le double ou le triple sur aucun des deux. Mais là ils le disent sur la somme puis on sait même pas c'est quoi la somme.* »

Les propos de l'élève #12 indiquent qu'elle tente de repérer les éléments qu'elle s'attend à retrouver dans la donnée du problème pour pouvoir appliquer la procédure habituelle. Il est ressorti des entretiens que cette tendance à vouloir reproduire un modèle est très répandue chez les élèves. Il faut cependant souligner que l'enseignement d'une procédure est profitable pour les jeunes éprouvant des difficultés car, autrement, ils ne sauraient pas par où commencer. L'apprentissage d'une procédure permet à l'élève d'initier une démarche à partir de laquelle il peut être amené à évoluer progressivement (Sfard, 1991).

Chapitre V
Interprétation des résultats

Cette recherche aborde la problématique de l'enseignement de l'algèbre dans le contexte du renouveau pédagogique. Dans un premier temps, elle tente de soulever les principaux obstacles qui nuisent à la compréhension des élèves dans le domaine de la mise en équation algébrique. Par la suite, elle propose des pratiques pédagogiques permettant de favoriser la compréhension du langage algébrique adaptées à la nouvelle réalité de l'enseignement.

5.1 Les obstacles qui s'opposent à la compréhension des élèves

L'analyse des productions d'élèves et des entretiens individuels, laisse clairement apparaître que la présence de mots faisant appel à des concepts mathématiques (somme, périmètre, nombre naturel,...) dans la donnée du problème, l'attachement à la procédure enseignée en classe ainsi que l'uniformité des exercices auxquels ils sont confrontés, constituent des obstacles majeurs à la production de sens pour les élèves.

5.1.1 Le recours à des concepts mathématiques

Les données recueillies ont permis de constater que le recours à des concepts mathématiques (somme, périmètre, nombre naturel,...) dans l'énoncé d'un problème complique la tâche de l'élève et ce, même s'il connaît leur signification. Pour accéder aux informations que renferment chacun de ces termes, l'élève doit déployer un effort intellectuel supplémentaire, ce qui augmente le degré de complexité de la tâche. Duval (2006) a bien exprimé cette complexité : *« La variété des types de signes mobilisés dans les productions mathématiques reflète la variété des démarches de pensée à accomplir dans une activité mathématique »* p.77. On comprend donc l'importance de s'attarder à la recherche de sens ou à l'accès aux concepts dans les cours de mathématiques.

Au cours des entretiens d'explicitation, les élèves ont été en mesure d'expliquer dans leurs propres mots ce que signifie le périmètre d'un rectangle. Pourtant, la plupart d'entre eux n'ont pas considéré cette information en posant leur équation. Lorsqu'on leur a demandé de nommer des couples de nombres pairs consécutifs, alors qu'ils venaient d'affirmer qu'ils ne comprenaient pas la formulation *« deux nombres pairs consécutifs»*, ils ont été à même de le faire. Cela montre que lorsqu'un objet mathématique est présenté dans un contexte différent ou inhabituel, il perd son sens aux yeux des élèves. Dans le présent cas, il semble que les élèves étaient très préoccupés à reproduire le modèle présenté à titre d'exemple et que certaines informations leur aient échappées.

5.1.2 L'attachement à la procédure

Cette étude a montré que l'apprentissage de procédures incite les élèves à mémoriser une façon de faire et à s'y référer systématiquement sans s'attarder au sens des expressions qu'ils utilisent. En effet, la très grande majorité des élèves ont, lors de l'épreuve écrite, tenté de reproduire l'exemple proposé à titre de modèle sans faire usage de leurs connaissances antérieures. Cette tendance à appliquer aveuglément des procédures a été et demeure l'une des grandes préoccupations en didactique des mathématiques. Brousseau (1988), souligne que le rôle du maître consiste à amener les élèves à assumer intellectuellement un problème, et à choisir les stratégies qui le mèneront à sa résolution. L'apprentissage n'est pas considéré comme le résultat de la satisfaction des exigences d'un contrat didactique entre l'élève et l'enseignant, où chacun s'attend à un ensemble de comportements de la part de l'autre. Pour apprendre, l'élève doit accepter la prise en charge du problème (Douady, 1994; Vlassis & Demonty, 2000). Cette conception de l'apprentissage constitue une rupture avec les modèles explicatifs dominants en didactique des mathématiques.

Bloch (2005) affirme que l'apprentissage de procédures ne permet pas d'accéder à une connaissance approfondie de l'objet d'apprentissage, ce qui atteste de la légitimité de la méthode qu'elle propose qui est centrée sur l'analyse sémiotique et qui vise à approfondir la compréhension des concepts mathématiques. Cela dit, il semble que le recours à des exercices similaires tend à renforcer cette tendance à reproduire un modèle sans chercher à en comprendre les fondements.

5.1.3 L'uniformité des exercices proposés

Diverses études montrent que l'uniformité des activités proposées aux élèves en mathématiques, compromet la construction du sens. À l'instar de Brousseau (1988) qui suggérait d'offrir aux élèves des activités faisant intervenir des démarches non convenues, Teppo & Esty (1995) ont montré que la structure d'une tâche a une incidence sur le type de connaissance qu'elle fait intervenir. D'autres chercheurs (Kinzel, 2001; Douady, 1994) affirment en outre que, pour qu'ils soient source d'apprentissage, les problèmes devraient présenter certaines caractéristiques particulières. La variété des situations proposées revêt donc une grande importance dans l'apprentissage de l'algèbre, mais pour avoir un réel impact, elles doivent s'accompagner d'échanges verbaux qui permettent de pousser plus loin la réflexion (Vygotsky, 1985 ; Radford & Demers, 2004).

5.2 Les pratiques favorisant le développement de la pensée algébrique

L'étude a fait ressortir que l'utilisation de situations variées, la verbalisation du raisonnement, le travail sur l'erreur et même les exposés magistraux peuvent être générateurs de sens dans l'activité algébrique.

5.2.1 La verbalisation du raisonnement

En accord avec Radford & Demers (2004) qui indiquent que la communication est un excellent moyen d'apprendre les mathématiques, les entretiens d'explicitation ont permis à plusieurs élèves de détecter des erreurs de raisonnement et d'évoluer vers une connaissance plus approfondie de l'outil algébrique.

La verbalisation du raisonnement exprimée par chacun des élèves, leur a permis de s'engager dans une réflexion et d'approfondir leur connaissance de l'algèbre. Grâce à un questionnement qui les a contraints à se détacher de la procédure pour faire appel à leur propre jugement, leur conception du langage algébrique a évolué. La mise en équation algébrique qu'ils considéraient au départ comme le résultat d'un ensemble de techniques à appliquer est maintenant devenue signifiante pour eux. Elle exprime, en langage symbolique, ce qui est énoncé dans la donnée du problème. Cette nouvelle conception de la mise en équation représente un pas vers la pensée algébrique. Cela donne un aperçu de la portée de la verbalisation dans les pratiques pédagogiques et confirme l'efficacité des conflits socio-cognitifs (Gilly, 1989) en didactique de l'algèbre.

En verbalisant leur pensée, les élèves se sont questionnés sur la validité de leurs solutions, ce qui leur a permis d'identifier certains éléments manquants ou erronés dans leur démarche et même de comprendre et de corriger certaines de leurs bévues.

5.2.2 Le travail sur l'erreur

Suite aux travaux de certains chercheurs (Fluckiger, 2006; Lemoyne, 2000; Astolfi, 1997; Baruk, 1985), on comprend mieux l'importance de travailler sur les erreurs des élèves dans les activités d'apprentissage. Les erreurs sont considérées comme autant d'indices d'un savoir incomplet sur lesquels il est possible de s'appuyer pour corriger des lacunes. Lemoyne (2000) estime que l'un des pivots de la démarche pédagogique consiste à travailler sur les erreurs des élèves, mais cela n'est possible que si l'élève initie d'abord un processus de résolution. Ils doivent donc commencer quelque part, c'est pourquoi l'enseignement de type magistral conserve toujours sa place en didactique des mathématiques.

5.2.3 L'enseignement magistral

Bien qu'il faille reconnaître que le recours aux exposés magistraux de façon systématique confine les élèves à un rôle passif et en démotive plusieurs, celui-ci comporte tout de même certaines vertus. Il demeure la meilleure formule pour présenter des notions de base, des méthodes ou des procédures.

En effet, il ressort de cette recherche que l'apprentissage d'une procédure constitue une base solide sur laquelle il est possible de s'appuyer pour approfondir la connaissance de l'objet. Cela concorde avec le modèle de formation d'un concept de Sfard (1991) selon lequel la conception procédurale précède inévitablement la conception structurale et atteste de l'importance de travailler à la fois les dimensions outil et objet dans l'apprentissage de l'algèbre (Douady, 1994).

L'enseignement de type magistral est une méthode qui peut être très efficace si on porte une attention particulière à la sélection et à la structuration de son contenu (Chamberland & al, 1995). De plus, il peut facilement être combiné avec d'autres approches permettant une progression dans l'apprentissage de ces méthodes. (Vlassis & Demonty, 2000). L'exposé magistral peut donc servir de point départ pour l'enseignant qui souhaite adopter son nouveau rôle de médiateur en amorçant des discussions qui porteront les élèves à argumenter et à remettre certaines de leurs croyances en question.

Conclusion

Cette section présente un résumé et un bilan du travail de recherche. Elle en trace les grandes lignes, de la problématique jusqu'à l'interprétation des données. Les limites de la recherche de même que quelques perspectives pour des recherches futures sont exposées à la fin de cette partie.

La problématique de départ s'est articulée autour des difficultés rencontrées par les élèves avec le langage algébrique. L'apprentissage de l'algèbre est un processus complexe qui commande un mode de pensée particulier, ce qui le rend particulièrement difficile à enseigner. Traditionnellement, l'enseignement de l'algèbre se résumait à présenter des exemples au tableau et à demander aux élèves de les reproduire le plus fidèlement possible. Avec l'implantation du renouveau pédagogique au deuxième cycle du secondaire, on impose aux enseignants d'adopter de nouvelles pratiques pédagogiques avec lesquelles ils ne sont pas familiarisés et qui ne leur semblent pas adaptées à la didactique de l'algèbre.

Les objectifs de la recherche consistaient à cerner les éléments qui entravent la compréhension des élèves lors du processus de mise en équation algébrique et à identifier quelques facteurs pouvant influencer positivement le développement la pensée algébrique, en accord avec la philosophie du renouveau pédagogique. Pour ce faire, on a administré une épreuve écrite à un groupe d'élèves de troisième secondaire et on les a rencontrés individuellement pour un entretien d'explicitation.

À la lumière des résultats obtenus, on note que l'apprentissage et la reproduction d'un modèle sont insuffisants et semblent se poser en obstacle à la construction de sens. Cependant, on remarque que les élèves confrontés à des problèmes pour lesquels ils ne possèdent pas de *« mode d'emploi »* sont déroutés et ne disposent d'aucun repère pour initier une démarche. La question n'est donc pas de savoir si l'on devrait éviter de suggérer une stratégie en classe ou encore de bannir les exercices répétitifs. Ce qui importe, c'est de ne pas en rester là. Tôt ou tard, l'élève doit être confronté à des problèmes qui lui font réaliser les limites du modèle suggéré en classe. Lorsque les particularités de la situation font en sorte que la procédure de résolution doive être modifiée, l'élève se voit dans l'obligation de s'en remettre à son jugement personnel et de puiser dans ses connaissances antérieures. C'est cet effort intellectuel qui l'amène à comprendre le bien fondé de sa démarche et à être en mesure de l'adapter au besoin.

En définitive, un enseignement efficace devrait combiner l'utilisation d'algorithmes conventionnels à l'usage de situations variées, le tout de manière progressive pour permettre à l'élève d'évoluer vers la pensée algébrique. Il devrait également accorder une place prépondérante aux échanges et à l'argumentation qui sont des dispositifs nécessaires pour détecter les conceptions erronées qui se posent en obstacle à la compréhension et faire évoluer la pensée algébrique. Il s'agit là de processus actifs qui cadrent parfaitement avec la philosophie du renouveau pédagogique et qui ne discréditent en rien l'apport des exposés magistraux dans l'enseignement de l'algèbre.

Limites et perspectives

Cette recherche a permis de déterminer des pratiques pédagogiques pouvant favoriser la coordination des dimensions objets et outils de l'algèbre. Cependant, les progrès des élèves, à long terme, n'ont pas pu être évalués. De plus, la verbalisation du raisonnement qui s'est avérée particulièrement efficace, semble difficilement applicable dans des classes où le nombre d'élèves est trop élevé pour permettre le recours aux interventions individuelles, sur une base régulière.

Les principales perspectives de recherche qui ressortent à l'issue de cette étude concernent donc l'apport, à long terme, des ces pratiques, sur l'évolution de la pensée algébrique. Il serait particulièrement intéressant de déterminer comment l'entretien d'explicitation pourrait contribuer au développement de la pensée algébrique, au sein d'un groupe d'élèves restreint, sur une plus longue période de temps.

Bibliographie

Astolfi, J.-P. (1997). *L'erreur, un outil pour enseigner.* Paris : éditions ESF. (128 pages.)

Baruk, S. (1985). *L'age du capitaine.* Paris : Éditions du Seuil

Bednarz, N.; Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: continuities and discontinuities with arithmetic. Dans R. Sutherland (dir.), *Approaches to algebra, perspectives for research and teaching.* Dordrecht : Kluwer Academic Publishers

Bloch, I. (2005). Conceptualisation throught semiotic tools in teaching/learning situations. Consulté en ligne le 30 mai 2006. http://cerme4.crm.es/Papers%20definitius/1 1/bloch.pdf.

Booth, L. (1988). Children's Difficulties in Beginning algebra. Dans : The ideas of algebra. K-12. *National Council of Mathematics Teachers.*

Blaye, A. (1988). Interactions sociales et construction cognitives: présentation critique de la thèse du conflit socio-cognitif. Dans Bednarz, N., Garnier, C., *Construction des savoirs : obstacles et conflits,* Ottawa: Les Editions d'Arc inc., 1989, p.183-195.

Bradley Carol A. (1990), The relationship Between Mathematics Language Facility and Mathematics Achievement Among Junior High School Students. *Focus on Learning Problems in Mathematics.* Vol. 12, # 2, (pp. 15-31)

Breton, G., Deschênes, A., Ledoux, A. (1996), *Réflexions mathématiques 436*, Tome 1. Les éditions CEC. (346 pages)

Brousseau, G. (1988). Le contrat didactique: le milieu. Dans *Recherches en didactique des mathématiques* vol.9 #3 (pp.309-336)

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chamberland, G., Lavoie L., Marquis D. (1995). *Formules pédagogiques.* Sainte-Foy : Presses de l'université du Québec. (196 pages)

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique – Deuxième partie. Perspective curriculaire: la notion de modélisation. Dans *Petit X, no. 19* (p. 45-75). Grenoble : IREM.

Chevallard, Y. (1990). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique - Troisième partie. Dans *Petit x no. 23* (p. 5-38).Grenoble : IREM.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique – du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble : La pensée Sauvage.

Cortés, A., Kavafian, N. (1999). Les principes qui guident la pensée dans la résolution des équations. Dans *Petit x no 51.* (p.47-73) Grenoble : IREM.

Coulange, L. (2000). *Étude des pratiques du professeur du double point de vue écologique et économique. Cas de l'enseignement des systèmes d'équations et de la mise en équations en classe de troisième.* Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble.

De Serres, M., Bélanger, M., Piché M.C., Riopel, M., Staub, C., De Granpré, C. (2003). *Intervenir sur les langages en mathématiques et en sciences*. Montréal : Modulo Éditeur.

De Serres, M., J.D. Groleau (1997). *Mathématiques et langages, recherche PAREA.* Montréal : Collège Jean-de-Brébeuf.

Descaves, A. (1992). *Comprendre des énoncés, résoudre des problèmes.* Paris : Hachette Éducation.

Douady, R. (1994). Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir. *Repères IREM, vol.15.* Paris : Topiques Éditions.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil/objet. *Recherche en Didactique des mathématiques, vol. 12* (p.73-111). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Duval, R. (2006). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques ? *Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa, numero especial* (p.45-81). Mexico: CLAME.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine, registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne : Peter Lang.

Flückiger, A. (2006). Formation au travail de l'erreur et didactique des mathématiques. *Revue suisse des sciences de l'éducation, vol 28.* (p. 43-61).

Freiman, V. ; Lee, L. (2004). Tracking primary student's understanding of the equality sign. *Group for the Psychology of Mathematics Education, vol 2.* (pp 415-422).

Gauthier, D. ,Garnier, C., Marinacci, L. (2005). Les représentations sociales de l'enseignement et de l'apprentissage de la science et de la technologie d'élèves et d'enseignants du secondaire. *Journal International sur les Représentations Sociales vol. 2 no1* http://geirso.uqam.ca/jirso/Vol2_Aout05/20Gauthier.pdf

Gilly, M. (1989). À propos de la théorie du conflit socio-cognitif et des mécanismes psycho-sociaux des constructions cognitives : perspectives actuelles et modèles explicatifs. Dans Bednarz N. et C. Garnier (dir.), *Construction des savoirs obstacles et conflit.* Ottawa :Agence d'Arc.

Günter, M. (1990). Semantic problems in elementary algebra. *Proceedings of the BISME-2*, (pp. 37-57).

Karsenti, T.; Savoie-Zajc, L.; (2004). *La recherche en éducation : étapes et approches.* Sherbrooke : Éditions du CRP. (316 p.)

Kieran, C. (1994). A functional approach to the introduction of algebra: some pros and cons, in J. P. Ponte & J. F. Matos (Eds.). *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, vol. 1* (p. 157-175).

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. *Handbook of research on mathematics teaching and learning.* (p. 390-419). New-York : Douglas A. Grouws.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematic, vol. 12.* (pp. 317-326)

Kinzel, M. (2001). Linking task characteristics to the development of symbol sense. Dans: *Mathematics Teacher 94 vol. 6* (p. 494-499). Durham, New-Hampshire.

Küchemann, D. (1978). Children's understanding of numerical variables. *Mathematics in School, vol.7* (p. 23-26).

Lafortune, L.; Mongeau, D.;Pallascio, R. (2002). *Pour une pensée réflexive en éducation.* Ste-Foy : Presses de l'Université du Québec. (349 pages).

Lee, L.;Wheeler, D. (1989). The arithmetic connection. *Educational Studies in Mathematics, vol.20.* (pp.41-54).

Lefebvre, D. (2006). Calcul et situations problèmes. Consulté en ligne le 17 août 2006 http://www.cafepedagogique.net/dossiers/contribs/lefebvre.php

Lemoyne, G. (2000). Donner du sens aux mathématiques. Consulté en ligne le 03 septembre 2008.
http://www.forum.umontreal.ca/numeros/1999-2000/Forum00-03-06/article02.html

MEQ (2005). Indicateurs de l'éducation édition 2005, consulté en ligne le 10 décembre 2005. http://www.mels.gouv.qc.ca/stat/indic05/docum05/446283.pdf (162 p.)

MEQ (2005). Résultats aux épreuves uniques de juin 2004 et diplomation. Consulté en ligne le 10 décembre 2005
http://www.meq.gouv.qc.ca/sanction/epreuv2004/Epreuve_2004.pdf (96 p.)

MEQ (2004). Résultats aux épreuves uniques de juin 2003 et diplomation. Consulté en ligne le 10 décembre 2005.
http://www.meq.gouv.qc.ca/sanction/epreuv2003/Epreuve2003.pdf (95 p.)

MEQ (2003). Résultats aux épreuves uniques de juin 2002 et diplomation. Consulté en ligne le 10 décembre 2005.
http://www.meq.gouv.qc.ca/sanction/epreuv2002/epreuv2002.pdf (96 p.)

MEQ (2002). Résultats aux épreuves uniques de juin 2001 et diplomation. Consulté en ligne le 10 décembre 2005.
http://www.meq.gouv.qc.ca/sanction/epreuv2001/epreuv2001.pdf (94 p.)

Neria, D.; Amit, M. (2004). Students preference of non-algebraic representations in mathematical communication. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, vol. 3* (pp.409-416).

Pierce, C.S. (1978). Théorie des signes : la sémiotique. Dans *Écrits sur le signe* (p. 120-191). Paris : Éditions du Seuil.

Radford, L.; Demers, S. (2004). *Communication et apprentissage – Repères conceptuels et pratiques pour la salle de classe de mathématique.* Ottawa : Centre franco-ontarien de ressources pédagogiques (p. 16).

Radford, L. (2004). La généralisation mathématique comme processus sémiotique. Dans *The Social Sciences and Humanities Research Council of Canada.* (p. 11-27) Locarno, Suisse.

Rapport PIRS, consulté en ligne le 02 décembre 2005.
http://www.gnb.ca/0000/publications/evalf/RapportNBPIRSMath-2001.pdf

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematics conceptions: reflections on processes and objects as different side of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, vol.22* (p. 1-36).

Sierpinska, A. (1999). Interaction des perspectives épistémologique, cognitive et didactique. Dans G. Lemoyne; F. Conne(dir.), *Le cognitif en didactique des mathématiques*. Montréal : Presses de l'Université de Montréal. (pp. 151-176)

Sims-Knight, J.E.; Kaput, J. (1983). Exploring Difficulties in Translating Between Natural Language and Image Based Representation and Abstract Symbols Systems of Mathematics. Dans D.R. Rogers et J.A.Sloboda, J.A (dir.), *The Acquisition of symbolic Skills.* New-York: Plenum Press. (pp. 561-570)

Stacey, K.; MacGregor, M. (1997). Ideas about Symbolism that students bring to algebra. *Mathematics Teachers, vol.90 n2* (pp.110-113).

Subramaniam, K. (2004). Teaching arithmetic and algebraic expressions. *Proceedings of the 28e Conference of th International Group for the Psychology of Mathematics Education, vol. 3* (p. 121-128). Mumbai, Inde.

TEIMS (2003). Tendances de l'enquête internationale sur les mathématiques et les sciences. Consulté en ligne le 13 septembre 2006. http://mels.gouv.qc.ca/sanction/pirs/TEIMS-2003.pdf

TEIMS (1999). Tendances de l'enquête internationale sur les mathématiques et les sciences. Consulté en ligne le 11 juin 2006. http://mels.gouv.qc.ca/sanction/pirs/TEIMS-99.pdf

Teppo, W.; Esty, A. (1995). Problem solving using arithmetic and algebraic thinking. *Psychology of Mathematics Education: Proceedings of the 16th Annual meeting* (p.24-30).

Vermersh, P. (2003). Présentation de l'entretien d'explicitation. Consulté en ligne 30 juin 2006. http://www.es-conseil.fr/GREX/presentation.html

Vermersh, P. (1994). *L'entretien d'explicitation*. Paris : ESF Éditeur. Collection Pédagogies (181 pages).

Ledoux, A; Brosseau, B.; Boivin, D. Ricard, N. (2007). *Visions mathématiques, 1ère année du 2e cycle du secondaire,* Volume 1. Les éditions CEC, Anjou. (248 pages).

Vlassis, J.; Demonty, I. (2002). *L'algèbre par des situations-problèmes au début du secondaire*. Belgique: De Boeck éducation. (184 pages)

Vlassis, J.; Demonty, I. (2000). Apprendre à résoudre des équations. *Synthèse de la recherche en pédagogie, vol. 231* (p.35-42).

Vlassis, J.; Demonty, I. (1997). Stratégies d'enseignement de l'algèbre au premier degré du secondaire. *Informations Pédagogiques vol.38* (p. 25-38).

Vlassis, J.; Demonty, I. (1999). Les représentations pré-algébriques des élèves sortant de l'enseignement primaire. *Informations Pédagogiques vol. 47* (p.16-27).

Vygotsky, L. (1985). *Pensée et Language*. Paris : Éditions sociales.

Annexe I

Épreuve écrite administrée aux élèves

Nom : ______________________________

Résous algébriquement chacun de ces problèmes et laisse ta démarche

1. Trois amis se partagent un montant de 425 $ de la façon suivante : Marc-André reçoit 15$ de plus que le double du montant que reçoit Frédéric, tandis que Mathieu reçoit 40$ de moins que le triple du montant que reçoit Frédéric. Quel est le montant que reçoit chacun d'entre eux ?

2. Josianne possède 108 billes (des rouges, des jaunes et des bleues). Le nombre de billes rouges qu'elle possède est 9 de plus que celui de billes jaunes, mais 6 de moins que celui de billes bleues. Combien de billes de chaque couleur possède-t-elle ?

3. Le périmètre d'un rectangle est 37 cm. Sachant que la longueur mesure 1 cm de moins que le double de la largeur, détermine les dimensions de ce rectangle.

4. La somme de deux nombres naturels pairs consécutifs est égale à 16 de moins que le triple du plus petit de ces deux nombres. Quels sont ces deux nombres ?

Annexe 2

Protocole d'entretien
pour les entrevues individuelles

Première partie : Les expressions algébriques

1. Au problème numéro 1, je vois que tu as attribué une expression algébrique à chacune des valeurs cherchées. Accepterais-tu de m'expliquer comment tu as procédé ?

2. Comment as-tu procédé pour déterminer les expressions que tu as utilisées au problème numéro 3 ?

3. *–Pour ceux ayant réussi à représenter correctement les inconnus au numéro 2 :*

   - Dans le problème numéro 2, toutes les données faisaient référence au nombre de billes rouges. Il y avait donc deux inconnues pour lesquelles tu ne possédais pas vraiment d'information. Comment as-tu déterminé celle à qui tu allais attribuer la variable x ?

   - Comment as-tu déterminé les autres ensuite ?

   - Pour ceux ayant attribué des expressions erronées aux inconnus du numéro 2 :

   - Selon la donnée du texte, le nombre de billes rouges devrait être de combien par rapport à celui des billes jaunes ? Et par rapport au nombre de billes bleues ?

   - Si on examine l'expression algébrique que tu as attribuée au nombre de billes rouges, est-ce que cela correspond à ce que tu viens de me dire ?

   - Si tu pouvais changer tes expressions pour qu'elles respectent ces conditions, par quoi les remplacerais-tu ?

4. *– Pour ceux ayant réussi à représenter correctement les inconnus au numéro 4:*

   - Au numéro 4, comment as-tu déterminé la relation mathématique entre les deux valeurs cherchées ?

Annexe 2 (suite)

5. *– Pour ceux ayant attribué des expressions erronées aux inconnus du numéro 4 :*

- Je vois que tu as identifié les inconnues comme étant deux nombres. Pourrais-tu me dire quelles sont les données du texte qui t'ont permis d'en arriver à leur associer ces expressions algébriques ?
- Qu'est-ce que tu sais de ces deux nombres ?
- Pourrais-tu me nommer deux nombres pairs consécutifs ? Voudrais-tu m'en nommer deux autres ? Qu'est-ce que tu remarques lorsque tu examines ces paires de nombres ?
- Si tu connaissais l'un de ces deux nombres, comment ferais-tu pour déterminer l'autre à partir de celui-ci?
- Si tu pouvais te reprendre, quelles expressions algébriques associerais-tu à chacun de ces deux nombres ?
- J'attire maintenant ton attention sur la partie *« ...est égale à 16 de moins que le triple... »*. Voudrais-tu relire la phrase et me dire, selon toi, qu'est-ce qui est égal à 16 de moins que le triple ...?
- D'après les expressions que tu as inscrites, qu'est-ce qui est représenté comme étant égal à 16 de moins que le triple ?

6. *–Pour ceux n'ayant réussi à présenter aucune démarche*

- Je vois que tu n'as inscrit aucune démarche au numéro 4. Peux-tu me dire ce que tu comprends de la question ?
- D'après le texte, qu'est-ce qu'on doit trouver ?
- Si tu avais une seconde chance de désigner les valeurs cherchées, qu'est-ce que tu inscrirais ?

Annexe 2 (suite)

- Peux-tu me dire ce que tu sais à propos de ces deux nombres ?

- Selon toi, qu'est-ce que cela veut dire deux nombres consécutifs ? Et deux nombres pairs consécutifs ?

- Pourrais-tu me donner quelques exemples ? Qu'est-ce que tu remarques lorsque tu examines ces paires de nombres ?

- Si tu connaissais l'un des deux nombres, comment ferais-tu pour déterminer l'autre, à partir de celui que tu connais ?

- Si tu pouvais te reprendre, quelles expressions algébriques associerais-tu à chacun de ces deux nombres ?

Deuxième partie : La mise en équation :

7. Au numéro 1, je vois que tu as posé l'équation … Qu'est-ce qui t'a amené à poser cette équation ?

8. *– Pour ceux n'ayant pas posé la bonne équation au numéro 3.*

    - Je lis ici l'équation … Voudrais-tu me dire quels sont les éléments du texte qui t'ont conduit à cela ?

    - J'aimerais maintenant attirer ton attention sur le terme « *périmètre* ». Qu'est-ce que cela représente pour toi ?

    - Si tu devais calculer le périmètre d'un rectangle, comment procéderais-tu ?

    - D'après l'équation que tu as posée, est-ce que l'expression inscrite à la gauche de l'égalité représente le périmètre du rectangle ?

    - Si tu pouvais te reprendre, quelle équation écrirais-tu à la place de celle-ci ?

Annexe 2 (suite)

9. - *Pour ceux ayant réussi à solutionner le problème numéro 4.*

  - Je lis ici l'équation ...Pourrais-tu m'expliquer comment tu es parvenu(e) à poser cette équation ? Qu'est-ce que tu t'es dit dans ta tête ?

 - *Pour ceux n'ayant pas réussi à solutionner le problème numéro 4.*

  - Revenons maintenant au numéro 4. Quelle est la principale difficulté que tu as rencontrée ?
  - Si tu le lisais attentivement, pourrais-tu me donner les informations que tu saisis bien ? Et celles que tu ne comprends pas ?
  - Maintenant que tu as représenté les deux nombres par des expressions algébriques, peux-tu me dire ce qu'on te dit à propos d'eux ?
  - Par quelle expression algébrique représenterais-tu *« la somme »* de ces deux nombres ?
  - Que dit-on à propos de cette somme ?
  - Si je te demandais de poser l'équation qui traduit les données de ce texte, quelle serait-elle ?

Troisième partie : Impressions personnelles

10. As-tu des commentaires à faire à la suite de cet entretien ?

11. As-tu l'impression d'avoir appris quelque chose ? Si oui, quoi ?

Annexe 3

Exemple présenté en classe par l'enseignante avant l'épreuve écrite

Chantal a 3 ans de plus que le double de l'âge de Justine. Sachant que la somme de leurs âges est de 36 ans, détermine l'âge de chacune d'elles.

« Les deux valeurs inconnues que nous cherchons sont l'âge de Chantal et l'âge de Justine, alors nous allons les inscrire » :

Age de Chantal :
Age de Justine :

« Puisque la donnée du problème ne fournit aucune information sur l'âge de Justine, nous allons supposer qu'elle a x ans. Étant donné que l'âge de Chantal est 3 années de plus que le double de celle de Justine et que nous prenons pour acquis que l'âge de Justine est x ans, alors celle de Chantal sera de (2x + 3) ans ».

Age de Chantal : $2x + 3$
Age de Justine : x

« D'après la donnée du problème, nous savons que la somme de leurs âges est de 36 ans, alors nous pouvons poser l'équation $2x + 3 + x = 36$ ».

$$2x + 3 + x = 36$$

« Nous pouvons additionner le terme 2x avec le terme x qui sont du même côté de l'égalité et nous obtenons » :

$$3x + 3 = 36$$

« En soustrayant 3 de chaque côté du signe d'égalité, nous obtenons » :

$$3x = 33$$

« ...Et en divisant par 3 de chaque côté de l'égalité, nous trouvons » :

$$x= 11$$

« Maintenant que nous connaissons la valeur de x, nous savons que l'âge de Justine est de 11 ans et en substituant cette valeur dans l'expression 2x + 3, nous trouvons que l'âge de Chantal est de 25 ans ».