

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ À

L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À CHICOUTIMI

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN RESSOURCES ET SYSTÈMES

PAR

ANDRÉ ARSENAULT

**ANALYSE NUMÉRIQUE DU TRANSFERT DE CHALEUR LORS
DE LA FUSION D'UNE SUBSTANCE PURE SOUS-REFROIDIE**

MAI 1991



Mise en garde/Advice

Afin de rendre accessible au plus grand nombre le résultat des travaux de recherche menés par ses étudiants gradués et dans l'esprit des règles qui régissent le dépôt et la diffusion des mémoires et thèses produits dans cette Institution, **l'Université du Québec à Chicoutimi (UQAC)** est fière de rendre accessible une version complète et gratuite de cette œuvre.

Motivated by a desire to make the results of its graduate students' research accessible to all, and in accordance with the rules governing the acceptance and diffusion of dissertations and theses in this Institution, the **Université du Québec à Chicoutimi (UQAC)** is proud to make a complete version of this work available at no cost to the reader.

L'auteur conserve néanmoins la propriété du droit d'auteur qui protège ce mémoire ou cette thèse. Ni le mémoire ou la thèse ni des extraits substantiels de ceux-ci ne peuvent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

The author retains ownership of the copyright of this dissertation or thesis. Neither the dissertation or thesis, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

SOMMAIRE

Une méthodologie numérique pour analyser le transfert de chaleur par conduction et par convection naturelle lors de la fusion d'une substance pure est présentée. Cette méthode est utilisée pour étudier l'influence du sous-refroidissement sur le développement des régimes d'écoulement et le taux de fusion. Afin de suivre avec précision le déplacement et la déformation de l'interface solide/liquide en fonction du temps, les équations de conservation sont transformées dans un repère curviligne et une nouvelle méthode est proposée pour traiter le déplacement de l'interface solide/liquide. Les équations de conservation sont intégrées dans un volume de contrôle et les systèmes d'équations linéaires résultants sont résolus itérativement avec une méthode de relaxation par ligne. Les résultats obtenus montrent l'existence de cinq régimes d'écoulement dans la phase liquide lors de la fusion: ce sont les régimes de conduction, de développement de la convection vers la partie supérieure de la cavité, la convection dans la partie supérieure de la cavité, le développement de la convection dans toute la cavité et enfin le régime permanent. L'effet simultané du sous-refroidissement dans la phase solide et de l'intensité des mouvements convectifs dans la phase liquide est analysé en profondeur. Enfin, une corrélation est proposée pour le nombre de Nusselt moyen à la paroi chauffée en régime permanent en fonction du nombre de Rayleigh et du coefficient de sous-refroidissement.

REMERCIEMENTS

Je tiens avant tout à remercier Monsieur Marcel Lacroix, Ph. D., pour avoir dirigé mes travaux et m'avoir prodigué de précieux conseils. De plus, j'aimerais exprimer ici ma reconnaissance à tous les membres du GRIPS autant pour leur soutien technique que pour leur soutien moral. Parmi ceux-ci, j'aimerais souligner Carol Gauthier et Andras Haidekker qui ont partagé leurs années de maîtrise avec moi.

Tables Des Matières

SOMMAIRE		ii
REMERCIEMENTS		iii
Liste Des Tableaux		vi
Liste Des Figures		vii
Nomenclature		ix
Chapitre I	INTRODUCTION	1
Chapitre II	MODÈLE NUMÉRIQUE	4
Section 1	Variables adimensionnées	8
Section 2	Transformation en coordonnées curvilignes généralisées	11
Section 3	Génération du maillage	14
Section 4	Solution numérique	17
4.1	Équation générale aux différences	18
4.2	Conditions frontières discrétisées	20
4.3	Condition de Stéfan discrétisée et intégrée	24
4.4	Algorithme global	26
Chapitre III	RÉSULTATS ET DISCUSSION	29
Section 1	Validation du modèle	29
Section 2	Expériences montrant l'influence du sous-refroidissement sur la fusion.	32

Chapitre IV CONCLUSION 47

BIBLIOGRAPHIE 49

Liste Des Tableaux

Tableau 1	Variable et paramètres dans l'équation générale adimensionnée, Éq. (11)	10
Tableau 2	Conditions frontières dans l'espace adimensionné	10
Tableau 3	Conditions frontières dans l'espace transformé	13
Tableau 4	Sommaire des expériences réalisées	32
Tableau 5	Fraction volumique liquide après 1 heure de temps simulé .	43
Tableau 6	Temps pour atteindre le régime stationnaire	44

Liste Des Figures

Figure 1	Représentation du système physique	4
Figure 2	Volume de contrôle dans le plan transformé (ξ , η)	18
Figure 3	Condition frontière de la vorticité sur une paroi imperméable	21
Figure 4	Demi-volume de contrôle à la paroi solide sud	22
Figure 5	Demi-volume de contrôle à la paroi solide nord	23
Figure 6	Algorithme du programme de transfert de chaleur	27
Figure 7	Nombre de Nusselt moyen à la paroi chauffée versus les données expérimentales	30
Figure 8	Position finale de l'interface prédite versus les données expérimentales	30
Figure 9	Fraction volumique liquide versus les données expérimentales	31
Figure 10	Champs de vitesses et de températures pour $Ra =$ $1,8 \times 10^5$	35
Figure 11	Champs de vitesses et de températures pour $Ra =$ $3,6 \times 10^5$	36
Figure 12	Champs de vitesses et de températures pour $Ra =$ $7,2 \times 10^5$	37
Figure 13	Nombre de Nusselt local en fonction du temps à l'interface solide/liquide ($Ra = 1,8 \times 10^5$, $T_{sub} = 0.5$)	38

Figure 14	Nombre de Nusselt local en fonction du temps à la paroi chauffée ($Ra = 1,8 \times 10^5$, $T_{sub} = 0.5$)	39
Figure 15	Fraction volumique liquide en fonction du temps.	43
Figure 16	Nombre de Nusselt moyen à l'interface solide/liquide en fonction du temps	45
Figure 17	Nombre de Nusselt moyen à la paroi chauffée en fonction du temps	45

Nomenclature

Constantes

H : Hauteur de la cavité, m .

L : Largeur de la cavité, m .

T_o : Température référence dans la phase liquide, $^{\circ}C$.

T_C : Température de la paroi refroidie, $^{\circ}C$.

T_F : Température de fusion de la substance utilisée, $^{\circ}C$.

T_H : Température de la paroi chauffée, $^{\circ}C$.

ΔT_l : Variation de température au travers de la phase liquide, $T_H - T_F$.

ΔT_s : Variation de température au travers de la phase solide, $T_F - T_C$.

k_l, k_s : Conductivité thermique des phases liquide et solide respectivement,

$W \cdot m^{-1} \cdot ^{\circ}C^{-1}$.

α_l, α_s : Diffusivité thermique des phases liquide et solide respectivement, $m^2 \cdot s^{-1}$.

C_l, C_s : Chaleur massique thermique des phases liquide et solide respectivement,

$J \cdot kg^{-1} \cdot ^{\circ}C^{-1}$.

ρ_l, ρ_s : Densité des phases liquide et solide respectivement, $kg \cdot m^{-3}$.

ρ_o : Densité de référence pour la phase liquide, $kg \cdot m^{-3}$.

ν : Viscosité cinématique de la phase liquide, $m^2 \cdot s^{-1}$.

h_f : Chaleur latente de fusion, $J \cdot ^{\circ}C \cdot kg^{-1}$.

g : Accélération gravitationnelle, $m \cdot s^{-2}$.

M, N : Le nombre de points dans les directions x et y respectivement pour la phase liquide.

MS, NS : Le nombre de points dans les directions x et y respectivement pour la phase solide.

Variables dans le domaine physique

t : Coordonnée de temps, s .

x, y : Coordonnées spatiales, m .

u, v : Composantes de la vitesse dans la phase liquide selon x et y respectivement, $m \cdot s^{-1}$.

ω : Vorticité, s^{-1} .

ψ : Fonction de courant, $m^2 \cdot s^{-1}$.

T_l : Température dans la phase liquide, $^{\circ}C$.

T_s : Température dans la phase solide, $^{\circ}C$.

\vec{V}_n : Vitesse normale l'interface solide/liquide.

Variables dans le domaine adimensionné

\bar{t} : Coordonnée de temps.

\bar{x}, \bar{y} : Coordonnées spatiales.

\bar{u}, \bar{v} : Composantes de la vitesse dans la phase liquide selon x et y respectivement.

\bar{u}_n, \bar{v}_n : Composantes de la vitesse de l'interface selon \bar{x} et \bar{y} respectivement.

$\bar{\omega}$: Vorticité.

$\bar{\psi}$: Fonction de courant.

$\bar{\theta}_l$: Température dans la phase liquide.

$\bar{\theta}_s$: Température dans la phase solide.

σ : Position de l'interface dans l'espace adimensionné

Nombres caractéristiques adimensionnés

A : Le rapport L / H .

T_{sub} : Coefficient de sous-refroidissement.

Pr : Nombre de Prandtl = $\frac{\nu}{\alpha_l}$.

Ra : Nombre de Rayleigh = $\frac{g \cdot \beta \cdot (T_H - T_F) \cdot H^3}{\nu \cdot \alpha_l}$.

Ste : Nombre de Stéfan = $\frac{C_l \cdot (T_H - T_F)}{h_f}$.

$\bar{\alpha}$: Rapport de la diffusivité thermique de la phase solide sur celle de la phase liquide.

\bar{k} : Rapport de la conductivité thermique de la phase solide sur celle de la phase liquide.

$\bar{\rho}$: Rapport de la densité de la phase solide sur celle de la phase liquide.

Variables et coefficients dans l'espace curviligne généralisé

ξ, η : Coordonnées spatiales.

U, V : Coefficients advectifs.

α, β, γ et J : Coefficients géométriques.

I

INTRODUCTION

Les phénomènes de fusion et de solidification d'une substance sont des processus de changement de phase contrôlés par la dynamique des lois de transfert de chaleur: ce sont les phénomènes de conduction dans la phase solide et les phénomènes de conduction et de convection dans la phase liquide. La caractéristique commune à tous les problèmes impliquant un changement de phase liquide/solide est l'existence d'une interface mobile qui sépare les deux phases et à laquelle l'énergie thermique est soit absorbée (fusion), ou soit libérée (solidification).

Les phénomènes de fusion et de solidification ont une grande importance pratique et se manifestent couramment dans divers secteurs scientifiques, technologiques et autres applications industrielles[1] tels les industries métallurgiques et pétrochimiques, les industries du verre et des plastiques, l'industries alimentaire, la fabrication des cristaux semi-conducteurs, le dégivrage d'ailes d'avions, etc.. Une compréhension quantitative plus approfondie de ces problèmes est donc fort souhaitable, et la modélisation numérique permet de réaliser cet objectif économiquement.

Plusieurs techniques analytiques permettant d'aborder le problème de changement de phase solide/liquide ont été proposées[2]: ce sont, par exemple, les méthodes intégrales de conservation d'énergie, les méthodes variationnelles, les méthodes de migration des isothermes, etc. . Ces techniques sont habituellement limitées aux analyses uni-dimensionnelles, aux cas semi-infinis, bref, aux cas académiques. Elles sont souvent trop compliquées mathématiquement lorsque appliquées aux problèmes multi-dimensionnels. D'où l'intérêt des méthodes numériques qui s'avèrent beaucoup plus flexibles et puissantes..

La difficulté majeure dans la modélisation numérique de ces phénomènes est le traitement de la dynamique de l'interface solide/liquide: En effet, sa position de même que sa forme irrégulière sont inconnues à priori et dépendent des taux de transfert de chaleur au sein de la substance fusible. Les problèmes de ce type sont toujours non-linéaires. Une grande variété de méthodes numériques ont été développées au cours des dernières années pour résoudre ce type de problème[3].

La solution numérique par différences ou volumes finis d'équations de transfert dans des géométries complexes présente de grandes difficultés. Ainsi, dans le cas des maillages fixes, la grande difficulté est le traitement des conditions frontières dont les noeuds du réseau uniforme ne coïncident pas avec les formes arbitraires de la géométrie. Pour maintenir une précision comparable à celle de la solution à l'intérieur du domaine, il est alors nécessaire d'utiliser des formules d'interpolation longues et sophistiquées. De plus, ces formules d'interpolation étant propres à la géométrie étudiée, elles alourdissent considérablement l'écriture et la mise en oeuvre d'un programme qu'il faut sans cesse modifier pour chaque nouveau cas.

Une alternative est de travailler avec un réseau qui s'adapte aux formes irrégulières des

frontières. L'avantage est de pouvoir définir les conditions frontières uniquement à partir de points se trouvant aux noeuds du nouveau réseau. Ce type de transformation permet également de définir des maillages non-uniformes, dont les noeuds peuvent être concentrés dans des régions d'intérêt (couches limites).

En contrepartie, avec ces réseaux curvilignes, les équations de conservation originellement définies dans le plan physique doivent être transformées en des équations tensorielles covariantes ou hybrides qui contiennent toutes les informations géométriques de la transformation sous la forme de facteurs d'échelle ou de coefficients géométriques. Ces équations transformées sont plus lourdes et plus longues; mais leurs conditions limites sont facilement discrétisées dans le plan transformé.

Cette méthodologie a été utilisée avec succès pour étudier le problème de fusion de diverses substances fusibles telles les paraffines (nombres de Prandtl élevés)[4][5], et les métaux purs (nombres de Prandtl faible)[6][7][8][9][10][11]. Cependant, dans tous les cas, la phase solide se trouvait à la température de fusion. Or, une étude récente menée par Berkemann et Viskanta [12] a démontré que le sous-refroidissement de la phase solide perturbe considérablement le phénomène de fusion. Le but du présent travail est donc de poursuivre ces travaux en analysant numériquement l'effet de sous-refroidissement dans la phase solide sur la fusion d'un métal pur confiné à une enceinte rectangulaire.

Dans le second chapitre, le modèle mathématique et sa mise en oeuvre numérique sont présentés. Le modèle est ensuite utilisé, au troisième chapitre, pour mettre en évidence l'effet du sous-refroidissement dans la phase solide et de la convection naturelle dans la phase liquide sur le phénomène de fusion.

II

MODÈLE NUMÉRIQUE

Soit un métal pur contenu dans une enceinte rectangulaire de hauteur H et de largeur L (Fig. 1). Les parois verticales de l'enceinte sont maintenues à une température uniforme alors que les parois horizontales sont considérées comme étant adiabatiques. Initialement,

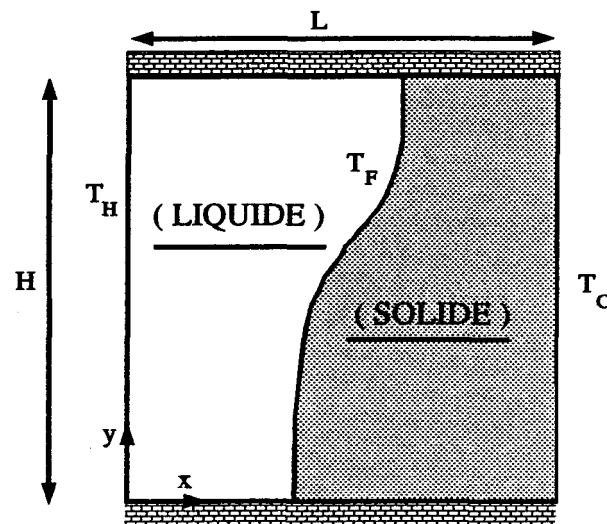


Figure 1 Représentation du système physique

le métal solide et les parois verticales sont à une température uniforme, T_C , tel que

$T_C < T_F$, T_F étant la température de fusion. Au temps $t = 0$, Le processus de fusion est initié en imposant soudainement à la paroi verticale de gauche une température T_H , où $T_H > T_F$. Dans le présent modèle, les hypothèses suivantes sont posées:

1. Les propriétés thermophysiques sont constantes mais peuvent être différentes dans les phases liquide et solide.
2. La phase liquide est newtonienne et incompressible.
3. L'écoulement est laminaire et bidimensionnel.
4. Les petites vitesses normales à l'interface solide-liquide engendrées par le changement de volume de la substance lors de la fusion sont négligeables par rapport aux vitesses de l'écoulement [12].
5. Devant les taux de transfert de chaleur présents aux parois verticales, la dissipation visqueuse est négligeable.
6. L'approximation de Boussinesq est appliquée.

Respectant les hypothèses présentées ci-dessus, les équations exprimant la conservation de la masse, de la quantité de mouvement, et de l'énergie se présentent, dans un repère cartésien, comme suit:

(conservation de la masse)

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

(quantité de mouvement en x)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u \cdot u) + \frac{\partial}{\partial y}(v \cdot u) = -\frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

(quantité de mouvement en y)

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u \cdot v) + \frac{\partial}{\partial y}(v \cdot v) = -\frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + g \cdot \beta \cdot (T - T_0) \quad (3)$$

(énergie dans la phase liquide)

$$\frac{\partial T_l}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u \cdot T_l) + \frac{\partial}{\partial y}(v \cdot T_l) = \alpha_l \cdot \left(\frac{\partial^2 T_l}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_l}{\partial y^2} \right) \quad (4)$$

(énergie dans la phase solide)

$$\frac{\partial T_s}{\partial t} = \alpha_s \cdot \left(\frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_s}{\partial y^2} \right) \quad (5)$$

Lorsque l'on applique le principe de conservation de l'énergie à un segment de l'interface, nous obtenons l'équation (6) . La différence du flux de chaleur arrivant à l'interface et celui quittant l'interface, nous donne la quantité de chaleur par unité de temps qui donne lieu au phénomène de changement de phase quantifié par le membre de droite de l'équation (6) .

$$k_s \cdot \nabla T_s \Big|_{interface} - k_l \cdot \nabla T_l \Big|_{interface} = \rho_s \cdot h_f \cdot \vec{V}_n \quad (6)$$

Ce système d'équations différentielles est fermé à l'aide de conditions frontières appropriées:

(à la paroi chauffée)

$$u(x = 0, y, t) = 0$$

$$v(x = 0, y, t) = 0$$

$$T_l(x = 0, y, t > 0) = T_H$$

(à l'interface solide/liquide)

$$u(x = X_I, Y_I, t) = 0$$

$$v(x = X_I, Y_I, t) = 0$$

$$T_l(x = X_I, Y_I, t > 0) = T_F$$

$$T_s(x = X_I, Y_I, t > 0) = T_F$$

(à la paroi refroidie)

$$T_s(x = L, y, t) = T_C$$

(aux parois horizontales adiabatiques)

$$u(x, y = 0, t) = 0$$

$$v(x, y = 0, t) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} T(x, y = 0, t) = 0$$

$$u(x, y = H, t) = 0$$

$$v(x, y = H, t) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} T(x, y = H, t) = 0$$

Les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement peuvent être résolues tel quel c'est-à-dire en termes de variables primitives u , v , et p en utilisant un des schémas numériques développés à cette fin. Bien que ces schémas aient été éprouvés pour de nombreux écoulements, ils se butent, pour la plupart, à la résolution d'une équation de Poisson pour la pression assujettie à des conditions de Neumann. La résolution itérative d'une telle équation est lente à converger. Pour cette raison et en plus, parce que dans cette étude la pression n'est pas le moteur de l'écoulement, on reformule les équations de conservation en termes de variables secondaires soit une fonction de courant et la vorticité.

L'équation de transfert de la vorticité, ω , prend la forme suivante:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u \cdot \omega) + \frac{\partial}{\partial y}(v \cdot \omega) = \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) + g \cdot \beta \cdot \frac{\partial(T - T_0)}{\partial x} \quad (7)$$

La vorticité étant définie comme la composante z du rotationnel du vecteur vitesse, c'est-à-dire,

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (8)$$

En définissant une fonction de courant, ψ , comme étant la fonction scalaire tel que

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \quad (9)$$

la définition de la vorticité devient

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega \quad (10)$$

Les conditions frontières de la fonction de courant sont facilement déduites. Puisque sur toutes les frontières solides imperméables la condition d'adhérence prévaut, on obtient en intégrant

$$\psi = cste$$

Choisissons cette constante arbitraire égale à zéro. Cette condition assure la conservation intégrale de la masse.

De façon analogue, les conditions frontières de la vorticité sont tirées de sa définition:

(parois adiabatiques, nord et sud)

$$\omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$$

(parois à température constante, est et ouest)

$$\omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

1 Variables adimensionnées

La transformation des variables dépendantes et indépendantes des équations de conservation et de leurs conditions frontières en variables sans dimensions, c'est-à-dire en variables normalisées par rapport à certaines valeurs caractéristiques, permet de spécifier les

conditions du problème à l'aide d'un nombre restreint de paramètres et facilite grandement la validation des résultats. Puisque nous travaillons avec des substances dont le nombre de Prandtl est faible, nous choisissons la diffusivité thermique, α_l , comme propriété diffusive dominante dans la phase liquide. Les variables sont adimensionnées de la façon suivante:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{x}{H}, & x &= \bar{x} \cdot H \\ \bar{y} &= \frac{y}{H}, & y &= \bar{y} \cdot H \\ \bar{u} &= u \cdot \frac{H}{\alpha_l}, & u &= \bar{u} \cdot \frac{\alpha_l}{H} \\ \bar{v} &= v \cdot \frac{H}{\alpha_l}, & v &= \bar{v} \cdot \frac{\alpha_l}{H} \\ \bar{t} &= t \cdot \frac{\alpha_l}{H^2}, & t &= \bar{t} \cdot \frac{H^2}{\alpha_l} \\ \bar{\theta}_l &= \frac{(T_l - T_F)}{(T_H - T_F)}, & T_l &= (T_H - T_F) \cdot \bar{\theta}_l + T_F \\ \bar{\theta}_s &= \frac{(T_s - T_F)}{(T_F - T_C)}, & T_s &= (T_F - T_C) \cdot \bar{\theta}_s + T_F \\ \bar{\omega} &= \omega \cdot \frac{H^2}{\alpha_l}, & \omega &= \bar{\omega} \cdot \frac{\alpha_l}{H^2} \\ \bar{\psi} &= \frac{\psi}{\alpha_l}, & \psi &= \bar{\psi} \cdot \alpha_l\end{aligned}$$

En substituant ces expressions dans les équations de conservation et leurs conditions frontières, on obtient alors un système d'équations résumé par l'équation générale de transfert suivante:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u\phi - \Gamma \frac{\partial\phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho v\phi - \Gamma \frac{\partial\phi}{\partial y}\right) = S(x, y) \quad (11)$$

Les paramètres ϕ , ρ , Γ et $S(x,y)$ sont définis dans le Tableau 1. Les conditions initiales,

Tableau 1 Variable et paramètres dans l'équation générale adimensionnée, Éq. (11)

Fonction	ϕ	ρ	Γ	S(x,y)
Fonction de courant	$\bar{\psi}$	0	1	$\bar{\omega}$
Vorticite	$\bar{\omega}$	1	Pr	$Ra \cdot Pr \cdot \frac{\partial \theta_l}{\partial \bar{x}}$
Temperature (phase liquide)	$\bar{\theta}_l$	1	1	0
Temperature (phase solide)	$\bar{\theta}_s$	1	1	0

Tableau 2 Conditions frontières dans l'espace adimensionné

Conditions frontières	Fonction de courant	Vorticité	Température (phase liquide)	Température (phase solide)
Paroi chauffée	$\bar{\psi} = 0$	$\bar{\omega} = -\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{x}^2}$	$\bar{\theta}_l = 1$	nil
Paroi refroidie	nil	nil	nil	$\bar{\theta}_s = -1$
Parois horizontales adiabatique	$\bar{\psi} = 0$	$\bar{\omega} = -\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{y}^2}$	$\frac{\partial \bar{\theta}_l}{\partial \bar{y}} = 0$	$\frac{\partial \bar{\theta}_s}{\partial \bar{y}} = 0$
Interface solide/liquide	$\bar{\psi} = 0$	$\bar{\omega} = -\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{x}^2}$	$\bar{\theta}_l = 0$	$\bar{\theta}_s = 0$

i.e., pour $t = 0$, sont $\bar{\psi} = \bar{\omega} = \bar{\theta}_l = 0$, $\bar{\theta}_s = -1$. Pour $t > 0$, les conditions frontières sont données dans le Tableau 2.

Seule la condition d'interface ne peut être insérée dans cette formulation générale, et prend donc la forme suivante:

$$\bar{k} \cdot T_{sub} \cdot \bar{\nabla} \bar{\theta}_s \Big|_{interface} - \bar{\nabla} \bar{\theta}_l \Big|_{interface} = \frac{\bar{\rho}}{Ste} \cdot \bar{V}_n \quad (12)$$

Les nombres sans dimension sont définis comme suit:

$$\begin{aligned} A &= \frac{L}{H} \\ T_{sub} &= \frac{(T_F - T_C)}{(T_H - T_F)} \\ Pr &= \frac{\nu}{\alpha_l} \\ Ra &= \frac{g \cdot \beta \cdot (T_H - T_F)}{\nu \cdot \alpha_l} \\ Ste &= \frac{c_l \cdot (T_H - T_F)}{h_f} \\ \bar{\alpha} &= \frac{\alpha_s}{\alpha_l} = \left(\frac{k_s}{\rho_s \cdot c_s} \right) \cdot \left(\frac{\rho_l \cdot c_l}{k_l} \right) \\ \bar{\rho} &= \frac{\rho_s}{\rho_l} \\ \bar{k} &= \frac{k_s}{k_l} \end{aligned}$$

Le nombre A est le rapport de la longueur de la cavité sur sa hauteur. T_{sub} est le coefficient de sous-refroidissement. Le nombre de Prandtl, Pr , est un paramètre qui caractérise la substance utilisée. Le nombre de Rayleigh, Ra , pondère l'intensité de la convection naturelle par rapport à la conduction. Le nombre de Stéfan, Ste , est le rapport entre la chaleur sensible et la chaleur latente de la substance utilisée; donc un rapport qui caractérise la vitesse de l'interface solide-liquide.

2 Transformation en coordonnées curvilignes généralisées

La solution numérique par différences finies d'équations de transfert dans des géométries complexes présente de grandes difficultés. L'une d'elle est le traitement des conditions

frontières dont les noeuds du réseau uniforme ne coïncident pas avec les formes arbitraires de la géométrie complexe. C'est justement le cas de l'interface solide/liquide dont la forme est irrégulière. Afin de faciliter la discrétisation de ces conditions limites, on utilise un réseau curviligne qui s'adapte aux frontières complexes. Il faut toutefois transformer les équations de transfert de leur repère original (x, y) au nouveau repère, le plan transformé (ξ, η). Comme nous l'avons souligné précédemment, les équations dans le plan transformé sont plus longues, mais les frontières sont plus facilement discrétisées.

Utilisant la règle des dérivées en chaîne, l'équation générale de transfert, Éq. (11), est transformée du plan (x, y) au plan (ξ, η) :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{1}{J} \left[\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial t} \right] \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial \xi} + \frac{1}{J} \left[\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial t} \right] \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial \eta} \\ & + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(\rho U \phi) - \frac{\Gamma}{J} \left(\alpha \frac{\partial \phi}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) \right] + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(\rho V \phi) - \frac{\Gamma}{J} \left(\gamma \frac{\partial \phi}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) \right] = S(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (13)$$

Le terme source $S(\xi, \eta)$ demeure inchangé dans les équations de courant et de température.

Dans l'équation de vorticité, il prend la forme suivante:

$$S(\xi, \eta) = \frac{Ra \cdot Pr}{J} \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial \eta} \frac{\partial \bar{\theta}_l}{\partial \xi} - \frac{\partial \bar{y}}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{\theta}_l}{\partial \eta} \right)$$

Les vitesses transformées U, V et les facteurs géométriques α, β, γ et le jacobien J sont définis comme suit:

$$\begin{aligned} U &= \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \eta} \\ V &= -\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \xi} \\ \alpha &= \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial \eta} \right)^2 \\ \beta &= \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \gamma &= \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial \xi} \right)^2 \\ J &= \frac{\partial \bar{x}}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \eta} - \frac{\partial \bar{x}}{\partial \eta} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \xi} \end{aligned}$$

Les conditions initiales demeurent, bien sûr, inchangées tandis que les conditions frontières sont maintenant données au Tableau 3. La condition de Stéfan à l'interface prend alors

Tableau 3 Conditions frontières dans l'espace transformé

Conditions frontières	Fonction de courant	Vorticité	Température (phase liquide)	Température (phase solide)
paroi chauffée	$\bar{\psi} = 0$	$\bar{\omega} = -\frac{\alpha}{J^2} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \xi^2}$	$\bar{\theta}_l = 1$	nil
Paroi refroidie	nil	nil	nil	$\bar{\theta}_s = -1$
Parois horizontales adiabatiques	$\bar{\psi} = 0$	$\bar{\omega} = -\frac{\gamma}{J^2} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial \bar{\theta}_l}{\partial \eta} = \frac{\beta}{\gamma} \frac{\partial \bar{\theta}_l}{\partial \xi}$	$\frac{\partial \bar{\theta}_s}{\partial \eta} = \frac{\beta}{\gamma} \frac{\partial \bar{\theta}_s}{\partial \xi}$
Interface solide/liquide	$\bar{\psi} = 0$	$\bar{\omega} = -\frac{\alpha}{J^2} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \xi^2}$	$\bar{\theta}_l = 0$	$\bar{\theta}_s = 0$

la forme suivante:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{k} \cdot T_{sub} \cdot Ste}{\bar{\rho}} \cdot \left(\frac{1}{J} \cdot \left[\frac{\partial \bar{y}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \bar{\theta}_s}{\partial \xi} \right] \right) \Big|_{interface} - \frac{Ste}{\bar{\rho}} \cdot \left(\frac{1}{J} \cdot \left[\frac{\partial \bar{y}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \bar{\theta}_l}{\partial \xi} \right] \right) \Big|_{interface} &= \bar{u}_n \\ \frac{\bar{k} \cdot T_{sub} \cdot Ste}{\bar{\rho}} \cdot \left(\frac{1}{J} \cdot \left[-\frac{\partial \bar{x}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \bar{\theta}_s}{\partial \xi} \right] \right) \Big|_{interface} - \frac{Ste}{\bar{\rho}} \cdot \left(\frac{1}{J} \cdot \left[-\frac{\partial \bar{x}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \bar{\theta}_l}{\partial \xi} \right] \right) \Big|_{interface} &= \bar{v}_n \end{aligned} \quad (14)$$

Puisque l'interface solide/liquide se déplace principalement dans la direction horizontale, on ne retiendra que la composante \bar{u}_n pour calculer le déplacement des noeuds à chaque intervalle de temps. On remarque toutefois que la grandeur de la composante de la vitesse selon y est pondérée par la présence du terme $\frac{\partial \bar{x}}{\partial \eta}$. Cè terme peut être vu physiquement

comme étant une mesure de l'inclinaison de l'interface par rapport à la verticale. Ainsi, si l'interface solide/liquide est à un angle de 45° , ou plus, la composante de la vitesse selon y n'est plus négligeable. On doit alors recourir aux deux composantes, Éq. (14), pour le calcul du déplacement du front. Dans la présente étude, cela n'est pas nécessaire puisque seule un petit segment de l'interface solide/liquide est incliné de la sorte.

3 Génération du maillage

La génération du réseau curviligne peut-être accomplie à l'aide de formules algébriques, par la résolution d'équations différentielles de mailles, ou encore à l'aide de fonctions d'interpolation. La génération d'un réseau par la résolution d'équations différentielles est une méthode très rigoureuse et puissante. Elle est toutefois onéreuse en temps de calcul lorsque le maillage doit être reconstruit à chaque pas de temps. C'est précisément le cas dans les problèmes de changement de phase.

Les alternatives consistent en l'utilisation de fonctions d'interpolation, ou encore de relations algébriques. Cette dernière option offre la possibilité d'évaluer les coefficients géométriques analytiquement ou numériquement. La relation algébrique proposée ici est une transformation exponentielle qui permet de concentrer, à volonté, les noeuds du maillage à proximité des frontières.

Ainsi, pour les coordonnées \bar{x} de la phase liquide, on a

$$\begin{aligned} \bar{x}(\xi, \eta, t) &= \sigma(\bar{y}, t) \cdot \left\{ a_x \cdot \left[\exp\left(\frac{\xi-1}{b_x}\right) - 1 \right] \right\} \\ \text{ou} \quad a_x &= \frac{1}{2} \cdot \left[\exp\left(\frac{M-1}{2 \cdot b_x}\right) - 1 \right]^{-1} \\ \text{pour} \quad 1 &\leq \xi \leq \frac{M-1}{2} + 1 \end{aligned} \quad (15)$$

et pour $\frac{M-1}{2}+2 \leq \xi \leq M$ la distribution étant symétrique par rapport au point $\xi = \frac{M-1}{2}+1$

$$\begin{aligned} \bar{x}(\xi, \eta, \bar{t}) &= \sigma(\bar{y}, \bar{t}) \cdot \left\{ 1 - a_x \cdot \left[\exp\left(-\frac{[\xi - M]}{b_x}\right) - 1 \right] \right\} \\ \text{ou } a_x &= \frac{1}{2} \cdot \left[\exp\left(\frac{M-1}{2 \cdot b_x}\right) - 1 \right]^{-1} \\ \text{pour } \frac{M-1}{2} + 1 &\leq \xi \leq M \end{aligned} \quad (16)$$

Pour les coordonnées \bar{y} de la phase liquide, on a

$$\begin{aligned} \bar{y}(\xi, \eta, \bar{t}) &= \left\{ a_y \cdot \left[\exp\left(\frac{\eta-1}{b_y}\right) - 1 \right] \right\} \\ \text{ou } a_y &= \frac{1}{2} \cdot \left[\exp\left(\frac{N-1}{2 \cdot b_y}\right) - 1 \right]^{-1} \\ \text{pour } 1 &\leq \eta \leq \frac{N-1}{2} + 1 \end{aligned} \quad (17)$$

et pour $\frac{N-1}{2}+2 \leq \eta \leq N$ la distribution étant symétrique par rapport au point $\eta = \frac{N-1}{2}+1$

$$\begin{aligned} \bar{y}(\xi, \eta, \bar{t}) &= \left\{ 1 - a_y \cdot \left[\exp\left(-\frac{[\eta - N]}{b_y}\right) - 1 \right] \right\} \\ \text{ou } a_y &= \frac{1}{2} \cdot \left[\exp\left(\frac{N-1}{2 \cdot b_y}\right) - 1 \right]^{-1} \\ \text{pour } \frac{N-1}{2} + 1 &\leq \eta \leq N \end{aligned} \quad (18)$$

Pour les coordonnées \bar{x} de la phase solide, on a

$$\begin{aligned} \bar{x}(\xi, \eta, \bar{t}) &= \sigma(\bar{y}, \bar{t}) + \{A - \sigma(\bar{y}, \bar{t})\} \cdot \left\{ a_x \cdot \left[\exp\left(\frac{\xi-1}{b_x}\right) - 1 \right] \right\} \\ \text{ou } a_x &= \frac{1}{2} \cdot \left[\exp\left(\frac{MS-1}{2 \cdot b_x}\right) - 1 \right]^{-1} \\ \text{pour } 1 &\leq \xi \leq \frac{MS-1}{2} + 1 \end{aligned} \quad (19)$$

et pour $\frac{MS-1}{2} + 2 \leq \xi \leq MS$ la distribution étant symétrique par rapport au point

$$\xi = \frac{MS-1}{2} + 1$$

$$\bar{x}(\xi, \eta, \bar{t}) = \sigma(\bar{y}, \bar{t}) + \{A - \sigma(\bar{y}, \bar{t})\} \cdot \left\{ 1 - a_x \cdot \left[\exp\left(-\frac{[\xi - MS]}{b_x}\right) - 1 \right] \right\}$$

$$\text{ou } a_x = \frac{1}{2} \cdot \left[\exp\left(\frac{MS-1}{2 \cdot b_x}\right) - 1 \right]^{-1} \quad (20)$$

$$\text{pour } \frac{MS-1}{2} + 1 \leq \xi \leq MS$$

Pour les coordonnées \bar{y} de la phase solide, on a

$$\bar{y}(\xi, \eta, \bar{t}) = \left\{ 1 - a_y \cdot \left[\exp\left(\frac{\eta-1}{b_y}\right) - 1 \right] \right\}$$

$$\text{ou } a_y = \frac{1}{2} \cdot \left[\exp\left(\frac{NS-1}{2 \cdot b_y}\right) - 1 \right]^{-1} \quad (21)$$

$$\text{pour } 1 < \eta < \frac{NS-1}{2} + 1$$

et pour $\frac{NS-1}{2} + 2 \leq \eta \leq NS$ la distribution étant symétrique par rapport au point

$$\eta = \frac{NS-1}{2} + 1$$

$$\bar{y}(\xi, \eta, \bar{t}) = \left\{ 1 - a_y \cdot \left[\exp\left(-\frac{[\eta - NS]}{b_y}\right) - 1 \right] \right\}$$

$$\text{ou } a_y = \frac{1}{2} \cdot \left[\exp\left(\frac{NS-1}{2 \cdot b_y}\right) - 1 \right]^{-1} \quad (22)$$

$$\text{pour } \frac{NS-1}{2} + 1 \leq \eta \leq NS$$

M et MS représentent le nombre de noeuds dans la direction \bar{x} pour les phases liquide et solide respectivement. N et NS représentent le nombre de noeuds dans la direction \bar{y} pour les phases liquide et solide respectivement. $\sigma(\bar{y}, \bar{t})$ est la position de l'interface solide/liquide dans l'espace adimensionné (\bar{x}, \bar{y}) . Les paramètres b_x et b_y contrôlent la concentration des noeuds dans les directions \bar{x} et \bar{y} respectivement. Plus ils sont petits, plus les noeuds sont comprimés près des parois. Leurs valeurs varient généralement entre

5 (forte concentration des noeuds près des parois) et 10 000 (distribution uniforme des noeuds dans le domaine).

Les coefficients géométriques peuvent ainsi être évalués numériquement ou algébriquement.

4 Solution numérique

Les équations aux différences finies sont obtenues en intégrant les équations de conservation sur chacun des volumes de contrôle dans l'espace transformé (ξ, η) . La méthode de discrétisation retenue est décrite en détail par Lacroix [13]. Les équations linéarisées sont alors résolues itérativement pour $\bar{\theta}_l$, $\bar{\theta}_s$, $\bar{\omega}$ et $\bar{\psi}$ en utilisant une méthode de relaxation alternée par colonnes (colonnes ξ croissantes) et par lignes (lignes η décroissantes) . La convergence, pour un pas de temps donné, est atteinte quand le résidu maximal de chaque noeud est moins de 10^{-3} . La solution numérique progresse dans le temps par une série de petits intervalles de temps durant lesquels l'interface solide/liquide est présumée immobile. Pour chacun de ces intervalles, les équations de transfert sont résolues implicitement en prenant en compte les termes transitoires dans le domaine transformé où l'interface est fixe. La solution des équations permet alors l'évaluation des flux d'énergie à l'interface solide/liquide après le pas de temps. Le déplacement de l'interface est alors évalué de façon implicite à partir de l'intégration, sur un pas de temps, de la conditions d'interface, Éq. (13). On obtient ainsi le nouveau domaine d'analyse pour le pas de temps suivant.

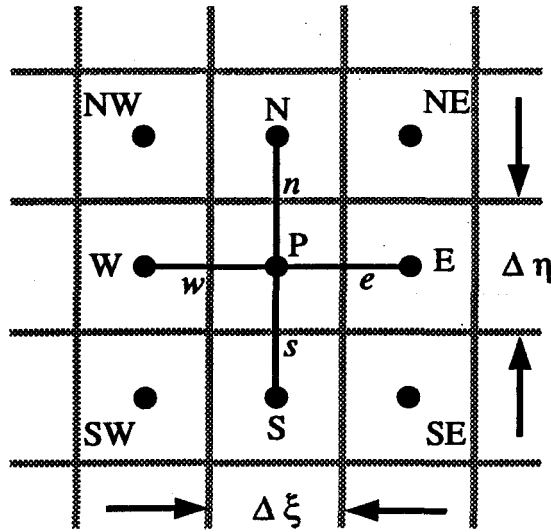


Figure 2 Volume de contrôle dans le plan transformé (ξ , η)

Équation générale aux différences

La différence entre la méthode aux différences finies et la méthode aux volumes finis est importante. Contrairement à la méthode aux différences finies, la méthode aux volumes finis assure la conservation intégrale de la quantité scalaire ϕ .

En intégrant l'équation générale, Éq.(13), dans un volume de contrôle du plan transformé (ξ , η), Fig. 2 , et en regroupant les termes, on obtient l'équation aux différences suivante:

$$\begin{aligned}
 ASW \cdot \phi_{SW} + AS \cdot \phi_S + ASE \cdot \phi_{SE} + AW \cdot \phi_W + AP \cdot \phi_P + AE \cdot \phi_E \\
 + ANW \cdot \phi_{NW} + AN \cdot \phi_N + ANE \cdot \phi_{NE} = Q
 \end{aligned}
 \tag{ 23 }$$

pour laquelle

$$ASW = E_w + E_s$$

$$ASE = -E_e - E_s$$

$$ANW = -E_w - E_n$$

$$ANE = E_e + E_n$$

$$AS = \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{t}} - \frac{\partial \bar{y}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{t}} \right) - \Lambda_s - E_e + E_w$$

$$AW = \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{t}} - \frac{\partial \bar{x}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{t}} \right) - \Lambda_w - E_n + E_s$$

$$AP = \left(\frac{\rho \cdot J}{\Delta \bar{t}} \right) + \Lambda_w + \Lambda_e + \Lambda_s + \Lambda_n$$

$$AE = \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{t}} - \frac{\partial \bar{y}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{t}} \right) - \Lambda_e + E_n - E_s$$

$$AN = \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{t}} - \frac{\partial \bar{x}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{t}} \right) - \Lambda_n + E_e - E_w$$

$$Q = \frac{\rho \cdot J}{\Delta \bar{t}} \cdot \phi_p^n + J \cdot S(\xi, \eta)$$

et où

$$A_s = D_s + \frac{C_s}{2} \quad , \quad A_n = D_n - \frac{C_n}{2} \quad , \quad A_w = D_w + \frac{C_w}{2} \quad , \quad A_e = D_e - \frac{C_e}{2}$$

$$C_e = (\rho \cdot U)_e \quad , \quad C_w = (\rho \cdot U)_w \quad , \quad C_s = (\rho \cdot V)_s \quad , \quad C_n = (\rho \cdot V)_n$$

$$D_e = \left(\frac{\Gamma}{J} \cdot \alpha \right)_e, \quad D_w = \left(\frac{\Gamma}{J} \cdot \alpha \right)_w, \quad D_s = \left(\frac{\Gamma}{J} \cdot \gamma \right)_s, \quad D_n = \left(\frac{\Gamma}{J} \cdot \gamma \right)_n$$

$$E_e = \left(\frac{\Gamma}{4 \cdot J} \cdot \beta \right)_e, \quad E_s = \left(\frac{\Gamma}{4 \cdot J} \cdot \beta \right)_s, \quad E_w = \left(\frac{\Gamma}{4 \cdot J} \cdot \beta \right)_w, \quad E_n = \left(\frac{\Gamma}{4 \cdot J} \cdot \beta \right)_n$$

Il est à noter que $\Delta\xi = 1$ et $\Delta\eta = 1$. Les détails de cette intégration et les coefficients apparaissant dans cette équation sont donnés dans la référence [14]. Les termes géométriques témoignant de la non-orthogonalité du maillage sont compris dans les coefficients ASW, ASE, ANW et ANE. Le terme Q contient le terme source $S(\xi, \eta)$ et la valeur ϕ_p^n , c'est-à-dire la valeur ϕ_p au temps précédent. Les termes convectifs et diffusifs apparaissant dans les coefficients AS, AW, AP, AE et AN sont discrétisés à l'aide du schéma de la loi de puissance de Patankar[15] afin d'assurer la stabilité numérique lorsque les termes convectifs dominent les termes diffusifs.

Les équations linéarisées sont alors résolues itérativement pour $\bar{\theta}_l$, $\bar{\theta}_s$, ω et ψ en utilisant une méthode de relaxation alternée par colonnes (colonnes ξ croissantes) et par lignes (lignes η décroissantes).

Conditions frontières discrétisées

Comme nous l'avons défini, la fonction de courant a pour valeur zéro sur les parois solides.

Les conditions frontières de la vorticité sont déterminées en effectuant un développement en série de Taylor de la fonction de courant au noeud $w+1$ situé à une distance Δr d'un point w reposant sur une paroi solide imperméable (Fig. 3):

Mais de la condition d'adhérence, $\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial r} \Big|_w = 0$, et isolant la dérivée seconde on obtient:

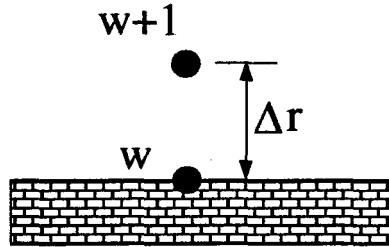


Figure 3 Condition frontière de la vorticité sur une paroi imperméable

$$\bar{\psi}_{w+1} = \bar{\psi}_w + \Delta r \cdot \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial r} \Big|_w + \frac{\Delta r^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial r^2} \Big|_w + O(\Delta r^3)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial r^2} = \frac{2}{\Delta r} \cdot (\bar{\psi}_{w+1} - \bar{\psi}_w)$$

Puisque la valeur de la fonction de courant a été posée égale à zéro sur toutes les frontières solides, $\bar{\psi}_w = 0$, on tire de la définition de la fonction de vorticité la condition frontière générale de la vorticité à une paroi solide imperméable:

$$\bar{\omega} = -\frac{2}{\Delta r^2} \cdot \bar{\psi}_{w+1}$$

Afin d'introduire rigoureusement les conditions frontières de la température aux parois adiabatiques, on doit intégrer l'équation générale de conservation pour la température dans un demi-volume de contrôle à proximité de la paroi solide. Ainsi à la frontière sud (Fig. 4), l'équation de transfert discrétisée devient:

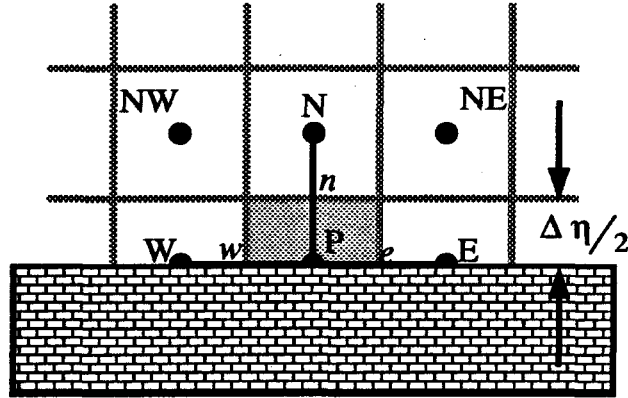


Figure 4 Demi-volume de contrôle à la paroi solide sud

$$AW \cdot \bar{\theta}_W + AP \cdot \bar{\theta}_P + AE \cdot \bar{\theta}_E + ANW \cdot \bar{\theta}_{NW} + AN \cdot \bar{\theta}_N + ANE \cdot \bar{\theta}_{NE} = Q \quad (24)$$

pour laquelle

$$ANW = -2 \cdot E_n$$

$$AN = \left(\left[\frac{\partial \bar{y}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \bar{x}}{\partial t} - \frac{\partial \bar{x}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \bar{y}}{\partial t} \right] \right)_P \cdot \rho_n - 2 \cdot A_n$$

$$ANE = 2 \cdot E_n$$

$$AW = \left(-\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\partial \bar{x}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \bar{y}}{\partial t} - \frac{\partial \bar{y}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \bar{x}}{\partial t} \right] \right)_P \cdot \rho_w - A_w + 4 \cdot E_w \cdot \left(\frac{\beta}{\gamma} \right)_w - 2 \cdot E_n$$

$$\begin{aligned} AP &= \left(\frac{\rho \cdot J}{\Delta t} \right)_P - \left(\left[\frac{\partial \bar{y}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \bar{x}}{\partial t} - \frac{\partial \bar{x}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \bar{y}}{\partial t} \right] \right)_P \\ &+ A_w + A_e + 2 \cdot A_n \\ &- 4 \cdot E_w \cdot \left(\frac{\beta}{\gamma} \right)_w - 4 \cdot E_e \cdot \left(\frac{\beta}{\gamma} \right)_e \end{aligned}$$

$$AE = \left(\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\partial \bar{x}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{t}} - \frac{\partial \bar{y}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{t}} \right] \right)_P \cdot \rho_e - A_e + 4 \cdot E_e \cdot \left(\frac{\beta}{\gamma} \right)_e + 2 \cdot E_n$$

$$Q = \left(\frac{J}{\Delta \bar{t}} \right)_P \cdot (\rho \cdot \bar{\theta})_P^n$$

À la frontière nord (Fig. 5), l'équation discrétisée devient

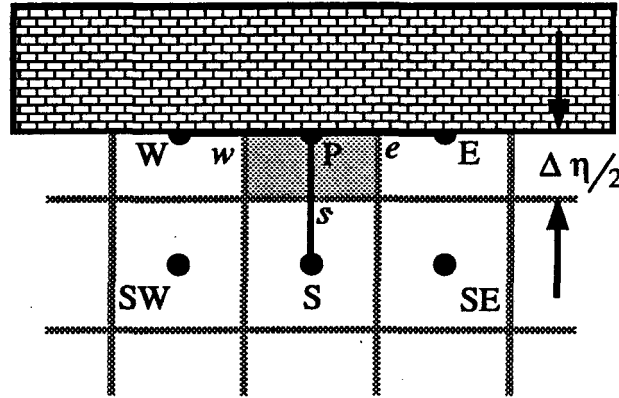


Figure 5 Demi-volume de contrôle à la paroi solide nord

$$AW \cdot \bar{\theta}_W + AP \cdot \bar{\theta}_P + AE \cdot \bar{\theta}_E + ASW \cdot \bar{\theta}_{SW} + AS \cdot \bar{\theta}_S + ASE \cdot \bar{\theta}_{SE} = Q \quad (25)$$

pour laquelle

$$ASW = 2 \cdot E_s$$

$$AS = - \left(\left[\frac{\partial \bar{y}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{t}} - \frac{\partial \bar{x}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{t}} \right] \right)_P \cdot \rho_s - 2 \cdot A_s$$

$$ASE = -2 \cdot E_s$$

$$AW = - \left(\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\partial \bar{x}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{t}} - \frac{\partial \bar{y}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{t}} \right] \right)_P \cdot \rho_w - A_w + 4 \cdot E_w \cdot \left(\frac{\beta}{\gamma} \right)_w + 2 \cdot E_s$$

$$\begin{aligned}
AP &= \left(\frac{\rho \cdot J}{\Delta t} \right)_P + \left(\left[\frac{\partial \bar{y}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{t}} - \frac{\partial \bar{x}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{t}} \right] \right)_P \\
&\quad + A_w + A_e + 2 \cdot A_s \\
&\quad - 4 \cdot E_w \cdot \left(\frac{\beta}{\gamma} \right)_w - 4 \cdot E_e \cdot \left(\frac{\beta}{\gamma} \right)_e \\
AE &= \left(\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\partial \bar{x}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{t}} - \frac{\partial \bar{y}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{t}} \right] \right)_P \cdot \rho_e - A_e + 4 \cdot E_e \cdot \left(\frac{\beta}{\gamma} \right)_e - 2 \cdot E_s \\
Q &= \left(\frac{J}{\Delta t} \right)_P \cdot (\rho \cdot \bar{\theta})_P^n
\end{aligned}$$

Condition de Stéfán discrétisée et intégrée

Tel que mentionné précédemment, la condition de Stéfán à l'interface prend la forme suivante:

$$\frac{\bar{k} \cdot T_{sub} \cdot Ste}{\bar{\rho}} \cdot \left(\frac{1}{J} \cdot \left[\frac{\partial \bar{y}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \bar{\theta}_s}{\partial \xi} \right] \right) \Big|_{interface} - \frac{Ste}{\bar{\rho}} \cdot \left(\frac{1}{J} \cdot \left[\frac{\partial \bar{y}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \bar{\theta}_l}{\partial \xi} \right] \right) \Big|_{interface} = \bar{u}_n \quad (26)$$

Puisqu'une formule algébrique à été proposée pour la génération des maillages, on peut estimer algébriquement les termes. Dans le présent cas, une transformation de coordonnées analytique est proposée et on peut évaluer algébriquement les termes

$$\left(\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial \bar{y}}{\partial \eta} \right) \Big|_{interface} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \Big|_{interface}$$

pour les phase liquide et solide.

Dans la phase liquide, on a

$$\left(\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial \bar{y}}{\partial \eta} \right) \Big|_{interface} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \Big|_{interface} = \frac{b_x}{\sigma(\bar{y}, \bar{t}) \cdot a_x}$$

et dans la phase solide on a

$$\left(\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial \bar{y}}{\partial \eta} \right) \Big|_{interface} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \Big|_{interface} = \frac{b_x}{(A - \sigma(\bar{y}, \bar{t})) \cdot a_x}$$

Substituant ces valeurs dans l'équation d'interface (Éq. (26)), on obtient

$$\frac{\bar{k} \cdot T_{sub} \cdot Ste \cdot b_x}{\bar{\rho} \cdot (A - \sigma(\bar{y}, \bar{t})) \cdot a_x} \cdot \frac{\partial \bar{\theta}_s}{\partial \xi} \Big|_{interface} - \frac{Ste \cdot b_x}{\bar{\rho} \cdot \sigma(\bar{y}, \bar{t}) \cdot a_x} \cdot \frac{\partial \bar{\theta}_l}{\partial \xi} \Big|_{interface} = \bar{u}_n = \frac{d\sigma}{d\bar{t}} \quad (27)$$

Posons

$$a = \frac{\bar{k} \cdot T_{sub} \cdot Ste \cdot b_x}{\bar{\rho} \cdot a_x} \cdot \frac{\partial \bar{\theta}_s}{\partial \xi} \Big|_{interface}$$

$$b = \frac{Ste \cdot b_x}{\bar{\rho} \cdot a_x} \cdot \frac{\partial \bar{\theta}_l}{\partial \xi} \Big|_{interface}$$

pour obtenir la forme plus compacte suivante:

$$\frac{a}{(A - \sigma(\bar{y}, \bar{t}))} - \frac{b}{\sigma(\bar{y}, \bar{t})} = \frac{d\sigma}{d\bar{t}} \quad (28)$$

On intègre, par séparation de variable, cette dernière équation sur un pas de temps $\Delta \bar{t}$,

$$\int_{\bar{t}}^{\bar{t} + \Delta \bar{t}} d\bar{t} = \int_{\sigma(\bar{y}, \bar{t})}^{\sigma(\bar{y}, \bar{t} + \Delta \bar{t})} \frac{d\sigma}{\left(\frac{a}{(A - \sigma)} - \frac{b}{\sigma} \right)}$$

soit

$$\int_{\bar{t}}^{\bar{t} + \Delta \bar{t}} d\bar{t} = \int_{\sigma(\bar{y}, \bar{t})}^{\sigma(\bar{y}, \bar{t} + \Delta \bar{t})} \frac{A \cdot \sigma}{\sigma \cdot (a + b) - b \cdot A} \cdot d\sigma - \int_{\sigma(\bar{y}, \bar{t})}^{\sigma(\bar{y}, \bar{t} + \Delta \bar{t})} \frac{\sigma^2}{\sigma \cdot (a + b) - b \cdot A} \cdot d\sigma$$

Ce qui donne

$$\Delta \bar{t} = \left\{ A \left(\frac{\sigma}{(a + b)} + \frac{A \cdot b}{(a + b)^2} \cdot \ln[(a + b) \cdot \sigma - A \cdot b] \right) \right\} \Big|_{\sigma(\bar{y}, \bar{t})}^{\sigma(\bar{y}, \bar{t} + \Delta \bar{t})}$$

$$- \left\{ \frac{\sigma^2}{2 \cdot (a + b)} + \frac{A \cdot b \cdot \sigma}{(a + b)^2} + \frac{(A \cdot b)^2}{(a + b)^3} \cdot \ln[(a + b) \cdot \sigma - A \cdot b] \right\} \Big|_{\sigma(\bar{y}, \bar{t})}^{\sigma(\bar{y}, \bar{t} + \Delta \bar{t})} \quad (29)$$

En posant $\sigma_o = \sigma(\bar{y}, \bar{t})$ et $\sigma_n = \sigma(\bar{y}, \bar{t} + \Delta\bar{t})$, on regroupe les termes pour obtenir la forme finale suivante:

$$\Delta\bar{t} = \frac{A}{(a+b)} \cdot \left(1 - \frac{b}{(a+b)}\right) \cdot \left\{ (\sigma_n - \sigma_o) + \frac{A \cdot b}{(a+b)} \cdot \ln \left[\frac{(a+b) \cdot \sigma_n - A \cdot b}{(a+b) \cdot \sigma_o - A \cdot b} \right] \right\} - \frac{(\sigma_n^2 - \sigma_o^2)}{2 \cdot (a+b)} \quad (30)$$

Connaissant tous les paramètres et variables, à l'exception de $\sigma_n = \sigma(\bar{y}, \bar{t} + \Delta\bar{t})$, on détermine cette dernière valeur de façon implicite en cherchant entre les bornes

$$\sigma_o \leq \sigma_n \leq \frac{A \cdot b}{(a+b)}$$

De plus, à l'aide de l'Éq. (28), on peut développer un critère d'arrêt des calculs dans le cas où l'interface devient immobile: Quand tous les points de l'interface sont immobiles, $\frac{d\sigma}{dt} = 0$, et alors

$$\sigma(\bar{y}, \bar{t}) = \frac{b \cdot A}{(a+b)} \quad (31)$$

En conséquence, on a donc choisi cette valeur comme limite supérieure lors de l'évaluation de la nouvelle position de l'interface. Cette approche pour déterminer implicitement la position de l'interface solide liquide a été appliquée avec succès au problème de Stéfán à deux phases en une dimension[16]

Algorithme global

L'algorithme du programme de transfert de chaleur est donné à la Fig. 6. Les équations de température, de vorticité et de la fonction de courant sont résolues à tour de rôle et dans l'ordre jusqu'à ce que la convergence désirée soit atteinte. La nouvelle position de l'interface solide/liquide est alors prédite et un nouveau maillage est généré analytiquement. Les calculs se poursuivent pendant une période de temps fixe ou jusqu'au moment où l'interface solide/liquide soit complètement immobile.

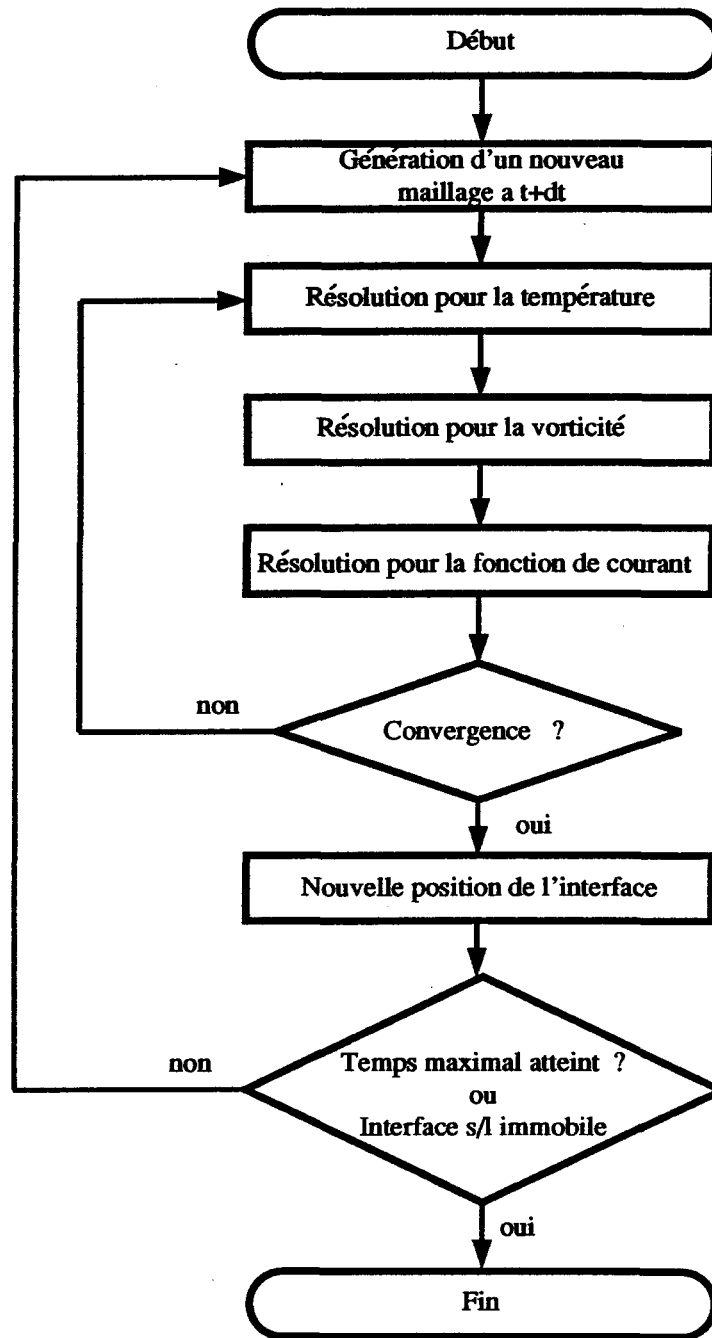


Figure 6 Algorithme du programme de transfert de chaleur

On démarre les calculs avec une mince couche de fluide. L'épaisseur de cette couche est choisie de façon à ce que le nombre de Rayleigh basé sur cette épaisseur soit moins de 300 soit une valeur pour laquelle la conduction est le principal mécanisme de transfert

de chaleur. L'expérience nous propose un maillage de 27×27 noeuds distribués non-uniformément comme compromis entre la précision et le temps de calcul. Le temps total simulé est de 60 minutes avec un pas de temps constant de 1 seconde. Dans ces conditions, le temps CPU de calcul est approximativement 6 heures sur un ordinateur IRIS 4D-60 (33 Mhz).

III

RÉSULTATS ET DISCUSSION

1 Validation du modèle

Le modèle que nous venons de présenter est utilisé pour simuler la fusion du gallium lorsqu'il y a sous-refroidissement dans la partie solide. Ce métal pur a été choisi parce que des expériences de fusion en laboratoire ont déjà été faites et sont présentées par Beckermann and Viskanta[12]. Ces expériences ont été réalisées pour une cellule rectangulaire d'une hauteur H et d'une largeur L de 4.76 cm, et d'une profondeur de 3.81 cm. Les variations globales de température dans les régions liquide et solide sont $\Delta T_l = 10.2$ °C et $\Delta T_s = 4.8$ °C respectivement. Ces variations de température conduisent à un nombre de Rayleigh de 3.275×10^5 , un nombre de Stéfan de 5.074×10^{-2} , et un coefficient de sous-refroidissement de 0.468 . Pour valider le présent modèle, cette dernière expérience a été reprise numériquement.

Les comparaisons des valeurs prédites et les données expérimentales pour la position finale de l'interface, le nombre de Nusselt moyen à la paroi chauffée, et la fraction

volumique liquide sont données aux Fig. 7, 9 et 8 respectivement. Les valeurs prédites sont en très bon accord avec les mesures expérimentales.

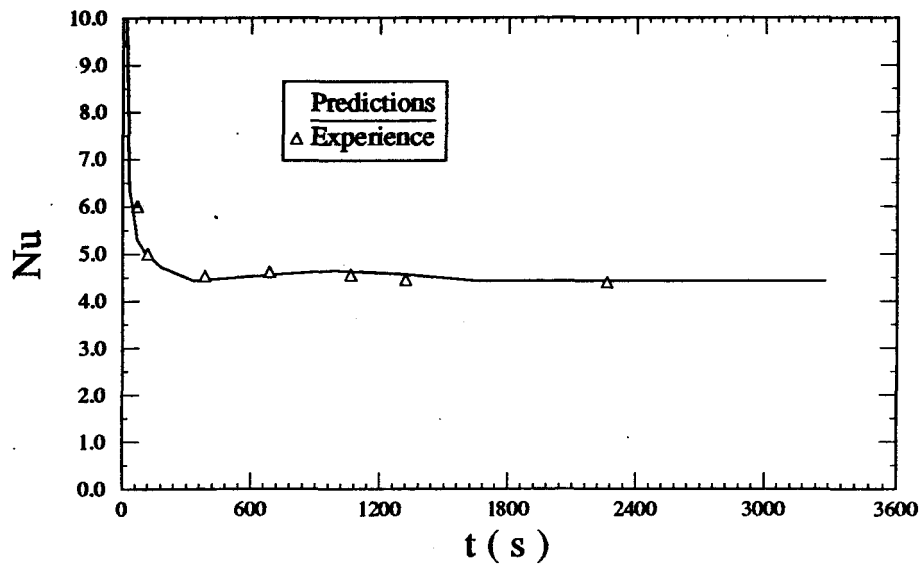


Figure 7 Nombre de Nusselt moyen à la paroi chauffée versus les données expérimentales[12]

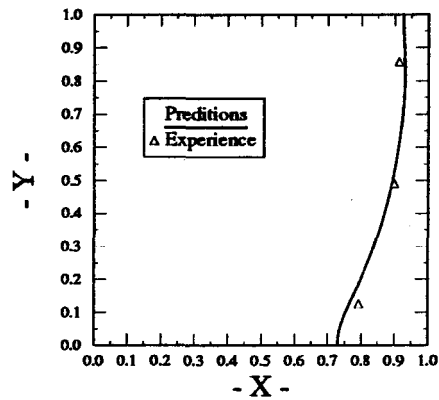


Figure 8 Position finale de l'interface prédite versus les données expérimentales [12]

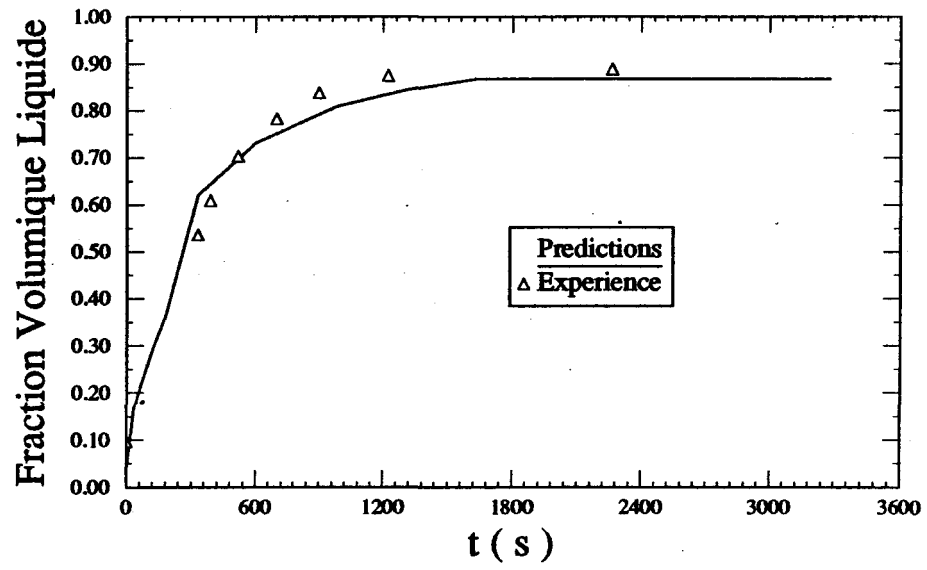


Figure 9 Fraction volumique liquide versus les données expérimentales [12]

2 Expériences montrant l'influence du sous-refroidissement sur la fusion.

Une série de neuf expériences numériques ont été faites pour déterminer l'effet du coefficient de sous-refroidissement et du nombre de Rayleigh. Les paramètres caractéristiques de ces essais sont donnés dans le Tableau 4.

Tableau 4 Sommaire des expériences réalisées

Expérience	Ra	Ste	ΔT_l (°C)	S_T
A1	$1,8 \times 10^5$	$2,5 \times 10^{-2}$	5	0,5
A2	$1,8 \times 10^5$	$2,5 \times 10^{-2}$	5	1,0
A3	$1,8 \times 10^5$	$2,5 \times 10^{-2}$	5	2,0
B1	$3,6 \times 10^5$	$5,0 \times 10^{-2}$	10	0,5
B2	$3,6 \times 10^5$	$5,0 \times 10^{-2}$	10	1,0
B3	$3,6 \times 10^5$	$5,0 \times 10^{-2}$	10	2,0
C1	$7,2 \times 10^5$	$1,0 \times 10^{-1}$	20	0,5
C2	$7,2 \times 10^5$	$1,0 \times 10^{-1}$	20	1,0
C3	$7,2 \times 10^5$	$1,0 \times 10^{-1}$	20	2,0
$\rho_s/\rho_l = 0,969$; $\alpha_s/\alpha_l = 1,105$; $C_s/C_l = 0,934$; $k_s/k_l = 1,0$; $L = H = 5,0$ cm				

Description des régimes d'écoulement observés dans la phase liquide.

D'un point de vue transfert de chaleur, la dynamique de transfert est régie par les phénomènes de conduction et de convection naturelle dans la phase liquide, et de conduction dans la phase solide. Les phénomènes de transfert étant surtout orientés de gauche à droite (dimension horizontale), ils se caractériseront principalement par rapport aux dimensions physiques prises dans cette direction. Selon l'importance d'un mécanisme de transfert ou l'autre, un régime d'écoulement s'établira. Dans la présente étude, on observe cinq régimes d'écoulement (pages 35—37) qui se divisent comme suit:

1) Un régime de fusion où la conduction domine dans la phase liquide. Dans les premiers instants du processus de fusion, le système dans la phase liquide est caractérisé par une petite dimension horizontale de longueur qui crée de forts gradients de températures. Par conséquent ces gradients de températures favorisent la dominance du transfert de chaleur par conduction. Les isothermes demeurent verticales et parallèles.

Par ailleurs cette petite dimension de longueur tend à diminuer d'autant la convection naturelle dans le sens horizontal. Pour bien percevoir cette dernière notion, considérons un nombre de Rayleigh défini selon cette dimension. Ainsi, on a

$$Ra_{eff,x} = \frac{l \cdot u}{\nu}$$

On constate que si l diminue, il en sera de même pour le nombre de Rayleigh effectif. Toutefois, il existe quand même un faible tourbillon centré au coeur de la cavité liquide.

2) Un régime de fusion où la convection naturelle se développe dans la partie supérieure de la cavité. Lorsque la dimension horizontale s'est assez développée, amenant ainsi dans la phase liquide une augmentation de la résistance thermique en conduction au niveau de la résistance thermique en convection, les éléments de volumes fluides accélérés en provenance de la paroi chauffée négocient un virage dans le haut de la cavité, et amènent un flux de chaleur dans la partie supérieure de l'interface solide/liquide. Ce flux de chaleur contribue à augmenter le taux de fusion de la partie supérieure de l'interface solide/liquide offrant ainsi un espace disponible favorisant le développement de la convection. Durant ce régime, le centre du tourbillon s'élève vers le haut de la cavité pour atteindre un niveau fixe lorsque la convection s'est développée de façon complète.

Dans le bas de la cavité, les vitesses sont relativement faibles et la conduction est toujours le mode de transfert de chaleur dominant caractérisé par le parallélisme des

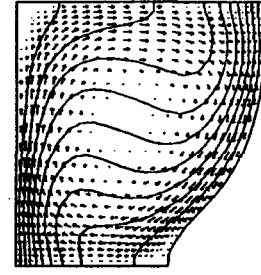
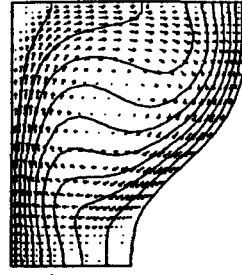
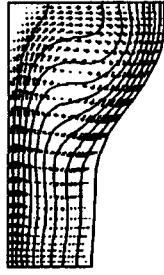
isothermes.

3) Régime de fusion où la convection naturelle prend de l'expansion dans la partie supérieure de la cavité. Lorsque le tourbillon est complètement développé dans le haut de la cavité, la majeure partie de la chaleur amenée dans la partie supérieure de l'interface solide/liquide contribue à faire fondre l'interface dans cette région. Conséquemment, la zone inférieure de l'interface solide/liquide fond toujours sous l'influence du mécanisme de conduction.

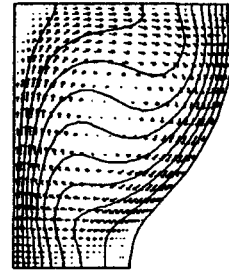
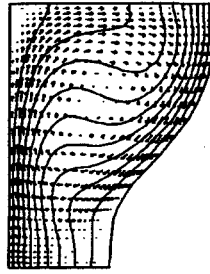
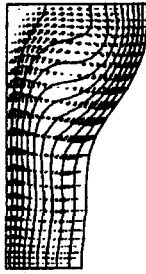
Le tourbillon s'étend latéralement jusqu'à temps que les flux de chaleur à l'interface solide/liquide soient à l'équilibre pour ce niveau. Le centre du tourbillon reste à la même hauteur.

4) Régime de fusion où la convection naturelle prend de l'expansion vers le bas de la cavité. L'expansion du tourbillon, après avoir été bloqué dans la partie supérieure de la cavité par le sous-refroidissement, s'effectue vers le bas de la cavité. Le centre du tourbillon tend alors à retourner vers le centre de la cavité. Lorsque le transfert de chaleur dans la partie supérieure de la cavité devient à l'équilibre, la chaleur amenée, principalement par convection, glisse le long de l'interface solide/liquide pour atteindre progressivement des régions de l'interface où le transfert de chaleur n'a pas encore atteint un point d'équilibre. Ceci se poursuit jusqu'au moment où le transfert de chaleur sur la totalité de l'interface solide/liquide atteint l'équilibre.

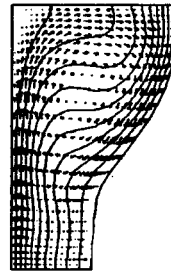
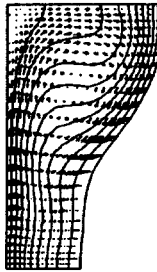
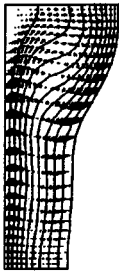
5) Régime établi de transfert de chaleur par convection naturelle. Enfin, le système global atteint un état d'équilibre thermique. Par conséquent, il n'y a plus de mouvement de l'interface solide/liquide. L'écoulement, animé par la convection naturelle, se poursuit en régime permanent.



Temps = 120 s Tsub = 0,5	Temps = 600 s Tsub = 0,5	Temps = 1800 s Tsub = 0,5	Temps = 3000 s Tsub = 0,5
-----------------------------	-----------------------------	------------------------------	------------------------------

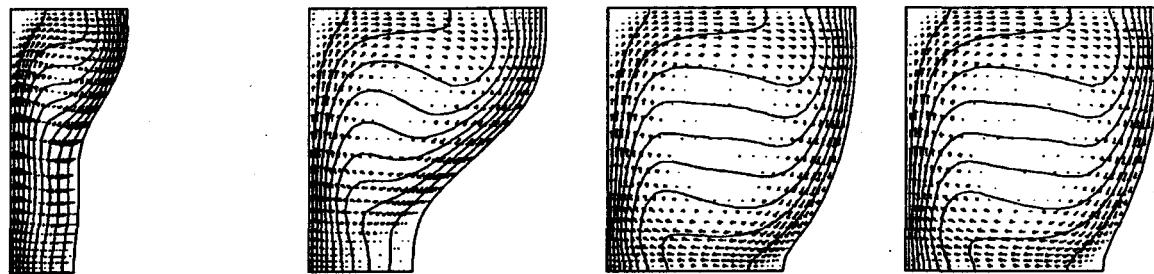


Temps = 120 s Tsub = 1,0	Temps = 600 s Tsub = 1,0	Temps = 1800 s Tsub = 1,0	Temps = 3000 s Tsub = 1,0
-----------------------------	-----------------------------	------------------------------	------------------------------

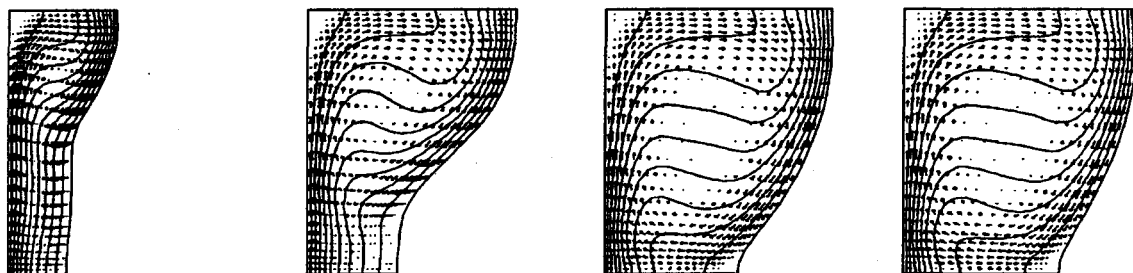


Temps = 120 s Tsub = 2,0	Temps = 600 s Tsub = 2,0	Temps = 1800 s Tsub = 2,0	Temps = 3000 s Tsub = 2,0
-----------------------------	-----------------------------	------------------------------	------------------------------

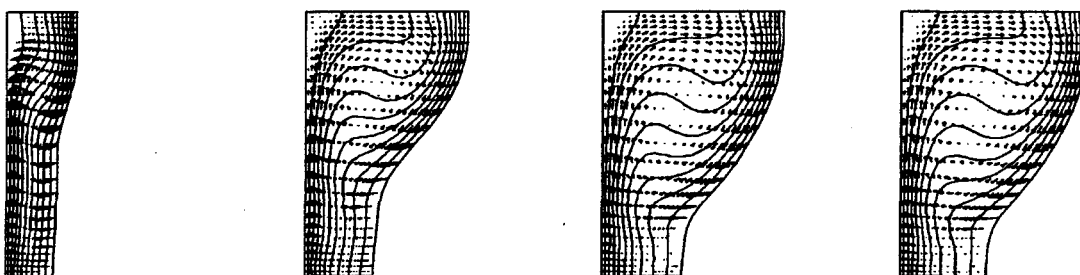
Figure 10 Champs de vitesses et de températures pour $Ra = 1,8 \times 10^5$



Temps = 120 s Tsub = 0,5	Temps = 600 s Tsub = 0,5	Temps = 1800 s Tsub = 0,5	Temps = 3000 s Tsub = 0,5
-----------------------------	-----------------------------	------------------------------	------------------------------

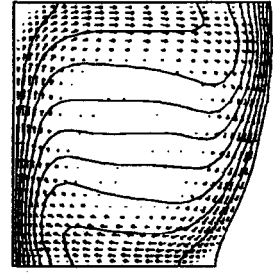
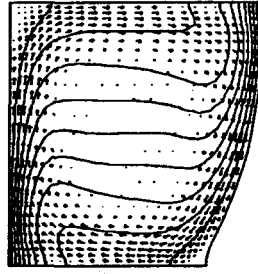
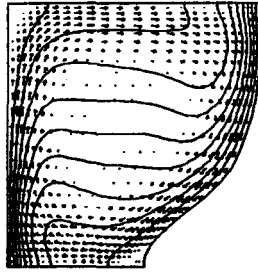
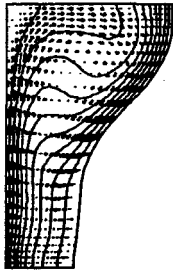


Temps = 120 s Tsub = 1,0	Temps = 600 s Tsub = 1,0	Temps = 1800 s Tsub = 1,0	Temps = 3000 s Tsub = 1,0
-----------------------------	-----------------------------	------------------------------	------------------------------



Temps = 120 s Tsub = 2,0	Temps = 600 s Tsub = 2,0	Temps = 1800 s Tsub = 2,0	Temps = 3000 s Tsub = 2,0
-----------------------------	-----------------------------	------------------------------	------------------------------

Figure 11 Champs de vitesses et de températures pour $Ra = 3,6 \times 10^5$

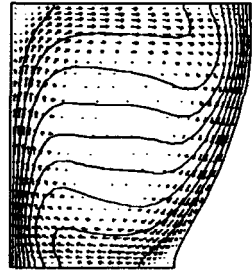
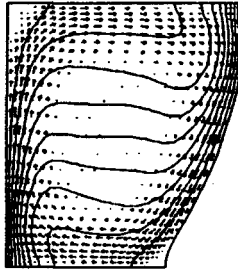
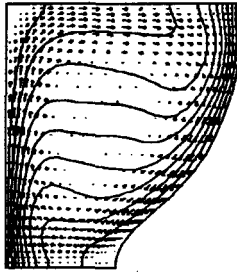
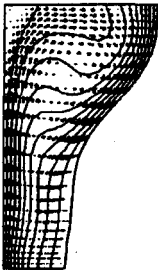


Temps = 120 s
Tsub = 0,5

Temps = 600 s
Tsub = 0,5

Temps = 1800 s
Tsub = 0,5

Temps = 3000 s
Tsub = 0,5

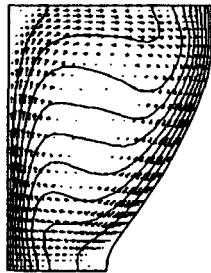
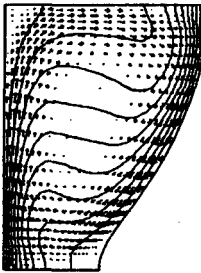
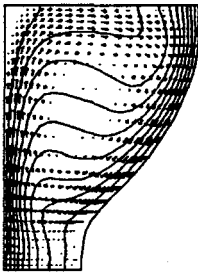
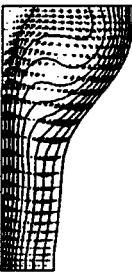


Temps = 120 s
Tsub = 1,0

Temps = 600 s
Tsub = 1,0

Temps = 1800 s
Tsub = 1,0

Temps = 3000 s
Tsub = 1,0



Temps = 120 s
Tsub = 2,0

Temps = 600 s
Tsub = 2,0

Temps = 1800 s
Tsub = 2,0

Temps = 3000 s
Tsub = 2,0

Figure 12 Champs de vitesses et de températures pour $Ra = 7,2 \times 10^5$

Transfert de chaleur versus régime d'écoulement.

Le coefficient de transfert de chaleur local à la paroi chauffée et à l'interface solide/liquide est défini en termes du nombre de Nusselt:

$$Nu = -grad \bar{\theta}_l \cdot \vec{n}$$

En coordonnées curvilignes, cette expression devient,

$$Nu = -\frac{\sqrt{\alpha}}{J} \cdot \frac{\partial \bar{\theta}_l}{\partial \xi}$$

Un exemple de la variation de ce coefficient en fonction du temps pour l'expérience A1 est donné aux figures (13) et (14).

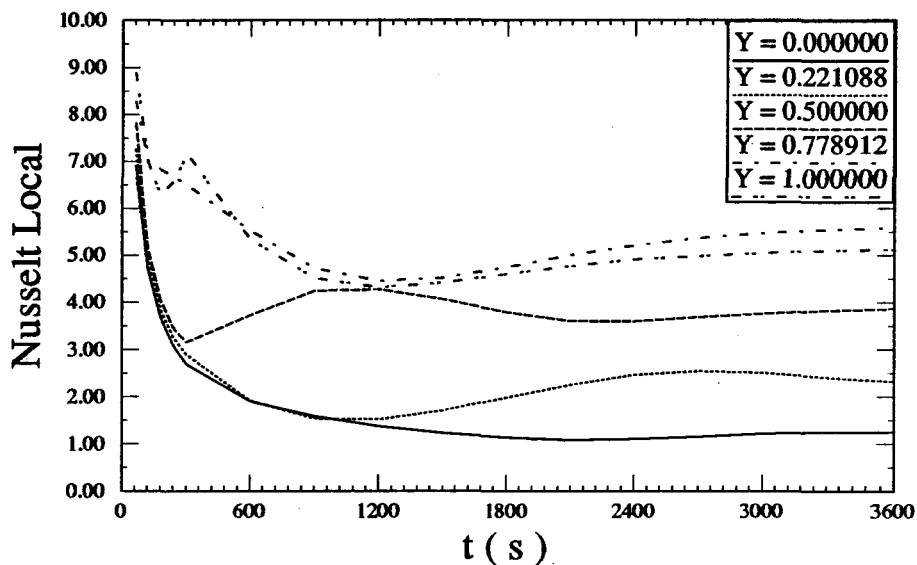


Figure 13 Nombre de Nusselt local en fonction du temps à l'interface solide/liquide ($Ra = 1,8 \times 10^5$, $T_{sub} = 0.5$)

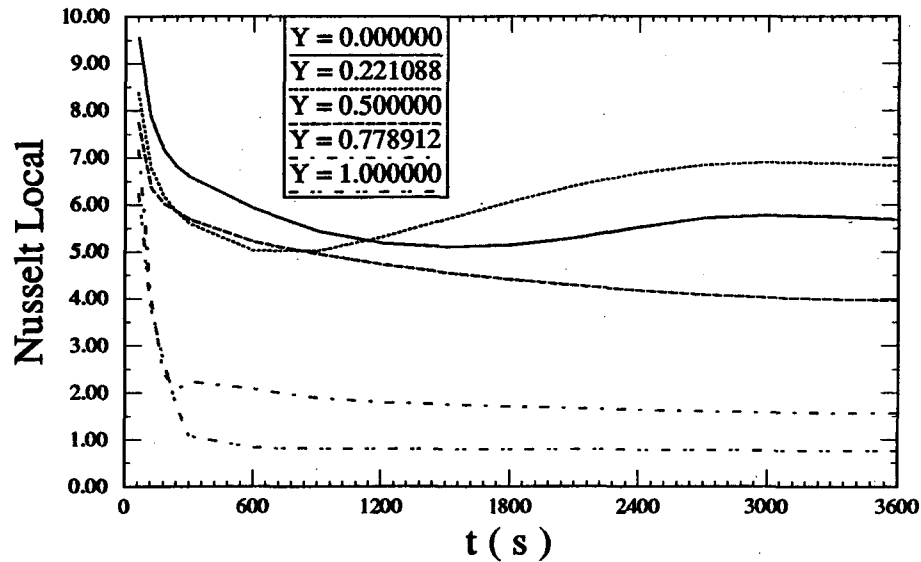


Figure 14 Nombre de Nusselt local en fonction du temps à la paroi chauffée ($Ra = 1,8 \times 10^5$, $T_{sub} = 0.5$)

1) Au début, les nombres de Nusselt locaux aux parois est et ouest seront très grands car les parois, qui sont des isothermes, sont très rapprochées l'une de l'autre. Plus la cavité s'élargit, plus le nombre de Nusselt diminue, la résistance thermique en conduction étant proportionnelle à la longueur:

$$R_{cond} = \frac{\Delta x}{k \cdot \mathcal{A}}$$

Cette résistance est d'autant plus faible que l'écart est petit. Lors de ce régime, le nombre de Nusselt local est alors uniforme le long de la paroi chauffée ouest et le long de l'interface solide/liquide.

2) Dans le régime d'écoulement no. 2, le nombre de Nusselt local dans la partie supérieure de l'interface solide/liquide subit une remontée due à l'apport de chaleur par convection. D'autre part dans la partie supérieure de la paroi ouest, le nombre de Nusselt chute abruptement dû à l'apport de fluide déjà préchauffé par le bas de la paroi ouest. Pour

ce qui est des régions inférieures des parois, le nombre de Nusselt continue à diminuer au rythme du mode de transfert par conduction.

3) Dans le régime d'écoulement no. 3, la caractéristique essentielle est que le nombre de Nusselt dans la partie supérieure de l'interface solide/liquide recommence à diminuer: une quantité de chaleur est absorbée à l'interface, cette chaleur n'est alors pas disponible pour élever la température du fluide, et ainsi comprimer les isothermes. À mesure que le mode de transfert de chaleur au bas de l'interface solide/liquide passe de la conduction à la convection, le nombre de Nusselt subit une remontée de même type que celle subie par la partie supérieure de l'interface lors du régime d'écoulement no. 2

D'autre part dans la partie supérieure de la paroi chauffée ouest, le nombre de Nusselt devient plus ou moins constant: la paroi ne subit aucune déformation, et de plus le mouvement convectif à cet endroit est sensiblement invariable car la paroi ouest représente le moteur de l'écoulement convectif. Si on descend le long de la paroi ouest, on rencontre une région où le retour du tourbillon convectif apporte une quantité de fluide refroidi le long de l'interface. Cela entraîne une légère augmentation du nombre de Nusselt à cet endroit.

4) Dans le régime d'écoulement no. 4, la caractéristique essentielle est que le nombre de Nusselt dans la partie supérieure de la cavité réaugmente légèrement due au fait que l'interface solide/liquide est maintenant immobile et que la chaleur transmise à l'interface est entièrement évacuée par la conduction dans la phase solide. À mesure que le mode de transfert de chaleur à l'interface solide/liquide passe de la conduction à la convection pour les régions inférieures de l'interface, le nombre de Nusselt se comporte de la même façon que dans la région supérieure mais avec un retard et une intensité moindre.

Dynamique de la fusion en une hauteur fixe de l'interface

D'un côté de l'interface une quantité de chaleur est amenée. De cet apport d'énergie, une certaine quantité est retirée en conduction par la partie solide. Le surplus qui reste contribue à faire fondre l'interface. Pour un apport d'énergie à l'interface donné, comme c'est le cas dans la partie supérieure de l'interface, plus l'interface fond, plus la quantité de chaleur transmise par conduction au solide augmente, diminuant proportionnellement le surplus de la chaleur disponible pour faire fondre l'interface. Cela se poursuit ainsi jusqu'au moment où l'interface s'immobilise.

Influence du nombre de Rayleigh sur les régimes d'écoulement

Un nombre de Rayleigh représente un accroissement de l'intensité de la convection naturelle à l'intérieur de la cavité liquide. Cet accroissement se traduit par a) une vitesse de développement de la convection plus grande à l'intérieure de la cavité, et b) un transport convectif d'énergie par unité de volume plus grand, par conséquent une augmentation du taux de fusion à l'interface en contact avec l'écoulement

Dans une autre mesure, l'intensité de la convection détermine aussi la forme finale de l'interface solide-liquide. Ainsi, plus l'intensité de la convection sera grande, plus la forme finale de l'interface solide/liquide tendra vers une paroi uniformément verticale. Par contre dans les cas où l'écoulement n'est pas assez intense pour se propager dans le bas de la cavité, l'interface à cet endroit atteindra l'équilibre thermique en fonction du mode de transfert de chaleur par conduction qui généralement conduit à une portion solide non-fondue beaucoup plus grande.

Influence du coefficient de sous-refroidissement sur les régimes d'écoulement

Le principal effet du sous-refroidissement de la partie solide est d'extraire de la chaleur de l'interface solide/liquide, et par conséquent d'affaiblir le surplus de chaleur contribuant à la fusion de l'interface. Un coefficient de sous-refroidissement élevé, T_{sub} , se traduit par un taux de fusion plus bas sur toute la hauteur de l'interface. De plus le facteur de sous-refroidissement détermine l'avance maximale de l'interface.

Influence du nombre de Rayleigh versus l'influence du coefficient de sous-refroidissement.

Le flux de chaleur en provenance de la phase liquide favorise la fusion, alors que le flux de chaleur évacué par la phase solide s'oppose à la fusion de l'interface. La différence fondamentale entre ces deux mécanismes de transfert de chaleur, dans la présente étude, est que le transfert de chaleur par convection à l'interface favorise la fusion partant du haut en allant vers le bas alors que le transfert de chaleur par conduction dans la phase solide s'applique de façon uniforme, pour une même distance, sur la totalité de l'interface.

Comportement de la fraction volumique liquide en fonction du temps

Pour un coefficient de sous-refroidissement fixe, le sous-refroidissement est d'autant moins effectif sur la forme finale de l'interface et le taux de fusion que le nombre de Rayleigh est grand. Mais par contre pour un nombre de Rayleigh fixe, quand l'écoulement a atteint une certaine dimension, on peut toujours appliquer un sous-refroidissement de façon à contrôler le taux de fusion et la forme finale de l'interface. Ce comportement peut être très avantageux dans la fabrication de semi-conducteurs et de cristaux.

La fraction volumique liquide en fonction du temps est donnée pour tous les cas étudiés à la figure 15. Si on construit un tableau (Tableau 5) exprimant la fraction

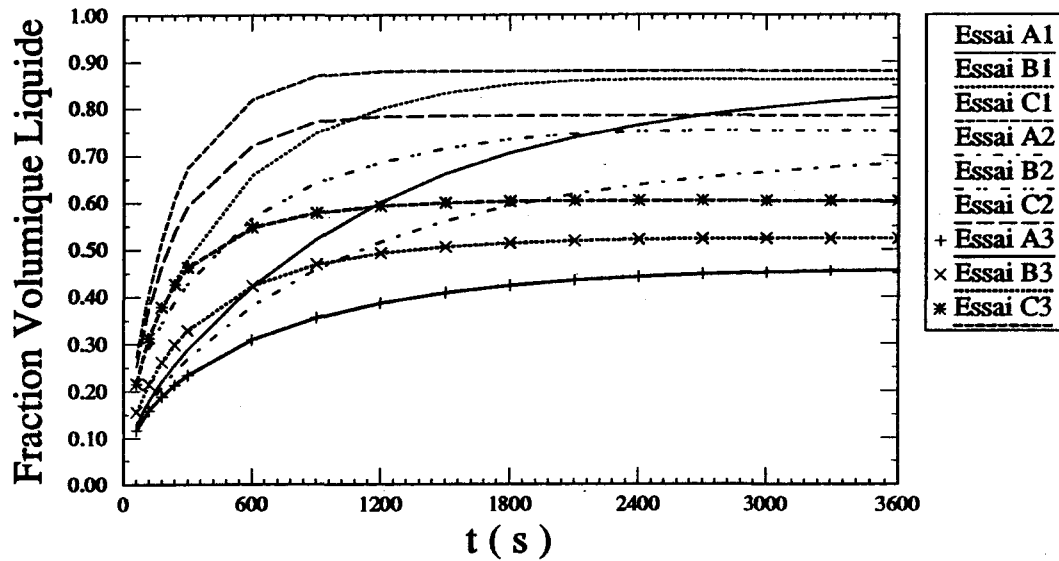


Figure 15 Fraction volumique liquide en fonction du temps.

volumique liquide dans un ordre décroissant après une heure de temps simulé, on constate que le coefficient de sous-refroidissement est le facteur dominant qui contrôle la fraction volumique liquide finale. D'autre part, si on regarde le temps pris pour atteindre le régime

Tableau 5 Fraction volumique liquide après 1 heure de temps simulé

Essai	Fraction volumique liquide (3600 s)
C1	0,879
B1	0,862
A1	0,823
C2	0,783
B2	0,752
A2	0,683
C3	0,603
B3	0,523
A3	0,456

Tableau 6 Temps pour atteindre le régime stationnaire

Essai	Temps pour atteindre le régime stationnaire
C1	480 s
C2	600 s
C3	1860 s
B1	2220 s
B2	2400 s
B3	2700 s
A1	3000 s
A2	3600 s
A3	3600 s et plus

permanent (Tableau 6) pour chacun des essais, on conclue que plus le nombre de Rayleigh est élevé, plus tôt le régime permanent est atteint.

Comportement du nombre de Nusselt moyen en fonction du temps

Le nombre de Nusselt moyen est défini comme suit:

$$\bar{N}u = - \int_0^1 \text{grad}(\bar{\theta}_l) \cdot \vec{n} \, dy$$

soit en coordonnées curvilignes généralisées

$$\bar{N}u = - \int_0^1 \frac{\sqrt{\alpha}}{J} \cdot \frac{\partial \bar{\theta}_l}{\partial \xi} \cdot d\eta$$

Comme on peut constater dans les figure 16 et 17, le transfert de chaleur est principalement contrôlé par le nombre de Rayleigh. Ce dernier détermine la hauteur des plateaux des régimes établis, ainsi que le temps pour les atteindre. Par contre, si on regarde uniquement la figure 16, on peut noter l'influence du sous-refroidissement lors du développement de la convection dans ce que on a appelé les régimes de type no. 3 et no. 4 . Pour le nombre

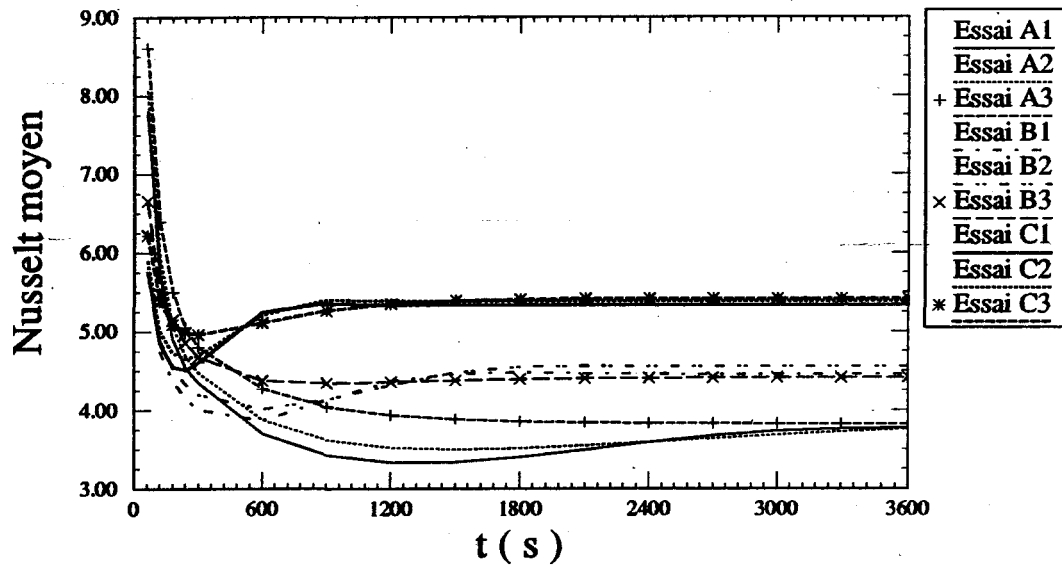


Figure 16 Nombre de Nusselt moyen à l'interface solide/liquide en fonction du temps

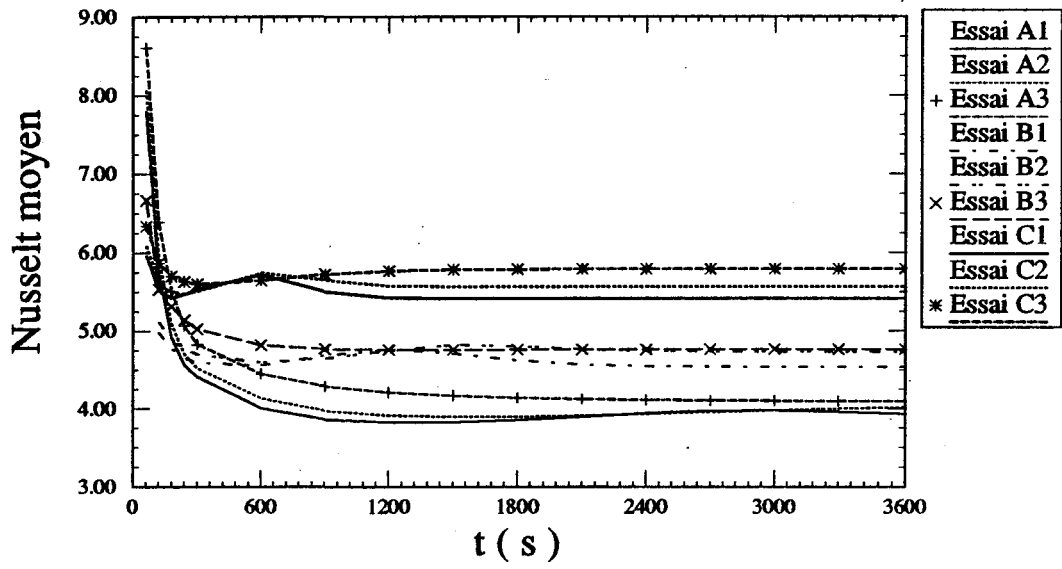


Figure 17 Nombre de Nusselt moyen à la paroi chauffée en fonction du temps

de Nusselt moyen à la paroi chauffée (Fig. 17), on voit que ce dernier est plus sensible au facteur de sous-refroidissement. On observe qu'un sous-refroidissement élevé tend à augmenter le transfert de chaleur. Ceci est d'autant plus remarquable que le nombre de Rayleigh est grand. Il est intéressant de noter que cette information est perdue à l'interface solide/liquide.

Corrélation du nombre de Nusselt moyen en régime établi en fonction du nombre de Rayleigh et du coefficient de sous-refroidissement.

En faisant une régression linéaire de ces données numériques, on obtient la corrélation suivante pour les valeurs asymptotiques du nombre de Nusselt à la paroi chauffée en fonction du nombre de Rayleigh et du coefficient de sous-refroidissement:

$$\bar{N}u = 0,190 \cdot Ra^{0,251} \cdot T_{sub}^{0,0442}$$

Webb et Viskanta[8] ont déterminé numériquement une relation du nombre de Nusselt proportionnelle à $Ra^{0,262}$ dans le cas où le sous-refroidissement est absent. La présente relation est valable pour $1,8 \times 10^5 \leq Ra \leq 7,2 \times 10^5$ et $0,5 \leq T_{sub} \leq 2,0$

IV

CONCLUSION

Le problème de fusion d'une substance pure sous-refroidie confinée dans une enceinte rectangulaire a été abordé. Un modèle numérique a été développé et mis au point pour analyser ce problème. Le modèle considère la présence de conduction et de convection naturelle dans la phase liquide et de la conduction dans la phase solide. Le modèle permet de prédire l'évolution dans le temps du phénomènes de fusion en déterminant:

- les champs d'écoulements et de températures
- la position exacte de l'interface
- la fraction volumique de la phase liquide
- les taux de transfert de chaleur locaux et globaux à la paroi chauffé et à l'interface solide/liquide

Les résultats obtenus montrent bien l'influence déterminante du sous-refroidissement sur le taux de fusion et la fraction volumique de métal fondu dans le cas d'une paroi

maintenue à une température uniforme et constante. Une analyse de tous les résultats a permis de présenter une corrélation empirique du nombre de Nusselt en fonction de paramètres caractéristiques. Toutes ces considérations sont très intéressantes pour les procédés de changement de phase où le contrôle de la forme de l'interface est important.

Le modèle numérique développé dans le cadre de la présente étude ouvre la voie à d'autres études du phénomène de changement de phase dans lesquelles les éléments suivants pourraient être considérés:

- Flux de chaleur imposé à la paroi chauffée
- Effet de la tension superficielle
- Effet de la convection solutale
- Effet des forces électromagnétiques
- etc.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. Viskanta, Heat Transfer during Melting and Solidification of Metals. Journal of Heat Transfer, vol. 110, pp. 1205–1219, 1988.
- [2] J. S. Hsiao, An Efficient Algorithm for Finite-Difference Analyses of Heat Transfer with Melting and Solidification. Numerical Heat Transfer, vol. 8, pp. 653–666, 1985.
- [3] J. Crank, Free and Moving Boundary Problems. Clarenton Press, Oxford, 1984.
- [4] C. J. Ho and R. Viskanta, Heat Transfer During Melting From an Isothermal Vertical Wall. Journal of Heat Transfer, vol. 106, pp. 12–19, 1984.
- [5] D. Gobin, Changement d'état solide-liquide: évolution temporelle du couplage entre la convection naturelle dans la phase liquide et la conduction dans la phase solide. Étude numérique et expérimentale.. Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1984.
- [6] C. Gau and R. Viskanta, Effect of Natural Convection on Solidification from Above and Melting from Below of Pure Metal. Int. Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 28, no. 3, pp. 573–587, 1985.
- [7] C. Bénard and D. Gobin, Numerical Simulating of Melting Processes for Metals. ASME National Heat Transfert Conference, Session "Fundamentals of phase Change, Philadelphia, 1989.
- [8] W. A. Webb and R. Viskanta, Analysis of Heat transfer During Melting of a Pure Metal From an Isothermal Vertical Wall. Numerical Heat Transfer, vol. 9, pp. 539–558, 1986.
- [9] M. Lacroix, Computation of Heat Transfer During Melting of a Pure Substance for an Isothermal Wall. Numerical Heat Transfer, Part B, vol. 15, pp. 191–210, 1989.

- [10]M. Lacroix, Analysis of Mixed Convection Melting of a Pure Metal. Numerical Heat Transfer, Part A, vol. 17, pp. 401–416, 1989.
- [11]M. Lacroix, Effects of Buoyancy and Surface Tension Forces on the Melting of a Metal. Numerical Heat Transfer, Part A, vol. 19, pp. 35–49, 1991.
- [12]C. Beckermann and R. Viskanta, Effect of Solid Subcooling on Natural Convection Melting of a Pure Metal. Journal of Heat Transfer, vol. 111, pp. 416–424, 1989.
- [13]Marcel Lacroix, Etude Numérique du Problème de Changement de Phases en Présence de Convection Naturelle. Rapport IS-88-02, Université du Québec à Chicoutimi, Canada, 1988.
- [14]M. Lacroix and A. Garon, Numerical Solution of Phase Change Problems: An Eulerian-Lagrangian Approach. Numerical Heat Transfer, in press, 1991.
- [15]Suhas V. Patankar, Numerical Heat transfer and Fluid Flow, Series in computational methods in mechanics and thermal science. Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1980.
- [16]A. Arsenault et M. Lacroix, Une nouvelle méthode numérique pour le traitement du problème de Stéfan à deux phases.. Rapport GRIPS-90-11, Université du Québec à Chicoutimi, Canada, 1990.