

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE
PRÉSENTÉ À
L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À CHICOUTIMI
COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN RESSOURCES ET SYSTÈMES

PAR
SHA LI

SIMULATION DU TRANSFERT DE CHALEUR LORS DU
CHANGEMENT DE PHASE SOLIDE-LIQUIDE D'UNE SUBSTANCE PURE

MAI 1990



Mise en garde/Advice

Afin de rendre accessible au plus grand nombre le résultat des travaux de recherche menés par ses étudiants gradués et dans l'esprit des règles qui régissent le dépôt et la diffusion des mémoires et thèses produits dans cette Institution, **l'Université du Québec à Chicoutimi (UQAC)** est fière de rendre accessible une version complète et gratuite de cette œuvre.

Motivated by a desire to make the results of its graduate students' research accessible to all, and in accordance with the rules governing the acceptance and diffusion of dissertations and theses in this Institution, the **Université du Québec à Chicoutimi (UQAC)** is proud to make a complete version of this work available at no cost to the reader.

L'auteur conserve néanmoins la propriété du droit d'auteur qui protège ce mémoire ou cette thèse. Ni le mémoire ou la thèse ni des extraits substantiels de ceux-ci ne peuvent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

The author retains ownership of the copyright of this dissertation or thesis. Neither the dissertation or thesis, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

RÉSUMÉ

Une méthodologie numérique pour analyser le transfert de chaleur par conduction et par convection naturelle lors de la fusion d'une substance pure est présentée. Les équations de conservation sont formulées en terme de courant-vorticité et d'énergie dans un espace à deux dimensions. Les équations sont discrétisées dans un maillage fixe. Les résultats numériques sont présentés, analysés et confrontés à d'autres résultats numériques et à des résultats expérimentaux.

Handwritten signature of Sha Li in cursive script, followed by the Chinese characters '李莎' (Li Sha).

Sha Li, étudiante

Handwritten signature of Marcel Lacroix in cursive script.

Lacroix Marcel, dir. de recherche

REMERCIEMENTS

Je tiens avant tout à remercier Monsieur Marcel Lacroix, Ph.D., pour avoir dirigé mes travaux et m'avoir prodigué ses conseils. Je remercie également Monsieur Rung T. Bui, Ph.D., directeur du Groupe de recherche en ingénierie des procédés et systèmes (G.R.I.P.S).

Je remercie sincèrement Mesdames P. Rouleau, F. Lange, D. Guha pour la correction de ce texte.

Je remercie tout particulièrement les membres du G.R.I.P.S. de leurs conseils judicieux.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ	i
REMERCIEMENTS.....	ii
TABLE DES MATIÈRES.....	iii
LISTE DES FIGURES ET DES TABLEAUX	vi
NOMENCLATURE	viii
INTRODUCTION	1
1. DÉFFINITION DU PROBLÈME ET ÉQUATIONS DE BASE	3
1.1. LE PROBLÈME	3
1.2. ÉQUATIONS DE BASE	4
2. MODÈLE MATHÉMATIQUE	13
2.1. MODÈLE	13
2.2. CONDITIONS FRONTIÈRES DISCRÉTISÉES.....	16

2.3. SOLUTION ITÉRATIVE DE L'ÉQUATION (2.2)	17
2.4. ALGORITHME	18
3. RÉSULTATS ET DISCUSSIONS	20
3.1. CHOIX DES PRINCIPAUX PARAMÈTRES DE SIMULATION NUMÉRIQUE	20
3.1.1. INCRÉMENT DE TEMPS	20
3.1.2. SOUS-REFROIDISSEMENT	21
3.1.3. CHOIX DU MAILLAGE	25
3.2. RÉSULTATS	27
3.2.1. MOUVEMENT DE L'INTERFACE SOLIDE-LIQUIDE	28
3.2.2. CHAMPS DE VITESSE	31
3.2.3. COMPARAISON ENTRE LES DIFFÉRENTS NOMBRES DE RAYLEIGH	33
3.2.4. VARIATION DES NOMBRES DE NUSSELT LOCAUX EN FONCTION DU NOMBRE DE RAYLEIGH	33
3.3. COMPARAISON AVEC D'AUTRES RÉSULTATS	38

4. CONCLUSION	40
ANNEXE I.....	42
ANNEXE II	46
BIBLIOGRAPHIE	51

LISTE DES FIGURES

FIGURE 1-1. GÉOMÉTRIE DU PROBLÈME	4
FIGURE 2-1. VOLUME DE CONTRÔLE EN DEUX DIMENSIONS.....	14
FIGURE 2-2. ALGORITHME	19
FIGURE 3-1. TAUX DE FUSION VS TEMPS	21
FIGURE 3-2.(a). EFFET DU SOUS-REFRUIDISSEMENT SUR LE TAUX DE FUSION.....	23
FIGURE 3-2.(b). CHAMPS DE VITESSE APRÈS MIN, POUR DIFFÉRENTS SOUS-REFROIDISSEMENTS	24
FIGURE 3-3. COMPARAISON ENTRE DIFFÉRENTS MAILLAGES	25,26
FIGURE 3-4. POSITION DE L'INTERFACE SOLIDE-LIQUIDE	28
FIGURE 3-5.(a). INTERFACE SOLIDE-LIQUIDE POUR DIFFÉRENTS NOMBRE DE RAYLEIGH (TEMPS=2 MIN)	29
FIGURE 3-5.(b). INTERFACE SOLIDE-LIQUIDE POUR DIFFÉRENTS NOMBRE DE RAYLEIGH (TEMPS=12 MIN)	30
FIGURE 3-6. CHAMPS DE VITESSE ET DE TEMPÉRATURE À 2 , 5 , 12 MIN POUR $Ra=2.2 \times 10^5$	32
FIGURE 3-7. COMPARAISON ENTRE DIFFÉRENTS Ra	34

FIGURE 3-8. NOMBRE DE NUSSELT À LA PAROI CHAUFFÉE	35
FIGURE 3-9. NOMBRE DE NUSSELT MOYEN À LA PAROI CHAUFFÉE	37
FIGURE 3-10. COMPARAISON DE L' INTERFACE SOLIDE- LIQUIDE AVEC UNE MÉTHODE DE RÉSEAU MOBILE ET EXPÉRIMENTAL	38
FIGURE A-1 DÉFINITION DU FLUX TOTAL ENTRE DEUX NOEUDS.....	47
TABLEAU 2.1. DÉFINITION DES VALEURS DANS LES ÉQUATIONS COURANT-VORTICITÉ ET ÉNERGIE.....	13
TABLEAU 3.1. COMPARAISON DES TEMPS DE CALCUL CPU	27
TABLEAU A.1. DÉFINITION DES COEFFICIENTS DE L'ÉQUATION (II.1) POUR LE COURANT LA VORTICITÉ ET LA TEMPÉRATURE.....	50

NOMENCLATURE

H	Hauteur de la cavité	[m]
L	Largeur de la cavité	[m]
A	Rapport H/L	
M	Nombre de noeuds dans la direction des x	
N	Nombre de noeuds dans la direction des y	
T^*_w	Température de la paroi chauffée	[°C]
T^*_f	Température de fusion	[°C]
T^*_0	Température initiale	[°C]
P^*	Pression	[Pa]
k^*	Conductivité thermique	[w/m ² . C]
Δh^*	Chaleur latente de fusion	[J/kg]
ρ^*	Densité	[kg/m ³]
γ^*	Viscosité cinématique	[m ² /s]
v^*_n	Vitesse normale de déplacement de l'interface	[m/s]
g^*	Accélération gravitationnelle	[m/s ²]
β^*	Coefficient de détente thermique	
α	Diffusivité thermique	[m ² /s]
δ	Angle d'inclinaison de la cavité	[dégré]

N_u	Nombre de Nusselt local	$[-]**$
$\overline{N_u}$	Nombre de Nusselt moyen	$[-]$
Ra	Nombre de Rayleigh $Ra = g*\beta*(T_w^*-T_f^*)H^3/\gamma*\alpha^*$	$[-]$
Pr	Nombre de Prandtl $Pr = \gamma*/\alpha^*$	$[-]$
Ste	Nombre de Stefan $Ste = c(T_w^*-T_f^*)/\Delta h^*$	$[-]$
x	Coordonnée adimensionnelle $x = x^*/H$	$[-]$
y	Coordonnée adimensionnelle $y = y^*/H$	$[-]$
t	Temps adimensionnel $t = t*\alpha^*/H^2$	$[-]$
u	Vitesse adimensionnelle dans la direction des x $u=u*H^*/\alpha^*$	$[-]$
	$v=v*H^*/\alpha^*$	$[-]$
θ	Température adimensionnelle $\theta=(T^*-T_f^*)/(T_w^*-T_f^*)$	$[-]$
ξ	Vorticité $\xi = \xi^*H^2/\alpha^*$	$[-]$
ψ	Fonction de courant $\psi = \psi^*/\alpha^*$	$[-]$
S	Terme de source dans l'équation	
A_s, A_w, A_e, A_n, A_p	Coefficients	
ε	Coefficient de sous-relaxation	

**[-] quantité adimensionnée.

Indices

*	Indique une quantité avec dimension
l	Phase liquide
s	Phase solide
f	Point de fusion
w	Paroi chauffée

INTRODUCTION

Le problème de changement de phase présente beaucoup d'intérêt dans de nombreux secteurs industriels tels l'industrie pétrolière, l'industrie métallurgique, l'industrie chimique etc. La caractéristique fondamentale du procédé de fusion et de solidification est la présence d'une frontière mobile entre les phases solide et liquide. Ce problème a été étudié pour la première fois en 1889 par Stefan (Rubenstein, 1971) et est depuis connu sous le nom de problème de Stefan.

Le problème de Stefan est fortement non-linéaire. Le déplacement de l'interface solide-liquide dépend du taux de transfert de chaleur au sein des phases solide et liquide. En retour, ce taux est dépendant de la position et du déplacement de l'interface. La solution analytique de ce problème n'existe que dans quelques cas particuliers (Carslaw, 1959). Pour des applications pratiques, on a généralement recours à des méthodes numériques. Les méthodes des différences finies (Lazaride, 1970; Bonacina et Comini et Fasans et Primiceris, 1973) et des éléments finis (Comini et al 1974; Rolph III et Bathe, 1982; Hsiao et Chung, 1984) sont parmi les plus utilisées (Furzeland, 1980; Crank, 1981; Crank, 1984).

Dans les méthodes numériques, deux grandes approches sont généralement retenues: l'approche des réseaux fixes (Bonacina,1973; Rolph III, 1982; Lacroix et Voller,1990) et l'approche des réseaux mobiles (Yoo et Rubinsky, 1983; Bonnerot et Janet,1977; Lynch et O'neil,1981; Lacroix et Voller,1990). Dans l'approche des réseaux fixes, le réseau de mailles demeure immobile. Les équations de conservation sont résolues dans celui-ci sans que le calcul de la solution de l'interface solide-liquide ne soit nécessaire. Cela est possible, par exemple, en résolvant l'équation d'énergie sous forme d'enthalpie. Dans la seconde approche, le système de coordonnées physiques est transformé en un système de coordonnées pour lequel les frontières épousent en tout temps la forme de l'interface solide-liquide. Les deux approches sont viables et complémentaires (Lacroix et Voller, 1990).

Le but de ce mémoire est de développer une méthode numérique permettant de prédire le problème de changement de phase solide-liquide en utilisant un réseau de mailles fixes. On tient compte du transfert de chaleur par convection naturelle en résolvant les équations d'écoulement exprimées en terme de courant-vorticité. Les résultats obtenus sont validés en les comparant à d'autres résultats numériques et à des résultats expérimentaux .

CHAPITRE 1

DÉFINITION DU PROBLÈME ET ÉQUATIONS DE BASE

1.1. LE PROBLÈME

Soit un bloc de gallium solide dans une cavité bidimensionnelle (hauteur $H^* = 1\text{cm}$, largeur $L^* = 2\text{cm}$), et dont les murs verticaux sont isothermes. La température initiale du solide T^*_0 est 27.8°C , légèrement en dessous de la température de fusion 29.8°C . À $t^* = 0$, la température du mur vertical à l'ouest est élevée instantanément à une température $T^*_w > T^*_0$. Les parois horizontales qui relient la paroi ouest et à la paroi est sont adiabatiques. La géométrie de ce problème est montrée à la figure 1-1.

On suppose que l'écoulement adhère à toutes les parois. On admet également que les hypothèses suivantes sont respectées :

1. les propriétés thermo-physiques ne varient pas avec la température et elles sont évaluées à la température $(T^*_w + T^*_f)/2$.
2. l'approximation de Boussinesq est valide, c'est-à-dire la densité varie linéairement avec la température.
3. le liquide est newtonien et incompressible.

4. l'écoulement est laminaire et bidimensionnel.

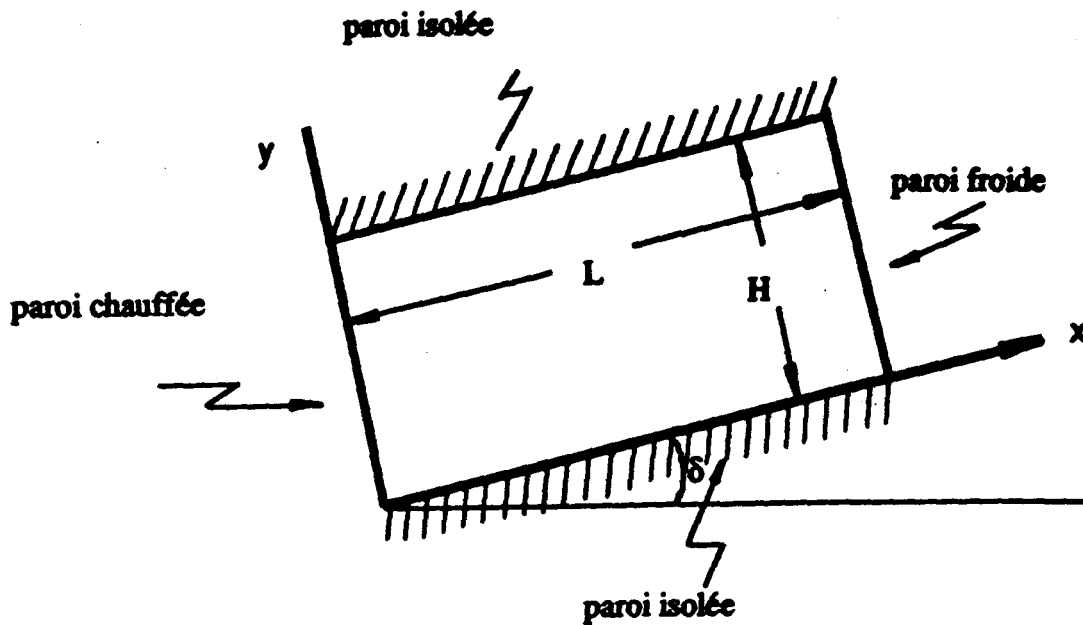


FIGURE 1-1 GÉOMÉTRIE DU PROBLÈME

1.2. ÉQUATIONS DE BASE

Les équations exprimant la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie s'énoncent, dans un repère cartésien, comme suit :

Masse :

$$\partial u^*/\partial x^* + \partial v^*/\partial y^* = 0 \quad (1.1)$$

Mouvement x :

$$\begin{aligned} \partial u^*/\partial t^* + \partial(u^*u^*)/\partial x^* + \partial(v^*u^*)/\partial y^* = - \partial P^*/((\rho_0^*) \partial x^*) + \\ \gamma^*(\partial^2 u^*/\partial x^{*2} + \partial^2 u^*/\partial y^{*2}) + g^*\beta^*\sin\delta(T^*-T_0^*) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Mouvement y :

$$\begin{aligned} \partial v^*/\partial t^* + \partial(u^*v^*)/\partial x^* + \partial(v^*v^*)/\partial y^* = - \partial P^*/((\rho_0^*) \partial y^*) + \\ \gamma^*(\partial^2 v^*/\partial x^{*2} + \partial^2 v^*/\partial y^{*2}) + g^*\beta^*\cos\delta(T^*-T_0^*) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Énergie :

$$\partial T^*/\partial t^* + \partial(u^*T^*)/\partial x^* + \partial(v^*T^*)/\partial y^* = \alpha^* (\partial^2 T^*/\partial x^{*2} + \partial^2 T^*/\partial y^{*2}) \quad (1.4)$$

où u^* et v^* sont les vitesses cartésiennes dans la direction x et y respectivement, P^* est la pression et T^* est la température.

Ce système d'équations différentielles est fermé à l'aide de conditions frontières appropriées :

À la paroi chauffée (ouest) :

$$u^* = v^* = 0$$

$$T^* = T_w^*$$

À l'interface solide-liquide :

$$x^* = f(y^*, t^*)$$

$$u^* = v^* = 0$$

$$T^* = T^*_f$$

À la paroi froide (est) :

$$u^* = v^* = 0$$

$$T^* = T^*_0$$

Aux parois adiabatiques (nord et sud) :

$$u^* = v^* = 0$$

$$\partial T^* / \partial y^* = 0 \quad (1.5)$$

Enfin, en supposant que toute la chaleur transmise à l'interface solide-liquide contribue à la fusion, on obtient:

$$-k^* \text{grad } T^* = \Delta h^* \rho^* v_n^* \quad (1.6)$$

Cette expression permet de déterminer la vitesse de déplacement et la forme de l'interface solide-liquide en fonction du temps.

La résolution du système d'équations (1.1) à (1.4) permet de déterminer u^* , v^* , P^* et T^* pendant tout le processus de fusion. Cependant, vu que l'on ne s'intéresse pas à la pression prévalant dans l'écoulement, on peut la supprimer en réexprimant les équations (1.1) à (1.3) en termes d'une fonction de courant et d'une fonction de vorticité. Les détails de cette transformation sont donnés à l'annexe I.

L'équation de vorticité est :

$$\frac{\partial \xi^*}{\partial t^*} + \frac{\partial(u^* \xi^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial(v^* \xi^*)}{\partial y^*} = \gamma^* (\frac{\partial^2 \xi^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \xi^*}{\partial y^{*2}}) + g^* \beta^* (\cos \delta (T^* - T_0^*) / \partial x^* - \sin \delta (T^* - T_0^*) / \partial y^*) \quad (1.7)$$

ξ^* , la vorticité, est définie comme la composante Z du rotationnel du vecteur vitesse, c'est-à-dire,

$$\xi^* = \frac{\partial v^*}{\partial x^*} - \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \quad (1.8)$$

En définissant une fonction de courant ψ comme :

$$u^* = \frac{\partial \Psi^*}{\partial y^*} \quad (1.9)$$

$$v^* = - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x^*}$$

On obtient :

$$\frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial y^{*2}} = - \xi^* \quad (1.10)$$

La fonction de courant représente la trajectoire suivie par l'écoulement.

Le système originel de trois équations de conservation de la masse et de la quantité du mouvement (1.1) à (1.3) est maintenant réduit à un système de deux équations: une pour la vorticité (1.7) et l'autre pour le courant (1.10).

Les conditions frontières de la fonction de courant (1.10) sont facilement déduites, puisque sur toutes les frontières solides imper-

méables, la condition d'adhérence prévaut ($u^*=v^*=0$). On tire ainsi en intégrant l'équation (1.9) :

$$\Psi^*_{\text{paroi}} = \text{constante}$$

Choisissons cette constante arbitraire égale à 0, soit :

$$\Psi^*_{\text{paroi}} = 0 \quad (1.11)$$

Cette condition assure la conservation intégrale de la masse.

De façon analogue, les conditions frontières de la vorticité sont tir es de sa définition (1.8), aux parois adiabatiques nord et sud :

$$\partial v^* / \partial x^* = 0$$

Alors,

$$\xi^* = - \partial u^* / \partial y^*$$

En combinant avec l'équation (1.9), on obtient aux parois nord et sud :

$$\xi^* = - \partial^2 \Psi^* / \partial y^{*2} \quad (1.12)$$

De même, à la paroi chauffée (ouest) et à l'interface solide-liquide ($x^* = f(y^*, t^*)$), $\partial u^* / \partial y^* = 0$ et alors, il s'ensuit aux parois ouest et est :

$$\xi^* = - \partial^2 \Psi^* / \partial x^{*2} \quad (1.13)$$

L'adimensionnement des variables dépendantes et indépendantes des équations de conservation et de leurs conditions frontières permet de spécifier les conditions du problème à l'aide d'un nombre restreint de paramètres et facilite grandement la validation des résultats. Dans la présente étude, les quantités adimensionnées sont reliées aux quantités dimensionnées par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
 x &= x^*/H & , & & y &= y^*/H \\
 u &= u^*H^*/\alpha^* & , & & v &= v^*H^*/\alpha^* \\
 t &= t^* \alpha^*/H^{*2} \\
 \theta &= T^* - T^*_f / T^*_w - T^*_f & & & & (1.14) \\
 \xi &= \xi^*H^{*2}/\alpha^* \\
 \Psi &= \Psi^*/\alpha^*
 \end{aligned}$$

La hauteur de la cavité H^* a été choisie comme longueur caractéristique. La diffusivité thermique de la phase liquide permet d'adimensionner les variables dépendantes des équations du mouvement de même que le temps. La différence de température $T^*_w - T^*_f$ est choisie comme référence. En substituant les expressions (1.14) dans les équations de conservation (1.4), (1.7), et (1.10) et de conditions frontières respectives (1.5), on obtient les équations et les conditions frontières suivantes :

vorticité :

$$\partial \xi / \partial t + \partial u \xi / \partial x + \partial v \xi / \partial y = \text{Pr}(\partial^2 \xi / \partial x^2 + \partial^2 \xi / \partial y^2) + \text{PrRa}(\cos \delta \partial \theta / \partial x - \sin \delta \partial \theta / \partial y) \quad (1.15)$$

courant :

$$\nabla^2 \Psi = -\xi \quad (1.16)$$

énergie :

(dans le liquide)

$$\partial \theta / \partial t + \partial u \theta / \partial x + \partial v \theta / \partial y = \partial^2 \theta / \partial x^2 + \partial^2 \theta / \partial y^2 \quad (1.17.a)$$

(dans le solide)

$$\partial \theta / \partial t = \partial^2 \theta / \partial x^2 + \partial^2 \theta / \partial y^2 \quad (1.17.b)$$

Les conditions frontières deviennent :

À la paroi chauffée (ouest) : $x = 0$ ($t \geq 0$)

$$\theta = 1$$

$$\Psi = 0$$

$$\xi = -\partial^2 \Psi / \partial x^2$$

$$u = v = 0$$

À l'interface solide-liquide : $x = f(y,t)$ ($t \geq 0$)

$$\theta = \theta_f = 0$$

$$\psi = 0$$

$$\xi = -\partial^2 \Psi / \partial x^2$$

$$u = v = 0$$

À la paroi froide (est) : $x = 2$ ($t \geq 0$)

$$\theta = \theta_0$$

Aux parois adiabatiques (sud et nord): $y = 0$ et $y = 1$ ($t \geq 0$)

$$\partial \theta / \partial y = 0$$

$$\Psi = 0$$

$$\xi = -\partial^2 \Psi / \partial y^2$$

$$u = v = 0$$

Dans le liquide :

$$u = \partial \Psi / \partial y, \quad v = -\partial \Psi / \partial x$$

Dans le solide :

$$u = v = 0$$

Les nombres sans dimension caractérisant le système sont :

$$Pr = \gamma^*/\alpha^* \quad (\text{nombre de Prandtl})$$

$$Ra = g^*\beta^*(T^*_w - T^*_f)H^3/\gamma^*\alpha^* \quad (\text{nombre de Rayleigh})$$

$$Ste = c(T^*_w - T^*_f)/\Delta h^* \quad (\text{nombre de Stefan})$$

(1.20)

Ces trois paramètres caractérisent entièrement les conditions du transfert de chaleur. Le nombre de Prandtl est un paramètre intrinsèque de la substance. Le nombre de Rayleigh pondère l'intensité de la convection naturelle par rapport à la conduction. Le nombre de Stefan exprime le rapport entre la chaleur sensible et la chaleur latente. Il pondère en quelque sorte le taux auquel la substance fond.

CHAPITRE 2

MODÈLE MATHÉMATIQUE

2.1. MODÈLE

Les équations (1.15), (1.16), (1.17) peuvent être réécrites sous la forme générale suivante :

$$\partial(\lambda \Phi)/\partial t + \text{div}(\lambda u \Phi) = \text{div}(\Gamma \text{grad } \Phi) + S \quad (2.1)$$

où λ prend la valeur 0 ou 1

Φ représente une variable dépendante comme la température, l'enthalpie, le courant, la vorticité, etc..

Γ est un coefficient d'échange.

S est le terme source.

Ces termes sont définis au tableau 2.1.

TABLEAU 2.1 DÉFINITION DES VALEURS DANS LES ÉQUATIONS
COURANT-VORTICITÉ ET ÉNERGIE

FONCTION	Φ	λ	Γ	S_{Φ}
courant	Ψ	0	1	S_{Ψ}
vorticité	ξ	1	Pr	S_{ξ}
température	θ	1	1	0

Les termes sources sont :

pour l'équation de vorticité,

$$S_{\xi} = RaPr(\cos\delta \frac{\partial\theta}{\partial x} - \sin\delta \frac{\partial\theta}{\partial y})$$

pour l'équation de courant,

$$S_{\psi} = -\xi$$

pour l'équation d'énergie,

$$S_{\theta} = 0$$

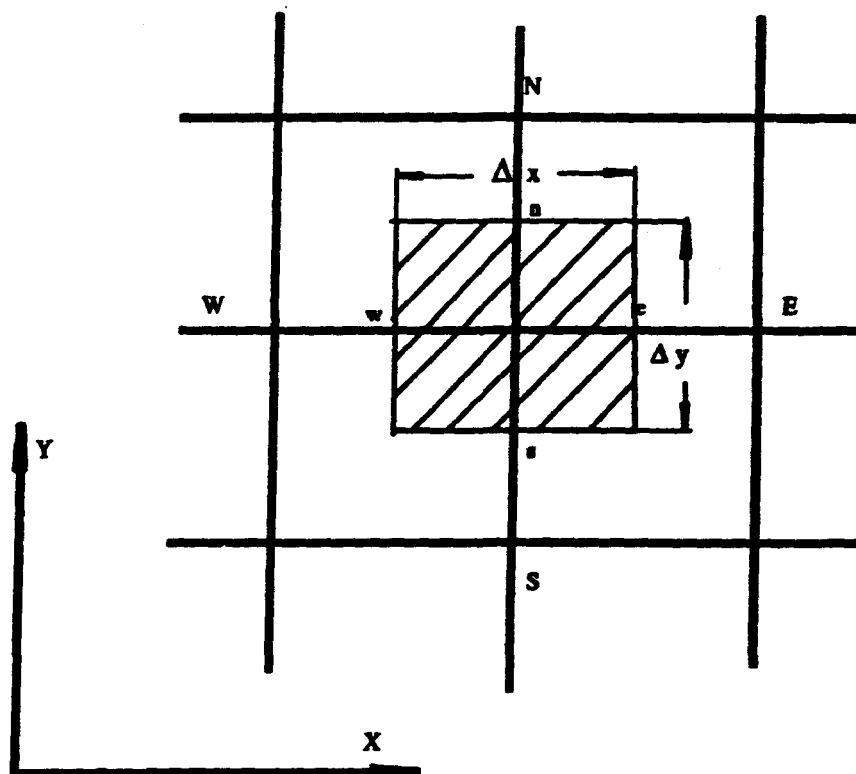


FIGURE 2-1 VOLUME DE CONTRÔLE EN DEUX DIMENSIONS

L'intégration numérique de l'équation (2.1) dans le volume de contrôle (figure 2-1) donne :

$$A_P \phi_P = \sum A_i \phi_i + S \phi \quad (2.2)$$

où ϕ_P est la valeur de ϕ au nœud P.

ϕ_i est la valeur de ϕ aux nœuds voisins du volume de contrôle.

A_P est le coefficient de ϕ_P au nœud P.

A_i est le coefficient de ϕ_i aux nœuds i.

$S \phi$ est le terme source.

Pour le courant, l'équation (2.2) devient :

$$A_P \Psi_P = A_E \Psi_E + A_W \Psi_W + A_N \Psi_N + A_S \Psi_S + \xi_P \Delta x \Delta y \quad (2.3)$$

où $A_P = A_E + A_W + A_N + A_S$

Pour la vorticité, l'équation (2.2) devient :

$$A_P \xi_P = A_E \xi_E + A_W \xi_W + A_N \xi_N + A_S \xi_S + A_P \xi_P^0 + \iint S \, dx dy \quad (2.4)$$

où $A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + A_P^0$

$$A_P^0 = \Delta x \Delta y / \Delta t$$

Pour la température, l'équation (2.2) devient :

$$A_P \theta_P = A_E \theta_E + A_W \theta_W + A_N \theta_N + A_S \theta_S + A_P \theta_P^0 \quad (2.5)$$

où $A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + A_P^0$

$$A_P^0 = \Delta x \Delta y / \Delta t$$

Les détails algébriques conduisant à l'équation (2.2) à (2.5) sont donnés à l'annexe II.

2.2. CONDITIONS FRONTIÈRES DISCRÉTISÉES

Les conditions frontières discrétisées sont :

à la paroi chauffée (ouest) : $\xi_{1,j} = 2(\Psi_{1,j} - \Psi_{2,j}) / \Delta x^2$
 $\theta_{1,j} = 1$

à l'interface solide-liquide : $\xi_{i,j} = -(\Psi_{i+1,j} + \Psi_{i-1,j} - 2\Psi_{i,j}) / \Delta x^2$
 $\theta_{i,j} = \theta_f = 0$

à la paroi froide (est) : $\theta_{N+1,j} = \theta_0$

aux parois adiabatiques (sud) : $\xi_{i,1} = 2(\Psi_{i,1} - \Psi_{i,2}) / \Delta y^2$
 $\theta_{i,1} = \theta_{i,2}$

et (nord) : $\xi_{i,N} = 2(\Psi_{i,N} - \Psi_{i,N-1}) / \Delta y^2$
 $\theta_{i,N} = \theta_{i,N-1}$

2.3. SOLUTION ITÉRATIVE DE L'ÉQUATION (2.2)

L'équation (2.2) est résolue itérativement à l'aide d'une méthode de relaxation par point :

$$A_p \phi^*_p = \sum A_i \phi_i + S \quad (2.6)$$

ϕ^*_p représente la valeur de la fonction ϕ à l'itération courante. Toutefois, la méthode de relaxation peut parfois diverger surtout lorsque les coefficients apparaissant dans l'équation (2.2) dépendent également de la solution itérative des équations de conservation. Pour remédier à la situation, on a recours à la sous-relaxation. Ainsi, la nouvelle valeur de la fonction ϕ_p devient :

$$\phi^{**}_p = \varepsilon \phi^*_p + (1 - \varepsilon) \phi_p$$

où ϕ^{**}_p = nouvelle valeur de la variable ϕ_p ,

ϕ^*_p = valeur de ϕ_p à l'itération courante obtenue

ϕ_p = valeur de ϕ_p à l'itération précédente.

Le choix du facteur de relaxation ε dépend des conditions d'écoulement et du réseau de mailles. Sa valeur optimale est habituellement déterminée après quelques essais numériques. En général, les valeurs de ε_ψ , ε_ξ et ε_θ sont choisies autour de 0.5, 0.5 et 0.01 respectivement.

2.4. ALGORITHME

L'algorithme global est montré à la figure 2-2. À un temps donné, les étapes de calcul sont les suivantes :

- (1). réinitialisation des variables dépendantes au temps t^{n+1} , à l'aide des valeurs au temps t^n .
- (2). solution de l'équation de température θ .
- (3). correction de la nouvelle distribution des phases.
- (4). calcul de la vorticité ξ et du courant ψ .
- (5). calcul du champ de vitesse \vec{V} .
- (6). calcul des coefficients de transfert de chaleur (nombre de Nusselt) et stockage des résultats à afficher.

Les étapes (3) à (5), sont itératives afin d'obtenir une bonne convergence.

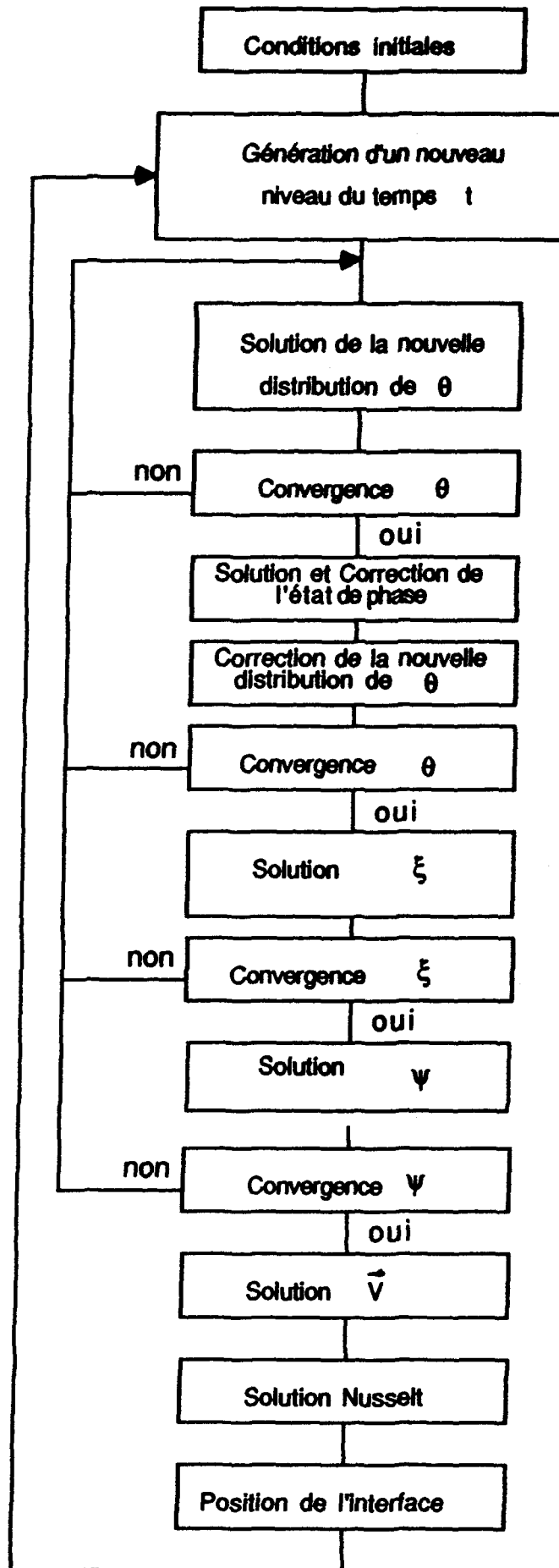


FIGURE 2-2 ALGORITHME

CHAPITRE 3

RÉSULTATS ET DISCUSSIONS

À l'aide de la méthodologie présentée au chapitre précédent, la fusion d'un bloc de gallium pur à l'intérieur d'une enceinte rectangulaire est simulée. Les nombres de Rayleigh, Prandtl et Stefan sont respectivement de 2.2×10^5 , 0.021, 0.042. Les résultats numériques sont comparés à ceux de Lacroix (1990) et aux résultats expérimentaux présentés par Webb et Viskanta (1986).

3.1. CHOIX DES PRINCIPAUX PARAMÈTRES DE SIMULATION NUMÉRIQUE

3.1.1. Incrément de temps

Le phénomène de fusion étant fortement transitoire, le choix du pas de temps pour l'intégration des équations de conservation est crucial. Ce choix a été fait en effectuant des simulations numériques avec des incréments de temps de plus en plus petits. On peut constater que le pas de temps retenu est le plus grand et que pour celui-ci, la solution numérique est semblable à celles obtenues avec des pas de temps petits.

C'est un compromis acceptable entre les temps de calcul et la précision de la solution numérique.

La figure 3-1 illustre, à titre d'exemple, le taux de fusion en fonction du temps obtenu avec trois incréments de temps différents. Un incrément de temps $\Delta t = 0.0001$ (0.014 min) semble acceptable.

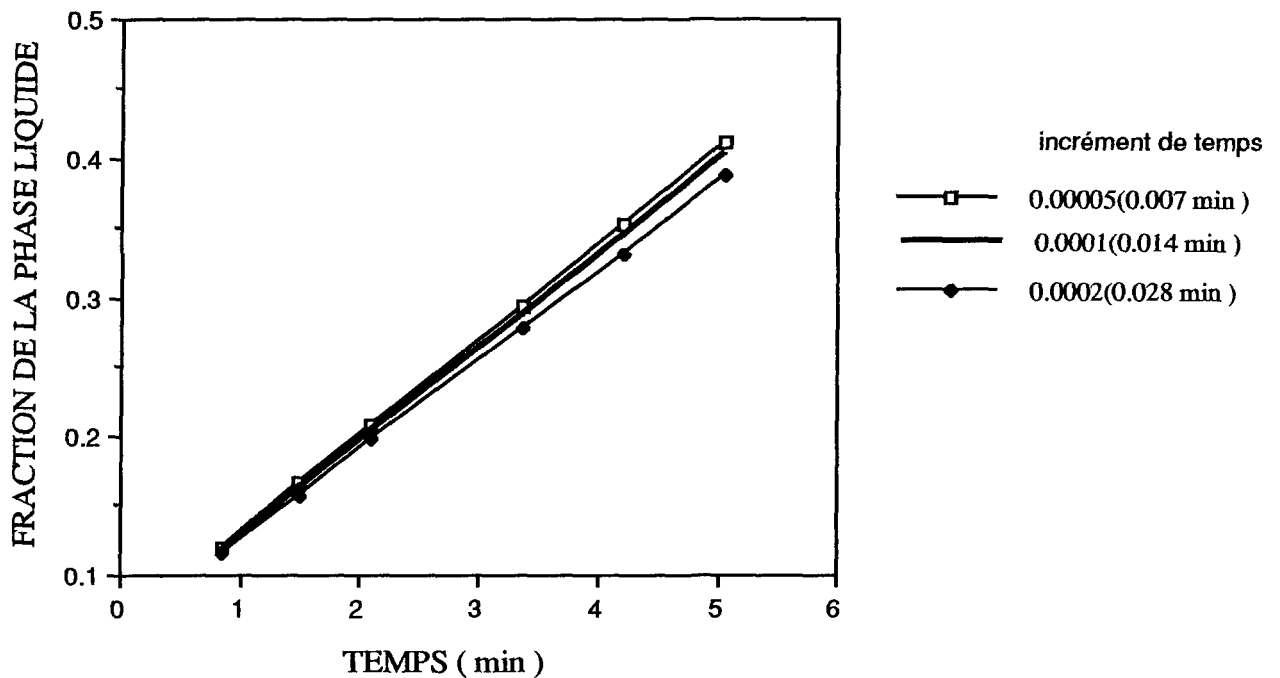


FIGURE 3-1 TAUX DE FUSION VS TEMPS

3.1.2. Sous-refroidissement

Afin de comparer les résultats numériques du présent modèle aux résultats expérimentaux de Gau et Viskanta (1986), il faut tenir compte du sous-refroidissement de la phase solide. En effet, l'expérience de Gau

et Viskanta a révélé que le bloc de gallium était initialement à une température de 2°C en deçà de son point de fusion 29.8°C . Ce sous-refroidissement du métal a des conséquences déterminantes sur le déroulement de l'expérience, car d'une part la paroi chauffée ne se trouve qu'à 8°C au-dessus du point de fusion et d'autre part, la conductivité thermique du matériau ($k = 33.5 \text{ w/mk}$) est élevée. Dans la figure 3-2(a), les taux de fusion obtenus avec diverses températures initiales illustrent l'effet déterminant du sous-refroidissement sur le taux de fusion. La figure 3-2(b) montre les champs de vitesse correspondants après 12 min pour $\theta_0 = -0.35, -0.25, -0.15$ ($T_0 = 27^{\circ}\text{C}, 27.8^{\circ}\text{C}, 28.6^{\circ}\text{C}$). Afin de représenter adéquatement les conditions expérimentales de Gau et Viskanta (1986), on utilise un sous-refroidissement de $\theta_0 = -0.25$ (27.8°C).

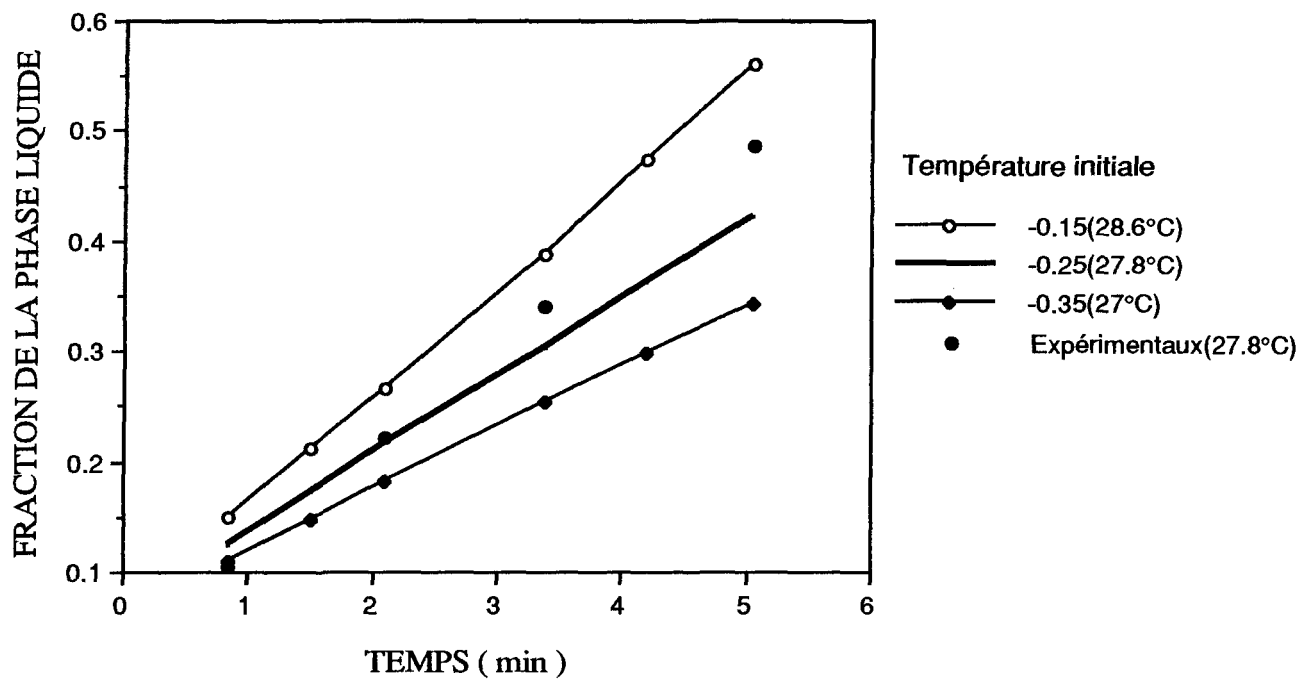


FIGURE 3-2(a) EFFET DU SOUS-REFROIDISSEMENT SUR LE TAUX DE FUSION

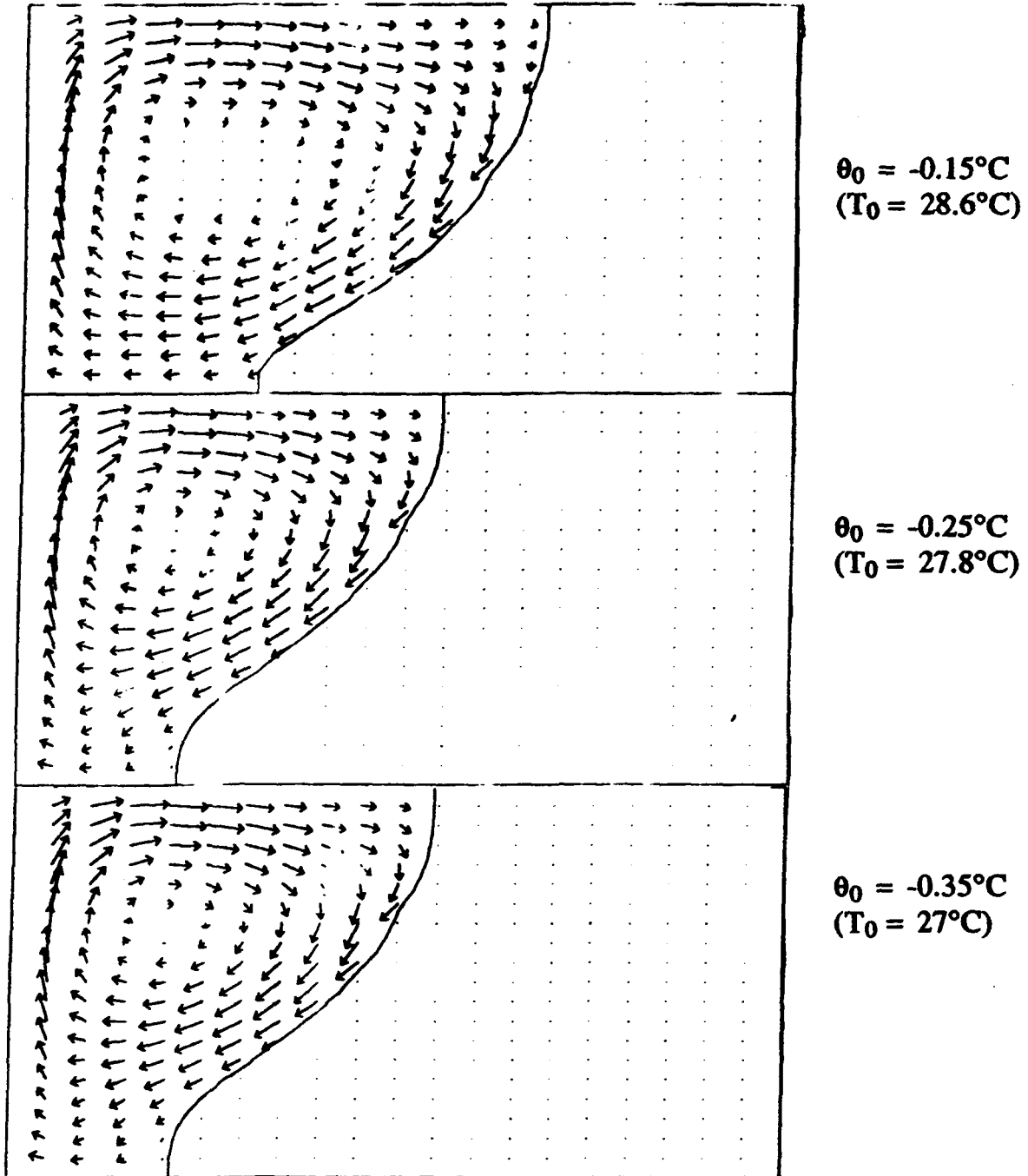


FIGURE 3-2(b) CHAMPS DE VITESSE APRÈS 12 MIN POUR
DIFFÉRENTS SOUS-REFROIDISSEMENTS

3.1.3. Choix du maillage

La figure 3-3 compare les résultats numériques obtenus avec différents maillages (21 x 11, 41 x 21, 21 x 21, 41 x 41 noeuds) aux résultats expérimentaux (Webb et Viskanta, 1986). Les temps d'exécution CPU (VAX 11- 785) correspondants sont donnés au tableau 3.1. Compte tenu de la précision et des temps d'exécution, il semble qu'un maillage de 21x21 noeuds soit acceptable.

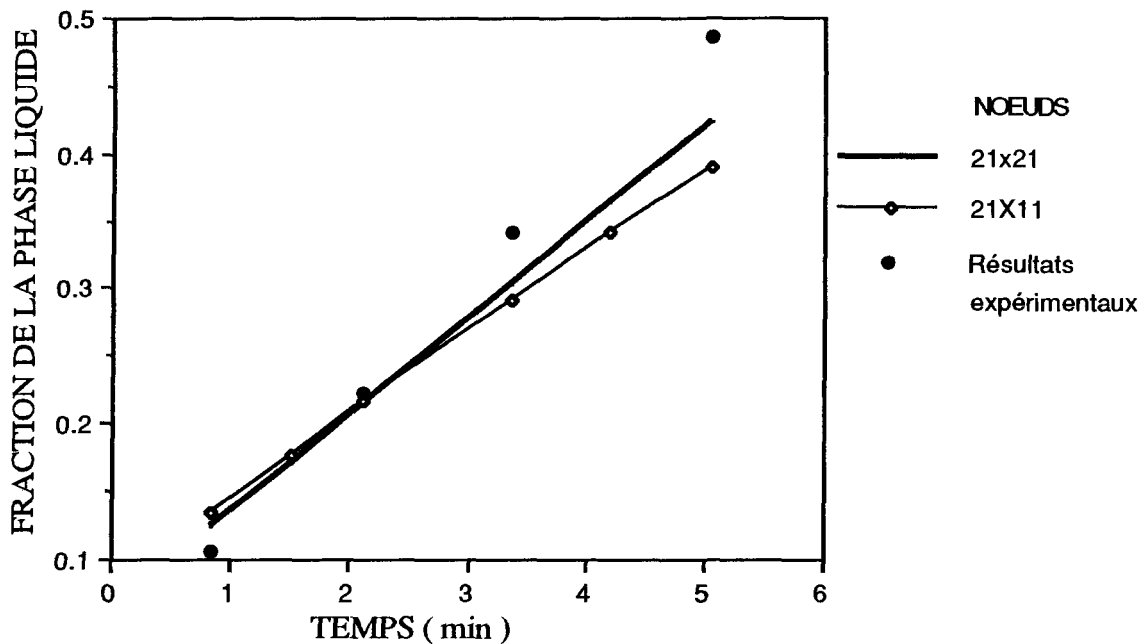
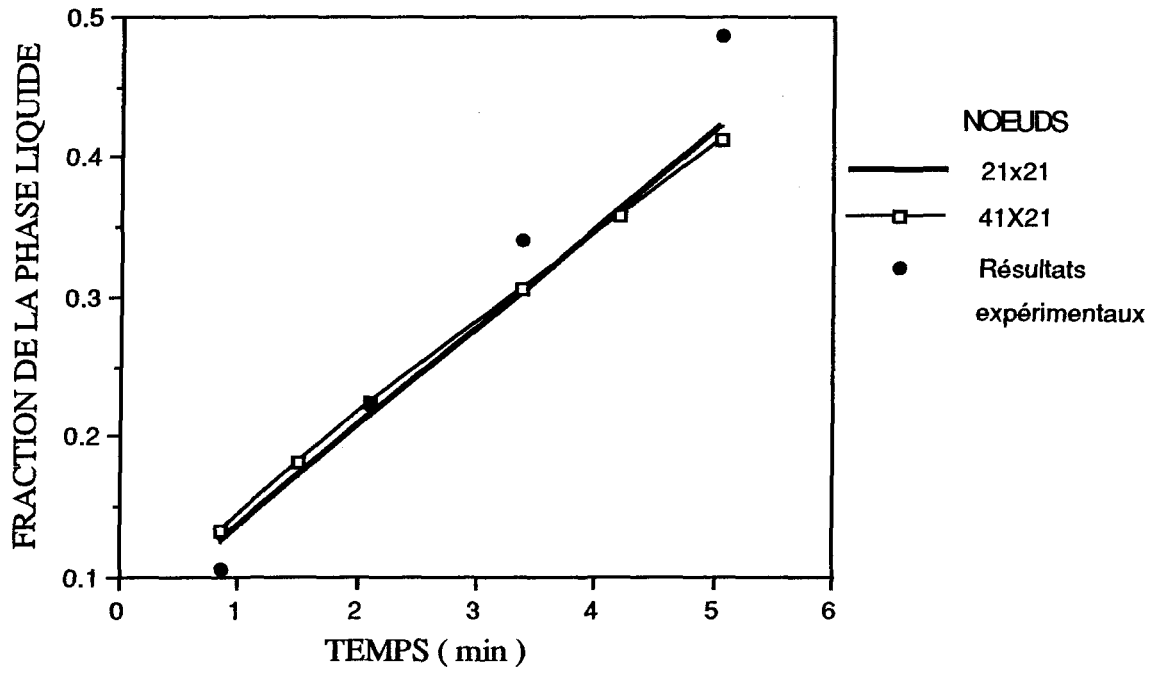
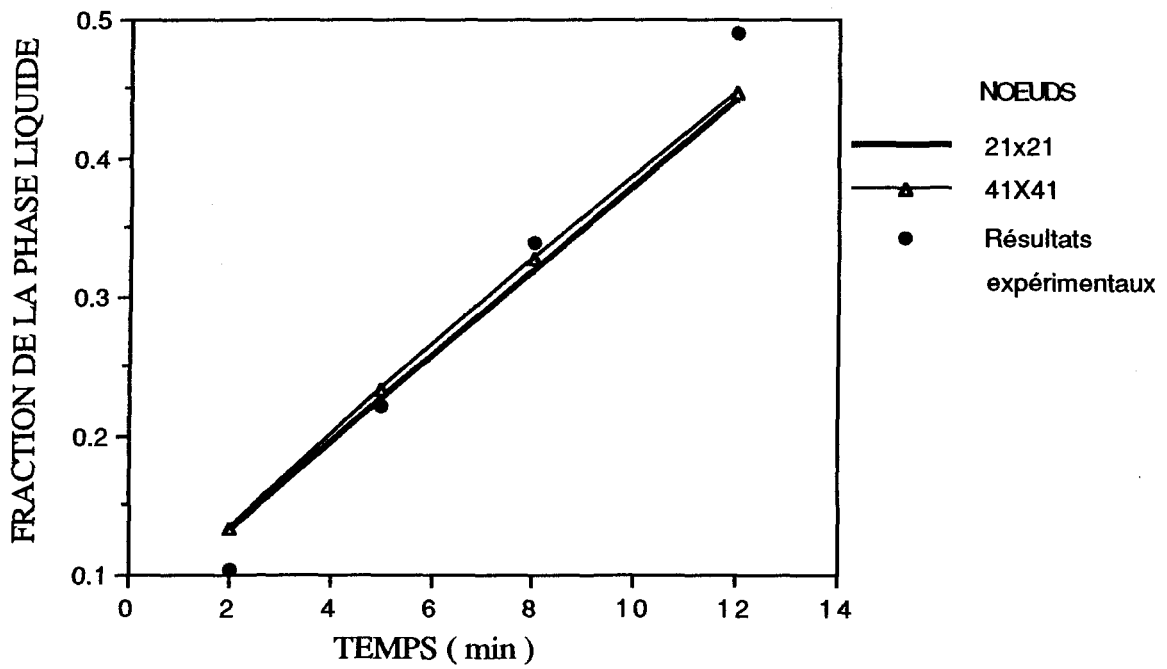


FIGURE 3-3.(a) COMPARAISON ENTRE DIFFÉRENTS MAILLAGES



(b)



(c)

FIGURE 3-3.(b). (c). COMPARAISON ENTRE DIFFÉRENTS MAILLAGES

TABLEAU 3.1 COMPARAISON DES TEMPS DE CALCUL CPU

Maillage (noeuds)	Total CPU (min)
21x11	84
21x21	179
41x21	366
41x41	745

3.2. RÉSULTATS

En utilisant un pas de temps $\Delta t = 0.0001$ (0.014 min), une température initiale $\theta = -0.25$ ($T_0 = 27.8^\circ\text{C}$) et un réseau de noeuds 21 x 21, l'expérience de fusion d'un bloc de gallium (Webb et Viskanta, 1986) est simulée numériquement avec le présent modèle. La figure 3-4 compare les positions de l'interface solide-liquide prédites numériquement à celles relevées expérimentalement après 5, 8 et 12 minutes de fusion. Malgré la grossièreté du réseau discrétisé, les prédictions numériques sont très bonnes.

FUSION DU GALLIUM

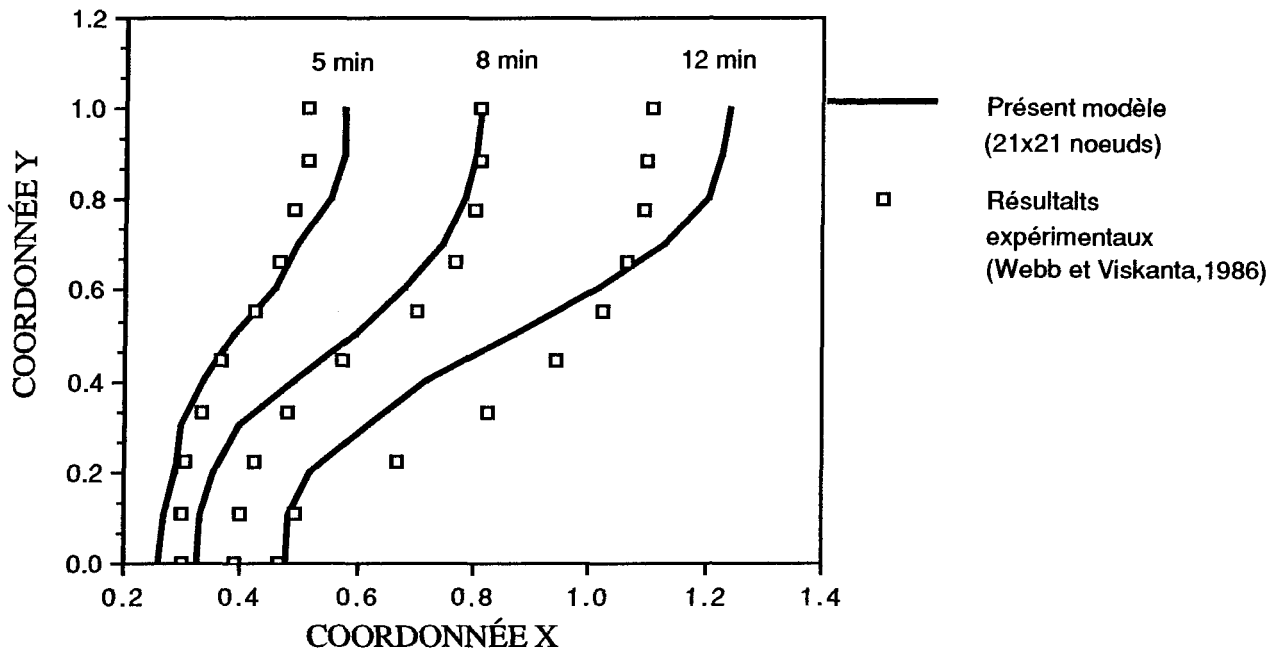


FIGURE 3-4 POSITION DE L'INTERFACE SOLIDE-LIQUIDE

3.2.1. Mouvement de l'interface solide-liquide

La figure 3-5 représente le déplacement de l'interface solide-liquide en fonction du temps pour des nombres de Rayleigh variant entre 2.2×10^4 et 2.2×10^6 . Tel que prévu, l'interface solide-liquide étant une ligne isotherme, elle intercepte toujours à angle droit les parois adiabatiques. On observe également que l'interface solide-liquide demeure droite au début de la fusion pour $Ra=2.2 \times 10^4$ car la conduction prévaut. De plus, au fur et à mesure que le nombre de Rayleigh croît, le front se déplace plus rapidement, la convection favorisant la fusion.

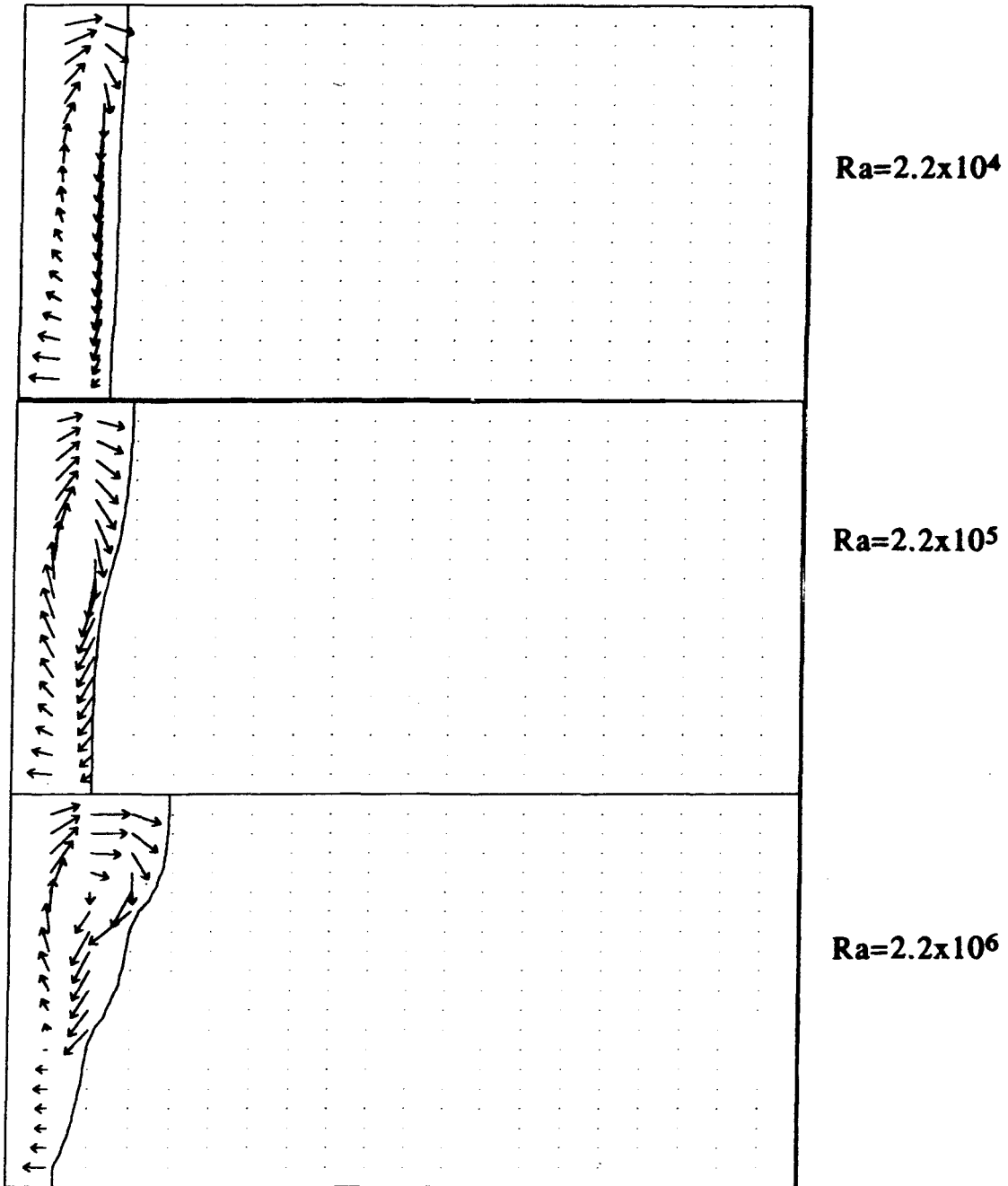
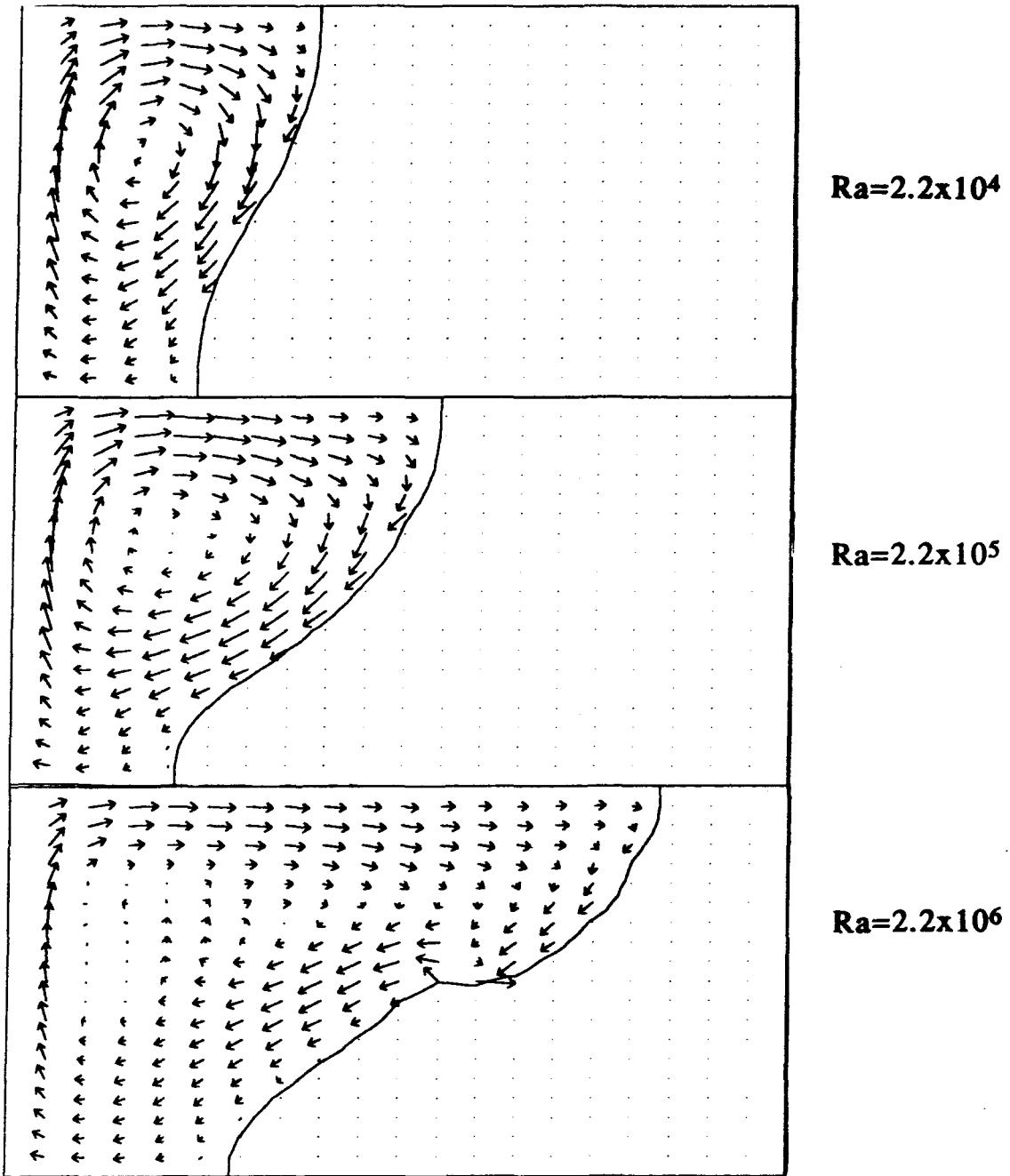


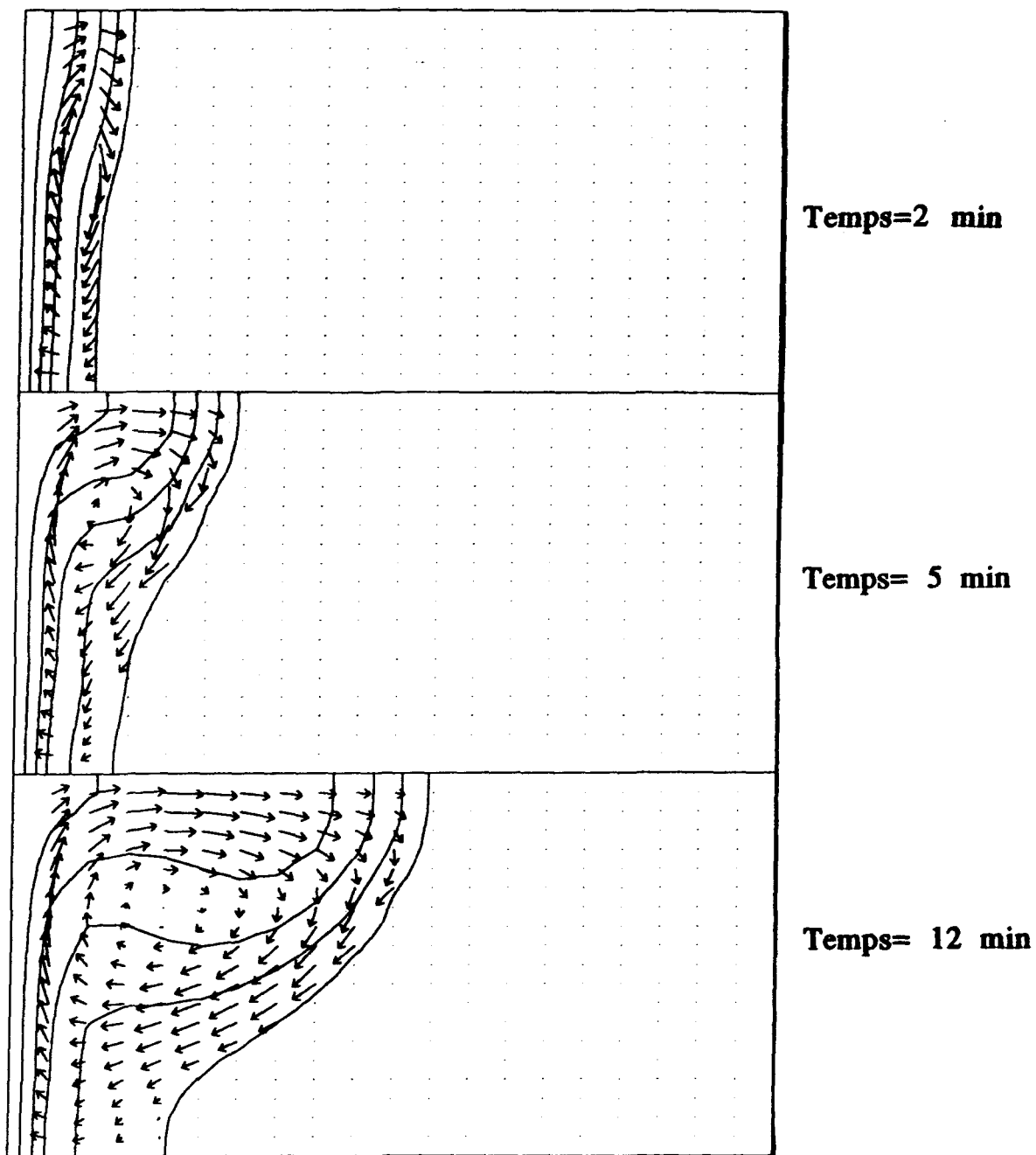
FIGURE 3-5(a) INTERFACE SOLIDE-LIQUIDE POUR DIFFÉRENTS
 Ra , TEMPS= 2 MIN



**FIGURE 3-5(b). INTERFACE SOLIDE-LIQUIDE POUR DIFFÉRENTS
Ra, TEMPS=12 MIN**

3.2.2. Champs de vitesse

La figure 3-6 montre l'évolution temporelle des champs de vitesse et de température. Au fur et à mesure que la convection s'intensifie, le taux de fusion s'accroît dans la partie supérieure de l'interface. Le fluide se trouvant à proximité de la paroi chauffée acquiert de la chaleur, ce qui occasionne une augmentation de sa température et une diminution de sa densité. Alors, il monte le long de la paroi chauffée en étant accéléré. En haut de la cavité, sa quantité de mouvement est très grande. Le fluide négocie alors le virage et descend le long de l'interface solide-liquide. Au cours de cette descente, il perd sa chaleur au profit de l'interface froide. Au pied de l'interface, le fluide est froid, et les gradients de température de même que les taux de fusion sont faibles. On peut remarquer d'ailleurs que les taux de fusion au pied de l'interface sont plus faibles en présence de convection naturelle qu'en présence de conduction seulement. Enfin, le fluide est aspiré dans le vide, au bas de la paroi chauffée, et le cycle recommence.



**FIGURE 3-6 CHAMPS DE VITESSE ET DE TEMPÉRATURE À
2 MIN, 5 MIN ET 12 MIN POUR $Ra=2.2 \times 10^5$**

3.2.3. Comparaison entre les différents nombres de Rayleigh

La figure 3-7 illustre les fractions volumiques de métal fondu pour des nombres de Rayleigh s'échelonnant entre 0 et 2.2×10^6 . On peut constater que les fractions volumiques varient linéairement en fonction du temps lorsque le régime permanent de fusion est établi. Cette propriété est très importante. En effet, à l'aide des courbes illustrées, on peut quantifier très précisément les taux de fusion en présence de convection naturelle par rapport au taux de fusion en présence de conduction seulement. Dans un modèle numérique traitant des phénomènes plus globaux, on peut alors ne considérer que le transfert de chaleur par conduction et modifier légèrement certains paramètres (conductivité augmentée, par exemple) en faisant usage de ces courbes pour tenir compte de la présence des mouvements de convection.

3.2.4. Variation des nombres de Nusselt locaux en fonction du nombre de Rayleigh

Les variations des coefficients de transfert de chaleur locaux à la paroi chauffée sont données à la figure 3-8.

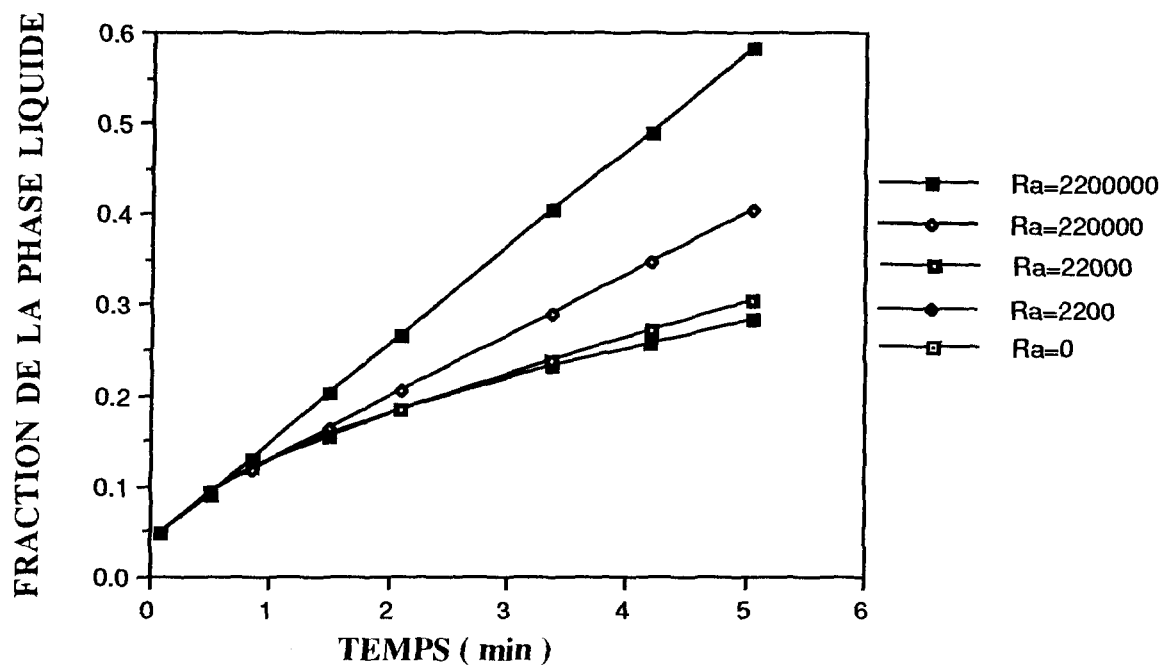


FIGURE 3-7 COMPARAISON ENTRE DIFFÉRENTS Ra

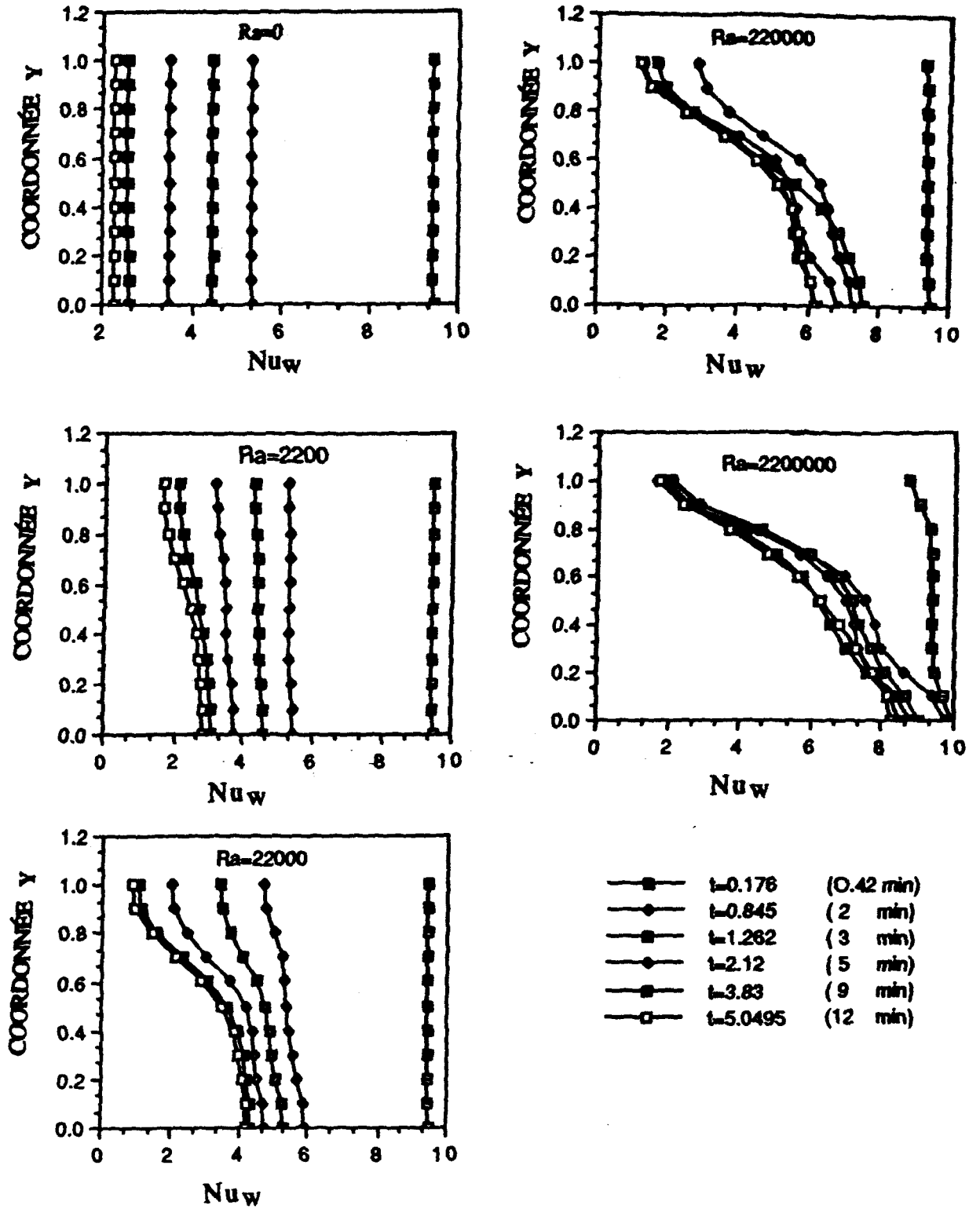


FIGURE 3-8 NOMBRES DE NUSSELT À LA PAROI CHAUFFÉE

Le coefficient de transfert de chaleur local est défini par le nombre de Nusselt:

$$\text{Nu}_w = - \text{grad } \theta$$

On remarque initialement, lorsque le transfert de chaleur est dominé par la conduction, que le coefficient de transfert de chaleur local demeure uniforme. On observe également de petites déviations près des parois adiabatiques, c'est-à-dire aux endroits où le transfert de chaleur par convection naturelle commence à se manifester. Au fur et à mesure que le temps s'écoule, l'espace occupé par le métal en fusion se dilate, augmentant par le fait même la résistance thermique à travers la cavité. Cela se manifeste par une réduction graduelle du nombre de Nusselt.

La figure 3-9 illustre la variation du nombre de Nusselt moyen à la paroi chauffée en fonction du temps pour différents nombres de Rayleigh. Ce nombre est défini comme :

$$\overline{\text{Nu}} = \int_0^1 - \text{grad}(\theta) \, dy$$

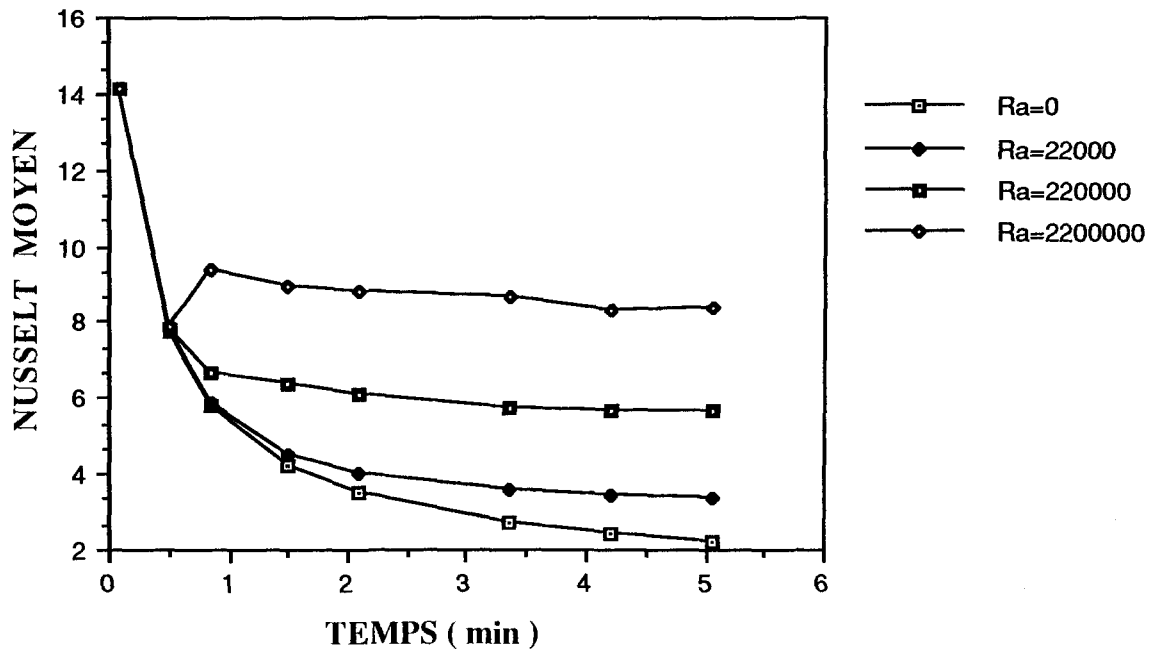


FIGURE 3-9 NOMBRE DE NUSSLET MOYEN À LA PAROI CHAUFFÉE

On observe que le taux de transfert de chaleur est amélioré lorsque le nombre de Rayleigh augmente. Tel que prévu, le régime de transfert de chaleur par la convection naturelle s'établit plus rapidement pour des nombres de Rayleigh plus grands. En faisant une régression linéaire de ces données numériques, on trouve la corrélation suivante pour les valeurs asymptotiques du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh :

$$Nu = 0.157(Ra)^{0.262}$$

Cette corrélation représente bien les résultats expérimentaux de Webb et Viskanta (1986)

3.3. COMPARAISON AVEC D'AUTRES RÉSULTATS

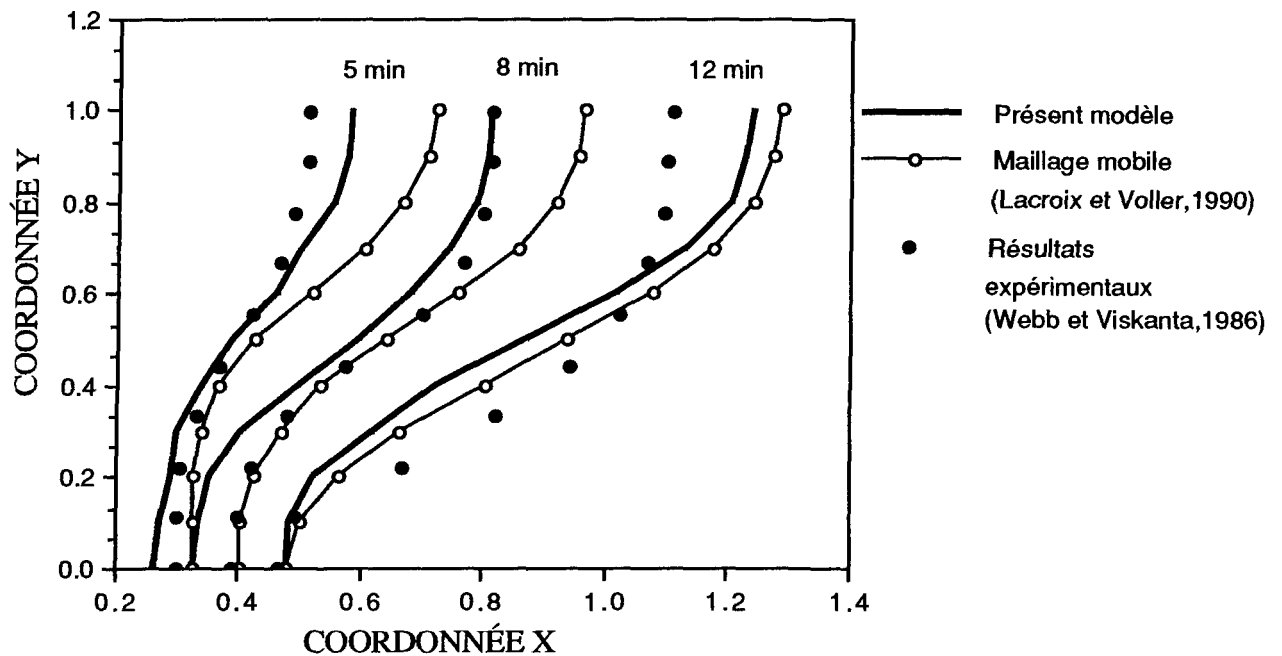


FIGURE 3-10 COMPARAISON DE L'INTERFACE SOLIDE-LIQUIDE AVEC UNE MÉTHODE DE RÉSEAU MOBILE ET DES RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

Les résultats numériques du présent modèle sont confrontés à d'autres résultats numériques et à des résultats expérimentaux. À titre d'exemple, la figure 3-10 compare la position et la forme de l'interface prédites avec le présent modèle à celles obtenues à l'aide d'une méthode avec maillage mobile (Lacroix et Voller, 1990) et aux résultats

expérimentaux de Webb et Viskanta (1986). Compte tenu des hypothèses sur lesquelles repose le modèle et compte tenu de l'incertitude des résultats expérimentaux, les prédictions numériques sont excellentes.

CONCLUSION

Une méthode numérique a été mise au point pour simuler le problème de changement de phase solide-liquide. Cette méthode permet de traiter le transfert de chaleur par conduction dans la phase solide puis par convection dans la phase liquide. En tout temps, on peut prédire:

- les champs d'écoulements et de température;
- les positions exactes de l'interface solide-liquide;
- les fractions volumiques de la phase solide et liquide;
- les taux de transfert de chaleur locaux à la paroi chauffée.

Cette méthode offre plusieurs avantages dont :

- (1). une mise en oeuvre plus simple que la méthode de maillage mobile (Lacroix et Voller, 1990).
- (2). la plus grande facilité de trouver exactement la position de l'interface solide-liquide fonction du temps et de déterminer la vitesse de déplacement de l'interface sans avoir besoin d'utiliser l'expression de la condition à l'interface solide-liquide (1.6), c'est-à-dire :

$$-k^* \text{grad } T^* = \Delta h^* \rho^* v_n^*$$

En comparant la présente méthode avec la méthode de réseau mobile (Lacroix et Voller, 1990) on arrive aux conclusions suivantes:

(1). si on utilise les mêmes conditions, la méthode de maillage fixe peut atteindre à peu près la même précision que la méthode de réseau mobile.

(2). le temps C.P.U est sensiblement le même que celui de la méthode de maillage mobile.

ANNEXE I

TRANSFORMATION DES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT
EN TERMES DE COURANT ET VORTICITÉ

Les équations exprimant la conservation de la masse et de la quantité de mouvement s'énoncent dans un repère cartésien et en variables primitives comme suit :

Masse :

$$\partial u^*/\partial x^* + \partial v^*/\partial y^* = 0 \quad (I.1)^*$$

Mouvement x :

$$\begin{aligned} \partial u^*/\partial t^* + \partial(u^*u^*)/\partial x^* + \partial(v^*u^*)/\partial y^* = \\ - \partial P^*/(\rho_0^* \partial x^*) + \gamma^*(\partial^2 u^*/\partial x^{*2} + \partial^2 u^*/\partial y^{*2}) + g^*\beta^*\sin\delta(T^*-T_0^*) \end{aligned} \quad (I.2)^{**}$$

Mouvement y :

$$\begin{aligned} \partial v^*/\partial t^* + \partial(u^*v^*)/\partial x^* + \partial(v^*v^*)/\partial y^* = \\ - \partial P^*/(\rho_0^* \partial y^*) + \gamma^*(\partial^2 v^*/\partial x^{*2} + \partial^2 v^*/\partial y^{*2}) + g^*\beta^*\cos\delta(T^*-T_0^*) \end{aligned} \quad (I.3)^{***}$$

* la même équation que (1.1) à la page 5.

** la même équation que (1.2) à la page 5.

*** la même équation que (1.3) à la page 5.

Bien qu'il existe différentes méthodes pour résoudre numériquement ce système d'équations en termes de variables primitives, c'est-à-dire, u^*, v^*, P^* , on peut le réduire à un système plus simple de deux équations différentielles pour le courant et la vorticité. Ainsi, en dérivant l'équation (I.2) par rapport à y :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^* \partial t^*} + u^* \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^* \partial x^*} + v^* \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} = -\frac{\partial^2 P^*}{(\rho_0^* \partial y^* \partial x^*)} + \\ \gamma^* (\frac{\partial^3 u^*}{\partial y^* (\partial x^*)^2} + \frac{\partial^3 u^*}{\partial y^{*3}}) + g^* \beta^* \sin \delta \cdot \frac{\partial (T^* - T_0^*)}{\partial y^*} \end{aligned} \quad (I.5)$$

et en dérivant l'équation (I.3) par rapport à x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^* \partial t^*} + u^* \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + v^* \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^* \partial y^*} = -\frac{\partial^2 P^*}{(\rho_0^* \partial x^* \partial y^*)} + \\ \gamma^* (\frac{\partial^3 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^3 v^*}{\partial x^* \partial y^{*2}}) + g^* \beta^* \cos \delta \cdot \frac{\partial (T^* - T_0^*)}{\partial x^*} \end{aligned} \quad (I.6)$$

et en soustrayant l'une de l'autre, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\frac{\partial v^*}{\partial x^*} - \frac{\partial u^*}{\partial y^*})}{\partial t^*} + u^* (\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} - \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^* \partial x^*}) + \\ v^* (\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^* \partial y^*} - \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}) = \gamma^* (\frac{\partial^3 v^*}{\partial x^{*3}} - \frac{\partial^3 u^*}{\partial y^* \partial x^{*2}}) + \\ \gamma^* (\frac{\partial^3 v^*}{\partial x^* \partial y^{*2}} - \frac{\partial^3 u^*}{\partial y^{*3}}) + g^* \beta^* (\cos \delta \cdot \frac{\partial (T^* - T_0^*)}{\partial x^*} - \\ \sin \delta \cdot \frac{\partial (T^* - T_0^*)}{\partial y^*}) \end{aligned} \quad (I.7)$$

Le terme $\frac{\partial v^*}{\partial x^*} - \frac{\partial u^*}{\partial y^*}$ représente la composante z du rotationnel du vecteur vitesse $(\nabla \times \vec{V})_z$. Cette équation est la vorticité ξ^* :

$$\xi^* = \frac{\partial v^*}{\partial x^*} - \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \quad (I.8)$$

Substituant la définition (I.8) dans l'équation (I.7), on obtient alors :

$$\frac{\partial \xi^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial \xi^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \xi^*}{\partial y^*} = \gamma^* (\frac{\partial^2 \xi^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \xi^*}{\partial y^{*2}}) + g^* \beta^* (\cos \delta \cdot \frac{\partial (T^* - T_0^*)}{\partial x^*} - \sin \delta \cdot \frac{\partial (T^* - T_0^*)}{\partial y^*}) \quad (I.9)$$

À l'aide de l'identité suivante :

$$\nabla \cdot (\vec{V} \xi) = \vec{V} \cdot (\nabla \xi) + \xi (\nabla \vec{V})$$

et de la continuité :

$$\nabla \vec{V} = 0$$

on a alors ;

$$\nabla \cdot (\vec{V} \xi) = \vec{V} \cdot (\nabla \xi)$$

Avec cette dernière expression, on peut exprimer l'équation (I.9) sous la forme dite conservative :

$$\frac{\partial \xi^*}{\partial t^*} + \frac{\partial (u^* \xi^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial (v^* \xi^*)}{\partial y^*} = \gamma^* (\frac{\partial^2 \xi^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \xi^*}{\partial y^{*2}}) + g^* \beta^* (\cos \delta \cdot \frac{\partial (T^* - T_0^*)}{\partial x^*} - \sin \delta \cdot \frac{\partial (T^* - T_0^*)}{\partial y^*}) \quad (I.10)$$

Par ailleurs la fonction de courant est défini comme :

$$u^* = \frac{\partial \psi^*}{\partial y^*} \quad , \quad v^* = - \frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} \quad (I.11)$$

Alors de la définition (I.8) on tire:

$$\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial y^{*2}} = - \xi^* \quad (I.12)$$

Le système de trois équations (I.1 à I.3) est maintenant réduit à un système de deux équations (I.10 et I.12) où la pression n'apparaît plus explicitement. La solution de ce nouveau système permet d'établir le champ de vitesses u et v .

ANNEXE II

INTÉGRATION NUMÉRIQUE DE L'ÉQUATION
GÉNÉRALE DE TRANSFERT (2.1)

On peut écrire l'équation générale de transfert (2.1) sous la forme :

$$\partial(\rho\phi)/\partial t + \partial J_x/\partial x + \partial J_y/\partial y = S \quad (\text{II.1})$$

où J_x et J_y sont les flux totaux de la convection et de la diffusion qui traversent l'interface entre deux noeuds comme à la figure A-1. On définit:

$$\begin{aligned} J_x &= u\Phi - \Gamma(\partial\Phi/\partial x) \\ J_y &= v\Phi - \Gamma(\partial\Phi/\partial y) \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

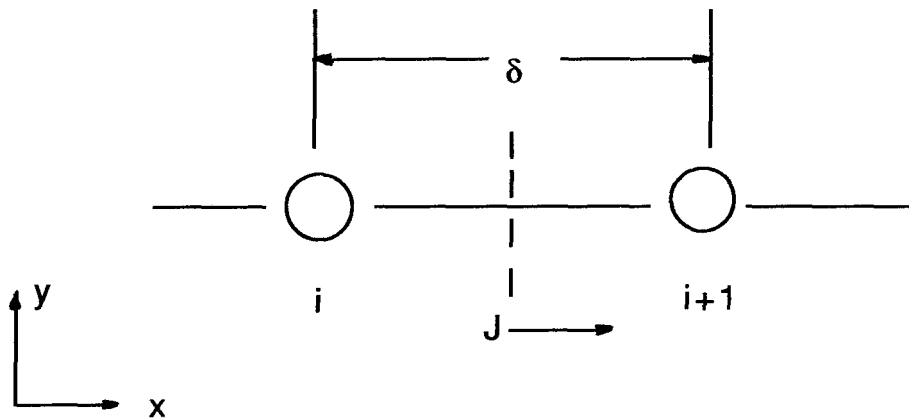


FIGURE A-1. DÉFINITION DU FLUX TOTAL ENTRE DEUX NOEUDS

En intégrant l'équation II.1 autour du volume de contrôle illustré à la figure 2-1*, on obtient :

$$(\rho_p \Phi_p - \rho_p^0 \Phi_p^0) \Delta x \Delta y / \Delta t + (J_e - J_w) + (J_n - J_s) = \int_w \int_s S \, dx dy \quad (\text{II.3})$$

où

ρ_p^0, Φ_p^0 sont les valeurs de ρ_p et Φ_p au temps précédent.

et où

$$\begin{aligned} J_e &= \int_e J_x dy & , & & J_n &= \int_n J_y dx \\ J_w &= \int_w J_x dy & , & & J_s &= \int_s J_y dx \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

De plus, l'intégration de l'équation $(\partial u/\partial x) + (\partial v/\partial y) = 0$ autour du volume de contrôle mène à:

$$(F_e - F_w) + (F_n - F_s) = 0 \quad (\text{II.5})$$

où F_e, F_w, F_n, F_s sont les rapports des flux de masse passant par les surfaces du volume de contrôle :

$$\begin{aligned} F_e &= (\rho u)_w \Delta y & F_w &= (\rho u)_w \Delta y \\ F_n &= (\rho v)_n \Delta x & F_s &= (\rho v)_s \Delta x \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

En multipliant l'équation (II.5) par Φ_p , on obtient :

$$(F_e - F_w)\Phi_p + (F_n - F_s)\Phi_p = 0 \quad (\text{II.7})$$

puis en soustrayant l'équation (II.7) de l'équation (II.3), on obtient :

$$\begin{aligned} (\rho \Phi_p - \rho_e \Phi_p^0) \Delta x \Delta y / \Delta t + (J_e - F_e \Phi_p) - (J_w - F_w \Phi_p) + (J_n - F_n \Phi_p) - \\ (J_s - F_s \Phi_p) = \int_w \int_s S \, dx dy \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

Selon Patankar (Patankar, 1980), on définit :

$$\begin{aligned} J_e - F_e \Phi_p &= A_E (\Phi_p - \Phi_E) \\ J_w - F_w \Phi_p &= A_W (\Phi_w - \Phi_p) \\ J_n - F_n \Phi_p &= A_N (\Phi_p - \Phi_N) \\ J_s - F_s \Phi_p &= A_S (\Phi_S - \Phi_p) \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

$$\begin{aligned}
\text{où } A_E^\Phi &= D_e \ll 0, (1 - 0.1 |F_e/D_e|)^5 \gg^* + \ll -F_e, 0 \gg \\
A_W^\Phi &= D_w \ll 0, (1 - 0.1 |F_w/D_w|)^5 \gg + \ll F_w, 0 \gg \\
A_N^\Phi &= D_n \ll 0, (1 - 0.1 |F_n/D_n|)^5 \gg + \ll -F_n, 0 \gg \\
A_S^\Phi &= D_s \ll 0, (1 - 0.1 |F_s/D_s|)^5 \gg + \ll F_s, 0 \gg \quad (\text{II.10})
\end{aligned}$$

$(1 - 0.1 |F_i/D_i|)^5$ est une fonction de pondération des termes de convection vis-à-vis les termes de diffusion qui permet de stabiliser le schéma numérique (Patankar, 1980). De plus, on définit:

$$\begin{aligned}
D_e &= \Gamma \Delta y / (\delta x)_e & , & & D_w &= \Gamma \Delta y / (\delta x)_w \\
D_n &= \Gamma \Delta x / (\delta y)_n & , & & D_s &= \Gamma \Delta x / (\delta y)_s \quad (\text{II.11})
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
A_P^{\Phi^0} &= \Delta x \Delta y / \Delta t \\
A_P^\Phi &= A_E + A_W + A_N + A_S + A_P^{\Phi^0} \quad (\text{II.12})
\end{aligned}$$

Regroupant les termes, l'équation générale des différences finies devient:

$$A_P^\Phi \Phi_P = A_E^\Phi \Phi_E + A_W^\Phi \Phi_W + A_N^\Phi \Phi_N + A_S^\Phi \Phi_S + A_P^{\Phi^0} \Phi_P^0 + \iint S \, dx dy \quad (\text{II.13})$$

* définition «A ,B» : choix de la plus grande valeur entre A et B.

Pour les équations du courant , de vorticité et d'énergie, les coefficients de l'équation (II.1) sont définis dans le tableau A.1 .

TABLEAU A.1 DÉFINITION DES COEFFICIENTS DE L'ÉQUATION (II.1) POUR
LE COURANT, LA VORTICITÉ ET LA TEMPÉRATURE

FONCTION	D_i	F_i	D_j	F_j	A
courant ψ					$\Delta y / (\delta x)_i \quad \Delta x / (\delta y)_j$
vorticité ξ	$Pr \Delta y / (\delta x)_i$	$u_i \Delta y$	$Pr \Delta x / (\delta y)_j$	$v_j \Delta x$	$D_k \ll 0, (1-0.1 F_k / D_k)^5 \gg + \ll \pm F_k^*, 0 \gg$
température θ_l	$\Delta y / (\delta x)_i$	$u_i \Delta y$	$\Delta x / (\delta y)_j$	$v_j \Delta x$	$D_k \ll 0, (1-0.1 F_k / D_k)^5 \gg + \ll \pm F_k, 0 \gg$
température θ_s					$\Delta y / (\delta x)_i \quad \Delta x / (\delta y)_j$

où $i = e, w, j = n, s, k = e, w, n, s$.

* Si $k = e, n$, on utilise $-F_k$ et si $k = w, s$, on utilise $+F_k$.

θ_l est la température du liquide.

θ_s est la température du liquide.

BIBLIOGRAPHIE

Bonacina, C. et Comini, G. et Fasans, A. et Primiceris, M. "Numerical solution of phase-change problem", Int. J. Heat Mass Transfer, Vol ,16, pp. 1825-1832, (1973).

Bonnerot, R. et Janet, P. "Numerical computation of the free boundary for the two-dimensional Stefan problems by space-time finite elements", J. Comput. phys ., Vol 25, pp. 163-181, (1977).

Carslaw, H. S. et Jaeger, J. C. "Conduction of heat in solid". Clarendon Press, Oxford (1959).

Comini, G. et S. del Guidice; Lewis, R. et Zienkiewicz, O. "Finite element solution of nonlinear heat conduction problems with special reference to phase change", Int. J. Numer. Methods Eng, vol 8, pp. 613-624, (1974) .

Crank. J, "Numerical methods in heat tranfer", Chap. 9, John Wiley, (1981).

Crank, J. "Free and moving boun+dary problems", Clarendon Press, Oxford, (1984).

Furzeland, R.M. "A comparative study of numerical methods for moving boundary problems", J. Inst. Maths. Appl. 26, 411-429 (1980).

Gau, C. et Viskanta, R. " Melting and solidification of a pure metal on a vertical wall" , J. Heat Transfer, vol 108, pp 174-181, (1986)

Hsiao, J.S. et Chung, B.T.F. "An efficient algorithm for finite element solution to two-dimensional heat transfer with melting and

freezing " , ASME paper 84-HT-2. Presented at the 22d National Heat Transfer Conference, Niagara Falls, August, (1984) .

Lacroix, M. et Voller. V.R. "Finite difference solutions of solidification phase change problems : transformed vs fixed grids ", Numer. Heat Transfer, Part B, vol. 17, pp. 25-41, (1990).

Lazaridis, A. "Numerical solution of the multidimensional solidification (or melting) problem " , Int. J. Heat Mass Transfer, Vol 13, pp. 1459-1477, (1970).

Lynch, D. et O'neil, K. "Continuously deforming finite elements for the solution of parabolic problems with and without phase change ", Int. J. Numer. Methods Eng. , Vol 17, pp. 81-96, (1981).

Patankar, S.V. "Numerical heat transfer and fluid flow ," Hemisphere, Washington, D. C (1980).

Rolph III, W. et Bathe, K-J. "An efficient algorithm for analysis of nonlinear heat transfer with phase changes ", Int. J. Numer. Methods Eng ., Vol 18, pp. 119-134, (1982).

Rubenstein, L. "The Stefan problem, transitions in mathematics" Monograph No 27, American Mathematical Society (1971).

Webb, B.W. et Viskanta, R. "Analysis of heat transfer during melting of a pure metal from an isothermal vertical wall ", Numer. Heat Transfer, Vol 9, pp. 539-558, (1986).

Yoo, J. et Rubinsky, B. "Numerical computation using finite element for the moving interface in heat transfer problems with phase change transformation ", Numer. Heat Transfer, vol 6, pp. 209-222, (1983).