

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À
L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À CHICOUTIMI
COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN INGÉNIERIE

Par
Mostepha Saihi

Effet des sollicitations de la route sur les pièces de
suspension en aluminium

Avril 2012

Table des matières

Liste des figures	iv
Liste des Tableaux	vi
Résumé.....	vii
Remerciements.....	viii
Chapitre 1	1
Introduction	1
1.1 Problématique :	2
1.2 Objectifs.....	4
1.3 Méthodologie	4
Chapitre 2	6
Revue de littérature.....	6
2.1 Rappel mathématique sur l'analyse des données aléatoires	6
2.1.1 Classification des données physiques	6
2.1.2 Processus aléatoire temporel.....	7
2.1.3 Réponse fréquentielle	8
2.1.4 Processus aléatoire dans l'espace	9
2.2 Modélisation de la route	10
2.2.1 Profil de la route	11
2.2.2 Mesure du profil de la route.....	12
2.2.3 Rugosité de la route	13
2.3 Densité spectrale de puissance (PSD):.....	14
2.4 Normes et modèles du profil de la route.....	14
2.4.1 Norme ISO8608	14
2.4.2 Indice International de Rugosité (IRI)	16
2.4.3 L'index de Rugosité d'un Demi-véhicule (HRI).....	18
2.4.4 Norme EN 13036-5 : 2006.....	18

2.4.5 L'Indice SEI (Spektraler l'Ebenheits)	18
2.4.6 Autres modèles	18
2.5 Modèles de véhicules :.....	20
2.5.1 Modèle d'un quart de véhicule	20
2.6 Modèle demi-véhicule	21
2.6.1 Modèle complet de véhicule ou 3D	21
Chapitre 3	23
Modélisation d'un quart de véhicule : calcul des vitesses et des accélérations.....	23
3.1 Modèle d'un quart de véhicule :	23
3.2 Approche de modélisation	24
3.3 Simulation dynamique	31
3.4 Analyse de l'accélération	37
Chapitre 4	49
Modélisation d'un quart de véhicule : calcul des forces statiques et dynamiques	49
4.1 Étude statique :.....	50
4.2 Étude dynamique :	60
Chapitre 5	86
Simulation et validation du modèle développé.....	86
5.1 Calcul des forces dynamiques.....	86
5.2 Relation d'influence entre la vitesse l'accélération et les différentes forces critiques.....	93
Chapitre 6	98
Conclusion et recommandation	98
Références.....	100

Liste des figures

Figure 1.1: Source d'excitation [1].....	3
Figure 2.1 : Classifications des données déterministes.....	6
Figure 2.2: Classifications des données aléatoires.....	7
Figure 2.3 : Béton bitumineux.....	10
Figure 2.4: Asphalte dense.....	10
Figure 2.5: Béton bitumineux drainant.....	10
Figure 2.6 : Asphalte coulé gravillonné.....	11
Figure 2.7 : L'asphalte clouté.....	11
Figure 2.8 : Béton bitumineux mince.	11
Figure 2.9 : Pavé en béton.	11
Figure 2.10 : Pavé en pierre naturelle.	11
Figure 2.11: Pavé artificiel.....	11
Figure 2.12 : Schéma bidimensionnel de la surface de la route [6].....	11
Figure 2.13 : Jauge utilisée pour la mesure manuelle du profil [9].	12
Figure 2.14: Profilomètre d'inertie [7].	13
Figure 2.15: Classification de la route selon la norme ISO 8608.	15
Figure 2.16 : Illustration d'un modèle utilisé pour calculer l'IRI [10].....	17
Figure 2.17 : L'échelle de rugosité IRI (redessiné par Sayers et al. 1986) [10].	17
Figure 2.18: Profil de la piste en fonction du temps.....	19
Figure 2.19 : Densité spectrale de la piste [20].....	19
Figure 2.20 : Modèle longitudinal d'un quart de véhicule.	20
Figure 2.21 : Modèle de demi-véhicule.	21
Figure 2.22 : Modèle de véhicule complet.	22
Figure 3.1 : Modèle d'un quart de véhicule général et simplifié.....	24
Figure 3.2: Modèle d'un quart de véhicule en 3D.	25
Figure 3.3 : Vecteurs de vitesse angulaire et linéaire du triangle supérieur.	26

Figure 3.4: Bras de direction : contrainte sur le degré de liberté de rotation.....	30
Figure 3.5: Schéma d'un ralentisseur	32
Figure 3.6: Modélisation de l'amortisseur.	33
Figure 3.7 : Vecteurs d'accélération angulaire et linéaire du triangle supérieur.....	37
Figure 4.1: Diagramme des corps libres du système de suspension.....	49
Figure 4.2: Triangle supérieur.	52
Figure 4.3: Diagramme du corps libre du triangle inférieur.	60
Figure 4.4 : Système d'axe principal du corps utilisant les angles d'Euler.....	61
Figure 4.5 : Diagramme du corps libre du triangle supérieur.	66
Figure 4.6 : Diagramme du corps libre du support de la roue.	71
Figure 4.7: Centre instantané de vitesse.	72
Figure 4.8 : Représentation simplifiée du centre instantané de vitesse.	72
Figure 4.9 : Diagrammes de corps libres de la tige.	79
Figure 5.1: Spectre des forces en fonction du déplacement selon l'axe x.....	88
Figure 5.2: Déplacement vertical des points G et D selon l'axe x.....	88
Figure 5.3: Profil de la piste en fonction du temps.....	89
Figure 5.4 : Vitesse en fonction du temps.	89
Figure 5.5 : Accélération en fonction du temps.....	90
Figure 5.6 : Force appliquée au point P.	90
Figure 5.7 : Force appliquée au point D.	91
Figure 5.8 : Force appliquée au point G.	91
Figure 5.9: Spectre des forces critiques au point G en fonction de la vitesse.....	94
Figure 5.10: Spectre des forces critiques au point D en fonction de la vitesse.	95
Figure 5.11 : Spectre des forces critiques au point G en fonction de l'accélération.	96
Figure 5.12 : Spectre des forces critiques au point D en fonction de l'accélération.	97

Liste des Tableaux

Tableau 2.1: Descripteurs ISO du profil superficiel de la route.	15
Tableau 3.1: Coordonnées des points.	25
Tableau 3.2 : Vecteur de vitesse angulaire.	36
Tableau 3.3: Vecteur de vitesse linéaire.	36
Tableau 3.4 : Vecteur d'accélération angulaire.	48
Tableau 3.5 : Vecteur d'accélération linéaire.	48
Tableau 4.1: Paramètres physiques des éléments de suspension.	50
Tableau 4.2 : Composantes des vecteurs de force.	59
Tableau 5.1 : Composantes des différentes forces selon l'axe Z.	87
Tableau 5.2 : Valeur des forces maximales pour différentes pistes.....	92

Résumé

L'utilisation des matériaux légers et résistants dans la fabrication industrielle des automobiles, est un sujet actuel qui préoccupe plusieurs centres de recherche. Ceci a pour but de réduire le poids, et de diminuer la consommation en carburants. Dans ce contexte, nous nous intéressons à étudier l'effet des sollicitations de la route sur les différents éléments du véhicule en particulier sur les pièces de la suspension en aluminium. Dans le cas réel, les sollicitations sont aléatoires et complexes, elles nécessitent des modélisations par des processus stochastiques, elles sont basées sur la densité spectrale de puissance (PSD). Il y a plusieurs normes pour caractériser le profil de la route, on note : ISO 8608, IRI (Indice de Rugosité International) et le SEI (Spektraler d'Ebenheits).

Pour la réalisation de cette étude, un modèle analytique d'un quart de véhicule en trois dimensions a été développé. Ce modèle est utilisé pour la simulation des interactions route - véhicules. Dans la partie cinématique de ce projet, les vitesses et les accélérations des points situant dans la partie mobile de la suspension ont été déterminées en utilisant des méthodes vectorielles. Ces résultats nous permettent d'élargir le domaine de notre étude pour développer les équations du mouvement à partir de la seconde loi de Newton. Ces équations ont permis de calculer les forces appliquées sur les triangles inférieur et supérieur de la suspension. Les résultats obtenus sont utilisés dans le calcul de la réponse du véhicule à différents types d'excitation de route, ainsi que le calcul des fréquences naturelles du système.

Dans l'avenir, cette étude, peut nous aider à mieux modéliser ce genre de problème complexe. Ceci nous permettra de répondre à quelques interrogations dans le domaine de la sécurité, la stabilité et la fiabilité des véhicules, en particulier de prévoir les zones à contraintes maximales afin de pouvoir augmenter la durée de vie des pièces fabriquées en aluminium.

Remerciements

Je réserve ces lignes en signe de gratitude et de reconnaissance à tous ceux qui ont contribué à la réalisation de ce travail de recherche dans les meilleures conditions.

Mes sincères remerciements s'adressent à mon directeur de recherche Monsieur Mohamed Bouazara, professeur au département des sciences appliquées à l'Université du Québec à Chicoutimi, pour la qualité de son encadrement, la confiance qu'il m'a accordée et surtout son soutien moral qu'il m'a attribué tout au long de ce projet, pour son temps précieux dont il m'a fait part malgré ses engagements professionnels

J'exprime aussi ma reconnaissance à monsieur Marc J. Richard co-directeur et professeur à l'Université Laval à Québec, pour ses conseils enrichissants au cours de ce projet. Qu'il trouve ici l'expression de mes sincères admirations et mes profonds respects.

Je tiens à remercier le professeur Ramdane Younsi de l'école Polytechnique de Montréal d'avoir accepté dévaluer ce mémoire.

À mes chers parents pour toute peine qu'ils m'ont donné à me guider jusqu'au bout.
Pour toutes leurs sacrifices et leurs patience.

Je termine ces remerciements par une immense reconnaissance envers toute ma famille, mes amis avec lesquels nous avons partagé de bons moments et une ambiance de travail exceptionnelle et tous les gens que j'ai côtoyés durant ce travail. Chacun de sa façon m'a apporté une chose : merci à vous tous.

Chapitre 1

Introduction

La suspension est l'un des éléments essentiels d'un véhicule. Elle a pour but d'assurer le contact des roues au sol en toutes circonstances. En absorbant les chocs dus à l'état de la route, elle permet de diminuer la vibration du châssis, et ainsi assurer le confort au conducteur et aux passagers. De plus, elle doit assurer au véhicule une conduite dynamique lors des virages et obstacles. D'une manière générale, les principaux rôles de la suspension sont définis à travers deux critères : le confort et la tenue de route du véhicule vis-à-vis les sollicitations verticales provoquées par le profil de la piste.

Les éléments de suspension sont fabriqués généralement en acier. Afin de réduire le poids du véhicule, les dernières années, les constructeurs d'automobiles s'intéressent de plus en plus à d'autres matériaux légers. Parmi ces matériaux, l'aluminium sert de plus en plus, seul ou allié à d'autres métaux, à la fabrication de différentes pièces (bras de suspension, carters, blocs-moteur, radiateurs, jantes, carrosseries, châssis, etc.). Les pièces construites en aluminium réduisent considérablement le poids des véhicules, ce qui améliore leur rendement énergétique sans compromettre leur sécurité. L'utilisation de ce métal dans l'industrie de l'automobile nous stimule à étudier le comportement de ces nouvelles pièces dynamiques afin de qualifier leur fiabilité et leur résistance mécanique.

Les travaux antérieurs démontrent que certaines études effectuées sur l'effet des sollicitations sur un quart de véhicule n'étaient pas suffisamment détaillées. Généralement, ils ont considéré la suspension comme étant un seul bloc et ils n'ont tenu compte que du mouvement vertical de cette dernière. Généralement les simulations et campagnes d'essais

sur les suspensions utilisent comme excitation des profils de types sinusoïdaux, triangulaires ou en échelon. Or, un profil de route typique est un signal aléatoire de coordonnée verticale $x(d)$ et s'exprime en fonction de la variable d'espace d en mètres suivant l'axe de déplacement du véhicule.

Dans ce projet, nous nous intéressons à l'étude de l'effet des sollicitations sur le modèle d'un quart de véhicule en 3D en tenant compte de tous les mouvements possibles afin de calculer les vitesses, les accélérations et les charges dynamiques des points situés sur la partie mobile de la suspension. Ceci nous permet de bien analyser et comprendre le comportement dynamique de la suspension et de pouvoir prédire et augmenter la durée de vie des pièces fabriquées en aluminium.

1.1 Problématique :

L'étude dynamique et vibratoire d'un véhicule excité par la rugosité de la route, est généralement définie comme un domaine vibratoire complexe. La figure 1.1 [1] résume le cercle de la source d'excitation jusqu'à la réponse. La rugosité de la route est une caractéristique importante, car elle affecte non seulement la qualité de roulement, mais aussi elle peut causer des dommages matériels sur les différents organes mécaniques, en particulier dans la partie de la suspension.

L'étude du phénomène des sollicitations expérimentalement et/ou par modélisation numérique est nécessaire pour évaluer les réponses et leurs effets sur les pièces mécaniques. La simulation sur ordinateur est plus intéressante puisqu'elle est moins coûteuse et plus flexible contrairement aux méthodes expérimentales généralement complexes et onéreuses.

Afin de réduire le poids et de diminuer la consommation en carburants, l'industrie du transport a eu recourt à l'utilisation de plus en plus de matériau léger. Actuellement, plusieurs éléments de certains véhicules sont fabriqués en aluminium. Dans la présente étude, nous nous intéressons à modéliser le phénomène de sollicitation et leur effet sur les pièces d'un véhicule, notamment ceux qui sont composées en alliage d'aluminium en utilisant des méthodes de calcul avancées. Ceci nécessite la connaissance du développement mathématique avancé.

Dans ce contexte, nous avons développé un modèle analytique décrivant les profils de la piste. Ceci a pour but d'analyser les différents types de la route et de les caractériser par des variables aléatoires. Ensuite, une étude en profondeur sur l'effet des sollicitations sur un quart du véhicule est établie. Nous avons utilisé la méthode vectorielle et les lois de la dynamique pour développer les équations du mouvement. Par ces méthodes, les vitesses et les accélérations des points de la partie mobile de la suspension sont déterminées. Les résultats obtenus sont très utiles pour le calcul de la réponse d'excitation des différents types de route ainsi que le calcul des fréquences naturelles du système.

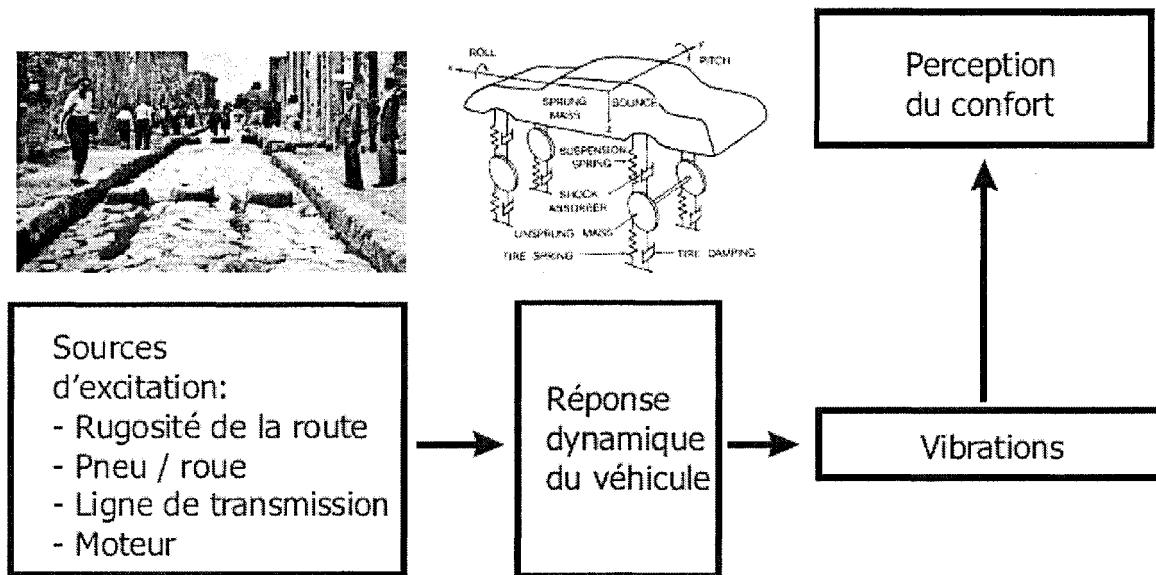


Figure 1.1: Source d'excitation [1].

1.2 Objectifs

La présente étude se base sur une méthode systématique conduisant à l'étude de l'effet des sollicitations aléatoires sur le comportement d'automobile. L'interprétation directe de la variation des vibrations au cours du temps est souvent difficile dans le cas où les données sont mesurées à partir des essais. L'analyse de la rugosité de la route a été portée sur la densité spectrale de puissance (PSD). L'analyse en profondeur du PSD va aider à améliorer la sécurité, le confort et la fiabilité des véhicules. Les objectifs suivants ont été déterminés :

- Analyser les modèles de piste et véhicule existants
- Développer un modèle analytique d'un quart de véhicule complet en 3D.
- Exciter ce modèle avec différentes pistes et analyser son comportement.
- Optimiser et valider le modèle.
- Analyser et discuter des résultats en termes de forces statiques et dynamiques des différents éléments de suspension.

1.3 Méthodologie

La méthodologie à suivre pour atteindre les objectifs de cette étude est répartie en cinq chapitres dont deux sont à caractère théorique, deux autres à caractère numérique et un présente les résultats obtenus analytiquement.

Le deuxième chapitre présente une revue de littérature qui sera répartie en trois parties. La première partie, comprend un rappel mathématique sur l'analyse des données aléatoires. La deuxième partie, rassemble une description sur les différents types de route et leurs composants. Ce chapitre regroupe aussi, les procédures de mesures du profil de la route ainsi que les normes utilisées dans le domaine.

Le troisième chapitre sera consacré à la modélisation d'un quart de véhicule en utilisant la méthode vectorielle pour calculer les paramètres dynamiques, vitesse et accélération qui sont nécessaires pour le calcul des forces statiques et dynamiques appliquées.

Le quatrième chapitre présentera le développement d'un modèle d'un quart de véhicule complet en 3D soumis à des sollicitations dynamiques en tenant compte de tous les mouvements possibles. Pour cela une étude statique et dynamique a été complétée.

Le modèle développé est basé sur l'application de la troisième loi de Newton basée sur le principe d'action-réaction pour les forces appliquées entre deux corps. Dans le cas statique, nous ignorons l'effet du poids des éléments de suspension, vu que leur contribution est faible par rapport aux charges globales du véhicule. Cependant, le poids des éléments de la suspension va être introduit dans le modèle dynamique. Dans la partie dynamique de ce projet, les forces appliquées sur les points mobiles de la suspension ont été déterminées en utilisant les données des différentes sollicitations aux équations dynamiques développées dans le modèle analytique. Ce dernier est simulé avec le logiciel Matlab. Le modèle numérique établie décrit la réponse d'un quart de véhicule aux excitations générées par des profils de route d'un dos-d'âne simple ou aléatoire.

Au cinquième chapitre, les résultats de l'analyse du système complet d'un quart de véhicule sont présentés.

Finalement, les conclusions générales ainsi que les recommandations pour les recherches futures dans les domaines reliés au présente recherche sont présentées au sixième chapitre.

Chapitre 2

Revue de littérature

2.1 Rappel mathématique sur l'analyse des données aléatoires

Un des ouvrages qui a traité ce sujet est celui de Julius S. Bendat [2] qui définit les données aléatoires ainsi que leurs relations mathématiques explicites difficiles. Il a démontré qu'il n'existe aucun moyen de prédire une valeur exacte à un instant donné. Ces données doivent être décrites en termes de probabilité et moyennes statistiques plutôt que par des équations explicites.

2.1.1 Classification des données physiques

Les données physiques peuvent être classées dans deux catégories comme suit :

a) Données déterministes

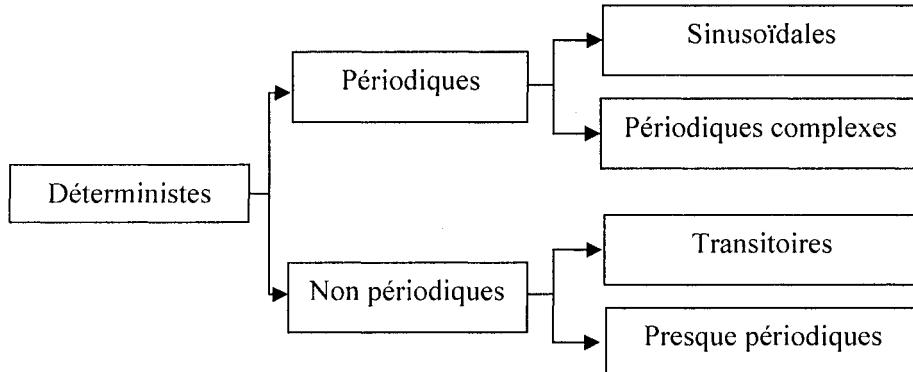


Figure 2.1 : Classifications des données déterministes.

b) Données aléatoires

Un phénomène physique aléatoire ne peut pas être décrit par une relation mathématique explicite parce que chaque observation d'un phénomène sera unique. En d'autres termes, une observation donnée ne représenterait plus qu'un résultat parmi d'autres, qui pourrait être produite.

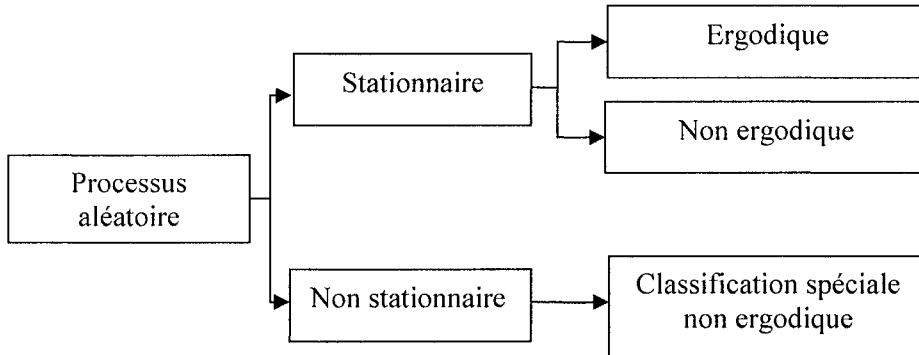


Figure 2.2: Classifications des données aléatoires.

2.1.2 Processus aléatoire temporel

Le profil de la route est généralement considéré comme un processus aléatoire $x(d)$ où x est l'amplitude de la route et $d = v t$ est la distance le long de la route [3, 4].

Comme le véhicule se déplace à une vitesse v , le processus aléatoire $x(d)$ est converti en un processus aléatoire temporel $x(t)$ qui représente le déplacement de la suspension. Le processus aléatoire $x(d)$ est habituellement décrit par la fonction de densité spectrale de puissance fréquentielle.

Considérons un processus aléatoire stationnaire de moyenne nulle, ceci peut être caractérisé par sa fonction d'auto corrélation:

$$R_{xx}(\tau) = \langle x(t)x(t - \tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t - \tau) dt \quad [m^2] \quad (2.1)$$

Où $\langle \cdot \rangle$ représente la moyenne de temps d'opération.

Pour une fréquence en (cycle/seconde) ou en (Hertz) la densité spectrale de puissance $S_{xx}(f)$ est la transformée de Fourier de $R_{xx}(\tau)$ qui peut être représentées par les expressions suivantes :

$$S_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad [m^2 / Hz] \quad (2.2)$$

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f) e^{j2\pi f\tau} df \quad [m^2] \quad (2.3)$$

L'intégration sur toutes les fréquences donne la valeur quadratique moyenne de $x(t)$.

$$\langle x^2(t) \rangle = R_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f) df \quad (2.4)$$

La densité spectrale de puissance en fonction de ω est exprimée par:

$$\hat{S}_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad [m^2 s / rad] \quad (2.5)$$

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{S}_{xx}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (2.6)$$

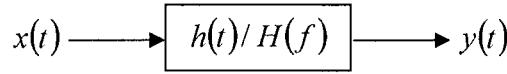
$$\langle x^2(t) \rangle = R_{xx}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{S}_{xx}(\omega) d\omega \quad (2.7)$$

2.1.3 Réponse fréquentielle

Si $y(t)$ est un autre processus aléatoire créé par filtrage de $x(t)$ avec un filtre linéaire de la réponse impulsionnelle $h(t)$, alors la réponse de fréquence du filtre (gain complexe) est donnée par :

$$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (2.8)$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) e^{j2\pi ft} df \quad (2.9)$$



De nouveau, la réponse de fréquence peut être exprimée en termes de radians par seconde comme suit :

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.10)$$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2.11)$$

Dans ce cas, le terme 2π doit être associé à la seconde intégrale pour donner la bonne relation entre la réponse impulsionale et la réponse de fréquence. La valeur quadratique moyenne de $y(t)$ est exprimée comme suit:

$$S_{yy}(f) = |H(f)|^2 S_{xx}(f) \quad (2.12)$$

$$\langle y^2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 S_{xx}(f) df \quad (2.13)$$

2.1.4 Processus aléatoire dans l'espace

Soit le profil de la route $x(d)$, avec d étant la distance le long de la route, $x(d)$ peut être caractérisée par une fonction d'auto corrélation $R_{xx}(\delta) = \langle x(d)x(d - \delta) \rangle$

Où : $\langle . \rangle$ est maintenant une distance faisant la moyenne d'opération. La densité spectrale de puissance de $x(d)$ via la transformée de Fourier de $R_{xx}(\delta)$ a été exprimée en termes de fréquence F (cycles/m), où : $\Omega = 2\pi F$ en radians par mètre.

Nous avons donc:

$$S_{xx}(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\delta) e^{-j2\pi F \delta} d\delta \quad [\text{m}^3/\text{cycle}] \quad (2.14)$$

$$R_{xx}(\delta) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(F) e^{j2\pi F \delta} dF \quad [\text{m}^2] \quad (2.15)$$

Si la variable de fréquence est définie en termes de radians par mètre, nous utiliserons les expressions suivantes :

$$\hat{S}_{xx}(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\delta) e^{-j\Omega\delta} d\delta \quad [m^3/rad] \quad (2.16)$$

$$R_{xx}(\delta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{S}_{xx}(\Omega) e^{j\Omega\delta} d\Omega \quad [m^2] \quad (2.17)$$

$$\tilde{S}_{xx}(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\delta) e^{-j\Omega\delta} d\delta \quad [m^3/rad] \quad (2.18)$$

$$R_{xx}(\delta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{S}_{xx}(\Omega) e^{j\Omega\delta} d\Omega \quad [m^2] \quad (2.19)$$

2.2 Modélisation de la route

Une chaussée comprend toujours une couche supérieure appelée revêtement routier constitué généralement par les éléments suivants : des gravillons, du sable, des particules de remplissage ou fillers, du liant (Asphalte ou le ciment).

On trouve une description sur les différents types de route et leurs composants [5], on résume certains d'entre eux tel qu'illustré par les figures ci-dessous.

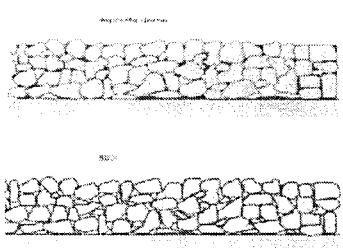


Figure 2.3 : Béton bitumineux.



Figure 2.4: Asphalte dense.

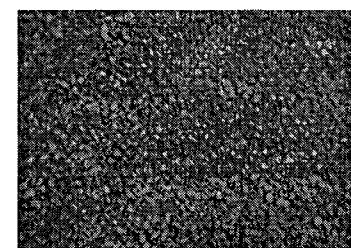


Figure 2.5: Béton bitumineux drainant.

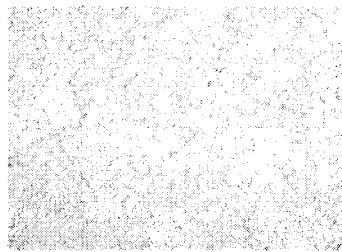


Figure 2.6 : Asphalte coulé gravillonné.

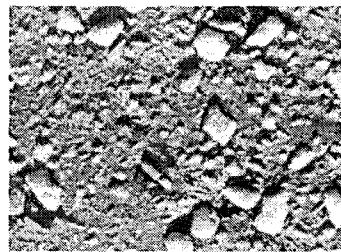


Figure 2.7 : L'asphalte clouté.

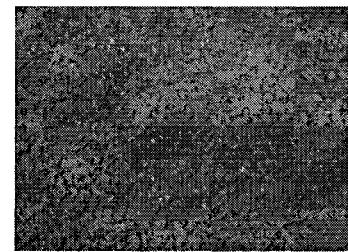


Figure 2.8 : Béton bitumineux mince.

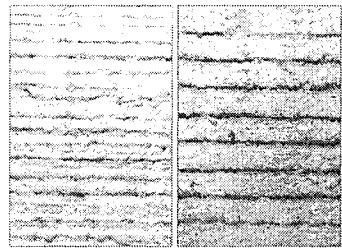


Figure 2.9 : Pavé en béton.

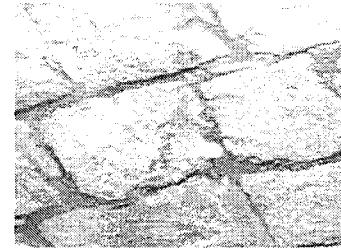


Figure 2.10 : Pavé en pierre naturelle.

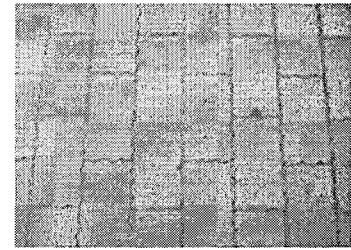


Figure 2.11: Pavé artificiel.

2.2.1 Profil de la route

Le profil de la route est une tranche bidimensionnelle de la surface, pris le long d'une ligne imaginaire tel que représenté par la figure 2.12. Des profils pris le long d'une ligne latérale montrent la couronne de la conception des routes. Les profils longitudinaux montrent le grade de conception, de la rugosité et de la texture.

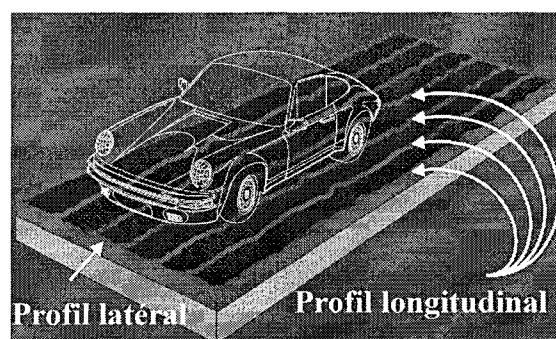


Figure 2.12 : Schéma bidimensionnel de la surface de la route [6].

Notons que la largeur de la ligne n'est pas standard, elle est habituellement définie par le type d'instrument utilisé. Par exemple, les mesures effectuées avec un système de laser peuvent couvrir une tranche très mince de la route, quelques millimètres d'épaisseur. Par contre, les mesures effectuées avec un système à ultrasons peuvent couvrir une tranche de quelques centimètres. L'effet de la largeur de profil n'est pas encore bien compris. Toutefois, il est plus difficile de répéter exactement une mesure de profil si la ligne du profil est très mince [7].

2.2.2 Mesure du profil de la route

Une variété d'appareils est aujourd'hui disponible pour mesurer le profil de la route. Ils sont utilisés pour produire une série de données qui s'y rapportent d'une manière bien définie, nous citons certains des appareils les plus utilisés tel qu'illustré par la figure 2.13 et la figure 2.14 [8].

- La tige du niveau
- Le profilomètre de juge
- Profilographes
- Profilomètre APL « Analyseur de profil en long »
- Le profilomètre de contact léger

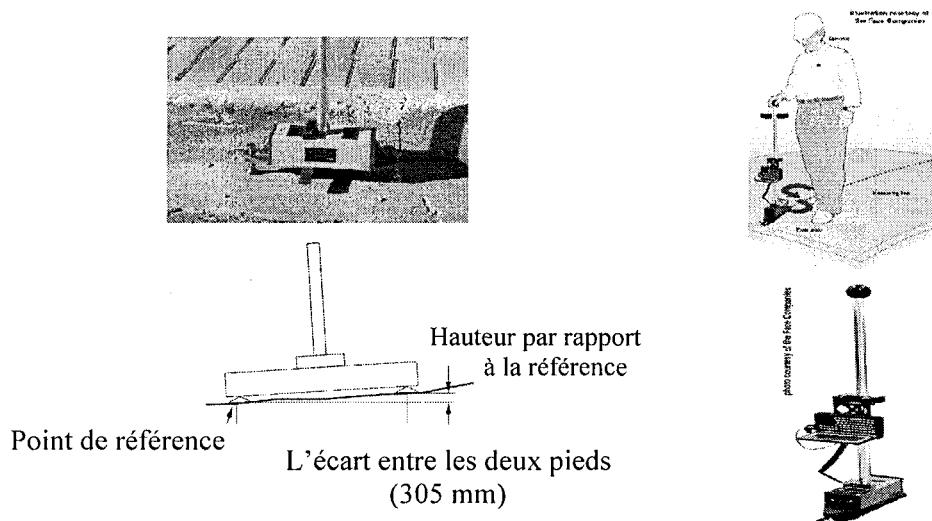


Figure 2.13 : Jauge utilisée pour la mesure manuelle du profil [9].

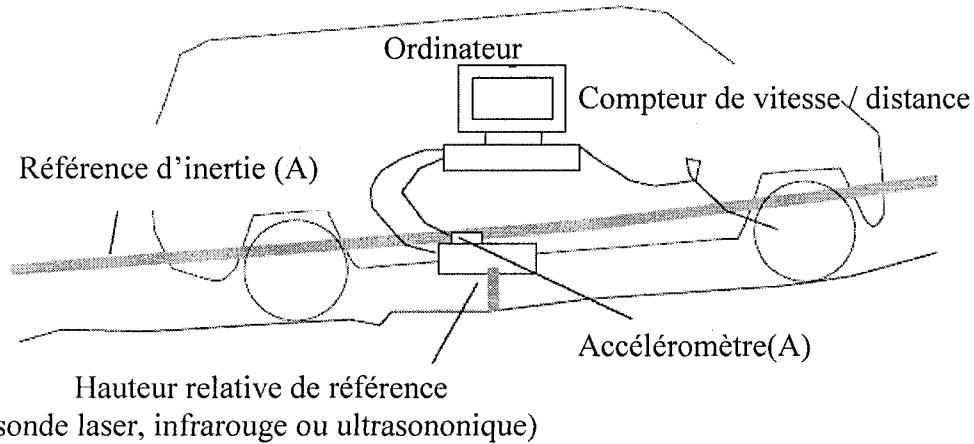


Figure 2.14: Profilomètre d'inertie [7].

2.2.3 Rugosité de la route

Selon la norme ASTM E867, la rugosité veut dire: « Ensemble des déviations de la surface d'une chaussée par rapport à un plan et qui présente des caractéristiques dimensionnelles qui affectent le comportement des véhicules, le confort au roulement, le chargement dynamique de la chaussée et son drainage » [10]. Elle est caractérisée par un signal aléatoire à large bande. Elle peut être décrite par ses données statistiques. Une représentation habituelle utilise la notion de la distribution de densité de puissance spectrale (PSD). La fréquence spatiale est donnée en termes de cycles/mètres qui est l'inverse de la longueur d'onde spatiale des ondulations. La distribution de la densité de puissance spectrale peut être soit obtenue expérimentalement [11], soit par transformée de Fourier rapide (FFT) du relevé de profil en fonction de la distance. Le relevé s'effectue expérimentalement par profilomètre [8, 9, 12] à grande vitesse. On constate que pour toutes les routes, la courbe de la PSD diminue en fonction de la fréquence.

2.3 Densité spectrale de puissance (PSD):

Dans le cas réel, les sollicitations sont aléatoires [13] et complexes qui nécessitent des modélisations par des processus stochastiques. Durant la dernière décennie, des outils mathématiques pour la modélisation et l'analyse/calcul ont connus une croissance considérable [2]. La plupart des recherches dans la dynamique de véhicule étaient basées sur des méthodes de calculs recommandées pour étudier le profil de la route y compris la densité spectrale de puissance (PSD) [14, 15, 16]. C'est une mesure statistique mise au point pour caractériser les signaux aléatoires, telles que la réponse vibratoire d'un véhicule à une entrée aléatoire. Il est également utilisé comme un moyen pour décrire les propriétés de la surface des différents types de route [17].

2.4 Normes et modèles du profil de la route

Le but des normes est de faciliter la compilation et la comparaison des données mesurées du profil vertical de la route à partir de sources diverses (routes, autoroutes, ... etc.). Il précise donc une méthode de déclaration des mesures de données d'une piste et des profils multiples.

2.4.1 Norme ISO8608

Dans la littérature, il existe plusieurs normes [18]. La plus connue est L'ISO8608 suggérée par l'organisation internationale des normes [19]. Elle considère que le profil de la route comme un processus aléatoire gaussien et sa densité spectrale de puissance est donnée par l'équation suivante tracée dans la figure 2.15 [20]:

$$S_{yy}(y) = \begin{cases} S_{yy_0} (\gamma/\gamma_0)^{-n_1} & \text{si } \gamma \leq \gamma_0 \\ S_{yy_0} (\gamma/\gamma_0)^{-n_2} & \text{si } \gamma_0 > \gamma \end{cases} \quad (2.20)$$

avec γ nombre d'onde de la surface de la route (γ est lié à la longueur d'onde par $\lambda = 2\pi/\gamma$).

$S_{yy}(y)$: densité spectrale de puissance.

S_{yy_0} : coefficient de rugosité de la route.

γ_0 : fréquence spatiale de référence, $\gamma_0 = 1 \text{ rad.m}^{-1}$.

n_1, n_2 : coefficients variant de 1 à 2.

Le tableau 2.1 représente selon la norme ISO les valeurs pour plusieurs routes classées de qualité très bonne à disqualifié.

Tableau 2.1: Descripteurs ISO du profil superficiel de la route.

Catégorie de route	$S_{yy_0} [\text{m}^2 / \text{cycle/m}]$	$\gamma_0 [\text{rad}/\text{m}]$	n_1	n_2
Très bonne	1-4	1.0	2	1.5
Bonne	4-16	1.0	2	1.5
Moyenne	16-64	1.0	2	1.5
Satisfaisant	64-256	1.0	2	1.5
Disqualifié	256-1024	1.0	2	1.5

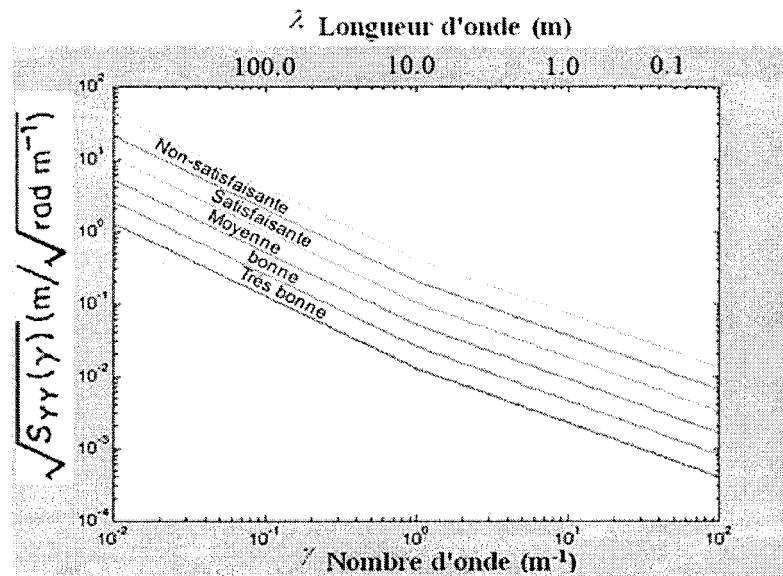


Figure 2.15: Classification de la route selon la norme ISO 8608.

2.4.2 Indice International de Rugosité (IRI)

L'indice de rugosité international (IRI) a été développé par la Banque mondiale dans les années 1980 (UMTRI, 1998). IRI est utilisé pour définir une caractéristique du profil longitudinal d'une piste qui constitue une mesure de rugosité normalisée [9, 21]. L'IRI est une modélisation mathématique de la réaction d'un système de suspension normalisé, présenté par la figure 2.16, (une roue ou un quart de véhicule). Ce système simule un véhicule roulant à une vitesse de 80 km/h tel qu'illustré à la figure 2.17.

Les unités couramment recommandées sont les mètres par kilomètre (m/km) ou en millimètres par mètre (mm/m). L'IRI est basé sur la pente moyenne rectifiée (ARS) qui est une proportion filtrée du mouvement de suspension enregistré d'un véhicule standard en mm, divisé par la distance parcourue pendant la mesure. L'ARS est calculé à partir d'un modèle d'un quart de véhicule [22].

$$ARS = \frac{1}{L} \int_0^{t=L/v} |\dot{z}_s - \dot{z}_u| dt \quad (2.21)$$

Où

L : longueur du profil,

v : vitesse de simulation.

\dot{z}_s et \dot{z}_u sont les vitesses verticales des masses suspendues et non suspendues

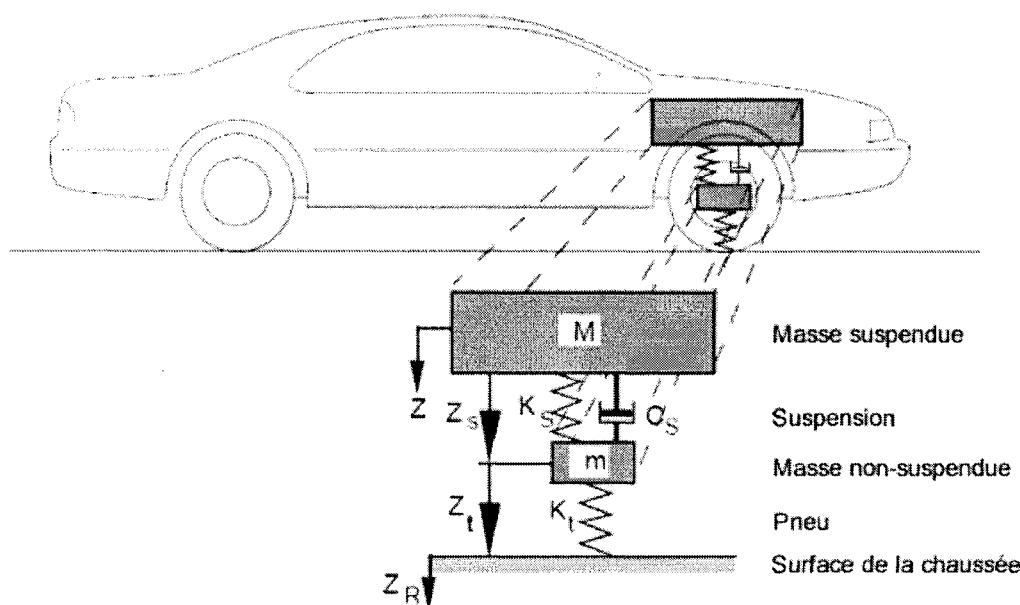


Figure 2.16 : Illustration d'un modèle utilisé pour calculer l'IRI [10].

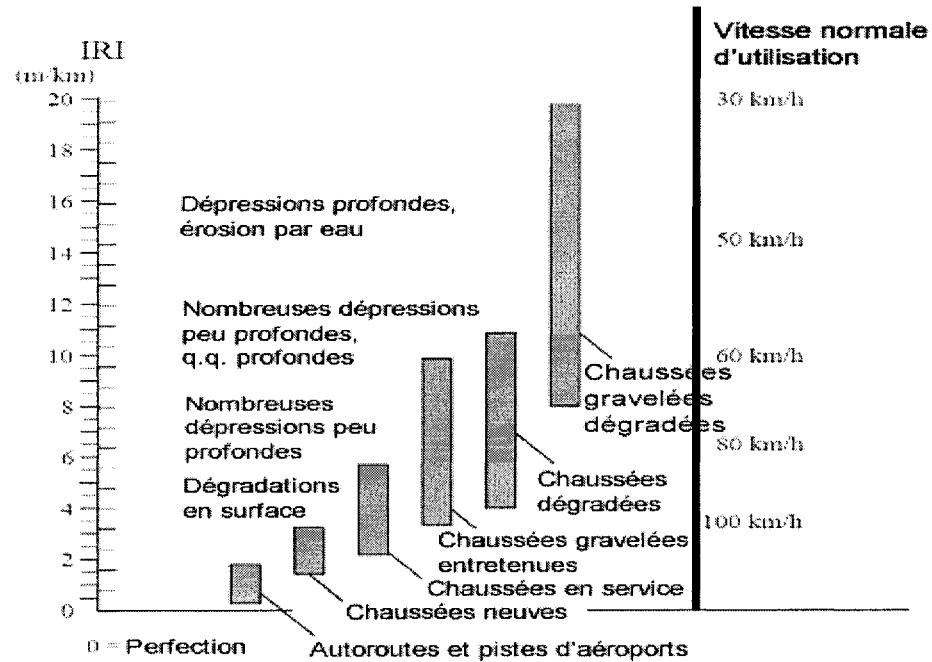


Figure 2.17 : L'échelle de rugosité IRI (redessiné par Sayers et al. 1986) [10].

2.4.3 L'index de Rugosité d'un Demi-véhicule (HRI)

Il existe d'autres index de rugosité qui sont moins utilisés que l'IRI. Il est obtenu à partir du calcul de la moyenne de ce dernier pour chaque profil de roue gauche et droite. Le HRI est fortement corrélé à la moyenne IRI des deux profils de la roue ($HRI = 0.89 \text{ IRI}$) [23].

2.4.4 Norme EN 13036-5 : 2006

Le but de la norme EN 13036-5 est pour normaliser les caractérisations possibles des diverses irrégularités du profil de la route, tel que la procédure du calcul d'Indice International de Rugosité(IRI).

2.4.5 L'Indice SEI (Spektraler l'Ebenheits)

Il est basé sur les irrégularités de la route, le chargement de la chaussée, le confort et le chargement de fret [24]. Il est défini comme suit :

$$SEI = \begin{cases} C^{1/w} & \text{si } w \leq 2.5 \\ 4(C/32)^{1/w} & \text{si } w \geq 2.5 \end{cases} \quad (2.22)$$

C : indice d'inégalité.

w : nombre d'ondulation.

2.4.6 Autres modèles

Plusieurs travaux utilisent la densité spectrale de puissance pour caractériser la route. M. Bouazara [20] a considéré que le profil de la route comme étant un processus aléatoire $X(t)$, stationnaire, gaussien et ses propriétés sont invariables dans tout l'argument t . Le processus $X(t)$ est considéré comme une série de fonctions harmonique et s'écrit en fonction de la densité spectrale de puissance $S_{XX}(\omega_i)$ par la relation suivante:

$$X(t) = \sum_{i=1}^N \sqrt{4S_{XX}(\omega_i)\Delta\omega} \cos(\omega_i t - \phi_i) \quad (2.23)$$

Le processus X (t) en fonction de la densité spectrale de puissance est montré à la figure 2.18

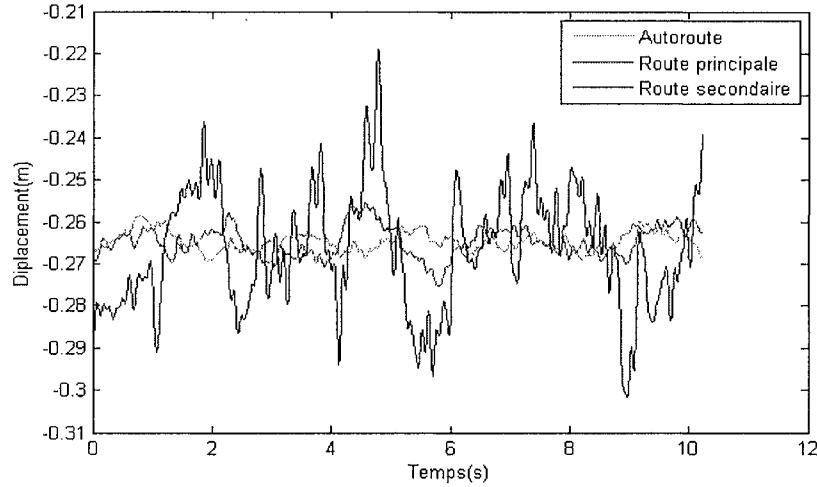


Figure 2.18: Profil de la piste en fonction du temps.

La figure 2.19 présente la densité spectrale de puissance pour une autoroute, une route principale et une route secondaire. L'amplitude varie selon le type de route, mais la densité spectrale de puissance présente toujours un plateau pour les basses fréquences (jusqu'à 1 Hz) et diminue graduellement lorsque les fréquences augmentent.

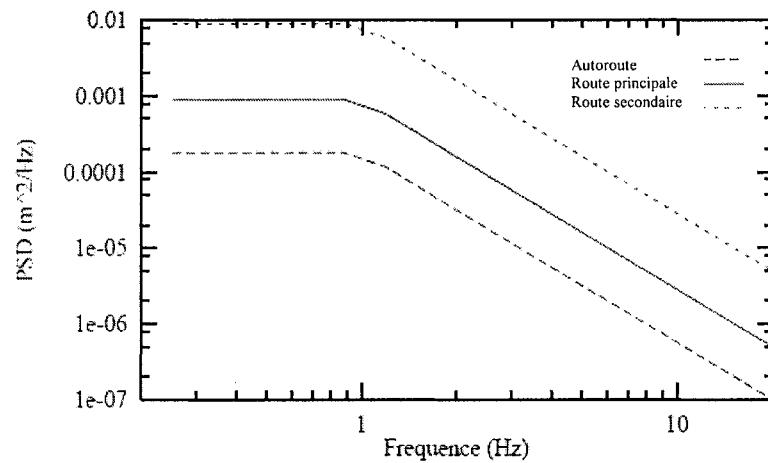


Figure 2.19 : Densité spectrale de la piste [20].

2.5 Modèles de véhicules :

Différents modèles de véhicules cités dans la littérature ont été utilisés pour étudier le comportement dynamique et vibratoire [3, 6, 10, 13, 14, 16, 19, 20, 21]. Les trois modèles couramment utilisés sont les suivants : un quart de véhicule, demi-véhicule ou le modèle complet de véhicule en 3 dimensions.

2.5.1 Modèle d'un quart de véhicule

a) Modèle vertical

Le modèle d'un quart de véhicule vertical est le plus simple. La plupart des articles traitant les suspensions utilisent plusieurs modèles de quart de véhicule avec deux degrés de liberté, tout en considérant le type de suspension, passive, semi-active ou active. De plus le choix peut être défini selon le but recherché (confort seul ou confort et tenue de route). Ce modèle est composé de deux masses, une suspendu et l'autre non suspendue modélisées comme des corps rigides reliés par des éléments élastiques ressorts ou des éléments dissipatifs (amortisseurs). Cela permet d'étudier les mouvements relatifs entre ces deux masses l'une par rapport à l'autre et par rapport au sol. Ils permettent aussi de simuler le comportement vertical des suspensions en tenant compte du mouvement vertical du châssis ainsi que celui de la roue.

b) Modèle longitudinal

Dans ce cas, le véhicule est représenté par une roue et une masse illustré par la figure 2.20, le comportement du véhicule est caractérisé par la dynamique rotationnelle de la roue et la translation longitudinale de sa masse [25].

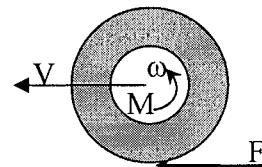


Figure 2.20 : Modèle longitudinal d'un quart de véhicule.

2.6 Modèle demi-véhicule

Contrairement au modèle d'un quart de véhicule qui ne considère que les mouvements verticaux, les modèles de demi-véhicule inclus également les mouvements de roulis ou de tangage du châssis et de l'essieu [26]. Par ce fait dérive deux types de demi-véhicule. Le premier est le modèle de demi véhicule latérale, c'est un système symétrique à quatre degrés de liberté. Il représente soit la vue de coupe de la suspension avant soit de l'arrière et il considère que le véhicule subit des perturbations à droite identiques à celles subites à gauche. Le second cas est nommé modèle de demi véhicule longitudinal. Comme son nom l'indique, il représente une demi vue en longueur du véhicule, utilisé pour les études liées au phénomène de tangage, le comportement des suspensions avant dans ce cas est différent de celui de l'arrière. La figure 2.21 schématisé le modèle de demi-véhicule.

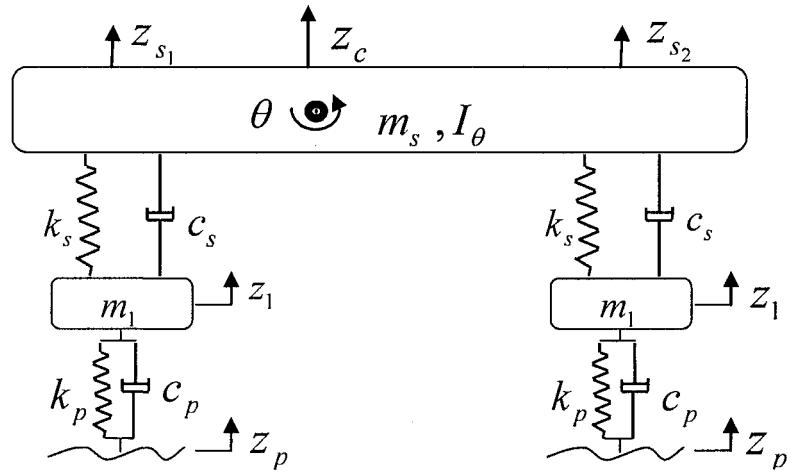


Figure 2.21 : Modèle de demi-véhicule.

2.6.1 Modèle complet de véhicule ou 3D

Le véhicule est un système mécanique très complexe non linéaire, c'est un assemblage de plusieurs composantes de différents types : mécanique, pneumatique ou électrique. Chaque élément joue un rôle particulier. Autrement, il est difficile d'avoir un modèle de véhicule prenant en compte toutes ces composantes. L'identification des caractéristiques de

l'ensemble de ces derniers permet de reconstruire le modèle, mais cela représente un travail très difficile, puisque leurs paramètres peuvent varier énormément d'une situation à une autre, donc la modélisation d'un véhicule nécessite de choisir les composantes essentielles de façons à établir un modèle qui soit le plus proche de la réalité et suffisamment simple pour son implantation. Le modèle le plus simple est celui d'un véhicule à sept degrés de liberté, présenté sur la figure 2.22. Seuls le mouvement vertical, le roulis et le tangage du châssis sont pris en compte car, ils engendrent directement un débattement vertical des suspensions. Les débattements latéraux sont négligés.

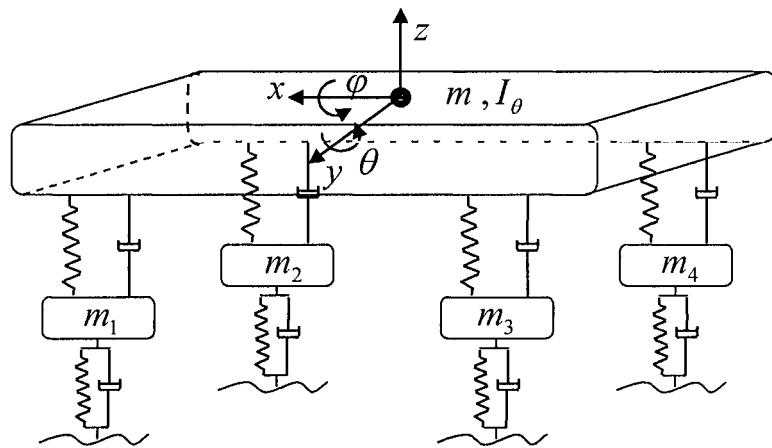


Figure 2.22 : Modèle de véhicule complet.

Chapitre 3

Modélisation d'un quart de véhicule : calcul des vitesses et des accélérations

La plupart des articles traitant des suspensions utilisent un modèle d'un quart de véhicule avec deux degrés de liberté [27], c'est un modèle simple et facile à étudier et à analyser. Par contre, il ne peut pas modéliser le comportement dynamique en 3-D des différents éléments de la suspension. Dans le présent chapitre nous allons développer un modèle d'un quart de véhicule tout en considérant que la suspension peut se déplacer selon les trois axes.

3.1 Modèle d'un quart de véhicule :

Généralement, pour comprendre le fonctionnement globale de la suspension de l'automobile, les recherches récentes ont proposé d'étudier le quart du véhicule de deux différentes manières, une première qui prend en considération l'effet élastique du pneu en tant qu'élément amortisseur malgré sa rigidité élevée par rapport au ressort et à l'amortisseur du véhicule. Cette combinaison est de la forme châssis-roue-pneu dans n'importe quelle type de suspension, et elle est connue sous le nom : modèle d'un quart de véhicule à deux degrés de liberté. Tel qu'illustré par la figure 3.1, schématiquement elle se représente par une masse suspendue (masse du quart du châssis) reposant via la suspension sur la masse non suspendue (la roue), celle-ci se repose elle-même sur le sol via le pneu. Ce modèle est généralement utilisé dans le cas des études sur la tenue de route. Par contre, une deuxième manière a été établie pour les études qui ne s'intéressent qu'au confort des passagers, cette méthode est une simplification de la première puisqu'elle élimine l'effet

des pneus et elle ne considère que la masse suspendue liée au sol par l'intermédiaire de la suspension. Par conséquent ce modèle devient à un degré de liberté, l'équation mathématique qui régit le mouvement des masses suspendues peut être obtenue par l'application des théorèmes généraux de la dynamique tel que décrit précédemment. Ces modèles modélisent seulement le mouvement vertical de la suspension. Par contre, par ce projet nous nous intéressons à tous les mouvements possibles de la suspension d'où la nécessité de développer un modèle complet en 3D.

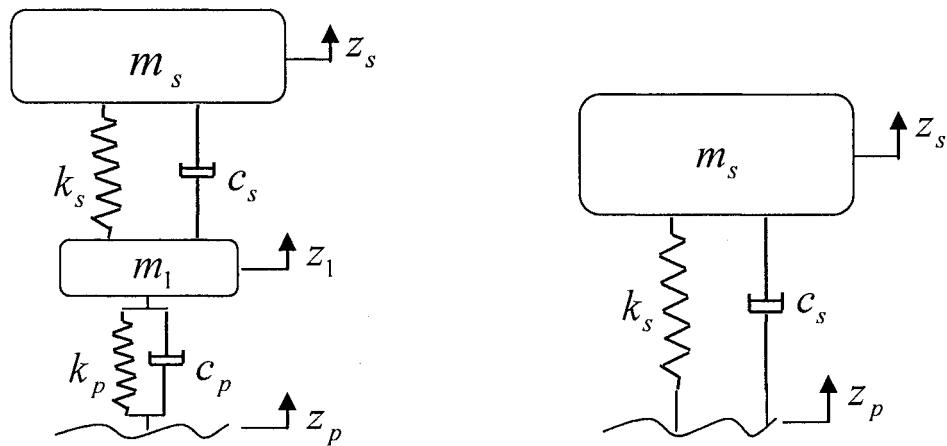


Figure 3.1 : Modèle d'un quart de véhicule général et simplifié.

3.2 Approche de modélisation

Le modèle d'un quart de véhicule en 3D représenté par la figure 3.2 a été développé dans cette étude en utilisant le logiciel SolidWorks [28]. Les triangles supérieur et inférieur sont conçus et étudiés dans un projet antérieur par notre équipe de recherche en l'occurrence dans l'article publié par le professeur M. Bouazara [29], ainsi que dans le projet de maîtrise de F. Cai [30]. Ces études ont considéré la suspension comme étant un seul bloc et ils ont tenu compte que des vibrations verticales. Notre apport consiste alors à étudier l'effet des différentes sollicitations sur les parties constituant la suspension, entre autres, sur les triangles supérieur et inférieur. Ceci est dans le but de calculer toutes les forces statiques et dynamiques dans l'espace des composantes de la suspension et l'effet

des excitations aléatoires. Cependant, il faut calculer en premier lieu les vitesses et accélérations.

Dans cette étude, la méthode d'analyse vectorielle [31] est utilisée pour évaluer les vitesses, accélérations et les forces des points mobiles de la suspension d'un quart de véhicule. Ces points sont représentés dans la figure 3.2 et leurs coordonnées mesurées selon le repère $(O_1X_1Y_1Z_1)$ illustrées dans le tableau 3.1.

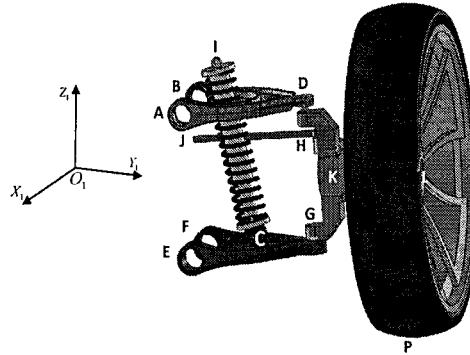


Figure 3.2: Modèle d'un quart de véhicule en 3D.

Tableau 3.1: Coordonnées des points.

N	Points	x (mm)	y (mm)	z (mm)
1	A	230	350	142
2	B	-127	350	128
3	C	7	496	-84
4	D	-12	589	127
5	E	122	345	-80
6	F	-108	345	-80
7	G	7	620	-89
8	H	-156	545	178
9	I	-12	504	351
10	J	-156	317	186
11	P	0	678	-265
12	K	0	600	0

Dans une première approche, imposant ces hypothèses :

- Les points A, B, E, F et J sont fixes.
- La vitesse longitudinale et latérale au point de contact P demeure inconnue.

- De la figure 3.3, le vecteur de la vitesse angulaire $\{\omega_3\}_1$ est parallèle à l'axe de rotation AB et $\{\omega_2\}_1$ parallèle à l'axe EF.
- Le couplage des joints de fixation du triangle au châssis est considéré comme rigide.
- On ignore l'amortisseur entre les deux points C et I. La résolution pour le reste du système de suspension donnera la vitesse $\{V_C\}_1$ au point C, ainsi il fournit les conditions aux limites qui permettent une analyse séparée pour l'amortisseur.
- Pour simplifier l'analyse nous ignorons également l'effet du pneu.

Avant de procéder avec cette analyse il est nécessaire d'identifier les inconnus qui définissent le problème. Les vitesses angulaires des corps rigides peuvent être utilisées pour trouver les vitesses de translation aux différents points dans le système.

Le triangle de suspension supérieur est contraint de tourner autour de l'axe AB, ignorant dans cette étape n'importe quelle déviation possible dans les joints (bushes) de suspension. Donc, le vecteur de la vitesse angulaire $\{\omega_3\}_1$ du triangle supérieur agira le long de l'axe de rotation AB qui est représenté par l'équation (3.1).

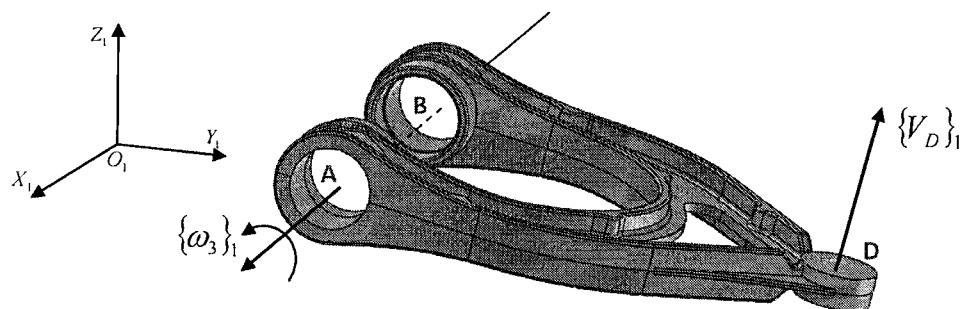


Figure 3.3 : Vecteurs de vitesse angulaire et linéaire du triangle supérieur.

$$\{\omega_3\}_1 = f_{\omega_3} \{R_{AB}\}_1 \quad \{\omega_3\}_1 // \{R_{AB}\}_1 \quad (3.1)$$

L'utilisation du facteur scalaire f_{ω_3} permet de réduire les trois composantes inconnues ω_{x_3} , ω_{y_3} et ω_{z_3} du vecteur $\{\omega_3\}_1$ à un seul inconnu.

$\{R_{AB}\}_1$: représente le vecteur de position relatif qui décrit la position de A par rapport à B.

La vitesse de translation au point D peut être obtenue après avoir déterminé la vitesse angulaire du triangle supérieur corps (3).

$$\{V_{DA}\}_1 = \{\omega_3\}_1 \times \{R_{DA}\}_1 \quad (3.2)$$

Le point A est considéré fixe avec une vitesse $\{V_A\}_1 = 0$ et la vitesse absolue $\{V_D\}_1$ du point D peut être obtenue en utilisant la loi de la somme vectorielle comme suit :

$$\{V_D\}_1 = \{V_{DA}\}_1$$

Les vitesses de translation dans les différents points du système de suspension peuvent être déterminées si on connaît les vitesses angulaires de tous les corps rigides.

La même approche peut être appliquée pour le triangle inférieur de la suspension corps 2.

$$\{\omega_2\}_1 = f_{\omega_2} \{R_{EF}\}_1 \quad \{\omega_2\}_1 // \{R_{EF}\}_1 \quad (3.3)$$

Cette analyse nous permet de développer les dix équations pour trouver les dix inconnus suivants :

$$f_{\omega_2}, f_{\omega_3}, \omega_{x_4}, \omega_{y_4}, \omega_{z_4}, \omega_{x_5}, \omega_{y_5}, \omega_{z_5}, V_{Px}, V_{Py}$$

En utilisant la somme vectorielle, nous générerons l'ensemble des équations en l'occurrence un ensemble de trois équations.

$$\{V_{DG}\}_1 = \{V_D\}_1 - \{V_G\}_1 \quad (3.4)$$

La première étape de l'analyse sert à déterminer l'expression de la vitesse $\{V_G\}_1$ du point G.

$$\{V_G\}_1 = \{V_{GE}\}_1 = \{\omega_2\}_1 \times \{R_{GE}\}_1 \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \{\omega_2\}_1 &= f_{\omega_2} \{R_{EF}\}_1 = f_{\omega_2} \begin{bmatrix} EF_x \\ EF_y \\ EF_z \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} V_{G_x} \\ V_{G_y} \\ V_{G_z} \end{bmatrix} &= f_{\omega_2} \begin{bmatrix} 0 & -EF_z & EF_y \\ EF_z & 0 & -EF_x \\ -EF_y & EF_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} GE_x \\ GE_y \\ GE_z \end{bmatrix} \\ &= f_{\omega_2} \begin{bmatrix} -GE_y EF_z + GE_z EF_y \\ GE_x EF_z - GE_z EF_x \\ -GE_x EF_y + GE_y EF_x \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La deuxième étape sert à déterminer l'expression de la vitesse $\{V_D\}_1$ du point D.

$$\{V_D\}_1 = \{V_{DA}\}_1 = \{\omega_3\}_1 \times \{R_{DA}\}_1 \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \{\omega_3\}_1 &= f_{\omega_3} \{R_{AB}\}_1 = f_{\omega_3} \begin{bmatrix} AB_x \\ AB_y \\ AB_z \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} V_{D_x} \\ V_{D_y} \\ V_{D_z} \end{bmatrix} &= f_{\omega_3} \begin{bmatrix} 0 & -AB_z & AB_y \\ AB_z & 0 & -AB_x \\ -AB_y & AB_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} DA_x \\ DA_y \\ DA_z \end{bmatrix} \\ &= f_{\omega_3} \begin{bmatrix} -DA_y AB_z + AB_z AB_y \\ AB_y AB_z - DA_z AB_x \\ -DA_x AB_y + DA_y AB_x \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La troisième étape sert à déterminer l'expression de la vitesse relative $\{V_{DG}\}_1$ au point D par rapport au point G.

$$\{V_{DG}\}_1 = \{\omega_4\}_1 \times \{R_{DG}\}_1 \quad (3.7)$$

$$\begin{bmatrix} V_{DG_x} \\ V_{DG_y} \\ V_{DG_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{z_4} & \omega_{y_4} \\ \omega_{z_4} & 0 & -\omega_{x_4} \\ -\omega_{y_4} & \omega_{x_4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} DG_x \\ DG_y \\ DG_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega_{z_4} DG_y + \omega_{y_4} DG_z \\ \omega_{z_4} DG_x - \omega_{x_4} DG_z \\ -\omega_{y_4} DG_x + \omega_{x_4} DG_y \end{bmatrix}$$

Substituons les équations (3.5), (3.6) et (3.7) dans l'équation (3.4)

$$\begin{aligned} \{V_{DG}\}_1 &= \{V_D\}_1 - \{V_G\}_1 \Rightarrow \\ \begin{bmatrix} -\omega_{z_4} DG_y + \omega_{y_4} DG_z \\ \omega_{z_4} DG_x - \omega_{x_4} DG_z \\ -\omega_{y_4} DG_x + \omega_{x_4} DG_y \end{bmatrix} &= f_{\omega_3} \begin{bmatrix} -DA_y AB_z + DA_z AB_y \\ DA_x AB_z - DA_z AB_x \\ -DA_x AB_y + DA_y AB_x \end{bmatrix} - f_{\omega_2} \begin{bmatrix} -GE_y EF_z + GE_z EF_y \\ GE_x EF_z - GE_z EF_x \\ -GE_x EF_y + GE_y EF \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Après réarrangements des équations précédentes, nous obtenons les trois équations nécessaires pour le développement du système comme suit :

$$\begin{cases} f_{\omega_2}(-GE_y EF_z + GE_z EF_y) + f_{\omega_3}(DA_y AB_z - DA_z AB_y) + \omega_{y_4} DG_z - \omega_{z_4} DG_y = 0 \\ f_{\omega_2}(GE_x EF_z - GE_z EF_x) + f_{\omega_3}(DA_z AB_x - DA_x AB_z) - \omega_{x_4} DG_z + \omega_{z_4} DG_x = 0 \\ f_{\omega_2}(-GE_x EF_y + GE_y EF_x) + f_{\omega_3}(DA_x AB_y - DA_y AB_x) + \omega_{x_4} DG_y - \omega_{y_4} DG_x = 0 \end{cases}$$

Nous utilisons la même méthodologie utilisée ci-dessus pour déterminer les vitesses entre les points H-D

$$\{V_{DH}\}_1 = \{V_D\}_1 - \{V_H\}_1 \quad (3.8)$$

$$\{V_H\}_1 = \{V_{HJ}\}_1 = \{\omega_5\}_1 \times \{R_{HJ}\}_1 \quad (3.9)$$

$$\begin{bmatrix} V_{H_x} \\ V_{H_y} \\ V_{H_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{z_5} & \omega_{y_5} \\ \omega_{z_5} & 0 & -\omega_{x_5} \\ -\omega_{y_5} & \omega_{x_5} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} HJ_x \\ HJ_y \\ HJ_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega_{z_5} HJ_y + \omega_{y_5} HJ_z \\ \omega_{z_5} HJ_x - \omega_{x_5} HJ_z \\ -\omega_{y_5} HJ_x + \omega_{x_5} HJ_y \end{bmatrix}$$

La vitesse relative $\{V_{DH}\}_1$ est représentée par la formule suivante :

$$\{V_{DH}\}_1 = \{\omega_4\}_1 \times \{R_{DH}\}_1 \quad (3.10)$$

$$\begin{bmatrix} V_{DH_x} \\ V_{DH_y} \\ V_{DH_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{z_4} & \omega_{y_4} \\ \omega_{z_4} & 0 & -\omega_{x_4} \\ -\omega_{y_4} & \omega_{x_4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} DH_x \\ DH_y \\ DH_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega_{z_4} DH_y + \omega_{y_4} DH_z \\ \omega_{z_4} DH_x - \omega_{x_4} DH_z \\ -\omega_{y_4} DH_x + \omega_{x_4} DH_y \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \{V_{DH}\}_1 &= \{V_D\}_1 - \{V_H\}_1 \Rightarrow \\ \begin{bmatrix} -\omega_{z_4} DH_y + \omega_{y_4} DH_z \\ \omega_{z_4} DH_x - \omega_{x_4} DH_z \\ -\omega_{y_4} DH_x + \omega_{x_4} DH_y \end{bmatrix} &= f_{\omega_3} \begin{bmatrix} -DA_y AB_z + DA_z AB_y \\ DA_x AB_z - DA_z AB_x \\ -DA_x AB_y + DA_y AB_x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\omega_{z_5} HJ_y + \omega_{y_5} HJ_z \\ \omega_{z_5} HJ_x - \omega_{x_5} HJ_z \\ -\omega_{y_5} HJ_x + \omega_{x_5} HJ_y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Après réarrangements des équations précédentes, nous obtenons les trois équations nécessaires pour le développement du système comme suit :

$$\begin{cases} f_{\omega_3}(DA_y AB_z - DA_z AB_y) + \omega_{y_4} DH_z - \omega_{z_4} DH_y + \omega_{y_5} HJ_z - \omega_{z_5} HJ_y = 0 \\ f_{\omega_3}(DA_z AB_x - DA_x AB_z) - \omega_{x_4} DH_z + \omega_{z_4} DH_x - \omega_{x_5} HJ_z + \omega_{z_5} HJ_x = 0 \\ f_{\omega_3}(DA_x AB_y - DA_y AB_x) + \omega_{x_4} DH_y - \omega_{y_4} DH_x + \omega_{x_5} HJ_y - \omega_{y_5} HJ_x = 0 \end{cases}$$

Nous utilisons la même méthodologie utilisée ci-dessus pour déterminer les vitesses relatives entre les points G-P

$$\{V_{PG}\}_1 = \{V_P\}_1 - \{V_G\}_1 \quad (3.11)$$

$$\{V_{PG}\}_1 = \{\omega_4\}_1 \times \{R_{PG}\}_1 \quad (3.12)$$

$$\begin{bmatrix} V_{PG_x} \\ V_{PG_y} \\ V_{PG_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{z_4} & \omega_{y_4} \\ \omega_{z_4} & 0 & -\omega_{x_4} \\ -\omega_{y_4} & \omega_{x_4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} PG_x \\ PG_y \\ PG_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega_{z_4} PG_y + \omega_{y_4} PG_z \\ \omega_{z_4} PG_x - \omega_{x_4} PG_z \\ -\omega_{y_4} PG_x + \omega_{x_4} PG_y \end{bmatrix}$$

$$\{V_P\} = \begin{bmatrix} V_{P_x} \\ V_{P_y} \\ V_{P_z} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Substituons les équations (3.5), (3.12) et (3.13) dans l'équation (3.11) nous obtenons :

$$\begin{aligned} \{V_{PG}\}_1 &= \{V_P\}_1 - \{V_G\}_1 \Rightarrow \\ \begin{bmatrix} -\omega_{z_4} PG_y + \omega_{y_4} PG_z \\ \omega_{z_4} PG_x - \omega_{x_4} PG_z \\ -\omega_{y_4} PG_x + \omega_{x_4} PG_y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} V_{P_x} \\ V_{P_y} \\ V_{P_z} \end{bmatrix} - f_{\omega_2} \begin{bmatrix} -GE_y EF_z + GE_z EF_y \\ GE_x EF_z - GE_z EF_x \\ -GE_x EF_y + GE_y EF_x \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \begin{cases} f_{\omega_2} (GE_y EF_z - GE_z EF_y) - \omega_{y_4} PG_z + \omega_{z_4} PG_y + V_{P_x} = 0 \\ f_{\omega_2} (GE_z EF_x - GE_x EF_z) + \omega_{x_4} PG_z - \omega_{z_4} PG_x + V_{P_y} = 0 \\ f_{\omega_2} (GE_x EF_y - GE_y EF_x) - \omega_{x_4} PG_y + \omega_{y_4} PG_x = -V_{P_z} \end{cases} \end{aligned}$$

À ce niveau, nous avons neuf équations et dix inconnus. Il nous reste une équation à déterminer.

Le bras de direction représenté à la figure 3.4 est limité à tourner autour de son propre axe de rotation à cause du joint universel (Hooke). Cela résulte que la composante de la vitesse angulaire parallèle à l'axe du bras s'annule. Alors, le vecteur de la vitesse angulaire $\{\omega_5\}_1$ doit être perpendiculaire à la ligne H-J.

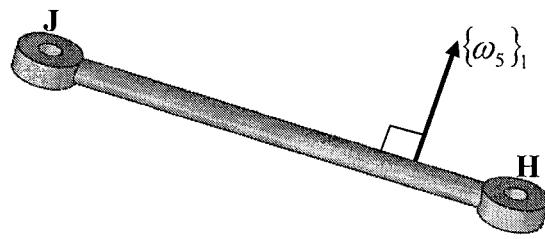


Figure 3.4: Bras de direction : contrainte sur le degré de liberté de rotation.

Pour déterminer cette équation, utilisant le produit scalaire des vecteurs suivants:

$$\{\omega_5\}_1 \cdot \{R_{HJ}\}_1 = 0 \quad (3.14)$$

$$\begin{bmatrix} \omega_{x_5} & \omega_{y_5} & \omega_{z_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} HJ_x \\ HJ_y \\ HJ_z \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow HJ_x \omega_{x_5} + HJ_y \omega_{y_5} + HJ_z \omega_{z_5} = 0$$

Écrivons maintenant les dix équations sous forme matricielle pour déterminer les dix paramètres inconnus suivants :

$$f_{\omega_2}, f_{\omega_3}, \omega_{x_4}, \omega_{y_4}, \omega_{z_4}, \omega_{x_5}, \omega_{y_5}, \omega_{z_5}, V_{Px}, V_{Py}$$

La résolution du système d'équations en utilisant le logiciel Matlab permet de calculer les vitesses angulaires et les vitesses de translation de tous les points de déplacement C, D, G, H et P.

$$\left[\begin{array}{ccccccccc|c} GE_z EF_y - GE_y EF_z & DA_y AB_z - DA_z AB_y & 0 & DG_z & -DG_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ GE_x EF_z - GE_z EF_x & DA_z AB_x - DA_x AB_z & -DG_z & 0 & DG_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ GE_y EF_x - GE_x EF_y & DA_x AB_y - DA_y AB_x & DG_y & -DG_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & DA_y AB_z - DA_z AB_y & 0 & DH_z & -DH_y & 0 & HJ_z & -HJ_y & 0 & 0 \\ 0 & DA_z AB_x - DA_x AB_z & -DH_z & 0 & DH_x & -HJ_z & 0 & HJ_x & 0 & 0 \\ 0 & DA_x AB_y - DA_y AB_x & DH_y & -DH_x & 0 & HJ_y & -HJ_x & 0 & 0 & 0 \\ GE_y EF_z - GE_z EF_y & 0 & 0 & -PG_z & PG_y & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ GE_z EF_x - GE_x EF_z & 0 & PG_z & 0 & -PG_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ GE_x EF_y - GE_y EF_x & 0 & -PG_y & (PG_x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & HJ_x & HJ_y & HJ_z & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} f_{\omega_2} \\ f_{\omega_3} \\ \omega_{4x} \\ \omega_{4y} \\ \omega_{4z} \\ \omega_{5x} \\ \omega_{5y} \\ \omega_{5z} \\ V_{Px} \\ V_{Py} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.3 Simulation dynamique

En utilisant le modèle analytique développé dans cette étude, les vitesses et les accélérations des différents points mobiles peuvent être déterminées en simulant un véhicule circulant sur un profil de route avec ralentisseur aléatoire tiré du PSD (power spectral density) ou sinusoïdal.

Dans cette étude nous avons choisi un véhicule circulant à une vitesse constante de 80 km/h sur un profil de route critique. Ce profil est représenté par un ralentisseur [32] illustré à la figure 3.5. Ce dernier peut être défini comme une fonction cosinus :

$$z(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} H \left(1 - \cos \left(2\pi \frac{x}{L} \right) \right) & \text{si } 0 < x < L \text{ et } -B/2 < y < B/2 \\ 0 & \text{autre} \end{cases} \quad (3.15)$$

avec $L=3.5\text{m}$ et $H=0.0125\text{m}$. Le point P représente le premier point de contact de la roue avec le ralentisseur.

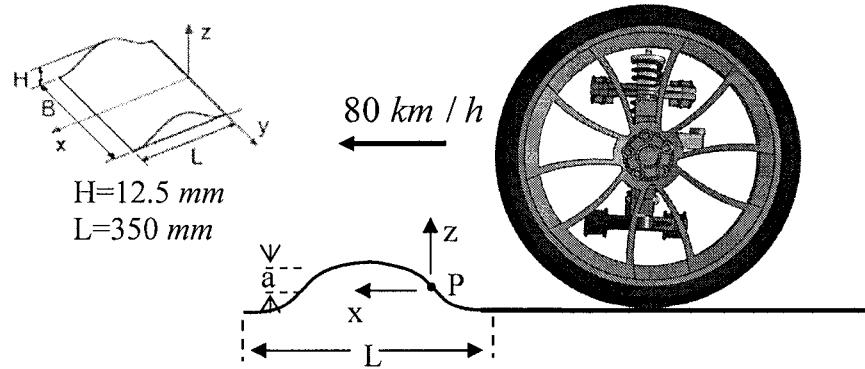


Figure 3.5: Schéma d'un ralentisseur.

La vitesse verticale du point P :

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx} \frac{dx}{dt} \quad (3.16)$$

$$V_{p_z} = \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{H}{2} \cdot \frac{2\pi}{L} \sin\left(2\pi \frac{x}{L}\right) \times V \quad (3.17)$$

L'accélération :

$$A_{p_z} = \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{H}{2} \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \cos\left(2\pi \frac{x}{L}\right) \times V \quad (3.18)$$

Prenons la simulation d'un point P d'entrée avec les paramètres suivants :

$$t=4.45 \times 10^{-3} \text{ s}, x=10^{-2} \text{ m}, z=26.49 \times 10^{-3} \text{ m}, V_{pz}=0.4452 \text{ m/s}$$

Les résultats suivants présentent le calcul de toutes les vitesses des différents points du système de suspension.

$$\begin{cases} f_{\omega_2} = 7.05 \text{ rad/m.s} \\ f_{\omega_3} = 8.07 \text{ rad/m.s} \\ \omega_{x_4} = -1.2 \times 10^{-3} \text{ rad/s} \\ \omega_{y_4} = -12.5 \times 10^{-2} \text{ rad/s} \\ \omega_{z_4} = -2 \times 10^{-4} \text{ rad/s} \end{cases} \quad \begin{cases} \omega_{x_s} = 1.87 \text{ rad/s} \\ \omega_{y_s} = 5.1 \times 10^{-3} \text{ rad/s} \\ \omega_{z_s} = 14.63 \times 10^{-2} \text{ rad/s} \\ V_{p_x} = 2.5 \times 10^{-2} \text{ m/s} \\ V_{p_y} = 1.44 \times 10^{-2} \text{ m/s} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \{\omega_2\}_1 = f_{\omega_2} \{R_{EF}\}_1 = [1.62 \quad 0 \quad 0]^T \text{ rad/s} \\ \{\omega_3\}_1 = f_{\omega_3} \{R_{AB}\}_1 = [1.86 \quad 0 \quad 0.11]^T \text{ rad/s} \\ \{\omega_4\}_1 = [-1.2 \times 10^{-3} \quad -12.5 \times 10^{-3} \quad -2 \times 10^{-4}]^T \text{ rad/s} \\ \{\omega_5\}_1 = [1.87 \quad 5.1 \times 10^{-3} \quad 14.63 \times 10^{-2}]^T \text{ rad/s} \\ \\ \{V_C\}_1 = \{V_{CE}\}_1 = \{\omega_2\}_1 \times \{R_{CE}\}_1 = [0 \quad 6.5 \times 10^{-3} \quad 0.24]^T \text{ m/s} \\ \{V_D\}_1 = \{V_{DA}\}_1 = \{\omega_3\}_1 \times \{R_{DA}\}_1 = [-2.7 \times 10^{-2} \quad 1.4 \times 10^{-2} \quad 4.44 \times 10^{-1}]^T \text{ m/s} \\ \{V_G\}_1 = \{V_{GE}\}_1 = \{\omega_2\}_1 \times \{R_{GE}\}_1 = [0 \quad 1.46 \times 10^{-2} \quad 4.46] \times 10^{-1}^T \text{ m/s} \\ \{V_H\}_1 = \{V_{HJ}\}_1 = \{\omega_5\}_1 \times \{R_{HJ}\}_1 = [-3.34 \times 10^{-2} \quad 1.49 \times 10^{-2} \quad 4.25 \times 10^{-1}]^T \text{ m/s} \\ \{V_p\}_1 = [2.2 \times 10^{-2} \quad 1.44 \times 10^{-3} \quad 4.45 \times 10^{-1}]^T \text{ m/s} \end{cases}$$

Après avoir calculé la vitesse $\{V_C\}_1$. Nous pouvons maintenant poursuivre l'analyse séparée de l'unité de l'amortisseur. Ceci, est afin de calculer la composante de la vitesse de translation agissant le long de l'axe C-I. Nous introduisons deux nouveaux organes, corps 6 et corps 7 qui représentent la partie supérieure et inférieure de l'amortisseur comme indiqué dans la figure 3.6.

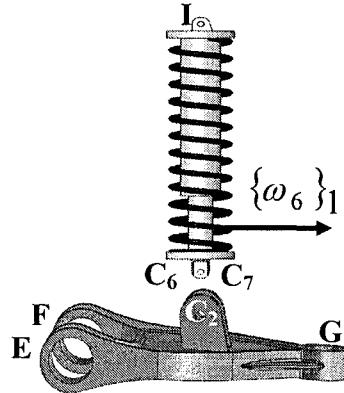


Figure 3.6: Modélisation de l'amortisseur.

Les trois points C2, C6 et C7 coïncident avec le point C. Le point C6 est une extension virtuelle de la partie supérieure de l'amortissement comme indiqué dans la figure 3.6. La vitesse de translation dans l'amortissement peut être déterminée à partir de la vitesse

relative $\{V_{C_6C_7}\}_1$ des points C6 et C7. Les points C6 et C7 coïncident avec le vecteur de la vitesse relative et ne peut agir que selon la direction de glissement sur l'axe C-I, ce qui nous permet de choisir un facteur scalaire et de réduire le nombre des inconnus

$$\{V_{C_6C_7}\}_1 = f_{vs} \{R_{CI}\}_1 \quad (3.19)$$

Le point I est fixe, alors la somme vectorielle donne :

$$\{V_{C_6}\}_1 = \{V_{C_6I}\}_1 = \{V_C\}_1 + \{V_{C_6C_7}\}_1 \quad (3.20)$$

Les deux points C2 et C7 sont physiquement localisés au point C, nous avons déjà la vitesse obtenue selon les conditions aux limites de l'analyse précédente ce qui permet d'écrire.

$$\Rightarrow \{V_{C_7}\}_1 = \{V_{C_2}\}_1 = \{V_C\}_1 \quad (3.21)$$

Substituons les équations (3.19) et (3.21) dans l'équation (3.20) comme suit :

$$\{V_{C_6}\}_1 = \{V_{C_6I}\}_1 = \begin{bmatrix} V_{C_x} \\ V_{C_y} \\ V_{C_z} \end{bmatrix}_1 + f_{vs} \begin{bmatrix} CI_x \\ CI_y \\ CI_z \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Il y a un seul degré de liberté entre le corps 6 et le corps 7 c'est le mouvement relatif de translation. La vitesse angulaire des deux corps est le même.

$$\{\omega_6\}_1 = \{\omega_7\}_1$$

L'expression du vecteur de la vitesse $\{V_{C_6}\}_1$ est :

$$\{V_{C_6}\}_1 = \{V_{C_6I}\}_1 = \{\omega_6\}_1 \times \{R_{CI}\}_1 \quad (3.23)$$

$$\begin{bmatrix} V_{C_6I_x} \\ V_{C_6I_y} \\ V_{C_6I_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{z_6} & \omega_{y_6} \\ \omega_{z_6} & 0 & -\omega_{x_6} \\ -\omega_{y_6} & \omega_{x_6} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} CI_x \\ CI_y \\ CI_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega_{z_6} CI_y + \omega_{y_6} CI_z \\ \omega_{z_6} CI_x - \omega_{x_6} CI_z \\ -\omega_{y_6} CI_x + \omega_{x_6} CI_y \end{bmatrix}$$

En égalisant les deux équations (3.22), (3.23) nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} -\omega_{z_6} CI_y + \omega_{y_6} CI_z \\ \omega_{z_6} CI_x - \omega_{x_6} CI_z \\ -\omega_{y_6} CI_x + \omega_{x_6} CI_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{C_x} \\ V_{C_y} \\ V_{C_z} \end{bmatrix}_1 + f_{vs} \begin{bmatrix} CI_x \\ CI_y \\ CI_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} f_{vs}CI_x + \omega_{z_6}CI_y - \omega_{y_6}CI_z = -V_{C_x} \\ f_{vs}CI_y - \omega_{z_6}CI_z + \omega_{x_6}CI_x = -V_{C_y} \\ f_{vs}CI_z + \omega_{y_6}CI_x - \omega_{x_6}CI_y = -V_{C_z} \end{cases}$$

Donc, nous pouvons utiliser la même approche utilisée précédemment avec le bras de direction. Puisque le degré de liberté de rotation du corps 6 autour de l'axe C-I n'a aucun impact sur la solution complète, nous pouvons de nouveau utiliser le produit scalaire

$$\{\omega_6\}_1 \cdot \{R_{CI}\}_1 = 0 \quad (3.24)$$

$$\begin{bmatrix} \omega_{x_6} & \omega_{y_6} & \omega_{z_6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} CI_x \\ CI_y \\ CI_z \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow CI_x \omega_{x_6} + CI_y \omega_{y_6} + CI_z \omega_{z_6} = 0$$

Représentant les quatre équations sous forme matricielle pour déterminer les quatre paramètres inconnus.

$$\begin{bmatrix} CI_x & 0 & -CI_z & CI_y \\ CI_y & CI_z & 0 & -CI_x \\ CI_z & -CI_y & CI_x & 0 \\ 0 & CI_x & CI_y & CI_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{vs} \\ \omega_{x_6} \\ \omega_{y_6} \\ \omega_{z_6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -V_{C_x} \\ -V_{C_y} \\ -V_{C_z} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} f_{vs} = 0.562 \text{ s}^{-1} \\ \omega_6 = [4.6 \times 10^{-3} \quad -2.45 \times 10^{-2} \quad 7 \times 10^{-4}] \text{ rad/s} \end{cases}$$

$$\{V_{C_6C_7}\}_1 = f_{vs} \{R_{CI}\}_1 = [1.07 \times 10^{-2} \quad -4.5 \times 10^{-3} \quad -0.24]^T \text{ m/s}$$

La vitesse de translation est égale au module du vecteur de vitesse $\{V_{C_6C_7}\}_1$ agissant le long de l'axe du support C-I.

$$V_s = |V_{C_6C_7}| = \sqrt{(1.07 \times 10^{-2})^2 + (-4.5 \times 10^{-3})^2 + (-0.24)^2} = 0.24 \text{ m/s}$$

Les valeurs instantanées des vitesses angulaires et linéaires selon le repère $(O_1X_1Y_1Z_1)$ sont illustrées par les tableaux 3.2 et 3.3 respectivement. Ces valeurs sont importantes pour le calcul des forces lors d'analyse des contraintes de la pièce.

Tableau 3.2 : Vecteur de vitesse angulaire.

Corps	Composantes du vecteur de la vitesse angulaire		
	ω_x (rad/s)	ω_y (rad/s)	ω_z (rad/s)
2	1.62	0	0
3	1.86	0	0.11
4	-1.2×10^{-3}	-12.5×10^{-2}	-2×10^{-4}
5	1.87	5.1×10^{-3}	14.63×10^{-2}
6 / 7	4.6×10^{-3}	-2.45×10^{-2}	7×10^{-4}

Tableau 3.3: Vecteur de vitesse linéaire.

Points	Composantes du vecteur de la vitesse linéaire		
	V_x (m/s)	V_y (m/s)	V_z (m/s)
C	0	6.5×10^{-3}	0.24
D	-2.7×10^{-2}	1.5×10^{-2}	4.44×10^{-1}
G	0	1.46×10^{-2}	4.46×10^{-1}
H	-3.34×10^{-2}	1.49×10^{-2}	4.25×10^{-1}
P	2.2×10^{-2}	1.44×10^{-2}	4.45×10^{-1}
C ₆ C ₇	1.07×10^{-2}	-4.5×10^{-3}	-0.24

3.4 Analyse de l'accélération

Nous prendrons les mêmes considérations et suivrons la même méthode utilisée dans l'analyse précédente. Les accélérations angulaires et les vitesses angulaires des corps rigides peuvent être utilisées pour trouver les accélérations de translation aux différents points dans le système. Le triangle de suspension supérieur est contraint de tourner autour de l'axe AB, ignorant dans cette étape n'importe quelle déviation possible dans les joints (bushes) de suspension. Donc, le vecteur d'accélération angulaire $\{\alpha_3\}_1$ du triangle supérieur illustré à la figure 3.7 agira le long de l'axe de rotation AB qui peut être représenté par l'équation suivante :

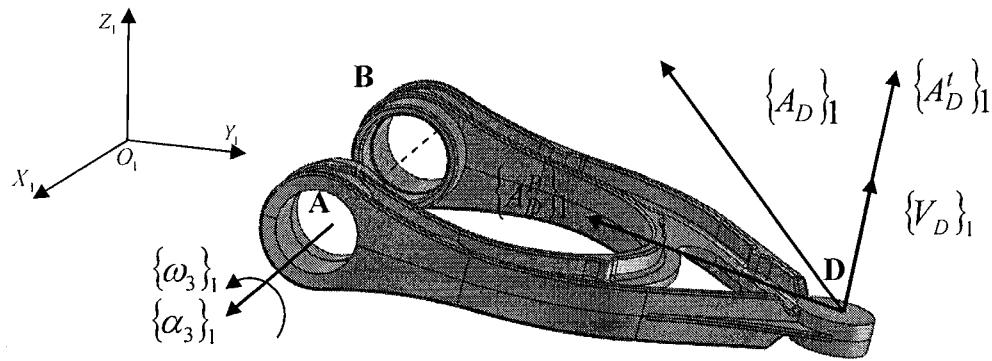


Figure 3.7 : Vecteurs d'accélération angulaire et linéaire du triangle supérieur.

$$\{\alpha_3\}_1 = f_{\alpha_3} \{R_{AB}\}_1 \quad \{\alpha_3\}_1 // \{R_{AB}\}_1 \quad (3.25)$$

L'utilisation du facteur scalaire f_{α_3} permet de réduire les trois composantes inconnues, α_{x_3} , α_{y_3} et α_{z_3} du vecteur $\{\alpha_3\}_1$ à un seul inconnu.

Le point A est considéré fixe avec une accélération $\{A_A\}_1 = 0$ et l'accélération absolue $\{A_D\}_1$ au point D peut être obtenue en utilisant la loi de la somme vectorielle comme suit :

$$\{A_D\}_1 = \{A_{DA}\}_1$$

L'accélération du point D est représentée par l'équation suivante:

$$\{A_D\}_1 = \{A_D^P\}_1 + \{A_D'\}_1 \quad (3.26)$$

D'où :

$\{A_D^P\}_1$: accélération centripète donnée par :

$$\{A_D^P\} = \{\omega_3\}_1 \times \{\{\omega_3\}_1 \times \{R_{DA}\}_1\} = \{\omega_3\}_1 \times \{V_D\}_1 \quad (3.27)$$

$\{A_D'\}_1$: accélération d'entraînement donnée par :

$$\{A_D'\}_1 = \{\alpha_3\} \times \{R_{DA}\}_1 \quad (3.28)$$

La même approche peut être appliquée pour le triangle inférieur de la suspension corps 2.

$$\{\alpha_2\}_1 = f_{\alpha_2} \{R_{EF}\}_1 \quad \{\alpha_2\}_1 // \{R_{EF}\}_1 \quad (3.29)$$

Finalement, les conditions aux limites de ce problème révèlent que les points A, B, E, F et J sont fixes.

L'accélération longitudinale, A_{P_x} et latérale A_{P_y} au point de contact P demeurent inconnues.

Cette analyse nous permet de développer les dix équations pour trouver les dix inconnus suivants :

$$f_{\alpha_2}, f_{\alpha_3}, \alpha_{x_4}, \alpha_{y_4}, \alpha_{z_4}, \alpha_{x_5}, \alpha_{y_5}, \alpha_{z_5}, A_{P_x}, A_{P_y}$$

En utilisant la somme vectorielle, nous générerons l'ensemble des équations en l'occurrence un ensemble de trois équations :

$$\{A_{DG}\}_1 = \{A_D\}_1 - \{A_G\}_1 \quad (3.30)$$

La première étape de l'analyse sert à déterminer l'expression de l'accélération $\{A_G\}_1$ du point G.

$$\{A_G\}_1 = \{A_{GE}\}_1 = \{\omega_2\}_1 \times \{V_G\}_1 + \{\alpha_2\}_1 \times \{R_{GE}\}_1 \quad (3.31)$$

$$\{\alpha_2\}_1 = f_{\alpha_2} \{R_{EF}\}_1 = f_{\alpha_2} \begin{bmatrix} EF_x \\ EF_y \\ EF_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{G_x} \\ A_{G_y} \\ A_{G_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{z_2} & \omega_{y_2} \\ \omega_{z_2} & 0 & -\omega_{x_2} \\ -\omega_{y_2} & \omega_{x_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{G_x} \\ V_{G_y} \\ V_{G_z} \end{bmatrix} + f_{\alpha_2} \begin{bmatrix} 0 & -EF_z & EF_y \\ EF_z & 0 & -EF_x \\ -EF_z & EF_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} GE_x \\ GE_y \\ GE_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{G_x} \\ A_{G_y} \\ A_{G_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{y_2} V_{G_x} - \omega_{z_2} V_{G_y} \\ -\omega_{x_2} V_{G_x} + \omega_{z_2} V_{G_z} \\ \omega_{x_2} V_{G_y} - \omega_{y_2} V_{G_z} \end{bmatrix} + f_{\alpha_2} \begin{bmatrix} -EF_z GE_y + GE_y GE_z \\ EF_z GE_x - EF_x GE_z \\ -EF_y GE_x + EF_x GE_y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{G_x} \\ A_{G_y} \\ A_{G_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{y_2} V_{G_x} - \omega_{z_2} V_{G_y} + f_{\alpha_2} (GE_y GE_z - EF_z GE_y) \\ -\omega_{x_2} V_{G_x} + \omega_{z_2} V_{G_z} + f_{\alpha_2} (EF_z GE_x - EF_x GE_z) \\ \omega_{x_2} V_{G_y} - \omega_{y_2} V_{G_z} + f_{\alpha_2} (-EF_y GE_x + EF_x GE_y) \end{bmatrix}$$

La deuxième étape sert à déterminer l'expression de l'accélération $\{A_D\}_1$ du point D.

$$\{A_D\}_1 = \{A_{DA}\}_1 = \{\omega_3\}_1 \times \{V_D\}_1 + \{\alpha_3\}_1 \times \{R_{DA}\}_1 \quad (3.32)$$

$$\{\alpha_3\}_1 = f_{\alpha_3} \{R_{AB}\}_1 = f_{\alpha_3} \begin{bmatrix} AB_x \\ AB_y \\ AB_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{D_x} \\ A_{D_y} \\ A_{D_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{z_3} & \omega_{y_3} \\ \omega_{z_3} & 0 & -\omega_{x_3} \\ -\omega_{y_3} & \omega_{x_3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{D_x} \\ V_{D_y} \\ V_{D_z} \end{bmatrix} + f_{\alpha_3} \begin{bmatrix} 0 & -AB_z & AB_y \\ AB_z & 0 & -AB_x \\ -AB_x & AB_y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} DA_x \\ DA_y \\ DA_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{D_x} \\ A_{D_y} \\ A_{D_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{y_3} V_{D_z} - \omega_{z_3} V_{D_y} \\ -\omega_{x_3} V_{D_x} + \omega_{z_3} V_{D_z} \\ \omega_{x_3} V_{D_y} - \omega_{y_3} V_{D_x} \end{bmatrix} + f_{\alpha_3} \begin{bmatrix} -AB_z DA_y + AB_y DA_z \\ DA_z DA_x - AB_x DA_z \\ -AB_y DA_x + AB_x AB_x \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{D_x} \\ A_{D_y} \\ A_{D_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{y_3} V_{D_z} - \omega_{z_3} V_{D_y} + f_{\alpha_3} (AB_y DA_z - AB_z DA_y) \\ -\omega_{x_3} V_{D_x} + \omega_{z_3} V_{D_z} + f_{\alpha_3} (-AB_x DA_z + DA_z DA_x) \\ \omega_{x_3} V_{D_y} - \omega_{y_3} V_{D_x} + f_{\alpha_3} (AB_x AB_x - AB_y DA_x) \end{bmatrix}$$

La troisième étape sert à déterminer l'expression de l'accélération relative $\{A_{DG}\}_1$ du point D par rapport au point G.

$$\{A_{DG}\}_1 = \{\omega_4\}_1 \times \{V_{DG}\}_1 + \{\alpha_4\}_1 \times \{R_{DG}\}_1 \quad (3.33)$$

$$\begin{bmatrix} A_{DG_x} \\ A_{DG_y} \\ A_{DG_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{z_4} & \omega_{y_4} \\ \omega_{z_4} & 0 & -\omega_{x_4} \\ -\omega_{y_4} & \omega_{x_4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{DG_x} \\ V_{DG_y} \\ V_{DG_z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_{z_4} & \alpha_{y_4} \\ \alpha_{z_4} & 0 & -\alpha_{x_4} \\ -\alpha_{y_4} & \alpha_{x_4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} DG_x \\ DG_y \\ DG_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{DG_x} \\ A_{DG_y} \\ A_{DG_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{y_4} V_{DG_z} - \omega_{z_4} V_{DG_y} \\ -\omega_{x_4} V_{DG_x} + \omega_{z_4} V_{DG_z} \\ \omega_{x_4} V_{DG_y} - \omega_{y_4} V_{DG_x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\alpha_{z_4} DG_y + \alpha_{y_4} DG_z \\ \alpha_{z_4} DG_x - \alpha_{x_4} DG_z \\ -\alpha_{y_4} DG_x + \alpha_{x_4} DG_y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{DG_x} \\ A_{DG_y} \\ A_{DG_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{y_4} V_{DG_z} - \omega_{z_4} V_{DG_y} + \alpha_{y_4} DG_z - \alpha_{z_4} DG_y \\ -\omega_{x_4} V_{DG_z} + \omega_{z_4} V_{DG_x} - \alpha_{x_4} DG_z + \alpha_{z_4} DG_x \\ \omega_{x_4} V_{DG_y} - \omega_{y_4} V_{DG_x} + \alpha_{x_4} DG_y - \alpha_{y_4} DG_x \end{bmatrix}$$

Substituons les équations (3.31), (3.32) et (3.33) dans l'équation (3.30), nous obtenons :

$$\{A_{DG}\}_1 = \{A_D\}_1 - \{A_G\}_1.$$

$$\begin{bmatrix} \omega_{y_4} V_{DG_z} - \omega_{z_4} V_{DG_y} + \alpha_{y_4} DG_z - \alpha_{z_4} DG_y \\ -\omega_{x_4} V_{DG_z} + \omega_{z_4} V_{DG_x} - \alpha_{x_4} DG_z + \alpha_{z_4} DG_x \\ \omega_{x_4} V_{DG_y} - \omega_{y_4} V_{DG_x} + \alpha_{x_4} DG_y - \alpha_{y_4} DG_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{\alpha_3}(AB_y DA_z - AB_z DA_y) + \omega_{y_3} V_{D_z} - \omega_{z_3} V_{D_y} \\ f_{\alpha_3}(-AB_x DA_z + AB_z DA_x) - \omega_{x_3} V_{D_z} + \omega_{z_3} V_{D_x} \\ f_{\alpha_3}(AB_x DA_y - AB_y DA_x) + \omega_{x_3} V_{D_y} - \omega_{y_3} V_{D_x} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_{\alpha_2}(EF_y GE_z - EF_z GE_y) + \omega_{y_2} V_{G_z} - \omega_{z_2} V_{G_y} \\ f_{\alpha_2}(-EF_x GE_z + EF_z GE_x) - \omega_{x_2} V_{G_z} + \omega_{z_2} V_{G_x} \\ f_{\alpha_2}(EF_x GE_y - EF_y GE_x) + \omega_{x_2} V_{G_y} - \omega_{y_2} V_{G_x} \end{bmatrix}$$

Après réarrangements des équations précédentes, nous obtenons les trois équations nécessaires pour le développement du système comme suit :

$$\begin{cases} f_{\alpha_2}(EF_y GE_z + EF_z GE_y) - f_{\alpha_3}(AB_y DA_z - AB_z DA_y) + \alpha_{y_4} DG_z - \alpha_{z_4} DG_y \\ = -\omega_{y_2} V_{G_z} + \omega_{z_2} V_{G_y} + \omega_{y_3} V_{D_z} - \omega_{z_3} V_{D_y} - \omega_{y_4} V_{DG_z} + \omega_{z_4} V_{DG_y} \\ f_{\alpha_2}(-EF_x GE_z + EF_z GE_x) - f_{\alpha_3}(-AB_x DA_z + AB_z DA_x) - \alpha_{x_4} DG_z + \alpha_{z_4} DG_x \\ = \omega_{x_2} V_{G_z} - \omega_{z_2} V_{G_x} - \omega_{x_3} V_{D_z} + \omega_{z_3} V_{D_x} + \omega_{x_4} V_{DG_z} - \omega_{z_4} V_{DG_x} \\ f_{\alpha_2}(EF_x GE_y - EF_y GE_x) - f_{\alpha_3}(AB_x DA_y - AB_y DA_x) + \alpha_{x_4} DG_y - \alpha_{y_4} DG_x \\ = -\omega_{x_2} V_{G_y} + \omega_{y_2} V_{G_x} + \omega_{x_3} V_{D_y} - \omega_{y_3} V_{D_x} - \omega_{x_4} V_{DG_y} + \omega_{y_4} V_{DG_x} \end{cases}$$

Nous utilisons la même méthodologie utilisée ci-dessus pour déterminer les accélérations entre les points H-D

$$\{A_{DH}\}_1 = \{A_D\}_1 - \{A_H\}_1 \quad (3.34)$$

$$\{A_H\}_1 = \{A_{HJ}\}_1 = \{\omega_5\}_1 \times \{V_H\}_1 + \{\alpha_5\}_1 \times \{R_{HJ}\}_1 \quad (3.35)$$

$$\begin{bmatrix} A_{H_x} \\ A_{H_y} \\ A_{H_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{z_5} & \omega_{y_5} \\ \omega_{z_5} & 0 & -\omega_{x_5} \\ -\omega_{y_5} & \omega_{x_5} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{H_x} \\ V_{H_y} \\ V_{H_z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_{z_5} & \alpha_{y_5} \\ \alpha_{z_5} & 0 & -\alpha_{x_5} \\ -\alpha_{y_5} & \alpha_{x_5} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} HJ_x \\ HJ_y \\ HJ_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{H_x} \\ A_{H_y} \\ A_{H_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{y_5} V_{H_z} - \omega_{z_5} V_{H_y} \\ -\omega_{x_5} V_{H_z} + \omega_{z_5} V_{H_x} \\ \omega_{x_5} V_{H_y} - \omega_{y_5} V_{H_x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\alpha_{z_5} HJ_y + \alpha_{y_5} HJ_z \\ \alpha_{z_5} HJ_x - \alpha_{x_5} HJ_z \\ -\alpha_{y_5} HJ_x + \alpha_{x_5} HJ_y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{H_x} \\ A_{H_y} \\ A_{H_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{y_3} V_{H_z} - \omega_{z_5} V_{H_y} + \alpha_{y_5} HJ_z - \alpha_{z_5} HJ_y \\ -\omega_{x_5} V_{H_z} + \omega_{z_5} V_{H_x} - \alpha_{x_5} HJ_z + \alpha_{z_5} HJ_x \\ \omega_{x_5} V_{H_y} - \omega_{y_5} V_{H_x} + \alpha_{x_5} HJ_y - \alpha_{y_5} HJ_x \end{bmatrix}$$

L'accélération relative $\{A_{DH}\}_1$ est représentée par la formule suivante :

$$\{A_{DH}\}_1 = \{\omega_4\}_1 \times \{V_{DH}\}_1 + \{\alpha_4\}_1 \times \{R_{DH}\}_1 \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_{DH_x} \\ A_{DH_y} \\ A_{DH_z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{z_4} & \omega_{y_4} \\ \omega_{z_4} & 0 & -\omega_{x_4} \\ -\omega_{y_4} & \omega_{x_4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{DH_x} \\ V_{DH_y} \\ V_{DH_z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_{z_4} & \alpha_{y_4} \\ \alpha_{z_4} & 0 & -\alpha_{x_4} \\ -\alpha_{y_4} & \alpha_{x_4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} DH_x \\ DH_y \\ DH_z \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} A_{DH_x} \\ A_{DH_y} \\ A_{DH_z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \omega_{y_4} V_{DH_z} - \omega_{z_4} V_{DH_y} \\ -\omega_{x_4} V_{DH_z} + \omega_{z_4} V_{DH_x} \\ \omega_{x_4} V_{DH_y} - \omega_{y_4} V_{DH_x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\alpha_{z_4} DH_y + \alpha_{y_4} DH_z \\ \alpha_{z_4} DH_x - \alpha_{x_4} DH_z \\ -\alpha_{y_4} DH_x + \alpha_{x_4} DH_y \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} A_{DH_x} \\ A_{DH_y} \\ A_{DH_z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \omega_{y_4} V_{DH_z} - \omega_{z_4} V_{DH_y} + \alpha_{y_4} DH_z - \alpha_{z_4} DH_y \\ -\omega_{x_4} V_{DH_z} + \omega_{z_4} V_{DH_x} - \alpha_{x_4} DH_z + \alpha_{z_4} DH_x \\ \omega_{x_4} V_{DH_y} - \omega_{y_4} V_{DH_x} + \alpha_{x_4} DH_y - \alpha_{y_4} DH_x \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Substituons les équations (3.32), (3.35) et (3.36) dans l'équation (3.34)

$$\{A_{DH}\}_1 = \{A_D\}_1 - \{A_H\}_1$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \omega_{y_4} V_{DH_z} - \omega_{z_4} V_{DH_y} + \alpha_{y_4} DH_z - \alpha_{z_4} DH_y \\ -\omega_{x_4} V_{DH_z} + \omega_{z_4} V_{DH_x} - \alpha_{x_4} DH_z + \alpha_{z_4} DH_x \\ \omega_{x_4} V_{DH_y} - \omega_{y_4} V_{DH_x} + \alpha_{x_4} DH_y - \alpha_{y_4} DH_x \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} f_{\alpha_3}(AB_y DA_z - AB_z DA_y) + \omega_{y_3} V_{D_z} - \omega_{z_3} V_{D_y} \\ f_{\alpha_3}(-AB_x DA_z + AB_z DA_x) - \omega_{x_3} V_{D_z} + \omega_{z_3} V_{D_x} \\ f_{\alpha_3}(AB_x DA_y - AB_y DA_x) + \omega_{x_3} V_{D_y} - \omega_{y_3} V_{D_x} \end{bmatrix} - \\ &\quad \begin{bmatrix} \omega_{y_5} V_{H_z} - \omega_{z_5} V_{H_y} + \alpha_{y_5} HJ_z - \alpha_{z_5} HJ_y \\ -\omega_{x_5} V_{H_z} + \omega_{z_5} V_{H_x} - \alpha_{x_5} HJ_z + \alpha_{z_5} HJ_x \\ \omega_{x_5} V_{H_y} - \omega_{y_5} V_{H_x} + \alpha_{x_5} HJ_y - \alpha_{y_5} HJ_x \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Après réarrangements des équations précédentes, nous obtenons les trois équations nécessaires pour le développement du système comme suit :

$$\begin{cases} f_{\alpha_3}(AB_z DA_y - AB_y DA_z) + \alpha_{y_4} DH_z - \alpha_{z_4} DH_y + \alpha_{y_5} HJ_z - \alpha_{z_5} HJ_y \\ = \omega_{y_3} V_{D_z} - \omega_{z_3} V_{D_y} - \omega_{y_4} V_{DH_z} + \omega_{z_4} V_{DH_y} - \omega_{y_5} V_{H_z} + \omega_{z_5} V_{H_y} \\ f_{\alpha_3}(AB_x DA_z - AB_z DA_x) - \alpha_{x_4} DH_z + \alpha_{z_4} DH_x - \alpha_{x_5} HJ_z + \alpha_{z_5} HJ_x \\ = -\omega_{x_3} V_{D_z} + \omega_{z_3} V_{D_x} + \omega_{x_4} V_{DH_z} - \omega_{z_4} V_{DH_x} + \omega_{x_5} V_{H_z} - \omega_{z_5} V_{H_x} \\ f_{\alpha_3}(AB_y DA_x - AB_x DA_y) + \alpha_{x_4} DH_y - \alpha_{y_4} DH_x + \alpha_{x_5} HJ_y - \alpha_{y_5} HJ_x \\ = \omega_{x_3} V_{D_y} - \omega_{y_3} V_{D_x} - \omega_{x_4} V_{DH_y} + \omega_{y_4} V_{DH_x} - \omega_{x_5} V_{H_y} + \omega_{y_5} V_{H_x} \end{cases}$$

Nous utilisons la même méthodologie utilisée ci-dessus pour déterminer les accélérations relatives entre les points G-P

$$\{A_{PG}\}_1 = \{A_p\}_1 - \{A_G\}_1 \quad (3.37)$$

$$\{A_{PG}\}_1 = \{\omega_4\}_1 \times \{V_{PG}\}_1 + \{\alpha_4\}_1 \times \{R_{PG}\}_1 \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_{PG_x} \\ A_{PG_y} \\ A_{PG_z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{z_4} & \omega_{y_4} \\ \omega_{z_4} & 0 & -\omega_{x_4} \\ -\omega_{y_4} & \omega_{x_4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{PG_x} \\ V_{PG_y} \\ V_{PG_z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_{z_4} & \alpha_{y_4} \\ \alpha_{z_4} & 0 & -\alpha_{x_4} \\ -\alpha_{y_4} & \alpha_{x_4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} PG_x \\ PG_y \\ PG_z \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} A_{PG_x} \\ A_{PG_y} \\ A_{PG_z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \omega_{y_4} V_{PG_z} - \omega_{z_4} V_{PG_y} \\ -\omega_{x_4} V_{PG_z} + \omega_{z_4} V_{PG_x} \\ \omega_{x_4} V_{PG_y} - \omega_{y_4} V_{PG_x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{y_4} PG_z - \alpha_{z_4} PG_y \\ -\alpha_{x_4} PG_z + \alpha_{z_4} PG_x \\ \alpha_{x_4} PG_y - \alpha_{y_4} PG_x \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} A_{PG_x} \\ A_{PG_y} \\ A_{PG_z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \omega_{y_4} V_{PG_z} - \omega_{z_4} V_{PG_y} + \alpha_{y_4} PG_z - \alpha_{z_4} PG_y \\ -\omega_{x_4} V_{PG_z} + \omega_{z_4} V_{PG_x} - \alpha_{x_4} PG_z + \alpha_{z_4} PG_x \\ \omega_{x_4} V_{PG_y} - \omega_{y_4} V_{PG_x} + \alpha_{x_4} PG_y - \alpha_{y_4} PG_x \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} A_p \\ A_{P_y} \\ A_{P_z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{P_z} \\ A_{P_y} \\ A_{P_z} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Substituons les équations (3.31), (3.38) et (3.39) dans l'équation (3.37)

$$\{A_{PG}\}_1 = \{A_p\}_1 - \{A_G\}_1 \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \omega_{y_4} V_{PG_z} - \omega_{z_4} V_{PG_y} + \alpha_{y_4} PG_z - \alpha_{z_4} PG_y \\ -\omega_{x_4} V_{PG_z} + \omega_{z_4} V_{PG_x} - \alpha_{x_4} PG_z + \alpha_{z_4} PG_x \\ \omega_{x_4} V_{PG_y} - \omega_{y_4} V_{PG_x} + \alpha_{x_4} PG_y - \alpha_{y_4} PG_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{P_z} \\ A_{P_y} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_{\alpha_2}(EF_y GE_z - EF_z GE_y) + \omega_{y_2} V_{G_z} - \omega_{z_2} V_{G_y} \\ f_{\alpha_2}(-EF_x GE_z + EF_z GE_x) - \omega_{x_2} V_{G_z} + \omega_{z_2} V_{G_x} \\ f_{\alpha_2}(EF_x GE_y - EF_y GE_x) + \omega_{x_2} V_{G_y} - \omega_{y_2} V_{G_x} \end{bmatrix}$$

Après réarrangements, nous obtenons les trois équations nécessaires pour le développement du système comme suit :

$$\begin{cases} f_{\alpha_2}(EF_z GE_y - EF_y GE_z) - \alpha_{y_4} PG_z + \alpha_{z_4} PG_y + A_{P_x} = \omega_{y_2} V_{G_z} - \omega_{z_2} V_{G_y} + \omega_{y_4} V_{PG_z} - \omega_{z_4} V_{PG_y} \\ f_{\alpha_2}(EF_x GE_z - EF_z GE_x) + \alpha_{x_4} PG_z - \alpha_{z_4} PG_x + A_{P_y} = -\omega_{x_2} V_{G_z} + \omega_{z_2} V_{G_x} - \omega_{x_4} V_{PG_z} + \omega_{z_4} V_{PG_x} \\ f_{\alpha_2}(EF_y GE_x - EF_x GE_y) - \alpha_{x_4} PG_y + \alpha_{y_4} PG_x = \omega_{x_2} V_{G_y} - \omega_{y_2} V_{G_x} + \omega_{x_4} V_{PG_y} - \omega_{y_4} V_{PG_x} \end{cases}$$

A ce stade nous avons neuf équations et dix inconnus. Il nous reste une équation à déterminer. Celle-ci est obtenue en limitant la rotation de la tige pour empêcher la rotation

autour de son propre axe. Alors, le vecteur de l'accélération angulaire $\{\alpha_5\}_1$ doit être perpendiculaire à la ligne H-J :

$$\{\alpha_5\}_1 \cdot \{R_{HJ}\}_1 = 0 \quad (3.40)$$

$$[\alpha_{x_5} \ \alpha_{y_5} \ \alpha_{z_5}] \cdot \begin{bmatrix} HJ_x \\ HJ_y \\ HJ_z \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow HJ_x \alpha_{x_5} + HJ_y \alpha_{y_5} + HJ_z \alpha_{z_5} = 0$$

Écrivons maintenant les dix équations sous forme matricielle pour déterminer les dix paramètres inconnus suivants :

$$f_{\alpha_2}, f_{\alpha_3}, \alpha_{x_4}, \alpha_{y_4}, \alpha_{z_4}, \alpha_{x_5}, \alpha_{y_5}, \alpha_{z_5}, A_{P_x}, A_{P_y}$$

La résolution du système d'équations en utilisant le logiciel Matlab [33] permet de calculer les accélérations angulaires et les accélérations de translation de tous les points de déplacement C, D, G, H et P.

$$\left[\begin{array}{cccccccccc} GE_z EF_y - GE_y EF_z & DA_y AB_z - DA_z AB_y & 0 & DG_z & -DG_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ GE_x EF_z - GE_z EF_x & DA_z AB_x - DA_x AB_z & -DG_z & 0 & DG_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ GE_y EF_x - GE_x EF_y & DA_x AB_y - DA_y AB_x & DG_y & -DG_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & DA_y AB_z - DA_z AB_y & 0 & DH_z & -DH_y & 0 & HJ_z & -HJ_y & 0 & 0 \\ 0 & DA_z AB_x - DA_x AB_z & -DH_z & 0 & DH_x & -HJ_z & 0 & HJ_x & 0 & 0 \\ 0 & DA_x AB_y - DA_y AB_x & DH_y & -DH_x & 0 & HJ_y & -HJ_x & 0 & 0 & 0 \\ GE_y EF_z - GE_z EF_y & 0 & 0 & -PG_z & PG_y & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ GE_z EF_x - GE_x EF_z & 0 & PG_z & 0 & -PG_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ GE_x EF_y - GE_y EF_x & 0 & -PG_y & + (PG_x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & HJ_x & HJ_y & HJ_z & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{c} f_{\alpha_2} \\ f_{\alpha_3} \\ \alpha_{x_4} \\ \alpha_{y_4} \\ \alpha_{z_4} \\ \alpha_{x_5} \\ \alpha_{y_5} \\ \alpha_{z_5} \\ A_{P_x} \\ A_{P_y} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} -\omega_{y_2} V_{G_z} + \omega_{z_2} V_{G_y} + \omega_{y_3} V_{D_z} - \omega_{z_3} V_{D_y} - \omega_{y_4} V_{Dg_z} + \omega_{z_4} V_{Dg_y} \\ \omega_{x_2} V_{G_z} - \omega_{z_2} V_{G_x} - \omega_{x_3} V_{D_z} + \omega_{z_3} V_{D_x} + \omega_{x_4} V_{Dg_z} - \omega_{z_4} V_{Dg_x} \\ -\omega_{x_3} V_{G_y} + \omega_{y_2} V_{G_x} + \omega_{x_4} V_{D_y} - \omega_{y_3} V_{D_x} - \omega_{x_4} V_{DG_y} + \omega_{y_4} V_{DG_x} \\ \omega_{y_3} V_{D_z} - \omega_{z_3} V_{D_y} - \omega_{y_4} V_{DH_z} + \omega_{z_4} V_{DH_y} - \omega_{y_5} V_{H_z} + \omega_{z_5} V_{H_y} \\ -\omega_{x_3} V_{D_z} + \omega_{z_3} V_{D_x} + \omega_{x_4} V_{DH_z} - \omega_{z_4} V_{DH_x} + \omega_{x_5} V_{H_z} - \omega_{z_5} V_{H_x} \\ \omega_{x_3} V_{D_y} - \omega_{y_3} V_{D_x} - \omega_{x_4} V_{DH_y} + \omega_{y_4} V_{DH_x} - \omega_{x_5} V_{H_y} + \omega_{y_5} V_{H_x} \\ \omega_{y_2} V_{G_z} - \omega_{z_2} V_{G_y} + \omega_{y_4} V_{PG_z} - \omega_{z_4} V_{PG_y} \\ -\omega_{x_2} V_{G_z} + \omega_{z_2} V_{G_x} - \omega_{x_4} V_{PG_z} + \omega_{z_4} V_{PG_x} \\ \omega_{x_2} V_{G_y} - \omega_{y_2} V_{G_x} + \omega_{x_4} V_{PG_y} - \omega_{y_4} V_{PG_x} \\ 0 \end{array} \right]$$

Prenons la simulation d'un point d'entrée P avec les paramètres suivants :

$$t=4.45 \times 10^{-3} \text{ s}, x=10^{-2} \text{ m}, z=26.49 \times 10^{-3} \text{ m}, V_{pz}=0.4452 \text{ m/s}, A_{pz}=44.04 \text{ m/s}^2$$

Les résultats suivants présentent le calcul de toutes les accélérations des différents points du système de suspension.

$$\begin{cases} f_{\alpha_2} = -0.89 \text{ rad/m.s}^2 \\ f_{\alpha_3} = -1.43 \text{ rad/m.s}^2 \\ \alpha_{x_4} = 5.14 \times 10^{-1} \text{ rad/s}^2 \\ \alpha_{y_4} = 6.54 \times 10^{-2} \text{ rad/s}^2 \\ \alpha_{z_4} = -3.64 \times 10^{-1} \text{ rad/s}^2 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_{x_5} = -4.09 \times 10^{-1} \text{ rad/s}^2 \\ \alpha_{y_5} = 1.13 \times 10^{-3} \text{ rad/s}^2 \\ \alpha_{z_5} = 3.22 \times 10^{-2} \text{ rad/s}^2 \\ A_{P_x} = 9.76 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2 \\ A_{P_y} = -6.32 \times 10^{-1} \text{ m/s}^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \{\alpha_2\}_1 = f_{\alpha_2} \{R_{EF}\}_1 = [-0.21 \ 0 \ 0]^T \text{ rad/s}^2 \\ \{\alpha_3\}_1 = f_{\alpha_3} \{R_{AB}\}_1 = [-0.33 \ 0 \ -0.02]^T \text{ rad/s}^2 \\ \{\alpha_4\}_1 = [5.14 \times 10^{-1} \ 6.54 \times 10^{-2} \ -3.64 \times 10^{-1}]^T \text{ rad/s}^2 \\ \{\alpha_5\}_1 = [-4.09 \times 10^{-1} \ 1.13 \times 10^{-3} \ 3.22 \times 10^{-2}]^T \text{ rad/s}^2 \\ \{A_C\}_1 = \{A_{CE}\}_1 = \{\omega_2\}_1 \times \{V_C\}_1 + \{\alpha_2\}_1 \times \{R_{CE}\}_1 = [0 \ -3.98 \times 10^{-1} \ 2.06 \times 10^{-2}]^T \text{ m/s}^2 \\ \{A_D\}_1 = \{A_{DA}\}_1 = \{\omega_3\}_1 \times \{V_D\}_1 + \{\alpha_3\}_1 \times \{R_{DA}\}_1 = [3.1 \times 10^{-3} \ -8.3 \times 10^{-1} \ 5.11 \times 10^{-2}]^T \\ \{A_G\}_1 = \{A_{GE}\}_1 = \{\omega_2\}_1 \times \{V_G\}_1 + \{\alpha_2\}_1 \times \{R_{GE}\}_1 = [0 \ -7.25 \times 10^{-1} \ -3.3 \times 10^{-2}]^T \\ \{A_H\}_1 = \{A_{HJ}\}_1 = \{\omega_5\}_1 \times \{V_H\}_1 + \{\alpha_5\}_1 \times \{R_{HJ}\}_1 = [-7.3 \times 10^{-3} \ -8.03 \times 10^{-1} \ -6.51 \times 10^{-2}]^T \\ \{A_P\}_1 = [9.8 \times 10^{-3} \ -6.33 \times 10^{-1} \ 44.04]^T \end{cases}$$

Il est possible à présent après avoir définie la valeur de l'accélération $\{A_C\}_1$ de trouver la composante de l'accélération agissant le long de l'axe C-I et cela en réalisant une analyse séparée de l'unité de l'amortisseur. Les trois points C2, C6 et C7 coïncidents avec le point C, ce qui nous permet d'écrire

$$\{A_{C_2}\}_1 = \{A_{C_6}\}_1 = \{A_C\}_1 \quad (3.41)$$

- Calcul de l'accélération $\{A_{C_6}\}_1$:

Calculons la vitesse $\{V_{C_6}\}_1$ à partir de l'équation (3.20)

$$\{V_{C_6}\}_1 = \{V_{C_6I}\}_1 = \{V_{C_6C_7}\}_1 + \{V_{C_7}\}_1$$

$$\{V_{C_6}\}_1 = \{V_{C_6I}\}_1 = [12.4 \times 10^{-2} \quad -5.29 \times 10^{-2} \quad -2.74]^T \text{ m/s}$$

L'expression de l'accélération $\{A_{C_6}\}_1$ est donnée par :

$$\{A_{C_6}\}_1 = \{A_{C_6I}\}_1 = \{\omega_6\}_1 \times \{V_{C_6I}\}_1 + \{\alpha_6\}_1 \times \{R_{CI}\}_1 \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_{C_{6x}} \\ A_{C_{6y}} \\ A_{C_{6z}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{z_6} & \omega_{y_6} \\ \omega_{z_6} & 0 & -\omega_{x_6} \\ -\omega_{y_6} & \omega_{x_6} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{C_6I_x} \\ V_{C_6I_y} \\ V_{C_6I_z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_{z_6} & \alpha_{y_6} \\ \alpha_{z_6} & 0 & -\alpha_{x_6} \\ -\alpha_{y_6} & \alpha_{x_6} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} CI_x \\ CI_y \\ CI_z \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} A_{C_{6x}} \\ A_{C_{6y}} \\ A_{C_{6z}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \omega_{y_6} V_{C_6I_z} - \omega_{z_6} V_{C_6I_y} \\ -\omega_{x_6} V_{C_6I_z} + \omega_{z_6} V_{C_6I_x} \\ \omega_{x_6} V_{C_6I_y} - \omega_{y_6} V_{C_6I_x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{y_6} CI_z - \alpha_{z_6} CI_y \\ -\alpha_{x_6} CI_z + \alpha_{z_6} CI_x \\ \alpha_{x_6} CI_y - \alpha_{y_6} CI_x \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} A_{C_{6x}} \\ A_{C_{6y}} \\ A_{C_{6z}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \omega_{y_6} V_{C_6I_z} - \omega_{z_6} V_{C_6I_y} + \alpha_{y_6} CI_z - \alpha_{z_6} CI_y \\ -\omega_{x_6} V_{C_6I_z} + \omega_{z_6} V_{C_6I_x} - \alpha_{x_6} CI_z + \alpha_{z_6} CI_x \\ \omega_{x_6} V_{C_6I_y} - \omega_{y_6} V_{C_6I_x} + \alpha_{x_6} CI_y - \alpha_{y_6} CI_x \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Considérons maintenant le vecteur d'accélération relatif $\{A_{C_6C_7}\}_1$ des points C6 et C7. Les deux corps sont en mouvement de rotation combinée au mouvement de translation. Nous pouvons identifier les quatre composantes d'accélération associées à ce mouvement (rotation+translation).

Accélération centripète :

$$\{A_{C_6C_7}^P\}_1 = \{\omega_6\}_1 \times \{\{\omega_6\}_1 \times \{R_{C_6C_7}\}_1\} \quad (3.43)$$

Accélération transversale :

$$\{A'_{C_6C_7}\}_1 = \{\alpha_6\}_1 \times \{R_{C_6C_7}\}_1 \quad (3.44)$$

Accélération de Coriolis :

$$\{A_{C_6C_7}^c\}_1 = 2\{\omega_6\}_1 \times \{V_s\}_1 \quad (3.45)$$

Où :

$\{V_s\}_1$: vitesse de translation

L'accélération de translation :

$$\{A_{C_6C_7}^s\}_1 = |A_{C_6C_7}^s| \times \{l_{CI}\}_1 \quad (3.46)$$

Puisque les deux points C6 et C7 coïncident, cela conduit à des valeurs nulles pour $\{A_{C_6C_7}^P\}_1$ et $\{A'_{C_6C_7}\}_1$.

$$\{A_{C_6C_7}^P\}_1 = 0 \quad , \quad \{A'_{C_6C_7}\}_1 = 0$$

Nous avons la vitesse de translation $\{V_s\}_1$ égale à la vitesse relative $\{V_{C_6C_7}\}_1$.

$$\{V_s\}_1 = \{V_{C_6C_7}\}_1$$

Donc, l'accélération de Coriolis s'écrit comme suit :

$$\{A_{C_6C_7}^c\}_1 = 2\{\omega_6\}_1 \times \{V_s\}_1 = 2\{\omega_6\}_1 \times \{V_{C_6C_7}\}_1 \quad (3.47)$$

Puisque les deux points C6 et C7 coïncident, alors le vecteur de l'accélération relative ne peut agir que selon la direction de glissement sur l'axe C-I, ce qui nous permet de choisir un facteur scalaire A_s . Ceci permet de réduire le nombre des inconnus

$$\{A_{C_6C_7}^s\}_1 = |A_{C_6C_7}^s| \times \{I_{CI}\}_1 = A_s \{R_{CI}\}_1 \quad (3.48)$$

La combinaison de ces composantes d'accélération donne :

$$\{A_{C_6C_7}\}_1 = 2\{\omega_6\}_1 \times \{V_{C_6C_7}\}_1 + A_s \{R_{CI}\}_1 \quad (3.49)$$

$$\begin{bmatrix} A_{C_6C_{7x}} \\ A_{C_6C_{7y}} \\ A_{C_6C_{7z}} \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{z_6} & \omega_{y_6} \\ \omega_{z_6} & 0 & -\omega_{x_6} \\ -\omega_{y_6} & \omega_{x_6} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{C_6C_{7x}} \\ V_{C_6C_{7y}} \\ V_{C_6C_{7z}} \end{bmatrix} + A_s \begin{bmatrix} CI_x \\ CI_y \\ CI_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{C_6C_{7x}} \\ A_{C_6C_{7y}} \\ A_{C_6C_{7z}} \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} \omega_{y_6} V_{C_6C_{7z}} - \omega_{z_6} V_{C_6C_{7y}} \\ \omega_{z_6} V_{C_6C_{7x}} - \omega_{x_6} V_{C_6C_{7z}} \\ \omega_{x_6} V_{C_6C_{7y}} - \omega_{y_6} V_{C_6C_{7x}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_s CI_x \\ A_s CI_y \\ A_s CI_z \end{bmatrix}$$

Le point I est fixe, alors la somme vectorielle est obtenue par :

$$\{A_{C_6C_7}\}_1 = \{A_{C_6}\}_1 - \{A_{C_7}\}_1 \quad (3.50)$$

Substituons les équations (3.41), (3.42) et (3.49) dans l'équation (3.50)

$$2 \begin{bmatrix} \omega_{y_6} V_{C_6C_{7z}} - \omega_{z_6} V_{C_6C_{7y}} \\ \omega_{z_6} V_{C_6C_{7x}} - \omega_{x_6} V_{C_6C_{7z}} \\ \omega_{x_6} V_{C_6C_{7y}} - \omega_{y_6} V_{C_6C_{7x}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_s CI_x \\ A_s CI_y \\ A_s CI_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{y_6} V_{C_6I_x} - \omega_{z_6} V_{C_6I_y} + \alpha_{y_6} CI_z - \alpha_{z_6} CI_y \\ -\omega_{x_6} V_{C_6I_z} + \omega_{z_6} V_{C_6I_x} - \alpha_{x_6} CI_z + \alpha_{z_6} CI_x \\ \omega_{x_6} V_{C_6I_y} - \omega_{y_6} V_{C_6I_x} + \alpha_{x_6} CI_y - \alpha_{y_6} CI_x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{C_x} \\ A_{C_y} \\ A_{C_z} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} A_s CI_x - \alpha_{y_6} CI_z + \alpha_{z_6} CI_y = \omega_{y_6} V_{C_6 I_z} - \omega_{z_6} V_{C_6 I_y} - 2\omega_{y_6} V_{C_6 C_{7z}} - 2\omega_{z_6} V_{C_6 C_{7y}} - A_{C_x} \\ A_s CI_y + \alpha_{x_6} CI_z - \alpha_{z_6} CI_x = -\omega_{x_6} V_{C_6 I_z} + \omega_{z_6} V_{C_6 I_x} - 2\omega_{z_6} V_{C_6 C_{7x}} - 2\omega_{x_6} V_{C_6 C_{7z}} - A_{C_y} \\ A_s CI_z - \alpha_{x_6} CI_y + \alpha_{y_6} CI_x = \omega_{x_6} V_{C_6 I_y} - \omega_{y_6} V_{C_6 I_x} - 2\omega_{x_6} V_{C_6 C_{7y}} - 2\omega_{y_6} V_{C_6 C_{7x}} - A_{C_z} \end{cases}$$

À ce niveau, nous avons trois équations et quatre inconnus. Il nous reste une équation à déterminer. Donc, nous pouvons utiliser la même approche précédente avec le bras de direction. Puisque le degré de liberté de rotation du corps 6 autour de son axe C-I n'a aucun effet sur la solution complète.

Pour déterminer cette équation, nous utilisons le produit scalaire suivant :

$$\{\alpha_6\}_1 \cdot \{R_{CI}\}_1 = 0 \quad (3.51)$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{x_6} & \alpha_{y_6} & \alpha_{z_6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} CI_x \\ CI_y \\ CI_z \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow CI_x \alpha_{x_6} + CI_y \alpha_{y_6} + CI_z \alpha_{z_6} = 0$$

Écrivons maintenant les quatre équations sous forme matricielle pour déterminer les quatre paramètres inconnus.

$$\begin{bmatrix} CI_x & 0 & -CI_z & CI_y \\ CI_y & CI_z & 0 & -CI_x \\ CI_z & -CI_y & CI_x & 0 \\ 0 & CI_x & CI_y & CI_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_s \\ \alpha_{x_6} \\ \alpha_{y_6} \\ \alpha_{z_6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{y_6} V_{C_6 I_z} - \omega_{z_6} V_{C_6 I_y} - 2\omega_{y_6} V_{C_6 C_{7z}} - 2\omega_{z_6} V_{C_6 C_{7y}} - A_{C_x} \\ -\omega_{x_6} V_{C_6 I_z} + \omega_{z_6} V_{C_6 I_x} - 2\omega_{z_6} V_{C_6 C_{7x}} - 2\omega_{x_6} V_{C_6 C_{7z}} - A_{C_y} \\ \omega_{x_6} V_{C_6 I_y} - \omega_{y_6} V_{C_6 I_x} - 2\omega_{x_6} V_{C_6 C_{7y}} - 2\omega_{y_6} V_{C_6 C_{7x}} - A_{C_z} \\ 0 \end{bmatrix}$$

En utilisant le logiciel Matlab pour la résolution du système d'équations, nous obtenons les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} A_s = -6.47 \times 10^{-2} \text{ s}^{-2} \\ \alpha_{x_6} = -9.07 \times 10^{-1} \text{ rad/s}^2 \\ \alpha_{y_6} = -2.55 \times 10^{-2} \text{ rad/s}^2 \\ \alpha_{z_6} = -3.92 \times 10^{-2} \text{ rad/s}^2 \end{cases}$$

$$\{A_{C_6 C_7}\}_1 = 2\{\omega_6\}_1 \times \{V_{C_6 C_7}\}_1 + A_s \{R_{CI}\}_1 = [1.08 \times 10^{-2} \quad 2.8 \times 10^{-3} \quad 2.86 \times 10^{-2}] \text{ m/s}^2$$

L'accélération de translation est égale au module du vecteur de l'accélération $\{A_{C_6 C_7}\}_1$ qui agit le long de l'axe du support C-I.

$$A_{\perp s} = |A_{C_6 C_7}| = \sqrt{(1.08 \times 10^{-2})^2 + (2.8 \times 10^{-3})^2 + (2.86 \times 10^{-2})^2} = 3.07 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2$$

Les valeurs instantanées des accélérations angulaires et linéaires selon le repère $(O_1X_1Y_1Z_1)$ sont illustrées par les tableaux 3.4 et 3.5 respectivement.

Tableau 3.4 : Vecteur d'accélération angulaire.

Corps	Composantes du vecteur d'accélération angulaire		
	α_x (rad/s ²)	α_y (rad/s ²)	α_z (rad/s ²)
2	-0.21	0	0
3	-0.33	0	-0.02
4	5.14×10^{-1}	6.54×10^{-2}	-3.64×10^{-1}
5	-4.09×10^{-1}	1.13×10^{-3}	3.22×10^{-3}
6 / 7	-9.07×10^{-1}	-2.55×10^{-2}	-3.92×10^{-2}

Tableau 3.5 : Vecteur d'accélération linéaire.

Points	Composantes du vecteur d'accélération		
	A_x (m/s ²)	A_y (m/s ²)	A_z (m/s ²)
C	0	-3.98×10^{-1}	2.06×10^{-2}
D	3.1×10^{-3}	-8.3×10^{-1}	5.11×10^{-2}
G	0	-7.25×10^{-1}	-3.3×10^{-2}
H	-7.3×10^{-3}	-8.03×10^{-1}	-6.51×10^{-2}
P	9.8×10^{-3}	-6.33×10^{-1}	44.04
C ₆ C ₇	1.08×10^{-2}	2.8×10^{-3}	2.86×10^{-2}

Chapitre 4

Modélisation d'un quart de véhicule : calcul des forces statiques et dynamiques

En se basant sur le modèle développé dans le chapitre précédent, les forces statiques et dynamiques sont calculées en appliquant les étapes suivantes : établir le diagramme des corps libres pour représenter d'une manière appropriée la répartition des forces appliquées illustrées dans la figure 4.1; appliquer la troisième loi de Newton basée sur le principe d'action-réaction pour les forces agissants entre deux corps.

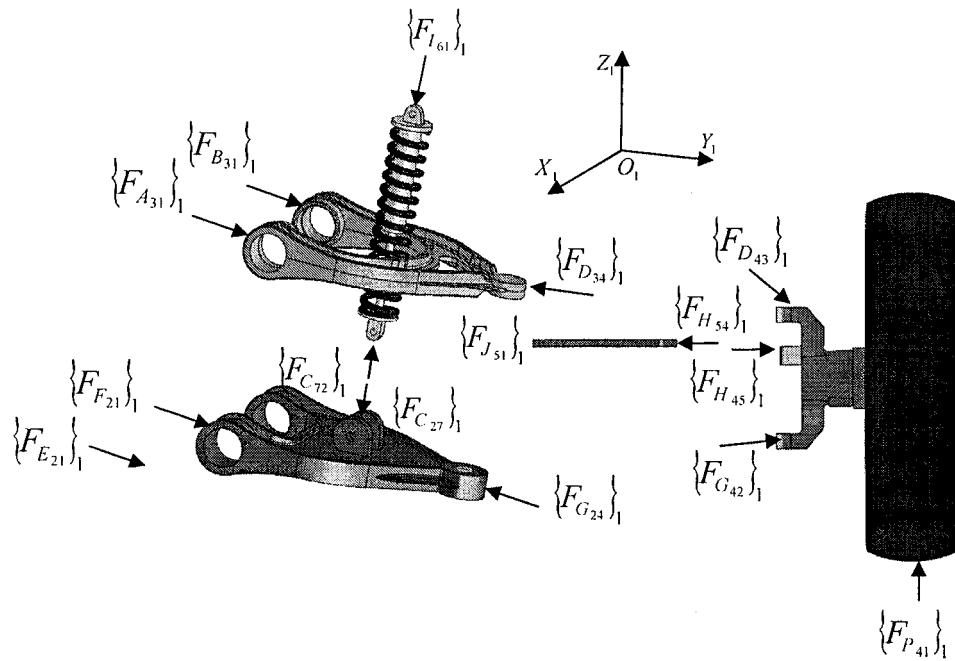


Figure 4.1: Diagramme des corps libres du système de suspension.

Finalement, dans le cas statique, nous ignorons l'effet du poids des éléments de suspension, vu que leur contribution est faible par rapport aux charges globales du véhicule. Cependant, le poids des éléments de suspension va être introduit dans le modèle dynamique. Les paramètres physiques concernant les éléments de la suspension, sont définies dans le tableau 4.1.

Tableau 4.1: Paramètres physiques des éléments de suspension.

	Masse (kg)	Moments d'inertie (kg.m ²)			Coordonnées du centre de masse (mm)		
		I_{ixx}	I_{iyy}	I_{izz}	$R_{G_{i,x}}$	$R_{G_{i,y}}$	$R_{G_{i,z}}$
Triangle inférieur	3.5	1.5×10^{-3}	38×10^{-3}	38×10^{-3}	7	436.66	-83
Triangle supérieur	2.19	4.07×10^{-3}	15.22×10^{-3}	11.52×10^{-3}	-12	429.66	132.33
Support de la roue	11.68	120.54×10^{-3}	77.69×10^{-3}	65.65×10^{-3}	-10.5	604	162
Bras de direction	0.57	0.02×10^{-3}	3.87×10^{-3}	3.88×10^{-3}	-156	431	182

4.1 Étude statique :

Les forces statiques équivalentes sont utilisées pour étudier les charges appliquées sur les composantes de la suspension par l'excitation de la route.

Dans ce travail, la méthode d'analyse vectorielle est utilisée où une charge verticale de 3000N est appliquée à la surface de contact entre le pneu et la route.

Comme nous l'avons dit plus haut, nous ignorons l'effet du poids des éléments de suspension, vu que leur contribution est faible par rapport aux charges globales du véhicule.

L'interaction au point D entre le triangle supérieur et le support de la roue exige que les forces $\{F_{D_{33}}\}_1$ et $\{F_{D_{34}}\}_1$ sont égales et de direction opposée. Ainsi, au lieu d'inclure les six composantes de deux vecteurs de forces nous pouvons les réduire en utilisant seulement trois composantes et également pour les autres points G et H.

$$\{F_{D_{33}}\}_1 = -\{F_{D_{34}}\}_1 \quad (4.1)$$

$$\{F_{G_{42}}\}_1 = -\{F_{G_{24}}\}_1 \quad (4.2)$$

$$\{F_{H_{45}}\}_1 = -\{F_{H_{54}}\}_1 \quad (4.3)$$

Dans ce modèle nous traitons les connexions et les supports comme des joints rototoïdes (pin-jointed), ou comme des joints sphériques équivalents dans un modèle de MBS (Multi Body Systems Analysis).

Pour le bras de direction, corps5, les deux liens d'extrémités sont des joints rototoïdes (pin-jointed) et si nous ignorons la gravité, la force doit agir le long de l'axe H-J. D'une façon semblable, la force de la partie inférieure de l'amortisseur agissant sur la base du support au point C doit être égale et opposée à celle qui agit en haut au point I :

$$\{F_{J_{51}}\}_1 = -\{F_{H_{54}}\}_1 \quad (4.4)$$

$$\{F_{C_{27}}\}_1 = -\{F_{C_{72}}\}_1 = \{F_{I_{61}}\}_1 \quad (4.5)$$

La connaissance des lignes d'action des forces nous permet d'utiliser des facteurs scalaires qui conduisent à réduire le nombre des inconnus :

$$\{F_{H_{54}}\}_1 = f_{S_1} \{R_{JH}\}_1 \quad (4.6)$$

$$\{F_{C_{27}}\}_1 = f_{S_2} \{R_{CI}\}_1 \quad (4.7)$$

Nous obtenons une série de 20 inconnues qui doivent être déterminées pour résoudre l'état d'équilibre statique:

$$\begin{aligned} F_{A_{31x}}, F_{A_{31y}}, F_{A_{31z}}, F_{B_{31x}}, F_{B_{31y}}, F_{B_{31z}}, F_{D_{34x}}, F_{D_{34y}}, F_{D_{34z}}, F_{E_{21x}}, F_{E_{21y}}, F_{E_{21z}}, F_{F_{21x}}, \\ F_{F_{21y}}, F_{F_{21z}}, F_{G_{24x}}, F_{G_{24y}}, F_{G_{24z}}, f_{S_1}, f_{S_2} \end{aligned}$$

Le problème peut être résolu par la mise en place des équations d'équilibre pour les deux triangles et le fusil (support de la roue). L'utilisation des facteurs scalaires pour les forces qui agissent le long du bras de direction et l'amortisseur, signifie que ces deux derniers ne peuvent pas être utilisés pour générer des équations utiles afin de résoudre le problème.

Ainsi nous pourrons produire 18 équations comme suit :

Triangle inférieur : au point G

Le système est en équilibre statique, nous avons alors :

$$\sum \{F_2\}_1 = \{0\}_1 \quad (4.8)$$

$$\sum \{M_{G_2}\}_1 = \{0\}_1 \quad (4.9)$$

Nous avons ainsi pour le triangle supérieur : au point D

$$\sum \{F_3\}_1 = \{0\}_1 \quad (4.10)$$

$$\sum \{M_{D_3}\}_1 = \{0\}_1 \quad (4.11)$$

Comme nous avons aussi pour le fusil : au point G

$$\sum \{F_4\}_1 = \{0\}_1 \quad (4.12)$$

$$\sum \{M_{G_4}\}_1 = \{0\}_1 \quad (4.13)$$

Cela nous laisse avec l'obligation de déterminer deux autres équations, pour la résolution du problème. La réponse provient d'une étude qui considère les connexions entre les deux triangles supérieur et inférieur et la partie fixe. Utilisons l'approche analytique et considérons en premier lieu le triangle inférieur. Nous remarquons dans la figure 4.2 qu'une approche comparable à l'utilisation des MBS, un joint primitif intégré contraint doit assurer que la ligne d'action d'une des forces $\{F_{F_{21}}\}_1$ de réaction du support est perpendiculaire à l'axe E-F à travers les deux supports du triangle. Cela est applicable aussi sur le triangle supérieur.

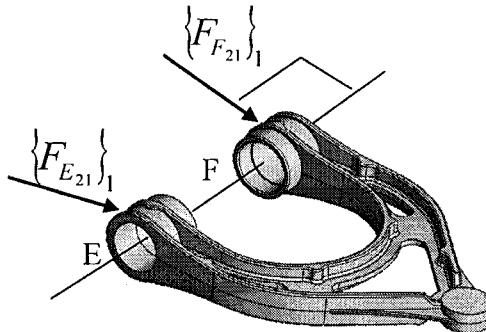


Figure 4.2: Triangle supérieur.

Nous pouvons écrire :

$$\{F_{F_{21}}\}_1 \cdot \{R_{EF}\}_1 = 0 \quad (4.14)$$

$$\{F_{B_{31}}\}_1 \cdot \{R_{AB}\}_1 = 0 \quad (4.15)$$

Après avoir établi les 20 équations nécessaires à la solution, il est possible de développer les équations d'équilibre des forces du triangle inférieur. Ce dernier est en équilibre statique dont la résultante des forces est nulle.

$$\sum \{F_2\}_1 = \{0\}_1 \quad (4.16)$$

$$\{F_{E_{21}}\}_1 + \{F_{F_{21}}\}_1 + f_{S_2} \{R_{CI}\}_1 + \{F_{G_{24}}\}_1 = \{0\}_1 \quad (4.17)$$

La projection de l'équation (4.17) sur les axes donne trois équations scalaires :

$$\begin{bmatrix} F_{E_{21x}} \\ F_{E_{21y}} \\ F_{E_{21z}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{F_{21x}} \\ F_{F_{21y}} \\ F_{F_{21z}} \end{bmatrix} + f_{S_2} \begin{bmatrix} CI_x \\ CI_y \\ CI_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{G_{24x}} \\ F_{G_{24y}} \\ F_{G_{24z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} F_{E_{21x}} + F_{F_{21x}} + f_{S_2} \cdot CI_x + F_{G_{24x}} = 0 \\ F_{E_{21y}} + F_{F_{21y}} + f_{S_2} \cdot CI_y + F_{G_{24y}} = 0 \\ F_{E_{21z}} + F_{F_{21z}} + f_{S_2} \cdot CI_z + F_{G_{24z}} = 0 \end{cases}$$

Le moment résultant par rapport au point G est aussi nul.

$$\sum \{M_G\}_1 = \{0\}_1 \quad (4.18)$$

$$\{R_{EG}\}_1 \times \{F_{E_{21}}\}_1 + \{R_{FG}\}_1 \times \{F_{F_{21}}\}_1 + \{R_{CG}\}_1 \times f_{S_2} \{R_{CI}\}_1 = \{0\}_1 \quad (4.19)$$

En développant l'équation vectorielle (4.19), nous obtenons trois autres équations scalaires comme suit :

$$\begin{bmatrix} 0 & -EG_z & EG_y \\ EG_z & 0 & -EG_x \\ -EG_y & EG_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{E_{21x}} \\ F_{E_{21y}} \\ F_{E_{21z}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -FG_z & FG_y \\ FG_z & 0 & -FG_x \\ -FG_y & FG_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{F_{21x}} \\ F_{F_{21y}} \\ F_{F_{21z}} \end{bmatrix} + f_{S_2} \begin{bmatrix} 0 & -CG_z & CG_y \\ CG_z & 0 & -CG_x \\ -CG_y & CG_x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} CI_x \\ CI_y \\ CI_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -EG_z F_{E_{21y}} + EG_y F_{E_{21z}} - FG_z F_{F_{21y}} + FG_y F_{F_{21z}} + f_{S_2} [-CG_z \cdot CI_y + CG_y \cdot CI_z] = 0 \\ EG_z F_{E_{21x}} - EG_x F_{E_{21z}} + FG_z F_{F_{21x}} - FG_x F_{F_{21z}} + f_{S_2} [CG_z \cdot CI_x - CG_x \cdot CI_z] = 0 \\ -EG_y F_{E_{21x}} + EG_x F_{E_{21y}} - FG_y F_{F_{21x}} + FG_x F_{F_{21y}} + f_{S_2} [-CG_y \cdot CI_x + CG_x \cdot CI_y] = 0 \end{cases}$$

Les équations d'équilibre pour le triangle supérieur sont données par:

$$\sum \{F_3\}_1 = \{0\}_1 \quad (4.20)$$

$$\{F_{A_{31}}\}_1 + \{F_{B_{31}}\}_1 + \{F_{D_{34}}\}_1 = \{0\}_1 \quad (4.21)$$

Projetons l'équation (4.21) sur les trois axes :

$$\begin{bmatrix} F_{A_{31x}} \\ F_{A_{31y}} \\ F_{A_{31z}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{B_{31x}} \\ F_{B_{31y}} \\ F_{B_{31z}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{D_{34x}} \\ F_{D_{34y}} \\ F_{D_{34z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} F_{A_{31x}} + F_{B_{31x}} + F_{D_{34x}} = 0 \\ F_{A_{31y}} + F_{B_{31y}} + F_{D_{34y}} = 0 \\ F_{A_{31z}} + F_{B_{31z}} + F_{D_{34z}} = 0 \end{cases}$$

Les moments des forces agissant sur le triangle supérieur au point D sont :

$$\sum \{M_{G_3}\}_1 = \{0\}_1 \quad (4.22)$$

$$\{R_{AD}\}_1 \times \{F_{A_{31}}\}_1 + \{R_{BD}\}_1 \times \{F_{B_{31}}\}_1 = \{0\}_1 \quad (4.23)$$

L'équation vectorielle (4.23) se traduira par :

$$\begin{bmatrix} 0 & -AD_z & AD_y \\ AD_z & 0 & -AD_x \\ -AD_y & AD_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{A_{31x}} \\ F_{A_{31y}} \\ F_{A_{31z}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -BD_z & BD_y \\ BD_z & 0 & -BD_x \\ -BD_y & BD_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{B_{31x}} \\ F_{B_{31y}} \\ F_{B_{31z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -AD_z F_{A_{31y}} + AD_y F_{A_{31z}} - BD_z F_{B_{31y}} + BD_y F_{B_{31z}} = 0 \\ AD_z F_{A_{31x}} - AD_x F_{A_{31z}} + BD_z F_{B_{31x}} - BD_x F_{B_{31z}} = 0 \\ -AD_y F_{A_{31x}} + AD_x F_{A_{31y}} - BD_y F_{B_{31x}} + BD_x F_{B_{31y}} = 0 \end{cases}$$

et pour le fusil l'équation est donnée par :

$$\sum \{F_4\}_1 = \{0\}_1 \quad (4.24)$$

$$\{F_{P_{41}}\}_1 - \{F_{D_{34}}\}_1 - \{F_{G_{24}}\}_1 - f_{S_1} \{R_{JH}\}_1 = \{0\}_1 \quad (4.25)$$

L'équation (4.25) projetée sur les trois axes donne :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_{P_{41z}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_{D_{34x}} \\ F_{D_{34y}} \\ F_{D_{34z}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_{G_{24x}} \\ F_{G_{24y}} \\ F_{G_{24z}} \end{bmatrix} - f_{S_1} \begin{bmatrix} JH_x \\ JH_y \\ JH_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -F_{D_{34x}} - F_{G_{24x}} - f_{S_1} \cdot JH_x = 0 \\ -F_{D_{34y}} - F_{G_{24y}} - f_{S_1} \cdot JH_y = 0 \\ -F_{D_{34z}} - F_{G_{24z}} - f_{S_1} \cdot JH_z = -F_{P_{41z}} \end{cases}$$

Calculons les moments des forces agissant sur le fusil au point G

$$\sum \{M_4\}_1 = \{0\}_1 \quad (4.26)$$

$$\{R_{PG}\}_1 \times \{F_{P_{41}}\}_1 - \{R_{DG}\}_1 \times \{F_{D_{34}}\}_1 - \{R_{HG}\}_1 \times f_{S_1} \{R_{JH}\}_1 = \{0\}_1 \quad (4.27)$$

L'équation vectorielle (4.27) se traduit par :

$$\begin{bmatrix} 0 & -PG_z & PG_y \\ PG_z & 0 & -PG_x \\ -PG_y & PG_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_{P_{41z}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -DG_z & DG_y \\ DG_z & 0 & -DG_x \\ -DG_y & DG_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{D_{34x}} \\ F_{D_{34y}} \\ F_{D_{34z}} \end{bmatrix} - f_{S_1} \begin{bmatrix} 0 & -HG_z & HG_y \\ HG_z & 0 & -HG_x \\ -HG_y & HG_x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} JH_x \\ JH_y \\ JH_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En développant cette expression, nous obtenons trois équations scalaires :

$$\begin{cases} DG_z F_{D_{34y}} - DG_y F_{D_{34z}} - f_{S_1} [-HG_z \cdot JH_y + HG_y \cdot JH_z] = -PG_y F_{P_{41z}} \\ -DG_z F_{D_{34x}} + DG_x F_{D_{34z}} - f_{S_1} [HG_z \cdot JH_x - HG_x \cdot JH_z] = PG_x F_{P_{41z}} \\ DG_y F_{D_{34x}} - DG_x F_{D_{34y}} - f_{S_1} [-HG_y \cdot JH_x + HG_x \cdot JH_y] = 0 \end{cases}$$

La force $\{F_{E_{21}}\}_1$ agit le long de l'axe E-F qui est perpendiculaire à ce dernier dans ce modèle de suspension.

$$\{F_{E_{21}}\}_1 \cdot \{R_{EF}\}_1 = 0 \quad (4.28)$$

$$\left[F_{E_{21x}} \ F_{E_{21y}} \ F_{E_{21z}} \right] \cdot \begin{bmatrix} EF_x \\ EF_y \\ EF_z \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} F_{F_{21x}} EF_x + F_{F_{21y}} EF_y + F_{F_{21z}} EF_z = 0 \\ EF_x = 230 \times 10^{-3} \text{ m} \quad EF_y = EF_z = 0 \Rightarrow 230 \times 10^{-3} F_{F_{21x}} = 0 \Rightarrow F_{F_{21x}} = 0 \end{cases}$$

Dans ce cas, nous pouvons ignorer la composante $F_{F_{21x}}$ dans la solution de la matrice du système d'équations.

L'axe A-B du triangle supérieur n'est pas parallèle à l'axe des abscisses mais la force $\{F_{B_{31}}\}_1$ est perpendiculaire sur cet axe. Donc,

$$\{F_{B_{31}}\}_1 \cdot \{R_{AB}\}_1 = 0 \quad (4.29)$$

$$\begin{bmatrix} F_{B_{31x}} & F_{B_{31y}} & F_{B_{31z}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} AB_x \\ AB_y \\ AB_z \end{bmatrix} = 0$$

$$F_{B_{31x}} AB_x + F_{B_{31y}} AB_y + F_{B_{31z}} AB_z = 0$$

Les dix neuf équations permettent de trouver toutes les inconnues.

Nous présentons les 19 équations sous forme matricielle.

$$\begin{bmatrix} F_{A_{31x}} \\ F_{A_{31y}} \\ F_{A_{31z}} \\ F_{B_{31x}} \\ F_{B_{31y}} \\ F_{B_{31z}} \\ F_{D_{34x}} \\ F_{D_{34y}} \\ F_{D_{34z}} \\ F_{E_{21x}} \\ F_{E_{21y}} \\ F_{E_{21z}} \\ F_{F_{21y}} \\ F_{F_{21z}} \\ F_{G_{24x}} \\ F_{G_{24y}} \\ F_{G_{24z}} \\ f_{S_1} \\ f_{S_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -F_{P_{41z}} \\ -PG_y F_{P_{41z}} \\ PG_x F_{P_{41z}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La résolution du système d'équations en utilisant le logiciel Matlab permet de calculer les forces agissantes sur tous les points. On déduit :

$$\begin{aligned}\{F_{H_{54}}\}_1^T &= f_{S_1} \{R_{JH}\}_1^T = [0 \ 131.86 \ -4.63] \text{N} \\ \{F_{C_{27}}\}_1^T &= f_{S_2} \{R_{CI}\}_1^T = [238.02 \ -100.22 \ -5449.38] \text{N}\end{aligned}$$

$$f_{S_1} = -5.78 \times 10^{+2} \text{ N/m}$$

$$f_{S_2} = 12.53 \times 10^{+3} \text{ N/m}$$

Le tableau 4.2 représente les composantes des vecteurs de toutes les forces du système.

Tableau 4.2 : Composantes des vecteurs de force.

	$F_X (\text{N})$	$F_Y (\text{N})$	$F_Z (\text{N})$
$F_{A_{31}}$	-98.11	587.37	-25.63
$F_{B_{31}}$	0.78	385.09	-12.84
$F_{C_{27}}$	238.02	-100.22	-5449.38
$F_{D_{34}}$	97.33	-972.47	38.47
$F_{E_{21}}$	-140.69	-330.30	1241.28
$F_{F_{21}}$	0	-410.08	1241.94
$F_{G_{24}}$	-97.33	840.60	2966.15
$F_{H_{54}}$	0	131.86	-4.63

4.2 Étude dynamique :

Les équations globales du modèle développé sont basées sur le triangle inférieur de la suspension. Les six équations du mouvement pour le triangle inférieur seront mises en place en utilisant, les vitesses et accélérations trouvées dans les sections précédentes. Nous considérons que le triangle inférieur est isolé, son diagramme de corps libre est illustré dans la figure 4.3.

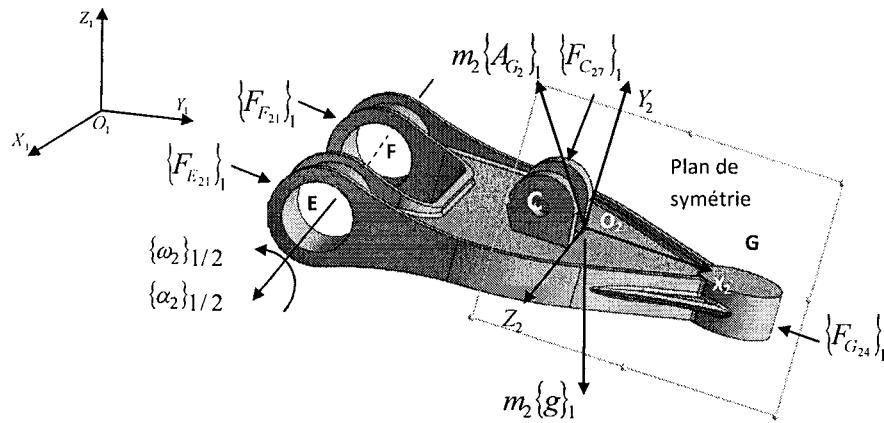


Figure 4.3: Diagramme du corps libre du triangle inférieur.

Pour cette analyse, les propriétés physiques des composantes de la suspension sont connues telle que la masse, les moments d'inertie, l'emplacement du centre de masse et l'orientation du système d'axe principal du corps.

Pour établir les équations du mouvement il faut connaître l'emplacement du centre de masse, pour tous les corps de suspension, dans le cas du triangle inférieur la position relative du centre de masse G_2 par rapport au repère d'inertie $(O_1X_1Y_1Z_1)$ est définie par le vecteur $R_{G_2O_1}$:

$$\{R_{G_2O_1}\}_1^T = [R_{G_2x} \quad R_{G_2y} \quad R_{G_2z}], \{R_{G_2O_1}\}_1^T = [7 \quad 436.66 \quad -83] \text{ mm}$$

La masse du triangle inférieur, $m_2 = 3.5 \text{ kg}$.

Le vecteur d'accélération gravitationnelle est défini par rapport au repère $(O_1X_1Y_1Z_1)$.

$$[g] = [0 \quad 0 \quad -9.81]^T \text{ m/s}^2$$

Il faut noter que l'origine des axes principaux O_2 du corps 2 est localisée au centre de masse G_2 .

La transformation de référence d'inertie O_1 à O_2 est obtenue par les trois rotations angulaires d'Euler comme indiqué dans la figure 4.4.

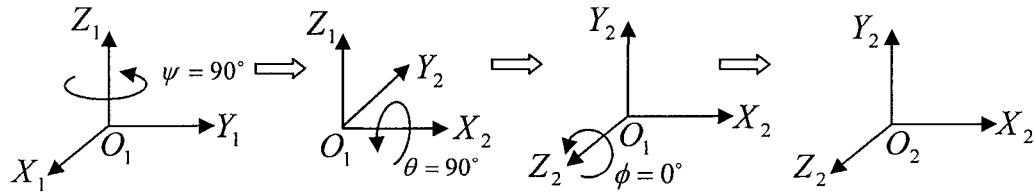


Figure 4.4 : Système d'axe principal du corps utilisant les angles d'Euler.

Sachant que les moments principaux d'inertie pour le triangle inférieur mesurée autour de ces axes principaux [31] sont:

$$I_{21} = I_{2xx} = 1.5 \times 10^{-3} \text{ kg.m}^2$$

$$I_{22} = I_{2yy} = 38 \times 10^{-3} \text{ kg.m}^2$$

$$I_{23} = I_{2zz} = 38 \times 10^{-3} \text{ kg.m}^2$$

Le plan (X_2Y_2) dans le repère $(O_2X_2Y_2Z_2)$ est pris géométriquement comme un plan de symétrie alors, tous les produits d'inertie sont nuls.

La matrice d'inertie pour le triangle inférieur $[I_2]_{2/2}$ par rapport au repère $(O_2X_2Y_2Z_2)$ est donnée par :

$$[I_2]_{2/2} = \begin{bmatrix} 1.5 \times 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 38 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 38 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \text{ kg.m}^2$$

D'après les deux analyses précédentes, nous obtenons la vitesse angulaire et linéaire

$$\{\omega_2\}_1^T = [1.62 \ 0 \ 0] \text{ rad/s}$$

$$\{\alpha_2\}_1^T = [-0.21 \ 0 \ 0] \text{ rad/s}^2$$

Avant d'écrire les équations du mouvement nous avons besoin de calculer l'accélération $\{A_{G_2}\}_1$ du centre de masse :

$$\{A_{G_2}\}_1 = \{A_{G_2E}\}_1 = \{\omega_2\}_1 \times \{V_{G_2}\}_1 + \{\alpha_2\}_1 \times \{R_{G_2E}\}_1 \quad (4.30)$$

$$\{V_{G_2}\}_1 = \{V_{G_2E}\}_1 = \{\omega_2\}_1 \times \{R_{G_2E}\}_1 \quad (4.31)$$

On remplace l'équation (4.31) dans l'expression de l'accélération, ce qui donne :

$$\{A_{G_2}\}_1 = \{A_{G_2E}\}_1 = \{\omega_2\}_1 \times \{\omega_2\}_1 \times \{R_{G_2E}\}_1 + \{\alpha_2\}_1 \times \{R_{G_2E}\}_1 \quad (4.32)$$

En développant l'équation vectorielle (4.32), nous obtenons trois composantes d'accélération :

$$\begin{bmatrix} A_{G_{2x}} \\ A_{G_{2y}} \\ A_{G_{2z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega_{z_2}(\omega_{z_2}G_2E_x - \omega_{x_2}G_2E_z) + \omega_{y_2}(-\omega_{y_2}G_2E_x + \omega_{x_2}G_2E_y) \\ \omega_{z_2}(-\omega_{z_2}G_2E_y + \omega_{y_2}G_2E_z) - \omega_{x_2}(-\omega_{y_2}G_2E_x + \omega_{x_2}G_2E_y) \\ -\omega_{y_2}(-\omega_{z_2}G_2E_y + \omega_{y_2}G_2E_z) + \omega_{x_2}(\omega_{z_2}G_2E_x - \omega_{x_2}G_2E_z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\alpha_{z_2}G_2E_y + \alpha_{y_2}G_2E_z \\ \alpha_{z_2}G_2E_x - \alpha_{x_2}G_2E_z \\ -\alpha_{y_2}G_2E_x + \alpha_{x_2}G_2E_y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{G_{2x}} \\ A_{G_{2y}} \\ A_{G_{2z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega_{z_2}(\omega_{z_2}G_2E_x - \omega_{x_2}G_2E_z) + \omega_{y_2}(-\omega_{y_2}G_2E_x + \omega_{x_2}G_2E_y) - \alpha_{z_2}G_2E_y + \alpha_{y_2}G_2E_z \\ \omega_{z_2}(-\omega_{z_2}G_2E_y + \omega_{y_2}G_2E_z) - \omega_{x_2}(-\omega_{y_2}G_2E_x + \omega_{x_2}G_2E_y) + \alpha_{z_2}G_2E_x - \alpha_{x_2}G_2E_z \\ -\omega_{y_2}(-\omega_{z_2}G_2E_y + \omega_{y_2}G_2E_z) + \omega_{x_2}(\omega_{z_2}G_2E_x - \omega_{x_2}G_2E_z) - \alpha_{y_2}G_2E_x + \alpha_{x_2}G_2E_y \end{bmatrix}$$

La résultante des forces extérieures appliquées au triangle inférieur est donnée par :

$$\sum \{F_2\}_1 = m_2 \cdot \{A_{G_2}\}_1 \quad (4.33)$$

$$\{F_{E_{21x}}\}_1 + \{F_{F_{21x}}\}_1 + \{F_{G_{24x}}\}_1 + \{F_{C_{27x}}\}_1 + m_2\{g\}_1 = m_2 \{A_{G_2}\}_1 \quad (4.34)$$

La projection de l'équation (4.34) sur les axes donne trois équations scalaires :

$$\begin{bmatrix} F_{E_{21x}} \\ F_{E_{21y}} \\ F_{E_{21z}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{F_{21x}} \\ F_{F_{21y}} \\ F_{F_{21z}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{G_{24x}} \\ F_{G_{24y}} \\ F_{G_{24z}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{C_{27x}} \\ F_{C_{27y}} \\ F_{C_{27z}} \end{bmatrix} + m_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g_z \end{bmatrix} = m_2 \begin{bmatrix} A_{G_{2x}} \\ A_{G_{2y}} \\ A_{G_{2z}} \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{E_{21x}} + F_{F_{21x}} + F_{G_{24x}} + F_{C_{27x}} = m_2 A_{G_{2x}} \\ F_{E_{21y}} + F_{F_{21y}} + F_{G_{24y}} + F_{C_{27y}} = m_2 A_{G_{2y}} \\ F_{E_{21z}} + F_{F_{21z}} + F_{G_{24z}} + F_{C_{27z}} + m_2 g_z = m_2 A_{G_{2z}} \end{array} \right.$$

Sachant que la force de l'amortisseur est représentée par $\{F_{C_2}\}_1$ qui agit le long de la ligne C-I. Le point C est fixé au triangle inférieur et le point I est fixé sur le châssis. Cette force est représentée par la formule suivante :

$$\begin{aligned} \{F_{C_2}\}_1 &= F_s \{I_{CI}\}_1 \\ F_s &= k(L - |R_{CI}|) - c V_{CI} \\ \{F_{C_2}\}_1 &= [0 \quad 0 \quad F_s] \end{aligned} \quad (4.35)$$

k : raideur du ressort; L : longueur du ressort; c : coefficient d'amortissement;

R_{CI} : déformation du ressort; V_{CI} : vitesse de translation peut être négative quand le point C et I se rapprochent l'un vers l'autre et elle est positive lors de la séparation dans le rebond. Pour les équations du moment des forces extérieures, il est commode d'exprimer les vecteurs par rapport au système de référence $(O_2 X_2 Y_2 Z_2)$ au centre de gravité du triangle inférieur. Les équations d'Euler du mouvement sous forme vectorielle s'écrivent :

$$\sum \{M_{G_2}\}_{1/2} = [I_2]_{2/2} \{\alpha_2\}_{1/2} + [\omega_2]_{1/2} [I_2]_{2/2} \{\omega_2\}_{1/2} \quad (4.36)$$

Par la suite, nous devons transformer le vecteur de la vitesse angulaire $\{\omega_2\}_1$ et le vecteur d'accélération angulaire $\{\alpha_2\}_1$ du repère O_1 au repère O_2 . Dans ce cas, nous n'avons que deux rotations la première étant de $\psi = 90^\circ$ autour de l'axe Z suivie d'une rotation de $\theta = 90^\circ$ autour de l'axe des abscisses. Ainsi, pour le vecteur de la vitesse angulaire, nous avons:

$$\begin{aligned} \{\omega_2\}_{1/2} &= \begin{bmatrix} \omega_{2x_2} \\ \omega_{2y_2} \\ \omega_{2z_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{2x_1} \\ \omega_{2y_1} \\ \omega_{2z_1} \end{bmatrix} \quad (4.37) \\ \{\omega_2\}_{1/2} &= \begin{bmatrix} \omega_{2x_2} \\ \omega_{2y_2} \\ \omega_{2z_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{2x_1} \\ \omega_{2y_1} \\ \omega_{2z_1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{\omega_2\}_{1/2} &= \begin{bmatrix} \omega_{2x_2} \\ \omega_{2y_2} \\ \omega_{2z_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{2x_1} \\ \omega_{2y_1} \\ \omega_{2z_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{2y_1} \\ \omega_{2z_1} \\ \omega_{2x_1} \end{bmatrix} \\ \{\omega_2\}_{1/2}^T &= [\omega_{2y_1} \quad \omega_{2z_1} \quad \omega_{2x_1}] \\ \{\omega_2\}_{1/2}^T &= [0 \quad 0 \quad 1.62] \text{rad/s}\end{aligned}$$

En utilisant la même méthode décrite précédemment nous trouvons le vecteur d'accélération angulaire :

$$\begin{aligned}\{\alpha_2\}_{1/2}^T &= [\alpha_{2y_1} \quad \alpha_{2z_1} \quad \alpha_{2x_1}] \\ \{\alpha_2\}_{1/2}^T &= [0 \quad 0 \quad 0.21] \text{rad/s}^2\end{aligned}$$

Les moments agissants sur le triangle inférieur par rapport au centre de masse G_2 permettent d'éliminer la force d'inertie $m_2 \{A_2\}_1$ qui agit par le centre de masse. Afin de réaliser l'équilibre du moment, nous aurons besoin aussi d'établir des nouveaux vecteurs relatifs de position $\{R_{EG_2}\}_{1/2}, \{R_{FG_2}\}_{1/2}, \{R_{GG_2}\}_{1/2}, \{R_{CG_2}\}_{1/2}$. Utilisons d'abord la référence O_1 nous avons :

$$\begin{aligned}\{R_{G_2O_1}\}_1^T &= [R_{G_2x} \quad R_{G_2y} \quad R_{G_2z}] \\ \{R_{EG_2}\}_1 &= \begin{bmatrix} EG_{2x} \\ EG_{2y} \\ EG_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_x - G_{2x} \\ E_y - G_{2y} \\ E_z - G_{2z} \end{bmatrix}, \{R_{FG_2}\}_1 = \begin{bmatrix} FG_{2x} \\ FG_{2y} \\ FG_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x - G_{2x} \\ F_y - G_{2y} \\ F_z - G_{2z} \end{bmatrix} \\ \{R_{GG_2}\}_1 &= \begin{bmatrix} GG_{2x} \\ GG_{2y} \\ GG_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_x - G_{2x} \\ G_y - G_{2y} \\ G_z - G_{2z} \end{bmatrix}, \{R_{CG_2}\}_1 = \begin{bmatrix} CG_{2x} \\ CG_{2y} \\ CG_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_x - G_{2x} \\ C_y - G_{2y} \\ C_z - G_{2z} \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{4.38}$$

Le vecteur de position $\{R_{EG_2}\}_1$ de la référence O_1 transféré à la référence O_2 s'écrit comme suit:

$$\{R_{EG_2}\}_{1/2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} EG_{2x} \\ EG_{2y} \\ EG_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} EG_{2x} \\ EG_{2y} \\ EG_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EG_{2y} \\ EG_{2z} \\ EG_{2x} \end{bmatrix}\tag{4.39}$$

En utilisant la même transformation pour les trois autres vecteurs.

$$\left\{ R_{FG_2} \right\}_{1/2} = \begin{bmatrix} FG_{2y} \\ FG_{2z} \\ FG_{2x} \end{bmatrix}, \left\{ R_{GG_2} \right\}_{1/2} = \begin{bmatrix} GG_{2y} \\ GG_{2z} \\ GG_{2x} \end{bmatrix}, \left\{ R_{CG_2} \right\}_{1/2} = \begin{bmatrix} CG_{2y} \\ CG_{2z} \\ CG_{2x} \end{bmatrix}$$

L'expression du moment des forces agissants aux points E, F et G est donnée par :

$$\sum \left\{ M_{G_2} \right\}_{1/2} = \left\{ R_{EG_2} \right\}_{1/2} \times \left\{ F_{E_{21}} \right\}_{1/2} + \left\{ R_{FG_2} \right\}_{1/2} \times \left\{ F_{F_{21}} \right\}_{1/2} + \left\{ R_{GG_2} \right\}_{1/2} \times \left\{ F_{G_{24}} \right\}_{1/2} \quad (4.40)$$

L'équation vectorielle (4.40) se traduira par :

$$\begin{aligned} \sum \left\{ M_{G_2} \right\}_{1/2} &= \begin{bmatrix} 0 & -EG_{2z} & EG_{2y} \\ EG_{2z} & 0 & -EG_{2x} \\ -EG_{2y} & EG_{2x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{E_{21}x_2} \\ F_{E_{21}y_2} \\ F_{E_{21}z_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -FG_{2z} & FG_{2y} \\ FG_{2z} & 0 & -FG_{2x} \\ -FG_{2y} & FG_{2x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{F_{21}x_2} \\ F_{F_{21}y_2} \\ F_{F_{21}z_2} \end{bmatrix} + \\ &\quad \begin{bmatrix} 0 & -GG_{2z} & GG_{2y} \\ GG_{2z} & 0 & -GG_{2x} \\ -GG_{2y} & GG_{2x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{G_{24}x_2} \\ F_{G_{24}y_2} \\ F_{G_{24}z_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -CG_{2z} & CG_{2y} \\ CG_{2z} & 0 & -CG_{2x} \\ -CG_{2y} & CG_{2x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{C_{27}x_2} \\ F_{C_{27}y_2} \\ F_{C_{27}z_2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -F_{E_{21}y}EG_{2z} + F_{E_{21}z}EG_{2y} \\ F_{E_{21}x}EG_{2z} - F_{E_{21}z}EG_{2x} \\ -F_{E_{21}x}EG_{2y} + F_{E_{21}y}EG_{2x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -F_{F_{21}y}FG_{2z} + F_{F_{21}z}FG_{2y} \\ F_{F_{21}x}FG_{2z} - F_{F_{21}z}FG_{2x} \\ -F_{F_{21}x}FG_{2y} + F_{F_{21}y}FG_{2x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -F_{G_{24}y}GG_{2z} + F_{G_{24}z}GG_{2y} \\ F_{G_{24}x}GG_{2z} - F_{G_{24}z}GG_{2x} \\ -F_{G_{24}x}GG_{2y} + F_{G_{24}y}GG_{2x} \end{bmatrix} + \\ &\quad \begin{bmatrix} -F_{C_{27}y}CG_{2z} + F_{C_{27}z}CG_{2y} \\ F_{C_{27}x}CG_{2z} - F_{C_{27}z}CG_{2x} \\ -F_{C_{27}x}CG_{2y} + F_{C_{27}y}CG_{2x} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -F_{E_{21}y}EG_{2z} + F_{E_{21}z}EG_{2y} - F_{E_{21}y}FG_{2z} + F_{E_{21}z}FG_{2y} - F_{G_{24}y}GG_{2z} + F_{G_{24}z}GG_{2y} - F_{C_{27}y}CG_{2z} + F_{C_{27}z}CG_{2y} \\ F_{E_{21}x}EG_{2z} - F_{E_{21}z}EG_{2x} + F_{E_{21}x}FG_{2z} - F_{E_{21}z}FG_{2x} + F_{G_{24}x}GG_{2z} - F_{G_{24}z}GG_{2x} + F_{C_{27}x}CG_{2z} - F_{C_{27}z}CG_{2x} \\ -F_{E_{21}x}EG_{2y} + F_{E_{21}y}EG_{2x} - F_{E_{21}x}FG_{2y} + F_{E_{21}y}FG_{2x} - F_{G_{24}x}GG_{2y} + F_{G_{24}y}GG_{2x} - F_{C_{27}x}CG_{2y} + F_{C_{27}y}CG_{2x} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Le moment résultant par rapport au centre de gravité sera:

$$\sum \left\{ M_{G_2} \right\}_{1/2} = [I_2]_{2/2} \left\{ \alpha_2 \right\}_{1/2} + [\omega_2]_{1/2} [I_2]_{2/2} \left\{ \omega_2 \right\}_{1/2} \quad (4.41)$$

$$\sum \{M_{G_2}\}_{1/2} = \begin{bmatrix} \alpha_{2x_2} I_{2xx} \\ \alpha_{2y_2} I_{2yy} \\ \alpha_{2z_2} I_{2zz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_{2z_2} \omega_{2y_2} (I_{2zz} - I_{2yy}) \\ \omega_{2z_2} \omega_{2x_2} (I_{2xx} - I_{2zz}) \\ \omega_{2x_2} \omega_{2y_2} (I_{2yy} - I_{2xx}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{2z_2} \omega_{2y_2} (I_{2zz} - I_{2yy}) + \alpha_{2x_2} I_{2xx} \\ \omega_{2z_2} \omega_{2x_2} (I_{2xx} - I_{2zz}) + \alpha_{2y_2} I_{2yy} \\ \omega_{2x_2} \omega_{2y_2} (I_{2yy} - I_{2xx}) + \alpha_{2z_2} I_{2zz} \end{bmatrix}$$

$$\sum \{M_{G_2}\}_{1/2} = \begin{bmatrix} I_{2xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{2yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{2zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{2x_2} \\ \alpha_{2y_2} \\ \alpha_{2z_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{2z_2} & \omega_{2y_2} \\ \omega_{2z_2} & 0 & -\omega_{2x_2} \\ -\omega_{2y_2} & \omega_{2x_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{2xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{2yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{2zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{2x_2} \\ \omega_{2y_2} \\ \omega_{2z_2} \end{bmatrix}$$

En égalisant les deux expressions des moments nous obtenons trois équations scalaires:

$$\left\{ \begin{array}{l} -F_{E_{21}y_2}EG_{2z} + F_{E_{21}z_2}EG_{2y} - F_{E_{21}y_2}FG_{2z} + F_{E_{21}z_2}FG_{2y} - F_{G_{24}y_2}GG_{2z} + F_{G_{24}z_2}GG_{2y} \\ = \omega_{2z_2} \omega_{2y_2} (I_{2zz} - I_{2yy}) + \alpha_{2x_2} I_{2xx} + F_{C_{27}y_2}CG_{2z} - F_{C_{27}z_2}CG_{2y} \\ F_{E_{21}x_2}EG_{2z} - F_{E_{21}z_2}EG_{2x} + F_{E_{21}x_2}FG_{2z} - F_{E_{21}z_2}FG_{2x} + F_{G_{24}x_2}GG_{2z} - F_{G_{24}z_2}GG_{2x} \\ = \omega_{2z_2} \omega_{2x_2} (I_{2xx} - I_{2zz}) + \alpha_{2y_2} I_{2yy} - F_{C_{27}x_2}CG_{2z} + F_{C_{27}z_2}CG_{2x} \\ - F_{E_{21}x_2}EG_{2y} + F_{E_{21}y_2}EG_{2x} - F_{E_{21}x_2}FG_{2y} + F_{E_{21}y_2}FG_{2x} - F_{G_{24}x_2}GG_{2y} + F_{G_{24}y_2}GG_{2x} \\ = \omega_{2x_2} \omega_{2y_2} (I_{2yy} - I_{2xx}) + \alpha_{2z_2} I_{2zz} + F_{C_{27}x_2}CG_{2y} - F_{C_{27}y_2}CG_{2x} \end{array} \right.$$

Triangle supérieur

La répartition des forces appliquées sur ce triangle est présentée par la figure 4.5.

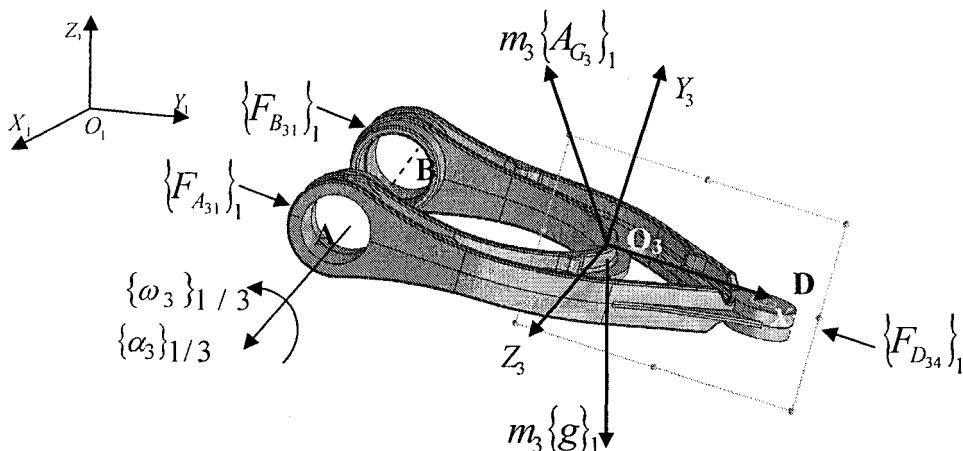


Figure 4.5 : Diagramme du corps libre du triangle supérieur.

La position relative du centre de masse G_3 par rapport au repère d'inertie $(O_1X_1Y_1Z_1)$ est définie par le vecteur $R_{G_3O_1}$:

$$\{R_{G_3O_1}\}_1^T = [R_{G_3x} \quad R_{G_3y} \quad R_{G_3z}], \{R_{G_3O_1}\}_1^T = [-12 \quad 429.66 \quad 132.33]$$

La masse du triangle $m_3 = 2.187 \text{ kg}$

Sachant que les moments principaux d'inertie pour le triangle supérieur par rapport à ces axes principaux [31] sont:

$$I_{31} = I_{3xx} = 4.071 \times 10^{-3} \text{ kg.m}^2$$

$$I_{32} = I_{3yy} = 15.218 \times 10^{-3} \text{ kg.m}^2$$

$$I_{33} = I_{3zz} = 11.52 \times 10^{-3} \text{ kg.m}^2$$

Le plan (X_3Y_3) est pris géométriquement comme un plan de symétrie alors, tous les produits d'inertie sont nuls.

La matrice d'inertie pour le triangle supérieur $[I_3]_{3/3}$ par rapport au repère $(O_3X_3Y_3Z_3)$ est donnée par :

$$[I_3]_{3/3} = \begin{bmatrix} 1.5 \times 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 38 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 38 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \text{ kg.m}^2$$

D'après les deux analyses précédentes nous avons trouvé la vitesse angulaire et linéaire

$$\{\omega_3\}_1^T = [1.86 \quad 0 \quad 0.11] \text{ rad/s}$$

$$\{\alpha_3\}_1^T = [-0.33 \quad 0 \quad -0.02] \text{ rad/s}^2$$

Avant d'écrire les équations du mouvement nous avons besoin de calculer l'accélération $\{A_{G_3}\}_1$ du centre de masse :

$$\{A_{G_3}\}_1 = \{A_{G_3A}\}_1 = \{\omega_3\}_1 \times \{V_{G_3}\}_1 + \{\alpha_3\}_1 \times \{R_{G_3A}\}_1 \quad (4.42)$$

$$\{V_{G_3}\}_1 = \{V_{G_3A}\}_1 = \{\omega_3\}_1 \times \{R_{G_3A}\}_1 \quad (4.43)$$

On remplace l'équation (4.43) dans l'expression de l'accélération, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} V_{G_{3x}} \\ V_{G_{3y}} \\ V_{G_{3z}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{z_3} & \omega_{y_3} \\ \omega_{z_3} & 0 & -\omega_{x_3} \\ -\omega_{y_3} & \omega_{x_3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_3 A_x \\ G_3 A_y \\ G_3 A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega_{z_3} G_3 A_y + \omega_{y_3} G_3 A_z \\ \omega_{z_3} G_3 A_x - \omega_{x_3} G_3 A_z \\ -\omega_{y_3} G_3 A_x + \omega_{x_3} G_3 A_y \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} A_{G_{3x}} \\ A_{G_{3y}} \\ A_{G_{3z}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{z_3} & \omega_{y_3} \\ \omega_{z_3} & 0 & -\omega_{x_3} \\ -\omega_{y_3} & \omega_{x_3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\omega_{z_3} G_3 A_y + \omega_{y_3} G_3 A_z \\ \omega_{z_3} G_3 A_x - \omega_{x_3} G_3 A_z \\ -\omega_{y_3} G_3 A_x + \omega_{x_3} G_3 A_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_{z_3} & \alpha_{y_3} \\ \alpha_{z_3} & 0 & -\alpha_{x_3} \\ -\alpha_{y_3} & \alpha_{x_3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_3 A_x \\ G_3 A_y \\ G_3 A_z \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} A_{G_{3x}} \\ A_{G_{3y}} \\ A_{G_{3z}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\omega_{z_3} (\omega_{z_3} G_3 A_x - \omega_{x_3} G_3 A_z) + \omega_{y_3} (-\omega_{y_3} G_3 A_x + \omega_{x_3} G_3 A_y) - \alpha_{z_3} G_3 A_y + \alpha_{y_3} G_3 A_z \\ \omega_{z_3} (-\omega_{z_3} G_3 A_y + \omega_{y_3} G_3 A_z) - \omega_{x_3} (-\omega_{y_3} G_3 A_x + \omega_{x_3} G_3 A_y) + \alpha_{z_3} G_3 A_x - \alpha_{x_3} G_3 A_z \\ -\omega_{y_3} (-\omega_{z_3} G_3 A_y + \omega_{y_3} G_3 A_z) + \omega_{x_3} (\omega_{z_3} G_3 A_x - \omega_{x_3} G_3 A_z) - \alpha_{y_3} G_3 A_x + \alpha_{x_3} G_3 A_y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Appliquons la deuxième loi de Newton sur le triangle supérieur:

$$\sum \{F_3\}_1 = m_3 \cdot \{A_{G_3}\}_1 \quad (4.44)$$

$$\{F_{A_{31}}\}_1 + \{F_{B_{31}}\}_1 + \{F_{D_{34}}\}_1 + m_3 \{g\}_1 = m_3 \{A_{G_3}\}_1 \quad (4.45)$$

La projection de l'équation (4.45) sur les trois axes génère trois équations scalaires :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} F_{A_{31x}} \\ F_{A_{31y}} \\ F_{A_{31z}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{B_{31x}} \\ F_{B_{31y}} \\ F_{B_{31z}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{D_{34x}} \\ F_{D_{34y}} \\ F_{D_{34z}} \end{bmatrix} + m_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g_z \end{bmatrix} &= m_3 \begin{bmatrix} A_{G_{3x}} \\ A_{G_{3y}} \\ A_{G_{3z}} \end{bmatrix} \\ \begin{cases} F_{A_{31x}} + F_{B_{31x}} + F_{D_{34x}} = m_3 A_{G_{3x}} \\ F_{A_{31y}} + F_{B_{31y}} + F_{D_{34y}} = m_3 A_{G_{3y}} \\ F_{A_{31z}} + F_{B_{31z}} + F_{D_{34z}} + m_3 g_z = m_3 A_{G_{3z}} \end{cases} \end{aligned}$$

Pour les équations de rotation, il est commode d'utiliser la référence fixe $(O_3 X_3 Y_3 Z_3)$ au centre de gravité du triangle supérieur. Les équations d'Euler du mouvement en forme vectorielle sont :

$$\sum \{M_{G_3}\}_{1/3} = [I_3]_{3/3} \{\alpha_3\}_{1/3} + [\omega_3]_{1/3} [I_3]_{3/3} \{\omega_3\}_{1/3} \quad (4.46)$$

Selon ce qui précède, nous devons transformer le vecteur de la vitesse angulaire $\{\omega_3\}_1$ et le vecteur d'accélération angulaire $\{\alpha_3\}_1$ du repère O_1 au repère O_3 pour obtenir $\{\omega_3\}_{1/3}$ et $\{\alpha_3\}_{1/3}$.

$$\{\omega_3\}_{1/3} = \begin{bmatrix} \omega_{3x_3} \\ \omega_{3y_3} \\ \omega_{3z_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{3x_1} \\ \omega_{3y_1} \\ \omega_{3z_1} \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

$$\{\omega_3\}_{1/3} = \begin{bmatrix} \omega_{3x_3} \\ \omega_{3y_3} \\ \omega_{3z_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{3x_1} \\ \omega_{3y_1} \\ \omega_{3z_1} \end{bmatrix}$$

$$\{\omega_3\}_{1/3} = \begin{bmatrix} \omega_{3x_3} \\ \omega_{3y_3} \\ \omega_{3z_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{3x_1} \\ \omega_{3y_1} \\ \omega_{3z_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{3y_1} \\ \omega_{3z_1} \\ \omega_{3x_1} \end{bmatrix}$$

$$\{\omega_3\}_{1/3}^T = [\omega_{3y_1} \quad \omega_{3z_1} \quad \omega_{3x_1}]$$

$$\{\omega_3\}_{1/3}^T = [0 \quad 0.11 \quad 1.86] \text{rad/s}$$

En ce qui concerne le vecteur d'accélération angulaire nous trouvons :

$$\{\alpha_3\}_{1/3}^T = [\alpha_{3y_1} \quad \alpha_{3z_1} \quad \alpha_{3x_1}]$$

$$\{\alpha_3\}_{1/3}^T = [0 \quad -0.02 \quad -0.33] \text{rad/s}^2$$

En utilisant la même transformation précédente pour les vecteurs relatifs de position, nous obtenons:

$$\{R_{AG_3}\}_1 = \begin{bmatrix} AG_{3x} \\ AG_{3y} \\ AG_{3z} \end{bmatrix}, \{R_{BG_3}\}_1 = \begin{bmatrix} BG_{3x} \\ BG_{3y} \\ BG_{3z} \end{bmatrix}, \{R_{DG_3}\}_1 = \begin{bmatrix} DG_{3x} \\ DG_{3y} \\ DG_{3z} \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

Les nouveaux vecteurs relatifs de position $\{R_{AG_3}\}_{1/3}, \{R_{BG_3}\}_{1/3}, \{R_{DG_3}\}_{1/3}$. Par rapport au repère O_3 sont :

$$\{R_{AG_3}\}_{1/3} = \begin{bmatrix} AG_{3y} \\ AG_{3z} \\ AG_{3x} \end{bmatrix}, \{R_{BG_3}\}_{1/3} = \begin{bmatrix} BG_{3y} \\ BG_{3z} \\ BG_{3x} \end{bmatrix}, \{R_{DG_3}\}_{1/3} = \begin{bmatrix} DG_{3y} \\ DG_{3z} \\ DG_{3x} \end{bmatrix}$$

L'expression du moment des forces agissants aux points A, B et D est donnée par :

$$\begin{aligned} \sum \{M_{G_3}\}_{1/3} &= \{R_{AG_3}\}_{1/3} \times \{F_{A_{31}z}\}_{1/3} + \{R_{BG_3}\}_{1/3} \times \{F_{B_{31}z}\}_{1/3} + \{R_{DG_3}\}_{1/3} \times \{F_{D_{34}z}\}_{1/3} \quad (4.49) \\ &= \begin{bmatrix} -F_{A_{31}y} AG_{3z} + F_{A_{31}z} AG_{3y} \\ F_{A_{31}x} AG_{3z} - F_{A_{31}z} AG_{3x} \\ -F_{A_{31}x} AG_{3y} + F_{A_{31}y} AG_{3x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -F_{B_{31}y} BG_{3z} + F_{B_{31}z} BG_{3y} \\ F_{B_{31}x} BG_{2z} - F_{B_{31}z} BG_{3x} \\ -F_{B_{31}x} BG_{3y} + F_{B_{31}y} BG_{3x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -F_{D_{34}y} DG_{3z} + F_{D_{34}z} DG_{3y} \\ F_{D_{34}x} DG_{3z} - F_{D_{34}z} DG_{3x} \\ -F_{D_{34}x} DG_{3y} + F_{D_{34}y} DG_{3x} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -F_{A_{31}y} AG_{3z} + F_{A_{31}z} AG_{3y} - F_{B_{31}y} BG_{3z} + F_{B_{31}z} BG_{3y} - F_{D_{34}y} DG_{3z} + F_{D_{34}z} DG_{3y} \\ F_{A_{31}x} AG_{3z} - F_{A_{31}z} AG_{3x} + F_{B_{31}x} BG_{2z} - F_{B_{31}z} BG_{3x} + F_{D_{34}x} DG_{3z} - F_{D_{34}z} DG_{3x} \\ -F_{A_{31}x} AG_{3y} + F_{A_{31}y} AG_{3x} - F_{B_{31}x} BG_{3y} + F_{B_{31}y} BG_{3x} - F_{D_{34}x} DG_{3y} + F_{D_{34}y} DG_{3x} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Le moment résultant par rapport au centre de gravité sera

$$\begin{aligned} \sum \{M_{G_3}\}_{1/3} &= [I_3]_{3/3} \{\alpha_3\}_{1/3} + [\omega_3]_{1/3} [I_3]_{3/3} \{\omega_3\}_{1/3} \quad (4.50) \\ \sum \{M_{G_3}\}_{1/3} &= \begin{bmatrix} I_{3xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{3yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{3zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{3x_3} \\ \alpha_{3y_3} \\ \alpha_{3z_3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{3z_3} & \omega_{3y_3} \\ \omega_{3z_3} & 0 & -\omega_{3x_3} \\ -\omega_{3y_3} & \omega_{3x_3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{3xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{3yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{3zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{3x_3} \\ \omega_{3y_3} \\ \omega_{3z_3} \end{bmatrix} \\ \sum \{M_{G_3}\}_{1/3} &= \begin{bmatrix} \omega_{3z_3} \omega_{3y_3} (I_{3zz} - I_{3yy}) + \alpha_{3x_3} I_{3xx} \\ \omega_{3z_3} \omega_{3x_3} (I_{3xx} - I_{3zz}) + \alpha_{3y_3} I_{3yy} \\ \omega_{3x_3} \omega_{3y_3} (I_{3yy} - I_{3xx}) + \alpha_{3z_3} I_{3zz} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En égalisant les deux expressions des moments nous obtenons trois équations scalaires:

$$\begin{cases} -AG_{3z}F_{A_{31}y} + AG_{3y}F_{A_{31}z} - BG_{3z}F_{B_{31}y} + BG_{3y}F_{B_{31}z} - DG_{3z}F_{D_{34}y} + DG_{3y}F_{D_{34}z} = \omega_{3z_3} \omega_{3y_3} (I_{3zz} - I_{3yy}) + \alpha_{3x_3} I_{3xx} \\ AG_{3z}F_{A_{31}x} - AG_{3x}F_{A_{31}z} + BG_{3z}F_{B_{31}x} - BG_{3x}F_{B_{31}z} + DG_{3z}F_{D_{34}x} - DG_{3x}F_{D_{34}z} = \omega_{3z_3} \omega_{3x_3} (I_{3xx} - I_{3zz}) + \alpha_{3y_3} I_{3yy} \\ -AG_{3y}F_{A_{31}x} + AG_{3x}F_{A_{31}y} - BG_{3y}F_{B_{31}x} + BG_{3x}F_{B_{31}y} - DG_{3y}F_{D_{34}x} + DG_{3x}F_{D_{34}y} = \omega_{3x_3} \omega_{3y_3} (I_{3yy} - I_{3xx}) + \alpha_{3z_3} I_{3zz} \end{cases}$$

Support de la roue : Le support de la roue est représenté par la figure 4.6.

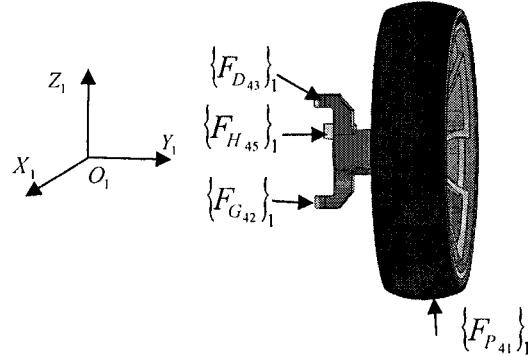


Figure 4.6 : Diagramme du corps libre du support de la roue.

La position relative du centre de masse G_4 par rapport au repère d'inertie $(O_1 X_1 Y_1 Z_1)$ est définie par le vecteur $R_{G_4 O_1}$:

$$\{R_{G_4 O_1}\}_1^T = \begin{bmatrix} R_{G_4 O_1 x} & R_{G_4 O_1 y} & R_{G_4 O_1 z} \end{bmatrix}, \{R_{G_4 O_1}\}_1^T = [-10.5 \quad 600 \quad 162] \text{ mm}$$

La masse du corps $m_4 = 11.678 \text{ kg}$

Les moments d'inertie du support, par rapport aux axes principaux sont :

$$I_{41} = I_{4xx} = 120.541 \times 10^{-3} \text{ kg.m}^2$$

$$I_{42} = I_{4yy} = 77.691 \times 10^{-3} \text{ kg.m}^2$$

$$I_{43} = I_{4zz} = 65.647 \times 10^{-3} \text{ kg.m}^2$$

Le plan $(X_4 Y_4)$ est pris géométriquement comme un plan de symétrie dont les produits d'inertie sont nuls. La matrice d'inertie pour le support $[I_4]_{4/4}$ par rapport au repère $(O_4 X_4 Y_4 Z_4)$ est donnée par :

$$[I_4]_{4/4} = \begin{bmatrix} 120.541 \times 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 77.691 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 65.647 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \text{ kg.m}^2$$

D'après les deux analyses précédentes nous avons déterminé que :

$$\{\omega_4\}_1^T = [1.3 \times 10^{-2} \quad 1.4 \quad 2.14 \times 10^{-3}] \text{ rad/s}$$

$$\{\alpha_4\}_1^T = [5.14 \times 10^{-1} \quad 6.54 \times 10^{-2} \quad -3.64 \times 10^{-1}] \text{ rad/s}^2$$

Avant d'écrire les équations du mouvement nous avons besoin de calculer l'accélération $\{A_{G_1}\}_1$ du centre de masse :

•Centre instantané de vitesse :

Nous avons besoin de déterminer le centre instantané de vitesse tel qu'illustre par la figure 4.7 et la figure 4.8.

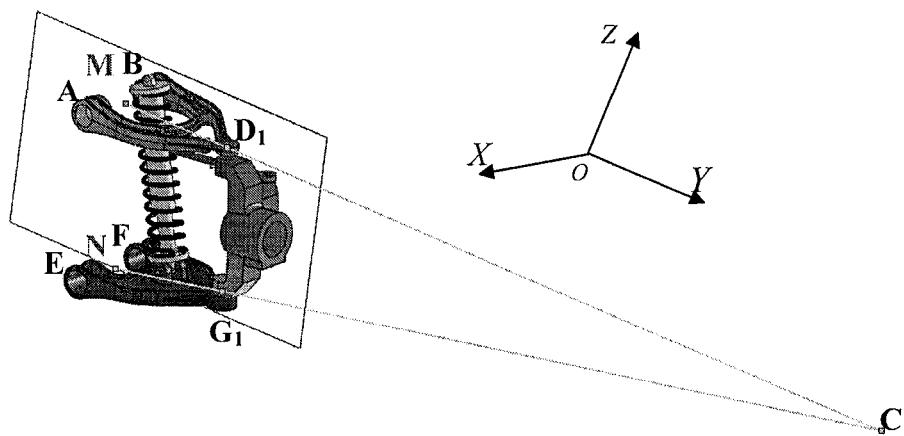


Figure 4.7: Centre instantané de vitesse.

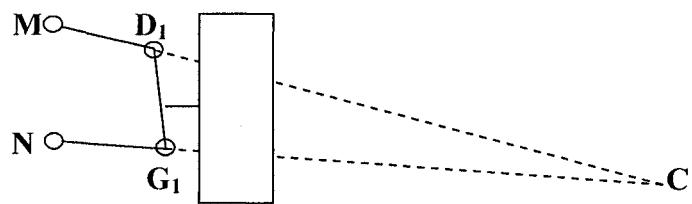


Figure 4.8 : Représentation simplifiée du centre instantané de vitesse.

Le calcul du centre instantané d'un système en 3D est complexe. Donc, une approche a été utilisée pour les calculs basés sur la représentation en 2D. Ceci nécessitera la définition d'équations algébriques qui calculent les pentes et les points d'intersection des lignes utilisées dans la construction.

La méthode utilisée pour déterminer le centre instantané d'une suspension type McPherson basée sur la construction de la figure 4.8 est déterminée par l'intersection de deux lignes (MD_1) et (NG_1) projetées le long du bras supérieur et inférieur. Le centre instantané est aussi le centre instantané de rotation pour le système complet de la suspension.

La construction graphique du plan (YZ) qui passe par le centre de la roue et les deux axes aux points de fixation des triangles à la position M et N. Les positions G_1 et D_1 sont simplement la projection de deux rotules inférieure et supérieure sur le même plan.

Donc, l'équation de la droite 1 est donnée par :

$$Z_1 = a_1 y + b_1$$

$$a_1 = \frac{D_{1z} - M_z}{D_{1y} - M_y}$$

Les coordonnées de deux points M et N sont calculées graphiquement à l'aide du logiciel SolidWorks. Calculons maintenant la constante b_1 :

$$M_z = a_1 M_y + b_1$$

$$b_1 = M_z - a_1 M_y$$

$$Z_1 = a_1(y - M_y) + M_z$$

L'équation de la droite 2 sera :

$$Z_2 = a_2 y + b_2$$

$$a_2 = \frac{G_{1z} - N_z}{G_{1y} - N_y}$$

Calculons la constante b_2 :

$$N_z = a_2 N_y + b_2$$

$$b_2 = N_z - a_2 N_y$$

$$Z_2 = a_2 (y - N_y) + N_z$$

Les coordonnées du centre instantané E_z et E_y , peuvent être établies à partir des deux équations suivantes :

$$\begin{cases} E_z = a_1 (E_y - M_y) + M_z \\ E_z = a_2 (E_y - N_y) + N_z \end{cases}$$

En égalisant les deux équations nous obtenons les coordonnées du centre instantané :

$$E_y = \frac{a_1 M_y - a_2 N_y - M_z + N_z}{a_1 - a_2}$$

$$E_z = a_1 (E_y - M_y) + M_z$$

L'accélération $\{A_{G_4}\}_1$ du centre de la masse sera :

$$\{A_{G_4}\}_1 = \{A_{G_4M}\}_1 = \{\omega_4\}_1 \times \{V_{G_4}\}_1 + \{\alpha_4\}_1 \times \{R_{G_4M}\}_1 \quad (4.51)$$

$$\{V_{G_4}\}_1 = \{V_{G_4A}\}_1 = \{\omega_4\}_1 \times \{R_{G_4M}\}_1 \quad (4.52)$$

Remplaçons l'équation (4.52) dans l'expression de l'accélération, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} V_{G_4x} \\ V_{G_4y} \\ V_{G_4z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{z_4} & \omega_{y_4} \\ \omega_{z_4} & 0 & -\omega_{x_4} \\ -\omega_{y_4} & \omega_{x_4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_4 M_x \\ G_4 M_y \\ G_4 M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega_{z_4} G_4 M_y + \omega_{y_4} G_4 M_z \\ \omega_{z_4} G_4 M_x - \omega_{x_4} G_4 M_z \\ -\omega_{y_4} G_4 M_x + \omega_{x_4} G_4 M_y \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} A_{G_4x} \\ A_{G_4y} \\ A_{G_4z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{z_4} & \omega_{y_4} \\ \omega_{z_4} & 0 & -\omega_{x_4} \\ -\omega_{y_4} & \omega_{x_4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\omega_{z_4} G_4 M_y + \omega_{y_4} G_4 M_z \\ \omega_{z_4} G_4 M_x - \omega_{x_4} G_4 M_z \\ -\omega_{y_4} G_4 M_x + \omega_{x_4} G_4 M_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_{z_4} & \alpha_{y_4} \\ \alpha_{z_4} & 0 & -\alpha_{x_4} \\ -\alpha_{y_4} & \alpha_{x_4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_4 M_x \\ G_4 M_y \\ G_4 M_z \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} A_{G_4x} \\ A_{G_4y} \\ A_{G_4z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\omega_{z_4} (\omega_{z_4} G_4 A_x - \omega_{x_4} G_4 A_z) + \omega_{y_4} (-\omega_{y_4} G_4 A_x + \omega_{x_4} G_4 A_y) - \alpha_{z_4} G_4 A_y + \alpha_{y_4} G_4 A_z \\ \omega_{z_4} (-\omega_{z_4} G_4 A_y + \omega_{y_4} G_4 A_z) - \omega_{x_4} (-\omega_{y_4} G_4 A_x + \omega_{x_4} G_4 A_y) + \alpha_{z_4} G_4 A_x - \alpha_{x_4} G_4 A_z \\ -\omega_{y_4} (-\omega_{z_4} G_4 A_y + \omega_{y_4} G_4 A_z) + \omega_{x_4} (\omega_{z_4} G_4 A_x - \omega_{x_4} G_4 A_z) - \alpha_{y_4} G_4 A_x + \alpha_{x_4} G_4 A_y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Appliquons la deuxième loi de Newton sur le support :

$$\sum \{F_4\}_1 = m_4 \cdot \{A_{G_4}\}_1 \quad (4.53)$$

$$\{F_{G_{42}}\}_1 + \{F_{D_{43}}\}_1 + \{F_{H_{45}}\}_1 + \{F_{P_{41}}\}_1 + m_4 \{g\}_1 = m_4 \{A_{G_4}\}_1 \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned} \{F_{G_{42}}\}_1 &= -\{F_{G_{24}}\}_1, \{F_{D_{43}}\}_1 = -\{F_{D_{34}}\}_1, \{F_{H_{45}}\}_{11} = -\{F_{H_{54}}\}_1 \\ &- \{F_{G_{24}}\}_1 - \{F_{D_{34}}\}_1 - \{F_{H_{54}}\}_1 + \{F_{P_{41}}\}_1 + m_4 \{g\}_1 = m_4 \{A_{G_4}\}_1 \quad (4.55) \\ &- \begin{bmatrix} F_{G_{24x}} \\ F_{G_{24y}} \\ F_{G_{24z}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_{D_{34x}} \\ F_{D_{34y}} \\ F_{D_{34z}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_{H_{54x}} \\ F_{H_{54y}} \\ F_{H_{54z}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{P_{41x}} \\ F_{P_{41y}} \\ F_{P_{41z}} \end{bmatrix} + m_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g_z \end{bmatrix} = m_4 \begin{bmatrix} A_{G_{4x}} \\ A_{G_{4y}} \\ A_{G_{4z}} \end{bmatrix} \\ &\left\{ \begin{array}{l} -F_{G_{24x}} - F_{D_{34x}} - F_{H_{54x}} + F_{P_{41x}} = m_4 A_{G_{4x}} \\ -F_{G_{24y}} - F_{D_{34y}} - F_{H_{54y}} + F_{P_{41y}} = m_4 A_{G_{4y}} \\ -F_{G_{24z}} - F_{D_{34z}} - F_{H_{54z}} + F_{P_{41z}} = m_4 (A_{G_{4z}} - g_z) \end{array} \right. \end{aligned}$$

Pour un profil de route donné, les composantes de la force appliquée au point P sont données par la relation suivante.

$$\begin{cases} F_{P_{41x}} = 0 \\ F_{P_{41y}} = 0 \\ F_{P_{41z}} = F_0 - m \cdot A_{P_z} \end{cases} \quad (4.56)$$

Avec :

F_0 : force de réaction.

$m = 30 \text{ kg}$: masse totale des composantes de la suspension.

En ce qui concerne l'accélération A_{P_z} , étudions les deux cas suivants.

• Cas : profil d'un dos d'âne.

Nous avons le profil de la route qui s'écrit sous la forme

$$z(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} H \left(1 - \cos \left(2\pi \frac{x}{L} \right) \right) & \text{si } 0 < x < L \text{ et } -B/2 < y < B/2 \\ 0 & \text{autre} \end{cases}$$

Avec la seconde dérivée du déplacement vertical $z(x, y)$ nous obtenons l'accélération au point d'entrée P ci-dessous.

$$A_{P_z} = -\frac{H}{2} (2\pi/L)^2 \sin(2\pi x/L) \times v \quad (4.57)$$

• Cas : profil de route aléatoire

Pour ce cas, le profil de la route présente une forme proche de la réalité donnée par la relation suivante:

$$X(t) = \sum_{i=1}^N \sqrt{4S_{xx}(\omega_i) \Delta \omega} \cos(\omega_i t - \phi_i)$$

Donc, la relation de l'accélération est donnée par :

$$A_{P_z} = -\sum_{i=1}^N \sqrt{4S_{xx}(\omega_i) \Delta \omega} (\omega_i)^2 \sin(\omega_i t - \phi_i) \quad (4.58)$$

Nous devons transformer le vecteur de la vitesse angulaire $\{\omega_4\}_1$ et le vecteur d'accélération angulaire $\{\alpha_4\}_1$ du repère O_1 au repère O_4 pour avoir les deux vecteurs suivants $\{\omega_4\}_{1/4}$ et $\{\alpha_4\}_{1/4}$.

$$\{\omega_4\}_{1/4}^T = [\omega_{4y_1} \quad \omega_{4z_1} \quad \omega_{4x_1}]$$

$$\{\omega_4\}_{1/4}^T = [1.4 \quad 2.14 \times 10^{-3} \quad 1.3 \times 10^{-2}] \text{ rad/s}$$

Le vecteur d'accélération angulaire est obtenu de la même manière précédente:

$$\{\alpha_4\}_{1/4}^T = [\alpha_{4y_1} \quad \alpha_{4z_1} \quad \alpha_{4x_1}]$$

$$\{\alpha_4\}_{1/4}^T = [6.54 \times 10^{-2} \quad -3.64 \times 10^{-1} \quad 5.14 \times 10^{-1}] \text{ rad/s}^2$$

Le moment résultant par rapport au centre de gravité sera :

$$\sum \{M_{G_4}\}_{1/4} = [I_4]_{4/4} \{\alpha_4\}_{1/4} + [\omega_4]_{1/4} [I_4]_{4/4} \{\omega_4\}_{1/4} \quad (4.59)$$

Utilisant la même transformation précédente pour déterminer les vecteurs relatifs de position:

$$\begin{aligned} \{R_{GG_4}\}_1 &= \begin{bmatrix} GG_{4x} \\ GG_{4y} \\ GG_{4z} \end{bmatrix}, \{R_{DG_4}\}_1 = \begin{bmatrix} DG_{4x} \\ DG_{4y} \\ DG_{4z} \end{bmatrix} \\ \{R_{HG_4}\}_1 &= \begin{bmatrix} HG_{4x} \\ HG_{4y} \\ HG_{4z} \end{bmatrix}, \{R_{PG_4}\}_1 = \begin{bmatrix} PG_{4x} \\ PG_{4y} \\ PG_{4z} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.60)$$

Les nouveaux vecteurs relatifs de position $\{R_{GG_4}\}_{1/4}, \{R_{DG_4}\}_{1/4}, \{R_{HG_4}\}_{1/4}, \{R_{PG_4}\}_{1/4}$ par rapport au repère O_4 sont :

$$\begin{aligned} \{R_{GG_4}\}_{1/4} &= \begin{bmatrix} GG_{4y} \\ GG_{4z} \\ GG_{4x} \end{bmatrix}, \{R_{DG_4}\}_{1/4} = \begin{bmatrix} DG_{4y} \\ DG_{4z} \\ DG_{4x} \end{bmatrix}, \{R_{HG_4}\}_{1/4} = \begin{bmatrix} HG_{4y} \\ HG_{4z} \\ HG_{4x} \end{bmatrix}, \{R_{PG_4}\}_{1/4} = \begin{bmatrix} PG_{4y} \\ PG_{4z} \\ PG_{4x} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

L'expression des moments des forces agissants aux points G, D ,H et P est donnée par :

$$\sum \{M_{G_4}\}_{1/4} = \{R_{GG_4}\}_{1/4} \times \{F_{G_{42}}\}_{1/4} + \{R_{DG_4}\}_{1/4} \times \{F_{D_{43}}\}_{1/4} + \{R_{HG_4}\}_{1/4} \times \{F_{H_{45}}\}_{1/4} + \{R_{PG_4}\}_{1/4} \times \{F_{P_{41}}\}_{1/4} \quad (4.61)$$

$$\sum \{M_{G_4}\}_{1/4} = -\{R_{GG_4}\}_{1/4} \times \{F_{G_{24}}\}_{1/4} - \{R_{DG_4}\}_{1/4} \times \{F_{D_{34}}\}_{1/4} - \{R_{HG_4}\}_{1/4} \times \{F_{H_{54}}\}_{1/4} + \{R_{PG_4}\}_{1/4} \times \{F_{P_{41}}\}_{1/4} \quad (4.62)$$

$$\begin{aligned} &= - \begin{bmatrix} 0 & -GG_{4z} & GG_{4y} \\ GG_{4z} & 0 & -GG_{4x} \\ -GG_{4y} & GG_{4x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{G_{24}x} \\ F_{G_{24}y} \\ F_{G_{24}z} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -DG_{4z} & DG_{4y} \\ DG_{4z} & 0 & -DG_{4x} \\ -DG_{4y} & DG_{4x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{D_{34}x_2} \\ F_{D_{34}y_2} \\ F_{D_{34}z_2} \end{bmatrix} - \\ &\quad \begin{bmatrix} 0 & -HG_{4z} & HG_{4y} \\ HG_{4z} & 0 & -HG_{4x} \\ -HG_{4y} & HG_{4x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{H_{54}x_2} \\ F_{H_{54}y_2} \\ F_{H_{54}z_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -PG_{4z} & PG_{4y} \\ PG_{4z} & 0 & -PG_{4x} \\ -PG_{4y} & PG_{4x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{P_{41}x_2} \\ F_{P_{41}y_2} \\ F_{P_{41}z_2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \begin{bmatrix} -F_{G_{24}y}GG_{4z} + F_{G_{24}z}GG_{4y} \\ F_{G_{24}x}GG_{4z} - F_{G_{24}z}GG_{4x} \\ -F_{G_{24}x}GG_{4y} + F_{G_{24}y}GG_{4x} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -F_{D_{34}y}DG_{4z} + F_{D_{34}z}DG_{4y} \\ F_{D_{34}x}DG_{4z} - F_{D_{34}z}DG_{4x} \\ -F_{D_{34}x}DG_{4y} + F_{D_{34}y}DG_{4x} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -F_{H_{54}y}HG_{4z} + F_{H_{54}z}HG_{4y} \\ F_{H_{54}x}HG_{4z} - F_{H_{54}z}HG_{4x} \\ -F_{H_{54}x}HG_{4y} + F_{H_{54}y}HG_{4x} \end{bmatrix} + \\
&\quad \begin{bmatrix} -F_{P_{41}y}PG_{4z} + F_{P_{41}z}PG_{4y} \\ F_{P_{41}x}PG_{4z} - F_{P_{41}z}PG_{4x} \\ -F_{P_{41}x}PG_{4y} + F_{P_{41}y}PG_{4x} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} DG_{4z}F_{D_{34}y} - DG_{4y}F_{D_{34}z} + GG_{4z}F_{G_{24}y} - GG_{4y}F_{G_{24}z} + HG_{4z}F_{H_{54}y} - HG_{4y}F_{H_{54}z} - PG_{4z}F_{P_{41}y} + PG_{4y}F_{P_{41}z} \\ -DG_{4z}F_{D_{34}x} + DG_{4x}F_{D_{34}z} - GG_{4z}F_{G_{24}x} + GG_{4x}F_{G_{24}z} - HG_{4z}F_{H_{54}x} + HG_{4x}F_{H_{54}z} + PG_{4z}F_{P_{41}x} - PG_{4x}F_{P_{41}z} \\ DG_{4y}F_{D_{34}x} - DG_{4x}F_{D_{34}y} + GG_{4y}F_{G_{24}x} - GG_{4x}F_{G_{24}y} + HG_{4y}F_{H_{54}x} - HG_{4x}F_{H_{54}y} - PG_{4y}F_{P_{41}x} + PG_{4x}F_{P_{41}y} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Le moment résultant par rapport au centre de gravité sera :

$$\sum \{M_{G_4}\}_{1/4} = [I_4]_{4/4} \{\alpha_4\}_{1/4} + [\omega_4]_{4/4} [I_3]_{4/4} \{\omega_4\}_{1/4} \quad (4.63)$$

$$\begin{aligned}
\sum \{M_{G_4}\}_{1/4} &= \begin{bmatrix} I_{4xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{4yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{4zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{4x_4} \\ \alpha_{4y_4} \\ \alpha_{4z_4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{4z_4} & \omega_{4y_4} \\ \omega_{4z_4} & 0 & -\omega_{4x_4} \\ -\omega_{4y_4} & \omega_{4x_4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{4xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{4yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{4zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{4x_4} \\ \omega_{4y_4} \\ \omega_{4z_4} \end{bmatrix} \\
\sum \{M_{G_4}\}_{1/4} &= \begin{bmatrix} \omega_{4z_4} \omega_{4y_4} (I_{4zz} - I_{4yy}) + \alpha_{4x_4} I_{4xx} \\ \omega_{4z_4} \omega_{4x_4} (I_{4xx} - I_{4zz}) + \alpha_{4y_4} I_{4yy} \\ \omega_{4x_4} \omega_{4y_4} (I_{4yy} - I_{4xx}) + \alpha_{4z_4} I_{4zz} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

En égalisant les deux expressions des moments nous obtenons trois équations scalaires:

$$\left\{
\begin{aligned}
&DG_{4z}F_{D_{34}y} - DG_{4y}F_{D_{34}z} + GG_{4z}F_{G_{24}y} - GG_{4y}F_{G_{24}z} + HG_{4z}F_{H_{54}y} - HG_{4y}F_{H_{54}z} \\
&= \omega_{4z_4} \omega_{4y_4} (I_{4zz} - I_{4yy}) + \alpha_{4x_4} I_{4xx} + PG_{4z}F_{P_{41}y} - PG_{4y}F_{P_{41}z} \\
&- DG_{4z}F_{D_{34}x} + DG_{4x}F_{D_{34}z} - GG_{4z}F_{G_{24}x} + GG_{4x}F_{G_{24}z} - HG_{4z}F_{H_{54}x} + HG_{4x}F_{H_{54}z} \\
&= \omega_{4z_4} \omega_{4x_4} (I_{4xx} - I_{4zz}) + \alpha_{4y_4} I_{4yy} - PG_{4z}F_{P_{41}x} + PG_{4x}F_{P_{41}z} \\
&DG_{4y}F_{D_{41}x} - DG_{4x}F_{D_{41}y} + GG_{4y}F_{G_{42}x} - GG_{4x}F_{G_{42}y} + HG_{4y}F_{H_{54}x} - HG_{4x}F_{H_{54}y} \\
&= \omega_{4x_4} \omega_{4y_4} (I_{4yy} - I_{4xx}) + \alpha_{4z_4} I_{4zz} + PG_{4y}F_{P_{41}x} - PG_{4x}F_{P_{41}y}
\end{aligned}
\right.$$

• Bras de direction

La figure 4.9 montre le diagramme du corps libre pour une analyse statique et dynamique de la tige. Pour l'analyse statique, nous considérons que les forces de réaction aux points **J** et **H** agissant le long de l'axe de la tige. Nous supposons que l'effet de la gravité est négligeable. Pour l'analyse dynamique, les forces d'inertie ne permettent pas une telle hypothèse, et qu'un ensemble de six équations du mouvement pour le corps 5 est nécessaire pour la solution.

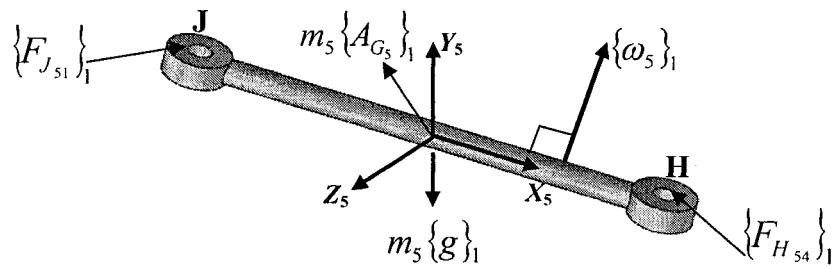


Figure 4.9 : Diagrammes de corps libres de la tige.

Dans le cas de la tige, la position relative du centre de masse G_5 par rapport au repère d'inertie $(O_1 X_1 Y_1 Z_1)$ est définie par le vecteur $R_{G_5 O_1}$:

$$\{R_{G_5 O_1}\}_1^T = [R_{G_5 x} \quad R_{G_5 y} \quad R_{G_5 z}], \{R_{G_5 O_1}\}_1^T = [-156 \quad 431 \quad 182] \text{ mm}$$

La masse de la tige $m_5 = 0.575 \text{ kg}$

Les moments d'inertie par rapport aux axes principaux sont considérés comme suit:

$$I_{51} = I_{5xx} = 0.023 \times 10^{-3} \text{ kg.m}^2$$

$$I_{52} = I_{5yy} = 3.876 \times 10^{-3} \text{ kg.m}^2$$

$$I_{53} = I_{5zz} = 3.8768 \times 10^{-3} \text{ kg.m}^2$$

Le plan $(X_5 Y_5)$ est pris géométriquement comme un plan de symétrie dont les produits d'inertie sont nuls.

La matrice d'inertie pour la tige $[I_5]_{5/5}$ exprimée par rapport au repère $(O_5X_5Y_5Z_5)$ est donnée par :

$$[I_5]_{5/5} = \begin{bmatrix} 0.023 \times 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 3.876 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 3.8768 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \text{kg.m}^2$$

D'après les deux analyses précédentes nous avons obtenu :

$$\{\omega_5\}_1^T = [1.87 \quad 5.1 \times 10^{-3} \quad 14.63 \times 10^{-2}] \text{rad/s}$$

$$\{\alpha_5\}_1^T = [-4.09 \times 10^{-1} \quad 1.13 \times 10^{-3} \quad 3.22 \times 10^{-3}] \text{rad/s}^2$$

Avant d'écrire les équations du mouvement nous avons besoin de calculer l'accélération $\{A_{G_5}\}_1$ du centre de masse :

$$\{A_{G_5}\}_1 = \{A_{G_5J}\}_1 = \{\omega_5\}_1 \times \{V_{G_5}\}_1 + \{\alpha_5\}_1 \times \{R_{G_5J}\}_1 \quad (4.64)$$

$$\{V_{G_5}\}_1 = \{V_{G_5J}\}_1 = \{\omega_5\}_1 \times \{R_{G_5J}\}_1 \quad (4.65)$$

Remplaçons l'équation (4.65) dans l'expression de l'accélération, ce qui donne :

$$\begin{bmatrix} A_{G_{5x}} \\ A_{G_{5y}} \\ A_{G_{5z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega_{z_5}(\omega_{z_5}G_5J_x - \omega_{x_5}G_5J_z) + \omega_{y_5}(-\omega_{y_5}G_5J_x + \omega_{x_5}G_5J_y) - \alpha_{z_5}G_5J_y + \alpha_{y_5}G_5J_z \\ \omega_{z_5}(-\omega_{z_5}G_5J_y + \omega_{y_5}G_5J_z) - \omega_{x_5}(-\omega_{y_5}G_5J_x + \omega_{x_5}G_5J_y) + \alpha_{z_5}G_5J_x - \alpha_{x_5}G_5J_z \\ -\omega_{y_5}(-\omega_{z_5}G_5J_y + \omega_{y_5}G_5J_z) + \omega_{x_5}(\omega_{z_5}G_5J_x - \omega_{x_5}G_5J_z) - \alpha_{y_5}G_5J_x + \alpha_{x_5}G_5J_y \end{bmatrix}$$

Pour calculer les forces, appliquons la deuxième loi de Newton sur le corps 5:

$$\sum \{F_5\}_1 = m_5 \cdot \{A_{G_5}\}_1 \quad (4.66)$$

$$\{F_{J_{51x}}\}_1 + \{F_{H_{51x}}\}_1 + m_5 \{g\}_1 = m_5 \{A_{G_5}\}_1 \quad (4.67)$$

$$\begin{cases} F_{J_{51x}} + F_{H_{51x}} = m_5 A_{G_{5x}} \\ F_{J_{51y}} + F_{H_{51y}} = m_5 A_{G_{5y}} \\ F_{J_{51z}} + F_{H_{51z}} + m_5 g_z = m_5 A_{G_{5z}} \end{cases}$$

Nous devons transformer le vecteur de la vitesse angulaire $\{\omega_5\}_1$ et le vecteur d'accélération angulaire $\{\alpha_5\}_1$ du repère O_1 au repère O_5 pour avoir les deux vecteurs suivant $\{\omega_5\}_{1/5}$ et $\{\alpha_5\}_{1/5}$.

$$\begin{aligned}\{\omega_5\}_{1/5}^T &= \begin{bmatrix} \omega_{2y_1} & \omega_{2z_1} & \omega_{2x_1} \end{bmatrix} \\ \{\omega_5\}_{1/5}^T &= [5.1 \times 10^{-3} \quad 14.63 \times 10^{-2} \quad 1.87] \text{ rad/s}\end{aligned}$$

Le vecteur d'accélération angulaire est obtenu de la même manière :

$$\begin{aligned}\{\alpha_5\}_{1/5}^T &= \begin{bmatrix} \alpha_{5y_1} & \alpha_{5z_1} & \alpha_{5x_1} \end{bmatrix} \\ \{\alpha_5\}_{1/5}^T &= [1.13 \times 10^{-3} \quad 3.22 \times 10^{-3} \quad -4.09 \times 10^{-1}] \text{ rad/s}^2\end{aligned}$$

Le moment résultant par rapport au centre de gravité sera :

$$\sum \{M_{G_5}\}_{1/5} = [I_5]_{5/5} \{\alpha_5\}_{1/5} + [\omega_5]_{1/5} [I_5]_{5/5} \{\omega_5\}_{1/5} \quad (4.68)$$

Le vecteur du centre de masse par rapport au repère O_1 est:

$$\{R_{G_5 O_1}\}_1^T = \begin{bmatrix} R_{G_5 x} & R_{G_5 y} & R_{G_5 z} \end{bmatrix}$$

En utilisant la même transformation précédente pour les vecteurs de position relatifs suivants:

$$\{R_{JG_5}\}_1 = \begin{bmatrix} JG_{5x} \\ JG_{5y} \\ JG_{5z} \end{bmatrix}, \{R_{HG_5}\}_1 = \begin{bmatrix} HG_{5x} \\ HG_{5y} \\ HG_{5z} \end{bmatrix}$$

Les nouveaux vecteurs relatifs de position $\{R_{JG_5}\}_1, \{R_{HG_5}\}_1$ par rapport au repère O_5 sont :

$$\{R_{JG_5}\}_{1/5} = \begin{bmatrix} JG_{5y} \\ JG_{5z} \\ JG_{5x} \end{bmatrix}, \{R_{HG_5}\}_{1/5} = \begin{bmatrix} HG_{5y} \\ HG_{5z} \\ HG_{5x} \end{bmatrix}$$

L'expression du moment des forces agissants aux points J et H est donnée par:

$$\sum \{M_{G_5}\}_{1/5} = \{R_{JG_5}\}_{1/5} \times \{F_{J_{51}}\}_{1/5} + \{R_{HG_5}\}_{1/5} \times \{F_{H_{54}}\}_{1/5} \quad (4.69)$$

$$\begin{aligned}&= \begin{bmatrix} -F_{H_{54}y} HG_{5z} + F_{H_{54}z} HG_{5y} - F_{J_{51}y} JG_{5z} + F_{J_{51}z} JG_{5y} \\ F_{H_{54}x} HG_{5z} - F_{H_{54}z} HG_{5x} + F_{J_{51}x} JG_{5z} - F_{J_{51}z} JG_{5x} \\ -F_{H_{54}x} HG_{5y} + F_{H_{54}y} HG_{5x} - F_{J_{51}x} JG_{5y} + F_{J_{51}y} JG_{5x} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Le moment résultant par rapport au centre de gravité sera :

$$\sum \{M_{G_5}\}_{1/5} = [I_5]_{5/5} \{\alpha_5\}_{1/5} + [\omega_5]_{1/5} [I_5]_{5/5} \{\omega_5\}_{1/5} \quad (4.70)$$

$$\sum \{M_{G_5}\}_{1/5} = \begin{bmatrix} I_{5xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{5yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{5zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{5x_5} \\ \alpha_{5y_5} \\ \alpha_{5z_5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{5z_5} & \omega_{5y_5} \\ \omega_{5z_5} & 0 & -\omega_{5x_5} \\ -\omega_{5y_5} & \omega_{5x_5} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{5xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{5yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{5zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{5x_5} \\ \omega_{5y_5} \\ \omega_{5z_5} \end{bmatrix}$$

$$\sum \{M_{G_5}\}_{1/5} = \begin{bmatrix} \omega_{5z_5} \omega_{5y_5} (I_{5zz} - I_{5yy}) + \alpha_{5x_5} I_{5xx} \\ \omega_{5z_5} \omega_{5x_5} (I_{5xx} - I_{5zz}) + \alpha_{5y_5} I_{5yy} \\ \omega_{5x_5} \omega_{5y_5} (I_{5yy} - I_{5xx}) + \alpha_{5z_5} I_{5zz} \end{bmatrix}$$

En égalisant les deux expressions des moments, nous obtenons trois équations scalaires:

$$\begin{cases} -JG_{5z}F_{J_{51}y} + JG_{5y}F_{J_{51}z} - HG_{5z}F_{H_{54}y} + HG_{5y}F_{H_{54}z} = \omega_{5z_5} \omega_{5y_5} (I_{5zz} - I_{5yy}) + \alpha_{5x_5} I_{5xx} \\ JG_{5z}F_{J_{51}x} - JG_{5x}F_{J_{51}z} + HG_{5z}F_{H_{54}x} - HG_{5x}F_{H_{54}z} = \omega_{5z_5} \omega_{5x_5} (I_{5xx} - I_{5zz}) + \alpha_{5y_5} I_{5yy} \\ -JG_{5y}F_{J_{51}x} + JG_{5x}F_{J_{51}y} - HG_{5y}F_{H_{54}x} + HG_{5x}F_{H_{54}y} = \omega_{5x_5} \omega_{5y_5} (I_{5yy} - I_{5xx}) + \alpha_{5z_5} I_{5zz} \end{cases}$$

Pour le système de suspension au complet, il faut calculer les 25 forces dynamiques suivantes:

$$F_{A_{31x}}, F_{A_{31y}}, F_{A_{31z}}, F_{B_{31x}}, F_{B_{31y}}, F_{B_{31z}}, F_{D_{43x}}, F_{D_{43y}}, F_{D_{43z}}, F_{E_{21x}}, F_{E_{21y}}, F_{E_{21z}}, F_{F_{21x}}, F_{F_{21y}}, F_{F_{21z}}, \\ F_{G_{24x}}, F_{G_{24y}}, F_{G_{24z}}, F_{H_{54x}}, F_{H_{54y}}, F_{H_{54z}}, F_{J_{51x}}, F_{J_{51y}}, F_{J_{51z}}, F_S$$

En résumé, les équations globales du modèle sont

Triangle supérieur

$$\begin{cases} F_{A_{31x}} + F_{B_{31x}} + F_{D_{34x}} = m_3 A_{G_{3x}} \\ F_{A_{31y}} + F_{B_{31y}} + F_{D_{34y}} = m_3 A_{G_{3y}} \\ F_{A_{31z}} + F_{B_{31z}} + F_{D_{34z}} = m_3 (A_{G_{3z}} - g_z) \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -AG_{3z}F_{A_{31}y} + AG_{3y}F_{A_{31}z} - BG_{3z}F_{B_{31}y} + BG_{3y}F_{B_{31}z} - DG_{3z}F_{D_{34}y} + DG_{3y}F_{D_{34}z} \\ = \omega_{3z}\omega_{3y}(I_{3zz} - I_{3yy}) + \alpha_{3x_3}I_{3xx} \\ \\ AG_{3z}F_{A_{31}x} - AG_{3x}F_{A_{31}z} + BG_{3z}F_{B_{31}x} - BG_{3x}F_{B_{31}z} + DG_{3z}F_{D_{34}x} - DG_{3x}F_{D_{34}z} \\ = \omega_{3z}\omega_{3x}(I_{3xx} - I_{3zz}) + \alpha_{3y_3}I_{3yy} \\ \\ -AG_{3y}F_{A_{31}x} + AG_{3x}F_{A_{31}y} - BG_{3y}F_{B_{31}x} + BG_{3x}F_{B_{31}y} - DG_{3y}F_{D_{34}x} + DG_{3x}F_{D_{34}y} \\ = \omega_{3x}\omega_{3y}(I_{3yy} - I_{3xx}) + \alpha_{3z_3}I_{3zz} \end{array} \right.$$

Support de la roue :

$$\left\{ \begin{array}{l} -F_{G_{24}x} - F_{D_{34}x} - F_{H_{54}x} = m_4 A_{G_{4x}} - F_{P_{41}x} \\ -F_{G_{24}y} - F_{D_{34}y} - F_{H_{54}y} = m_4 A_{G_{4y}} - F_{P_{41}y} \\ -F_{G_{24}z} - F_{D_{34}z} - F_{H_{54}z} = m_4(A_{G_{4z}} - g_z) - F_{P_{41}z} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} DG_{4z}F_{D_{34}y} - DG_{4y}F_{D_{34}z} + GG_{4z}F_{G_{24}y} - GG_{4y}F_{G_{24}z} + HG_{4z}F_{H_{54}y} - HG_{4y}F_{H_{54}z} \\ = \omega_{4z_4}\omega_{4y_4}(I_{4zz} - I_{4yy}) + \alpha_{4x_4}I_{4xx} + PG_{4z}F_{P_{41}y} - PG_{4y}F_{P_{41}z} \\ \\ -DG_{4z}F_{D_{34}x} + DG_{4x}F_{D_{34}z} - GG_{4z}F_{G_{24}x} + GG_{4x}F_{G_{24}z} - HG_{4z}F_{H_{54}x} + HG_{4x}F_{H_{54}z} \\ = \omega_{4z_4}\omega_{4x_4}(I_{4xx} - I_{4zz}) + \alpha_{4y_4}I_{4yy} - PG_{4z}F_{P_{41}x} + PG_{4x}F_{P_{41}z} \\ \\ DG_{4y}F_{D_{43}x} - DG_{4x}F_{D_{43}y} + GG_{4y}F_{G_{42}x} - GG_{4x}F_{G_{42}y} + HG_{4y}F_{H_{54}x} - HG_{4x}F_{H_{54}y} \\ = \omega_{4x_4}\omega_{4y_4}(I_{4yy} - I_{4xx}) + \alpha_{4z_4}I_{4zz} + PG_{4y}F_{P_{41}x} - PG_{4x}F_{P_{41}y} \end{array} \right.$$

Bras de direction :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{H_{51}x} + F_{J_{51}x} = m_5 A_{G_{5x}} \\ F_{H_{51}y} + F_{J_{51}y} = m_5 A_{G_{5y}} \\ F_{H_{51}z} + F_{J_{51}z} = m_5(A_{G_{5z}} - g_z) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -HG_{5z}F_{H_{54}y} + HG_{5y}F_{H_{54}z} - JG_{5z}F_{J_{51}y} + JG_{5y}F_{J_{51}z} = \omega_{5z}\omega_{5y}(I_{5zz} - I_{5yy}) + \alpha_{5x_5}I_{5xx} \\ HG_{5z}F_{H_{54}x} - HG_{5x}F_{H_{54}z} + JG_{5z}F_{J_{51}x} - JG_{5x}F_{J_{51}z} = \omega_{5z}\omega_{5x}(I_{5xx} - I_{5zz}) + \alpha_{5y_5}I_{5yy} \\ -HG_{5y}F_{H_{54}x} + HG_{5x}F_{H_{54}y} - JG_{5y}F_{J_{51}x} + JG_{5x}F_{J_{51}y} = \omega_{5x}\omega_{5y}(I_{5yy} - I_{5xx}) + \alpha_{5z_5}I_{5zz} \end{array} \right.$$

Force appliquée par l'amortisseur :

$$F_s = k(L - |R_{CI}|) - c VR_{CI}$$

$$\begin{bmatrix}
F_{A_{31}x} \\
F_{A_{31}y} \\
F_{A_{31}z} \\
F_{B_{31}x} \\
F_{B_{31}y} \\
F_{B_{31}z} \\
F_{D_{34}x} \\
F_{D_{34}y} \\
F_{D_{34}z} \\
F_{E_{21}x} \\
F_{E_{21}y} \\
F_{E_{21}z} \\
F_{F_{21}x} \\
F_{F_{21}y} \\
F_{F_{21}z} \\
F_{G_{24}x} \\
F_{G_{24}y} \\
F_{G_{24}z} \\
F_{H_{54}x} \\
F_{H_{54}y} \\
F_{H_{54}z} \\
F_{J_{51}x} \\
F_{J_{51}y} \\
F_{J_{51}z}
\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
m_2 A_{G_{2x}} - F_{C_{27}x} \\
m_2 A_{G_{2y}} - F_{C_{27}y} \\
m_2 (A_{G_{2z}} - g_z) - F_{C_{27}z} \\
\omega_{2z_2} \omega_{2y_2} (I_{2zz} - I_{2yy}) + \alpha_{2x_2} I_{2xx} + CG_{2z} F_{C_{27}y_2} - CG_{2y} F_{C_{27}z_2} \\
\omega_{2z_2} \omega_{2x_2} (I_{2xx} - I_{2zz}) + \alpha_{2y_2} I_{2yy} - CG_{2z} F_{C_{27}x_2} + CG_{2x} F_{C_{27}z_2} \\
\omega_{2x_2} \omega_{2y_2} (I_{2yy} - I_{2xx}) + \alpha_{2z_2} I_{2zz} + CG_{2y} F_{C_{27}x_2} - CG_{2x} F_{C_{27}y_2} \\
m_3 A_{G_{3x}} \\
m_3 A_{G_{3y}} \\
m_3 (A_{G_{3z}} - g_z) \\
\omega_{3z} \omega_{3y} (I_{3zz} - I_{3yy}) + \alpha_{3x_3} I_{3xx} \\
\omega_{3z} \omega_{3x} (I_{3xx} - I_{3zz}) + \alpha_{3y_3} I_{3yy} \\
\omega_{3x} \omega_{3y} (I_{3yy} - I_{3xx}) + \alpha_{3z_3} I_{3zz} \\
m_4 A_{G_{4x}} - F_{P_{41}x} \\
m_4 A_{G_{4y}} - F_{P_{41}y} \\
m_4 (A_{G_{4z}} - g_z) - F_{P_{41}z} \\
\omega_{4z} \omega_{4y} (I_{4zz} - I_{4yy}) + \alpha_{4x_4} I_{4xx} + PG_{4z} F_{P_{41}y} - PG_{4y} F_{P_{41}z} \\
\omega_{4z} \omega_{4x} (I_{4xx} - I_{4zz}) + \alpha_{4y_4} I_{4yy} - PG_{4z} F_{P_{41}x} + PG_{4x} F_{P_{41}z} \\
\omega_{4x} \omega_{4y} (I_{4yy} - I_{4xx}) + \alpha_{4z_4} I_{4zz} + PG_{4y} F_{P_{41}x} - PG_{4x} F_{P_{41}y} \\
m_5 A_{G_{5x}} \\
m_5 A_{G_{5y}} \\
m_5 (A_{G_{5z}} - g_z) \\
\omega_{5z} \omega_{5y} (I_{5zz} - I_{5yy}) + \alpha_{5x_5} I_{5xx} \\
\omega_{5z} \omega_{5x} (I_{5xx} - I_{5zz}) + \alpha_{5y_5} I_{5yy} \\
\omega_{5x} \omega_{5y} (I_{5yy} - I_{5xx}) + \alpha_{5z_5} I_{5zz}
\end{bmatrix}$$

Chapitre 5

Simulation et validation du modèle développé

Le modèle dynamique développé précédemment nous permet d'évaluer la distribution des forces appliquées sur tous les éléments d'un quart de véhicule [34]. Cependant, dans notre projet, nous nous intéressons à certains points d'intérêt particulier. Pour ces points, nous allons calculer en premier lieu, la distribution des forces appliquées en fonctions de leurs coordonnées. En deuxième lieu, nous analysons la relation de couplage non linéaire, entre la vitesse, l'accélération et les différentes forces critiques.

5.1 Calcul des forces dynamiques

En utilisant le modèle développé dans le chapitre précédent, le tableau 5.1 illustre les forces des points d'intérêts pour la conception des pièces de suspension en aluminium en particulier, les valeurs en gras.

Tableau 5.1 : Composantes des différentes forces selon l'axe Z.

X1	Z1	F_P41z	F_A31z	F_B31z	F_D34z	F_E21z	F_F21z	F_G24z	F_H54z	F_J51z	F_S
0	-0.265	1657.2	754.07	760.4	-1493	-1353.5	-1353.5	3035.6	0.1743	5.4014	-294.3
0.02	-0.2646	1742.8	790.78	797.43	-1566.9	-923.9	-923.9	3193.3	-0.22773	5.7186	-13113
0.04	-0.26346	1988.8	895.56	903.09	-1777.8	-701.23	-701.23	3645.5	-1.2731	6.5579	-22092
0.06	-0.26171	2363.7	1053.3	1062.2	-2095	-712.95	-712.95	4332.8	-2.5786	7.6314	-2873.5
0.08	-0.25959	2819.8	1242.1	1252.5	-2474.4	-956.57	-956.57	5165.6	-3.5981	8.6025	-3219.3
0.1	-0.25736	3298.8	1436.6	1448.7	-2865	-1400.4	-1400.4	6036.5	-4.32	9.2266	-3202.5
0.12	-0.25531	3739.7	1612.2	1625.8	-3217.5	-1987.9	-1987.9	6934.6	-4.3907	9.4427	-2825.3
0.14	-0.25369	4086.4	1748	1762.7	-3489.7	-2645	-2645	7459.7	-4.1087	9.3713	-2135.8
0.16	-0.25273	4294.4	1828.5	1843.9	-3551.2	-3288.8	-3288.8	7833.8	-3.7967	9.2265	-1222
0.18	-0.25253	4337.4	1845.1	1860.6	-3684.3	-3580	-3580	7911.1	-3.7189	9.187	-716.75
0.2	-0.25312	4209.8	1795.9	1811	-3585.7	-2973.8	-2973.8	7681.8	-3.9365	9.2046	-170.02
0.22	-0.25443	3928	1686.2	1700.4	-3365.8	-2312.8	-2312.8	7174.3	-4.2744	9.4302	-2514.9
0.24	-0.25629	3527.8	1528.2	1541.1	-3048.9	-1680.5	-1680.5	6451.3	-4.4167	9.3817	-3057
0.26	-0.25847	3060.2	1340.2	1351.5	-2671.5	-1156.5	-1156.5	5603.3	-4.0813	8.9665	-3257.2
0.28	-0.26068	2585.1	1145.4	1155	-2280.1	-807.11	-807.11	4737.5	-3.1863	8.1487	-3090
0.3	-0.26265	2162.8	969.07	977.23	-1925.6	-677.23	-677.23	3964.8	-1.9222	7.087	-2576.7
0.32	-0.26412	1847.3	835.4	842.43	-1656.7	-784.29	-784.29	3385.5	-0.68995	6.0881	-1782.9

Le spectre des forces en fonction du déplacement illustré par la figure 5.1 et la figure 5.2 met en évidence l'effet des sollicitations dynamiques modélisées par le profil d'un dos d'âne illustré dans la section «3.3» sur un quart de véhicule.

Nous remarquons que la valeur maximale durant la phase de compression est concentrée au point G illustré par une ligne continue.

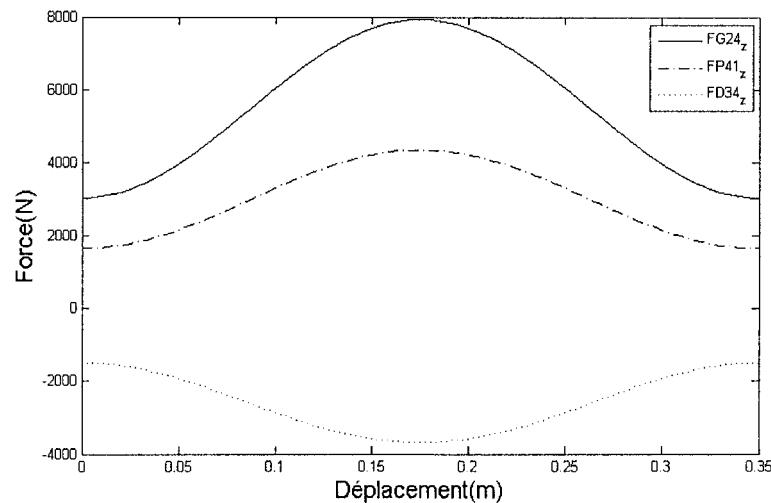


Figure 5.1: Spectre des forces en fonction du déplacement selon l'axe x.

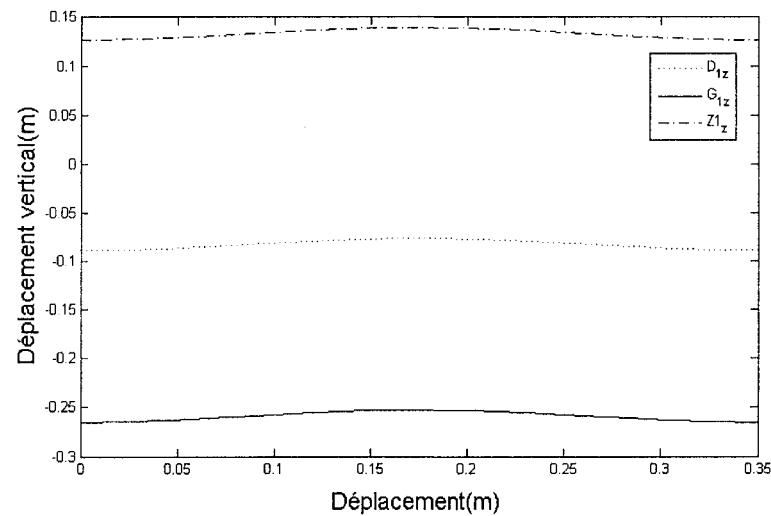


Figure 5.2: Déplacement vertical des points G et D selon l'axe x.

Nous appliquons le modèle développé sur différents profils de route aléatoire et à l'aide du programme Matlab nous obtenons les graphes suivants :

Pour un type de route caractérisé par son coefficient de rugosité $S_{yy_0} = 10^{-6}$, les réponses des points P, G et D en termes de déplacements, vitesses, accélérations et forces sont représentées par les figures 5.3 à 5.8 respectivement.

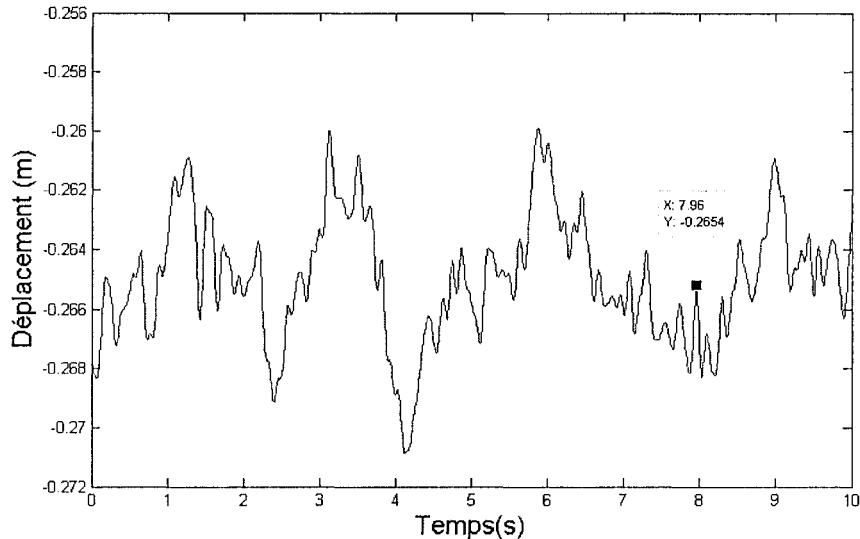


Figure 5.3: Profil de la piste en fonction du temps.

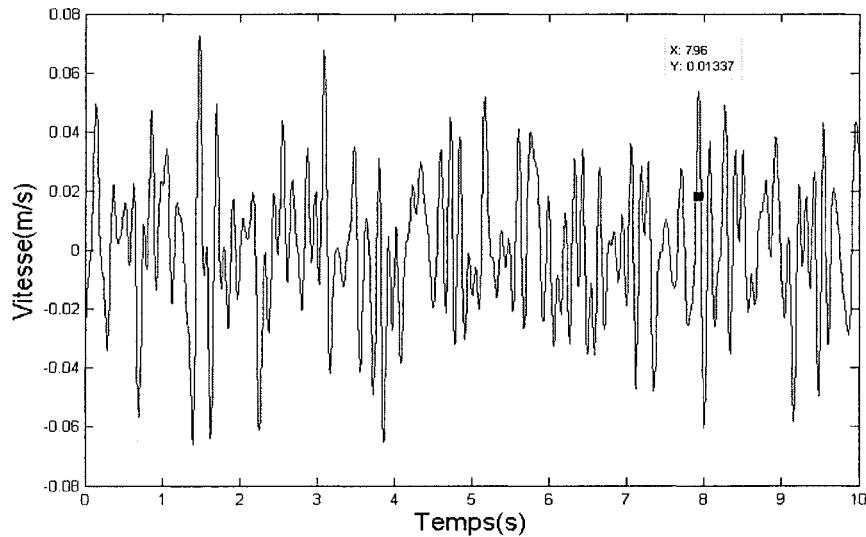


Figure 5.4 : Vitesse en fonction du temps.

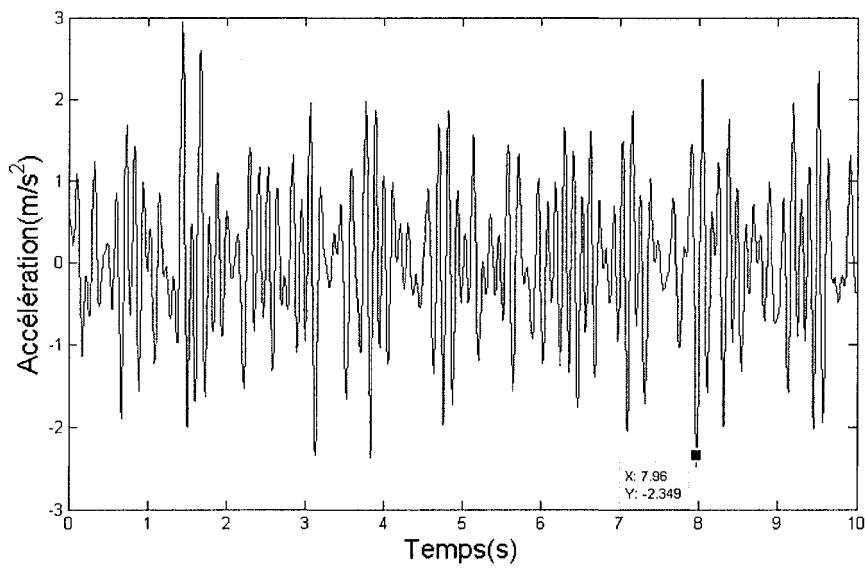


Figure 5.5 : Accélération en fonction du temps.

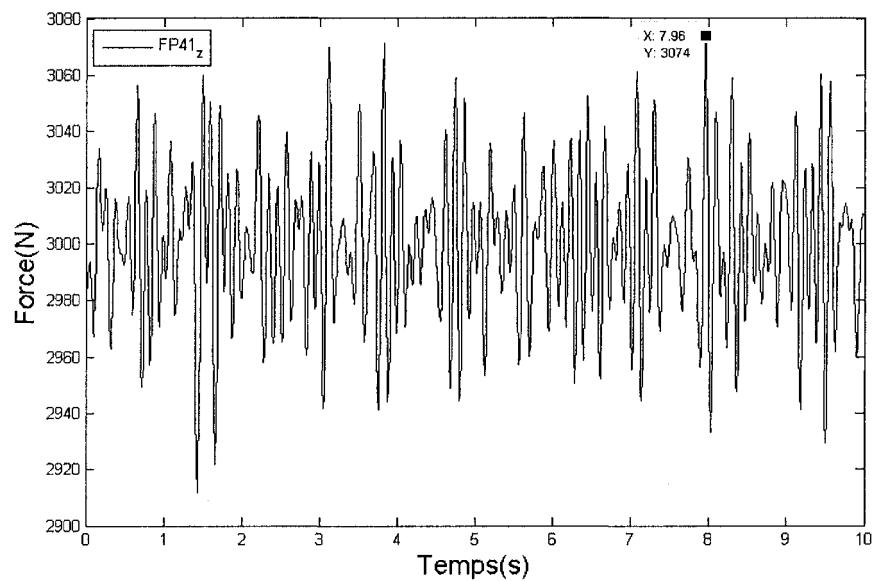


Figure 5.6 : Force appliquée au point P.

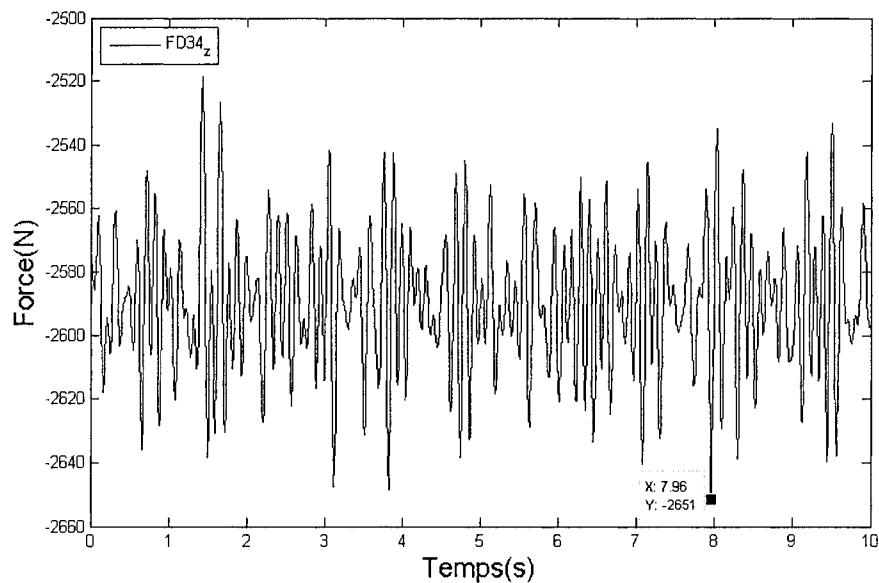


Figure 5.7 : Force appliquée au point D.

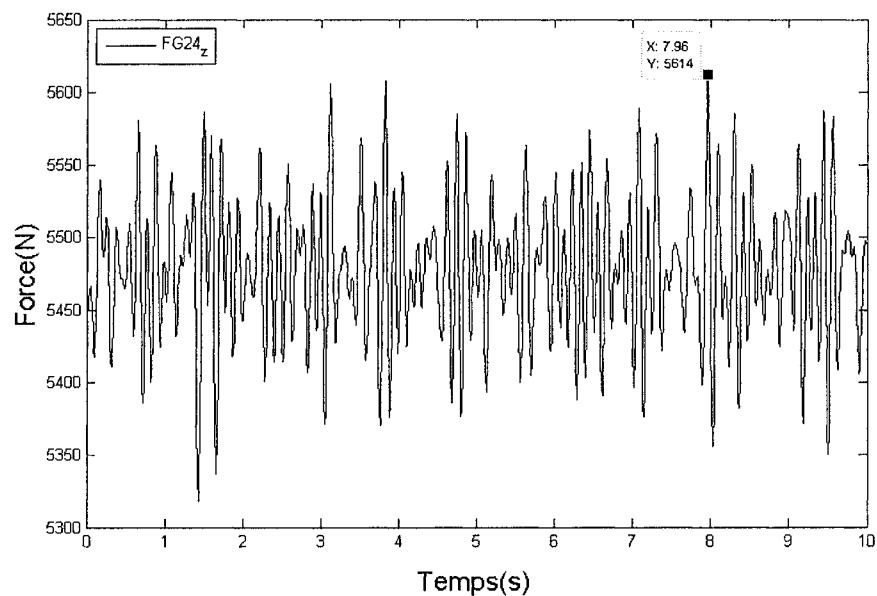


Figure 5.8 : Force appliquée au point G.

Pour illustrer l'effet de différents types de route, nous avons varié la valeur du coefficient de rugosité dans la fonction du PSD. Les valeurs maximales d'accélération et des forces enregistrées sur certains points critiques sont représentées dans le tableau 5.2.

Tableau 5.2 : Valeur des forces maximales pour différentes pistes.

	coefficient de rugosité de la route (Syy_0)	Vitesse d'entrée (m/s)	Accélération d'entrée (m/s^2)	Force selon l'axe Z (N)		
				Point (P)	Point (G)	Point (D)
Autoroute	10^{-6}	-1.19×10^{-2}	-2.48	3074	5614	-2651
Route principale	2.10^{-6}	-1.87×10^{-2}	-3.44	3103	5666	-2674
Route secondaire	64.10^{-6}	-15.37×10^{-2}	-19.49	3585	6535	-3021
Route dégradée	256.10^{-6}	-13.4×10^{-2}	-36.17	4085	7447	-3442

Les figures 5.1 à 5.8 nous permettent d'analyser de près le comportement vibratoire de la suspension qui reflète l'efficacité du modèle développé. Pour différents types d'excitations de route, il est possible à chaque instant de déterminer le déplacement, la vitesse et l'accélération ainsi que les forces appliquées dans l'espace des composants de la suspension en tout points et en particulier les points critiques. Pour une entrée de nature de dos-d'âne connu par exemple, la figure 5.2 montre que les courbes des déplacements verticaux des points G et D coïncident exactement avec cette forme.

Contrairement à l'excitation sinusoïdale, les excitations aléatoires correspondent aux cas réels enregistrés à partir des mesures expérimentales sur plusieurs profils de route. Les irrégularités du profil de route sont prises en compte dans la modélisation de l'interaction route/véhicule. Le profil peut être assimilé à un processus aléatoire stationnaire gaussien de moyenne nulle. Il est généré par des fonctions de densité spectrale de puissance illustrée par la figure 5.3. Lorsque nous varions la valeur du coefficient de la rugosité, nous remarquons que l'accélération verticale ainsi que la valeur de force appliquée aux points D et G augmente considérablement selon la rugosité de la route.

Le tableau 5.2 rassemble les valeurs maximales des forces critiques aux différents endroits de la pièce de suspension. En effet, pour chaque type de route, autoroute soit-elle ou route principale, secondaire ou même dégradée nous avons un coefficient de rugosité qui varie

selon la forme de celle-ci de 10^{-6} à $256 \times 10^{-6} m^2 / cycle/m$. Ceci influe directement sur la force d'entrée $F_{p_{41}}$ au point P donnée par l'équation (4.56). Cette force est la somme vectorielle de la force F_0 , la réaction au point de contact de la roue sur la route, plus la masse totale des composants de la suspension multipliée par l'accélération. Celle-ci représente elle même la dérivée seconde de l'un des profils de route décrit par l'équation (2.23). La première des remarques qu'on peut tirée de ces résultats sont les valeurs des vitesses et des accélérations qui augmentent à chaque fois que le coefficient de la rugosité augmente. Ces accélérations ont un impact directe sur les forces obtenues aux points G et D résultants de la force d'entrée au point P. De plus, le point G est l'endroit le plus sollicité avec des valeurs de force qui atteignent presque le double de la force d'entrée. La force élevée au point G peut être expliquée par la présence de l'effet direct du ressort et de l'amortisseur selon l'équation (4.35) qui génèrent une force supplémentaire.

Ces résultats préliminaires démontrent l'effet de la rugosité de la piste sur les différents éléments de la suspension du véhicule comme ils confirment la validité du modèle développé. Actuellement, certains de ces résultats sont utilisés par notre équipe pour analyser les contraintes, la résistance mécanique ainsi que la durée de vie des pièces réelles de suspension fabriquées en aluminium.

5.2 Relation d'influence entre la vitesse l'accélération et les différentes forces critiques

Pour arriver à élaborer une relation qui analyse le couplage non linéaire entre la vitesse, l'accélération et les différentes forces critiques, explorons les lois et les méthodes qui analysent la relation d'influence entre ces paramètres.

Afin d'interpréter les résultats obtenus dans le tableau 5.2, nous utilisons la méthode des moindres carrés pour l'identification paramétrique nécessaire pour trouver une loi caractéristique du spectre des forces critiques dans les zones G et D.

Comme critère d'optimisation, lors de l'élaboration des lois, nous avons choisi l'utilisation des moindres carrés dont l'expression est donnée par la formule suivante :

$$J = \sum |y_e(a, b, c) - y_{\text{exp}}|^2 \quad (5.1)$$

où, a, b et c sont les paramètres à identifier, y_e représente le vecteur estimé de la force et y_{exp} représente les résultats de notre modèle.

La loi caractéristique appropriée est donnée par la formule suivante :

$$F_i(x) = a_i \exp(b_i x) + c_i \exp(d_i x) \quad (5.2)$$

Le résultat de l'identification de la loi caractéristique reliant les forces critiques au point G et leurs vitesses appropriées sont données dans le tableau suivant :

ag	bg	cg	dg
5441	-2.356	$-5.692 \cdot 10^{-13}$	-230

La simulation du modèle proposé en utilisant les valeurs des paramètres ag, bg et cg, données par le tableau précédent nous permet de tracer le graphe illustré dans la figure 5.9 :

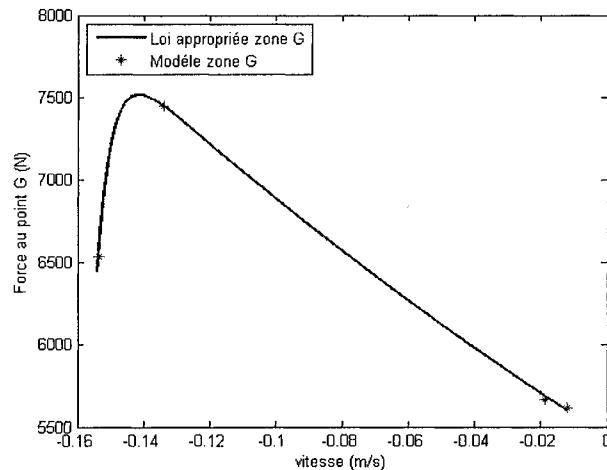


Figure 5.9: Spectre des forces critiques au point G en fonction de la vitesse.

Procédant par la même méthode décrite précédemment, les nouveaux paramètres de la deuxième loi caractéristique au point D sont donnés par le tableau ci dessous, et la figure 5.10 représente le tracé des spectres des forces critiques en ce point.

ad	bd	cd	dd
-2575	-2.177	$2.603 \cdot 10^{-13}$	-229.9

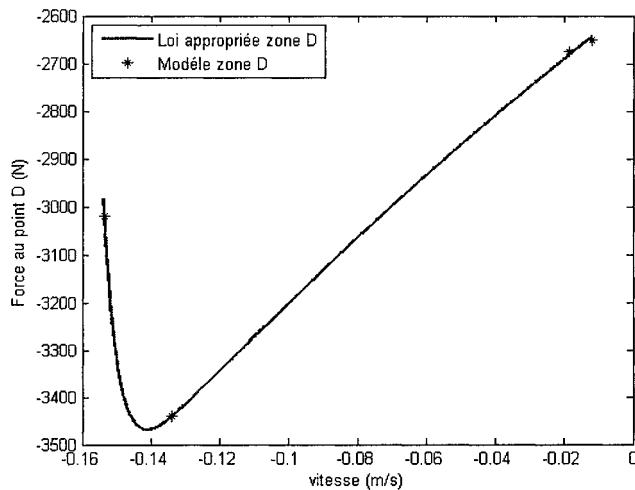


Figure 5.10: Spectre des forces critiques au point D en fonction de la vitesse.

Comme cela a été fait pour le modèle en vitesse, nous avons aussi choisis d'utiliser le même critère de moindres carrés dont les paramètres de la fonction estimée sont au nombre de deux, nommés a_i et b_i comme indiqué dans la formule suivante :

$$J = \sum_{v=1}^n |y_e(a_i, b_i) - y_{\text{exp}}|^2 \quad (5.3)$$

où, a_i et b_i sont les vecteurs des paramètres à identifier.

La loi caractéristique appropriée à cette étude est la série donnée par la formule suivante :

$$F(x) = \sum_{i=1}^n a_i e^{b_i x} \quad (5.4)$$

La faiblesse de l'erreur entre les résultats de notre modèle et la loi estimée nous permet de se limiter à l'ordre 1 pour estimer au mieux les paramètres de ce modèle, ce qui nous donne la formule (5.5). Le graphe des spectres des forces critiques en fonction de l'accélération des points G et D sont données par les figures 5.11 et 5.12 respectivement.

$$F(x) = ae^{bx} \quad (5.5)$$

Les paramètres caractéristiques a_i et b_i sont donnés dans le tableau suivant :

ag	bg	ad	bd
5514	-0.008379	-2601	-0.007731

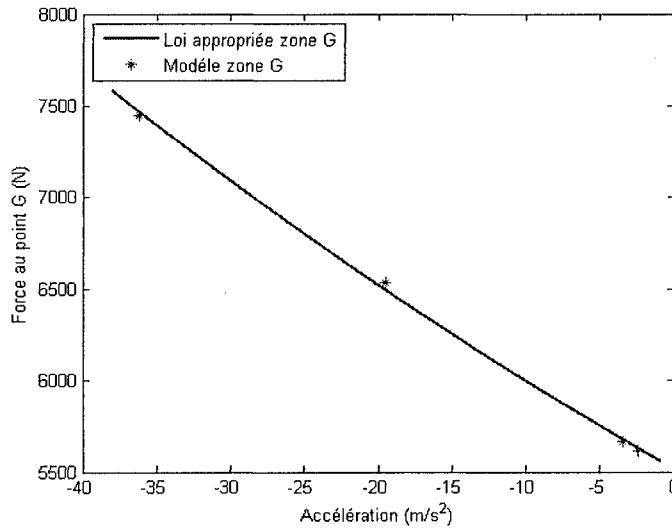


Figure 5.11 : Spectre des forces critiques au point G en fonction de l'accélération.

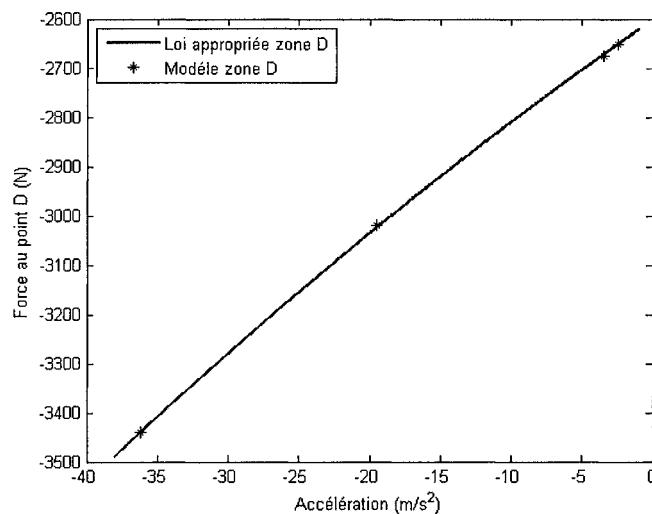


Figure 5.12 : Spectre des forces critiques au point D en fonction de l'accélération.

L'utilisation de cette méthode d'observation pour une problématique plus complexe reste une piste efficace pour des travaux futurs.

Finalement, dans ce chapitre nous avons mis en évidence, par la simulation avec le logiciel Matlab le modèle développé pour décrire la réponse d'un quart de véhicule en 3D aux excitations générées par des profils de route : dos-d'âne simple ou aléatoire. Nous avons développé un programme de calcul qui nous permet de déterminer les déplacements des coordonnées des points mobiles, les vitesses, les accélérations et les forces appliquées sur différents points de suspension à tout moment en fonction des paramètres d'entrée. Ce modèle peut aussi constituer un point de départ pour modéliser d'autre type de suspension avec d'autres conditions. Cette modélisation peut être étendue pour étudier la dynamique d'un modèle complet de véhicule qui sera assez proche du système physique réel prenant en considération les principaux paramètres dynamiques.

Chapitre 6

Conclusion et recommandation

L'objectif de ce projet est de contribuer à l'étude de l'effet des sollicitations de la route sur les pièces de suspension en aluminium. La résolution de cette problématique nécessite une étude modulaire multidisciplinaire. Afin d'atteindre cet objectif, nous avons, dans un premier temps, décomposé le sujet en trois grandes parties : Développement de l'approche de modélisation vectorielle, modélisation dynamique d'un quart de véhicule en 3D et en fin validation et simulation de notre modèle.

La première partie de cette étude a porté tout d'abord sur l'adaptation de la méthode de modélisation vectorielle à notre problématique. Dans un deuxième temps, nous avons élaboré les expressions analytiques de la vitesse et l'accélération en chaque point des parties constituant la suspension du véhicule. Suite à une exploration approfondie, nous avons pu extraire les différents vecteurs décrivant la dynamique du système. Nous avons donc proposé une approche analytique simple qui modélise les effets de sollicitation, ce qui nous permet d'étudier l'influence des forces appliquées sur les triangles inférieur et supérieur de la suspension. Il faut signaler qu'afin de simplifier la programmation, toute la modélisation et le calcul symbolique des matrices d'états ont été effectués sous l'environnement Matlab.

La deuxième partie de ce projet s'est ensuite consacrée à la modélisation dynamique en 3D. Pour atteindre ce but, en se basant sur l'approche vectorielle, nous avons développé, un programme de calcul qui permet d'extraire numériquement à partir des données empiriques de la densité spectrale de puissance (PSD) les différentes forces dynamiques dans l'espace.

Enfin, la troisième et dernière partie traite de la validation de notre modèle par simulation numérique. À ce propos les matrices de forces en 3D dans les zones d'accouplements rigides et mobiles ont été calculées pour différents profils de routes à différentes vitesses de déplacements instantanément. À cet effet les différents résultats obtenus montrent une bonne corrélation avec le cas réel.

Le modèle exposé dans ce travail est associé à une méthodologie qui permet d'analyser les zones à contraintes maximales sur la suspension afin de pouvoir augmenter la durée de vie des pièces fabriquées en aluminium, ce qui ouvre un large éventail pour simuler les différents types et normes d'excitation.

Il serait aussi intéressant de synthétiser le travail en tenant compte de l'influence du dynamisme du châssis et la non linéarité de l'amortissement.

Les résultats que nous avons obtenus lors de ces travaux de recherche ont fait l'objet des publications suivantes :

- M.Saihi, M. Bouazara et M. J. Richard (2010), " Effet des sollicitations de la route sur les pièces de suspension en aluminium", Journée des étudiants du REGAL, JER, Université Laval (Regroupement Aluminium, Québec, Canada), 21 Octobre 2010.
- M.Saihi, M. Bouazara et M. J. Richard (2011), " Effet des sollicitations de la route sur les pièces de suspension en aluminium", 79^e Congrès de l'ACFAS 2011 (Association francophone pour le savoir, Sherbrooke, QC, Canada), 9 au 13 Mai 2011.
- M.Saihi, M. Bouazara et M. J. Richard (2011), " Effet des sollicitations de la route sur les pièces de suspension en aluminium", CANCAM 2011 (23rd Canadian Congress of Applied Mechanics, Vancouver, BC, Canada), 5 au 9 Juin 2011.

Références

- [1] P. Duysinx (2009), "Confort et tenue de route", <http://www.ingveh.ulg.ac.be/>.
- [2] Julius S. Bendat (1971), "Random data: analysis and measurement procedures", pp 2-34.
- [3] B.R. Davis and A.G.Thompson (2001), "Power spectral density of road profiles", Vehicle System Dynamics, 35, 409-405.
- [4] K. Bogsjo (2008), "Coherence of road roughness in left and right wheel-path", Vehicle System Dynamics, 46, 599-609.
- [5] http://www.ibgebim.be/uploadedFiles/Contenu_du_site/Professionnels/Themes/Bruit_Vademecum_du_bruit_routier_urbain/Vademecum_f7_tech_fr.pdf.
- [6] K. McGhee (2008), "Comfort and safety of traveled surfaces", Spring Technical Conference.
- [7] W. Sayers and M. Karamihas (1998), "The little book of profiling", The Regent of the University of Michigan, pp, 2-6.
- [8] F. Hu (2004), "Development of a Direct type Road Roughness Evaluation System", Thesis of master, University of South Florida, pp 11-24.
- [9] http://training.ce.washington.edu/wsdot/Modules/09_pavement_evaluation/09-2_body.htm.
- [10] L. Chartrand (2006), "Relevé et analyse du profil longitudinal des chaussées durant leur construction, applications pratiques", Congrès Bitume Québec.
- [11] K. Ramji, A. Gupta and all (2005), "Road roughness measurements using PSD approach", Journal of the Institution of Engineers (India), 85, 193-201.
- [12] H. Wang (2006), "Road profiler performance evaluation and accuracy criteria analysis", Thesis of master, University of Blaksburg, Virginia, pp 17-37.
- [13] W. Gao and Zhang (2007), "A half-car model for dynamic analysis of vehicles with random parameters", 5th Australasian Congress on Applied Mechanics.

-
- [14] L. Sun and X. Deng (1998), "Predicting vertical dynamic loads caused by vehicle pavement interaction", *Transportation engineering*, 470-478.
 - [15] L. Sun, X. Cai and all (2007), "Genetic algorithm-based optimum vehicle suspension design using minimum dynamic pavement load as a design criterion", *Sound and vibration*, 301, 18-27.
 - [16] S. Türkay and H. Akçay (2005), "A study of random vibration characteristics of the quarter-car model", *Sound and vibration*, 282, 111–124.
 - [17] http://www.ibgebim.be/uploadedFiles/Contenu_du_site/Professionnels/Themes/Bruit/Vademecum_du_bruit_routier_urbain/Vademecum_f7_tech_fr.pdf.
 - [18] G. Awasthi, T. Singh and all (2003), "On pavement roughness indices", *Department of Civil Engineering*, 84, 33-37.
 - [19] H. Hunt (1991), "Stochastic Modeling of Traffic-induced Ground Vibration", *Sound and vibration*, 53-70.
 - [20] M. Bouazara (1997), "Étude et analyse de la suspension active et semi-active des véhicules routiers", Thèse de doctorat, Université Laval, Québec, 197 p.
 - [21] O. Kropac; P. Mucka (2005), "Be careful when using the International Roughness Index as an indicator of road unevenness", *Sound and vibration*, 287, 989–1003.
 - [22] M. W. Sayers (1988), "Dynamic terrain inputs to predict structural integrity of ground vehicles", 59-61.
 - [23] M. Y. Shahin (2007), "Pavement management for airports, roads, and parking lots", pp 98-99.
 - [24] O. Kropac and P. Mucka (2009), "Classification scheme for random longitudinal road unevenness considering road waviness and vehicle response", *Shock and Vibration*, 16, 273-289.
 - [25] R. Abdelhamid (2005), "Estimation de la dynamique du véhicule en interaction avec son environnement", Thèse de doctorat, Université de Versailles Saint-Quentin, 159 p.
 - [26] D. Sammier (2001), "Sur la modélisation et la commande de suspension de véhicules automobiles", Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, France, 234 p.

-
- [27] G. Verros and S. Natsiavas (2005), "Design optimization of quarter-car models with passive and semi-active suspensions under random road excitation", *Vibration and Control*, 11, 581.
 - [28] SolidWorks 2010-2011
 - [29] M. Bouazara (2009), "Improvement of the design of suspension control arms of automobile using aluminum alloys", *Damage and Fracture Mechanics*, Springer Engineering Book: Special Edition, ISBN: 978-90-481-2668-2.
 - [30] F. Cai (2007), "Conception et analyse mécaniques des pièces en aluminium pour application automobile", Thèse de Maîtrise, Université du Québec à Chicoutimi, 156 p.
 - [31] M. Blundell and D. Harty, (2004), "The multi-body systems approach to vehicle dynamics", Elsevier Butterworth-Heinemann, pp 202-247.
 - [32] G. Rill, (2009), "Vehicle dynamics", University of applied sciences, pp 7-15.
 - [33] Matlab 2008. <http://www.mathworks.com/>.
 - [34] M. Saihi, M. Bouazara et M. Richard (2011), "Effet des sollicitations de la route sur les pièces de suspension en aluminium", CANCAM: Canadian Congress of applied Mechanics, British Columbia University, Victoria.